تاریخ :	وقت : دقیقه
نام و نام خانوادگی :	تعداد سوالات: ۷۰
موضوع ریاضی ۳(× فصل ششم : حد و پیوستگی، × دوازدهم:فصل سوم: حد)	آموزشگاه پرسا

سریال ۱۱۰۵۸۸۴

۱.گزینه ۱

$$\lim_{x\to ۲^+} f(x) - \lim_{x\to ۲^-} f(x) = ۳ \Rightarrow (۲+a)[۲^+] - (۲+a)[۲^-] = ۳$$
$$\Rightarrow (۲+a)(۲) - (۲+a)(۱) = ۳ \Rightarrow ۴ + ۲a - ۲ - a = ۳ \Rightarrow a = ۱$$

۲.گزینه ۳

شرط پوسیدگی تابع f در $x=a$ این است که حد راست و حد چپ و مقدار تابع در موجود و متناهی و باهم برابر باشند.

$$\lim_{x\to ۲} f(x) = \lim_{x\to ۲} \frac{x-\sqrt{۲x}}{۲-x} = \frac{۰}{۰} \xrightarrow{Hop} \lim_{x\to ۲} \frac{۱-\frac{۱(۲)}{۲\sqrt{۲x}}}{-۱} = -\frac{۱}{۲}$$

پس $f(۲) = a = -\frac{۱}{۲}$ است

۳.گزینه ۴ ابتدا تابع داده شده را ساده می‌کنیم.

$$f(x) = \begin{cases} x-۱ & x>۱ \text{ یا } x<-۱ \\ ۲x & -۱\le x\le ۱ \end{cases}$$

حد راست و حد چپ و مقدار تابع را باید در $x=۱$ و $x=-۱$ بدست آوریم.

$$x=۱ \ : \ \begin{cases} \lim_{x\to ۱^+} f(x) = \lim_{x\to ۱^+} (x-۱) = ۱-۱ = ۰ \\ \lim_{x\to ۱^-} f(x) = \lim_{x\to ۱^-} f(x) = ۲(۱) = ۲ \\ f(۱) = ۲(۱) = ۲ \end{cases} \Rightarrow \text{تابع در } x=۱ \text{ ناپیوسته است.}$$

$$x=-۱ \ : \ \begin{cases} \lim_{x\to (-۱)^+} f(x) = \lim_{x\to (-۱)^+} ۲x = ۲(-۱) = -۲ \\ \lim_{x\to (-۱)^-} f(x) = \lim_{x\to (-۱)^-} (x-۱) = -۱-۱ = -۲ \\ f(-۱) = ۲(-۱) = -۲ \end{cases} \Rightarrow \text{تابع در } x=-۱ \text{ پیوسته است.}$$

۴.گزینه ۴

کافی است حد راست و حد چپ و مقدار تابع را در $x=۱$ بدست آوریم.

$$\lim_{x\to ۱^+} f(x) = \lim_{x\to ۱^+} \frac{|\overbrace{(x+۲)(x-۱)}^{+}|}{x-۱} = \lim_{x\to ۱^+} \frac{(x+۲)(x-۱)}{(x-۱)} = ۳$$

$$\lim_{x\to ۱^-} f(x) = \lim_{x\to ۱^-} \frac{|\overbrace{(x+۲)(x-۱)}^{-}|}{x-۱} = \lim_{x\to ۱^-} \frac{-(x+۲)(x-۱)}{(x-۱)} = -۳$$

این تابع در $x=۱$ پیوسته نمی‌باشد.

۵.گزینه ۴

$$\lim_{x\to ۱} \frac{\sin \pi x}{۱-x} - g(x) = ۰ \to \lim_{x\to ۱} \frac{\sin \pi x}{۱-x} = \lim_{x\to ۱} g(x)$$

$$\lim_{x\to ۱} \frac{\sin \pi x}{۱-x} = \frac{۰}{۰} \xrightarrow{HOP} \lim_{x\to ۱} \frac{\pi \cos \pi x}{-۱} = \pi \Rightarrow \lim_{x\to ۱} \frac{\sin \pi x}{۱-x} = \lim_{x\to ۱} g(x) = \pi$$

طبق قضیه‌ی فشردگی $\lim_{x \to ۱} f(x) = \pi$ **می‌باشد.**

صفحه ۲

۶.گزینه ۴

کافی است که حد راست و حد چپ و مقدار تابع را در $x=\frac{\pi}{۲}$ بدست آوریم.

$$\left.\begin{aligned}&\lim_{x\to(\frac{\pi}{۲})^+} f(x)=\lim_{x\to(\frac{\pi}{۲})^+}(-\cos ۲x)=۱\\&\lim_{x\to(\frac{\pi}{۲})^-} f(x)=\lim_{x\to(\frac{\pi}{۲})^-}(\sin x+۲\cos x)=۱\\&f(\frac{\pi}{۲})=۱\end{aligned}\right\}\Rightarrow$$ تابع در $x=\frac{\pi}{۲}$ پیوسته است.

۷.گزینه ۴ می‌دانیم: $\boxed{\lim_{u\to ۰}(۱-\cos u)\sim\frac{u^۲}{۲}\quad,\quad \lim_{u\to ۰}\sin u\sim u}$

$$\lim_{x\to ۰}\frac{۱-\cos ۲x}{x\sin x}=\frac{۰}{۰}\Rightarrow\lim_{x\to ۰}\frac{\frac{(۲x)^۲}{۲}}{x\times x}=\lim_{x\to ۰}\frac{۴x^۲}{۲x^۲}=\frac{۴}{۲}=۲$$

۸.گزینه ۴ برای پیوستگی f در بازه ی $[\frac{\pi}{۴},۲\pi]$ تنها کافی است شرایط پیوستگی را در نقطه‌ی مرزی $x=\frac{۳\pi}{۴}$ اعمال کنیم.

(تساوی حد راست و حد چپ و مقدار تابع)

$$\left.\begin{aligned}&\lim_{x\to(\frac{۳\pi}{۴})^+} f(x)=\lim_{x\to(\frac{۳\pi}{۴})^+}\cos(x+\frac{\pi}{۴})=\cos\pi=-۱\\&\lim_{x\to(\frac{۳\pi}{۴})^-} f(x)=\lim_{x\to(\frac{۳\pi}{۴})^-}a\sin ۲x=a\sin\frac{۳\pi}{۲}=-a\\&f(\frac{۳\pi}{۴})=\cos(\frac{۳\pi}{۴}+\frac{\pi}{۴})=\cos\pi=-۱\end{aligned}\right\}\Rightarrow -a=-۱\Rightarrow a=۱$$

۹.گزینه ۱ کافی است شرط پیوستگی (تساوی حد راست و حد چپ و مقدار تابع) را در $x=۲$ اعمال کنیم.

$$\left.\begin{aligned}&\lim_{x\to ۲^+} f(x)=\lim_{x\to ۲^+}\frac{x^۳-۳x^۲+۴}{x-۲}=\frac{۰}{۰}\xrightarrow{HOP}\lim_{x\to ۲^+}\frac{۳x^۲-۶x}{۱}=۱۲-۱۲=۰\\&\lim_{x\to ۲^-} f(x)=\lim_{x\to ۲^-}(۲x+b)=۴+b\\&f(۲)=۴+b\end{aligned}\right\}\Rightarrow ۰=۴+b\Rightarrow b=$$
-۴

۱۰.گزینه ۴

$$\left.\begin{aligned}&\lim_{x\to ۱^+}\frac{۲x^۲-x-۱}{\underbrace{|x-۱|}_{+}}=\lim_{x\to ۱^+}\frac{۲x^۲-x-۱}{x-۱}=\frac{۰}{۰}\xrightarrow{HOP}\lim_{x\to ۱^+}\frac{۴x-۱}{۱}=۳\\&\lim_{x\to ۱^-}\frac{۲x^۲-x-۱}{\underbrace{|x-۱|}_{-}}=\lim_{x\to ۱^-}\frac{۲x^۲-x-۱}{-(x-۱)}=\frac{۰}{۰}\xrightarrow{HOP}\lim_{x\to ۱^-}\frac{۴x-۱}{-۱}=-۳\end{aligned}\right\}\Rightarrow|-۳-(۳)|=|-۶|=۶$$

صفحه ۳

۱۱.گزینه ۲

$$\lim_{x\to ۳^-}\frac{(۳-[x])\sqrt{x^۲-۶x+۹}}{x-۳}=\lim_{x\to ۳^-}\frac{(۳-\overset{\overset{۲}{\uparrow}}{[۳^-]})\sqrt{(x-۳)^۲}}{x-۳}$$

$$=\lim_{x\to ۳^-}\frac{\overbrace{|x-۳|}^{-}}{x-۳}=\lim_{x\to ۳^-}\frac{-(x-۳)}{x-۳}=-۱$$

۱۲.گزینه ۲

$$\lim_{x\to ۱^+}f(x)=۳\,,\quad \lim_{x\to(-۱)^-}f(x)=۱\Rightarrow \lim_{x\to ۱^+}f(x)-\lim_{x\to(-۱)^-}f(x)=۳-۱=۲$$

۱۳.گزینه ۱

$$\lim_{x\to ۱^-}f(x)=۱$$

تنها گزینه‌ای که جواب آن عدد یک می‌شود گزینه‌ی اول است زیرا برای محاسبه‌ی $f(۰)$ باید سراغ ضابطه‌ی پایین برویم که جواب یک می‌شود.

۱۴.گزینه ۴

حد راست و حد چپ و مقدار تابع در $x=۳$ باید با هم برابر باشند.

$$\left.\begin{array}{l}\lim_{x\to ۳^+}f(x)=\lim_{x\to ۳^+}(ax+۳)=۳a+۳\\ \lim_{x\to ۳^-}f(x)=\lim_{x\to ۳^-}(x+۳)[x]=۶(۲)=۱۲\\ f(۳)=۳a+۳\end{array}\right\}\Rightarrow ۳a+۳=۱۲\Rightarrow ۳a=۹\Rightarrow a=۳$$

۱۵.گزینه ۳

$$\lim_{x\to(\frac{\pi}{۲})^+}\frac{\tan x}{\cot x}=\lim_{x\to(\frac{\pi}{۲})^+}\frac{\tan x}{\frac{۱}{\tan x}}=\lim_{x\to(\frac{\pi}{۲})^+}\tan^۲ x=(-\infty)^۲=+\infty$$

$(\frac{\pi}{۲})^+$ در ناحیه‌ی دوم است و در این ناحیه تانژانت، منفی است.

۱۶.گزینه ۳

برای این که تابع f در نقطه ی مرزی $x=-۱$ پیوسته باشد، باید حد راست، حد چپ و مقدار تابع در این نقطه برابر باشند.

امکان ندارد

$$\left.\begin{array}{l}\lim_{x\to(-۱)^+}f(x)=\lim_{x\to(-۱)^+}\frac{۱}{x+a}=\frac{۱}{-۱+a}=\frac{-۱}{۱-a}\\ \lim_{x\to(-۱)^-}f(x)=\lim_{x\to(-۱)^-}(x^۲+ax)=(-۱)^۲+a(-۱)=۱-a\\ f(-۱)=\frac{۱}{-۱+a}=\frac{-۱}{۱-a}\end{array}\right\}\Rightarrow\frac{-۱}{۱-a}=۱-a\Rightarrow(۱-a)^۲=-۱$$

$\Rightarrow$

۱۷.گزینه ۱ برای پیوستگی تابع f در بازه‌ی $[۰,۲\pi]$، تنها کافی است شرایط پیوستگی تابع را در نقطه‌ی مرزی به طول $x=\frac{\pi}{۴}$ اعمال کنیم. (تساوی حد راست و حد چپ و مقدار تابع)

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{۴}^+} f(x)=\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{۴}^+}\sqrt{۲}\cos ۳x=\sqrt{۲}\cos\frac{۳\pi}{۴}=\sqrt{۲}(-\frac{\sqrt{۲}}{۲})=-۱\\ \lim\limits_{x\to \frac{\pi}{۴}^-} f(x)=\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{۴}^-}(a+\sin^۲ x)=a+\sin^۲\frac{\pi}{۴}=a+\left(\frac{\sqrt{۲}}{۲}\right)^۲=a+\frac{۱}{۲}\\ f(\frac{\pi}{۴})=\sqrt{۲}\cos\frac{۳\pi}{۴}=\sqrt{۲}(-\frac{\sqrt{۲}}{۲})=-۱\end{array}\right\}\Rightarrow a+\frac{۱}{۲}=-۱\Rightarrow a=-\frac{۳}{۲}$$

صفحه ۴

۱۸.گزینه ۲ چون تابع، بر روی مجموعه اعداد حقیقی بزرگ‌تر از یک پیوسته است پس حتماً در $x=۶$ نیز باید پیوسته باشد. یعنی حد راست و حد چپ و مقدار تابع در $x=۶$ باید با هم برابر باشند.

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to ۶^+} f(x)=\lim\limits_{x\to ۶^+}(a+\cos^۲\frac{\pi x}{۳۶})=a+\cos^۲\frac{\pi}{۶}=a+\frac{۳}{۴}\\ \lim\limits_{x\to ۶^-} f(x)=\lim\limits_{x\to ۶^-}\sin\frac{\pi}{x}=\sin\frac{\pi}{۶}=\frac{۱}{۲}\\ f(۶)=\sin\frac{\pi}{۶}=\frac{۱}{۲}\end{array}\right\}\Rightarrow a+\frac{۳}{۴}=\frac{۱}{۲}\Rightarrow a=\frac{-۱}{۴}$$

۱۹.گزینه ۴

روش اول:

$$\lim_{x\to ۰}\frac{\cos x-\cos ۲x}{x^۲}=\frac{۰}{۰}\xrightarrow{HOP}\lim_{x\to ۰}\frac{-\sin x+۲\sin ۲x}{۲x}=\frac{۰}{۰}$$

$$\xrightarrow{HOP}\lim_{x\to ۰}\frac{-\cos x+۴\cos ۲x}{۲}=\frac{-۱+۴(۱)}{۲}=\frac{۳}{۲}$$

روش دوم: می‌دانیم: $\boxed{\lim\limits_{u\to ۰}\cos u\sim ۱-\frac{u^۲}{۲}}$

$$\lim_{x\to ۰}\frac{\cos x-\cos ۲x}{x^۲}=\lim_{x\to ۰}\frac{۱-\frac{x^۲}{۲}-(۱-\frac{۴x^۲}{۲})}{x^۲}=\lim_{x\to ۰}\frac{\frac{۳}{۲}x^۲}{x^۲}=\frac{۳}{۲}$$

۲۰.گزینه ۱ چون هر دو ضابطه پیوسته هستند، برای آنکه تابع دو ضابطه‌ای f روی R (مجموعه‌ی اعداد حقیقی) پیوسته باشد، کافی است شرایط پیوستگی تابع را تنها در نقطه‌ی مرزی آن، یعنی $x=۲$ برقرار نماییم.

$$\begin{cases}\text{حد راست}=\lim\limits_{x\to ۲^+} f(x)=\lim\limits_{x\to ۲^+}(x^۲+ax-۵)=۴+۲a-۵=۲a-۱\\ \text{حد چپ}=\lim\limits_{x\to ۲^-} f(x)=f(۲)=\lim\limits_{x\to ۲^-}(ax-۱)=۲a-۱\end{cases}$$

چون به ازای هر مقدار a، حد راست و حد چپ و مقدار تابع در $x=۲$ با هم برابر هستند، پس نتیجه می‌گیریم که به ازای هر مقدار حقیقی a، تابع f روی مجموعه‌ی اعداد حقیقی پیوسته است.

۲۱.گزینه ۲

$$\lim_{x\to ۱^+} f(x)=\lim_{x\to ۱^+}\left(x^۲+۲a\right)=۱+۲a\quad,\quad\lim_{x\to ۱^-} f(x)=\lim_{x\to ۱^-}(ax-۱)=a-۱$$

$$\lim_{x\to ۱^+} f(x)-\lim_{x\to ۱^-} f(x)=-۱\Rightarrow(۱+۲a)-(a-۱)=-۱\Rightarrow a=-۱-۲=-۳$$

۲۲.گزینه ۴ شرط آنکه تابع f در $x=a$ پیوسته باشد آن است که حد راست و حد چپ و مقدار تابع در $x=a$ با هم برابر باشند.

$$\lim_{x\to ۱^+} f(x)=\lim_{x\to ۱^+}\frac{۲x^۲-x-۱}{x-۱}=\frac{۰}{۰}\to\lim_{x\to ۱^+}\frac{\cancel{(x-۱)}(۲x+۱)}{(x-۱)}=۳$$

$$\lim_{x\to ۱^-} f(x)=\lim_{x\to ۱^-}(ax-a+۳)=a-a+۳=۳$$

$$f(۱)=a-a+۳=۳$$

چون حد راست و حد چپ و مقدار تابع با هم برابر هستند ، پس تابع به ازای هر مقدار a در $x=۱$ پیوسته است.

۲۳.گزینه ۴

$$\lim_{x\to(-۲)^-} f(x)=\lim_{x\to(-۲)^+}\frac{۱}{f(x)}\to ۴+a=\frac{۱}{-۶+۴}\to ۴+a=\frac{-۱}{۲}$$

$$\to ۸+۲a=-۱\to ۲a=-۹\to a=-\frac{۹}{۲}=-۴/۵$$

۲۴.گزینه ۱ ابتدا $f(x)+g(x)$ را تشکیل می‌دهیم و سپس شرط پیوستگی (یعنی تساوی حد راست و حد چپ و مقدار تابع) را در $x=$ ۱ اعمال می‌کنیم.

صفحه ۵

$$f(x)+g(x)=\begin{cases} ۲x+a+۱ & x<۱ \\ \frac{a}{x+۱}+۱ & x\geq ۱\end{cases}$$

حد راست: $\lim\limits_{x\to ۱^+} f(x)=\lim\limits_{x\to ۱^+}(\frac{a}{x+۱}+۱)=\frac{a}{۲}+۱$

حد چپ: $\lim\limits_{x\to ۱^-} f(x)=\lim\limits_{x\to ۱^-}(۲x+a+۱)=۲+a+۱=a+۳$

مقدار تابع: $f(۱)=\frac{a}{۲}+۱$

پس: $\frac{a}{۲}+۱=a+۳\to a+۲=۲a+۶\to a=-۴$

۲۵.گزینه ۲ $\left[۲^-\right]$ برابر یک می‌باشد بنابراین حد داده شده به این صورت درمی‌آید.

$$\lim_{x\to ۲^-}\left(\frac{x+۲}{x^۲-۲x}+\frac{۲}{۲-x}\right)=\lim_{x\to ۲^-}\left(\frac{x+۲}{x(x-۲)}-\frac{۲}{(x-۲)}\right)$$

$$\lim_{x\to ۲^-}\left(\frac{x+۲-۲x}{x(x-۲)}\right)=\lim_{x\to ۲^-}\left(\frac{-x+۲}{x(x-۲)}\right)=\lim_{x\to ۲^-}\left(\frac{-(x-۲)}{x(x-۲)}\right)=\frac{-۱}{۲}$$

۲۶.گزینه ۱ کافی است شرط پیوستگی یعنی تساوی حدود راست و چپ و مقدار تابع با هم را در $x=۱$ بررسی کنیم.

$$\begin{cases}\lim\limits_{x\to ۱^+} f(x)=\lim\limits_{x\to ۱^+}(-x^۲+۴)=-۱+۴=۳\\ \lim\limits_{x\to ۱^-} f(x)=\lim\limits_{x\to ۱^-}(ax+۵x-a)=a+۵-a=۵\\ f(۱)=-۱+۴=۳\end{cases}$$

تابع f در $x=۱$ پیوسته نمی‌باشد. بنابراین به ازای هیچ مقداری برای a تابع f در بازه‌ی $[-۲,۲]$ پیوسته نمی‌باشد.

۲۷.گزینه ۴ کافی است شرط پیوستگی را در $x=\frac{\pi}{۲}$ بررسی کنید (تساوی حد راست و چپ و مقدار تابع در $x=\frac{\pi}{۲}$)

$$\begin{cases}\lim\limits_{x\to (\frac{\pi}{۲})^+} f(x)=\lim\limits_{x\to (\frac{\pi}{۲})^+} b\cos ۲x=b\cos\pi=-b\\ \lim\limits_{x\to (\frac{\pi}{۲})^-} f(x)=\lim\limits_{x\to (\frac{\pi}{۲})^-}(a+\sin ۳x)=a+\sin\frac{۳\pi}{۲}=a-۱\\ f(\frac{\pi}{۲})=۲\end{cases}$$

پس: $-b=۲\to b=-۲\ ,\ a-۱=۲\to a=۳\to a-b=۵$

۲۸.گزینه ۲ ضمناً برای محاسبه‌ی حد راست و رسیدن به مبهم $\frac{۰}{۰}$ باید بین دو کسر مخرج مشترک گرفت.

$$\lim_{x\to -۱}(\frac{۲}{x^۲-۱}-\frac{x}{x+۱})=\lim_{x\to -۱}(\frac{۲}{(x+۱)(x-۱)}-\frac{x}{x+۱})$$

$$=\lim_{x\to -۱}(\frac{۲-x(x-۱)}{(x+۱)(x-۱)})=\lim_{x\to -۱}(\frac{۲-x^۲+x}{x^۲-۱})=\frac{۰}{۰}\to\lim\frac{-(x-۲)\cancel{(x+۱)}}{(x-۱)\cancel{(x+۱)}}=\frac{۳}{-۲}$$

۲۹.گزینه ۱ برای رسیدن به مبهم شناخته شده $\div$ باید بین دو کسر مخرج مشترک گرفت.

$$\lim_{x\to ۲}\frac{۶}{x^۲-۲x}-\frac{x+۱}{x-۲}=\lim_{x\to ۲}\frac{۶-(x+۱)x}{x(x-۲)}=\lim_{x\to ۲}\frac{-x^۲-x+۶}{x(x-۲)}$$

$$\lim_{x\to ۲}\frac{-\cancel{(x-۲)}(x+۳)}{\cancel{(x-۲)}x}=-\frac{۵}{۲}$$

۳۰.گزینه ۱ کافی است شرط پیوستگی (تساوی حد راست و حد چپ و مقدار تابع) را در $x=۲$ اعمال کنیم

صفحه ۶

$$\lim_{x\to ۲^+}\frac{x^۳-۳x^۲+۴}{x-۲}=\frac{۰}{۰}$$

برای استخراج عامل صفرشونده می‌توان صورت را برای عامل صفرشونده $x-۲$ تقسیم نمود:

$$\begin{array}{r|l} x^۳-۳x^۲+۴ & x-۲ \\ \hline & x^۲-x-۲ \\ ۰ & \end{array}$$

$$\left.\begin{array}{l}\lim_{x\to ۲^+}\frac{\cancel{(x-۲)}(x^۲-x-۲)}{\cancel{(x-۲)}}=۰\\ \lim_{x\to ۲^-}(۲x+b)=۴+b\end{array}\right\}\quad ۰=۴+b\to b=-۴$$

۳۱.گزینه ۲

$$\lim_{x\to ۲^+}\frac{۲-\sqrt[۳]{x+۶}}{\sqrt{x^۲-۴x+۴}}=\frac{۰}{۰}$$

$$\lim_{x\to ۲^+}\frac{۲-\sqrt[۳]{x+۶}}{\sqrt{x^۲-۴x+۴}}\times\frac{(۴+۲\sqrt[۳]{x+۶}+\sqrt[۳]{(x+۶)^۲})}{(۴+۲\sqrt[۳]{x+۶}+\sqrt[۳]{(x+۶)^۲})}$$

$$\lim_{x\to ۲^+}\frac{۸-x-۶}{\underbrace{\sqrt{(x-۲)^۲}}_{|x-۲|}(۴+۲\sqrt[۳]{x+۶}+\sqrt[۳]{(x+۶)^۲})}$$

$$\lim_{x\to ۲^+}\frac{\cancel{(۲-x)}}{\underbrace{(x-۲)}_{-\cancel{(۲-x)}}\ (۴+۲\sqrt[۳]{x+۶}+\sqrt[۳]{(x+۶)^۲})}=-\frac{۱}{۱۲}$$

۳۲.گزینه ۴ **می‌توان برای رفع ابهام از روابط مثلثاتی استفاده نمود. بدین منظور مخرج کسر را در مزدوج ضرب کنید:**

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{۲}^+}\frac{\cos x}{۱-\sin x}\times\frac{۱+\sin x}{۱+\sin x}=\lim_{x\to\frac{\pi}{۲}^+}\frac{\cos x(۱+\sin x)}{۱-\sin^۲ x}$$

$$=\lim_{x\to\frac{\pi}{۲}^+}=\frac{\cancel{\cos}\,x(۱+\sin x)}{\cancel{\cos^۲}\,x}=\lim_{x\to\frac{\pi}{۲}^+}\frac{۱+\sin x}{\cos x}=\frac{۲}{۰^-}=-\infty$$

۳۳.گزینه ۲

$$\lim_{x\to ۱}\frac{۱-\sqrt{x}}{۲-\sqrt{۵-x}}=\frac{۰}{۰}$$

برای رفع ابهام باید هم صورت هم مخرج را گویا نماییم:

$$\lim\frac{۱-\sqrt{x}}{۲-\sqrt{۵-x}}\times\frac{۱+\sqrt{x}}{۱+\sqrt{x}}\times\frac{۲+\sqrt{۵-x}}{۲+\sqrt{۵-x}}$$

$$\lim\frac{(۱-x)+(۲+\sqrt{۵-x})}{\underbrace{(۴-۵+x)}_{(x-۱)}(۱+\sqrt{x})}=\lim_{x\to ۱}\frac{-\cancel{(x-۱)}(۲+\sqrt{۵-x})}{\cancel{(x-۱)}(۱+\sqrt{x})}=\frac{-۴}{۲}=-۲$$

۳۴.گزینه ۱ **می‌توان با استفاده از روابط مثلثاتی عامل صفرشونده را استخراج و حذف کرد**

$$\lim_{x\to\frac{۳\pi}{۴}}\frac{۱+\cot x}{۱+\tan x}=\lim_{x\to\frac{۳\pi}{۴}}\frac{۱+\frac{\cos x}{\sin x}}{۱+\frac{\sin x}{\cos x}}=\lim_{x\to\frac{۳\pi}{۴}}\frac{\frac{\sin x+\cos x}{\sin x}}{\frac{\sin x+\cos x}{\cos x}}$$

صفحه ۷

$$\lim_{x\to\frac{۳\pi}{۴}}\frac{(\sin x+\cos x)\cos x}{(\sin x+\cos x)\sin x}=\lim_{x\to\frac{۳\pi}{۴}}\cot x=-۱$$

.۳۵گزینه ۴ ابتدا با جایگذاری می‌توان مبهم بودن کسر را شناسائی نمود. حال برای شناسائی عامل صفرشونده باید مخرج را گویا نمود:

$$\lim_{x\to-۳}\frac{ax+۳a}{۱-\sqrt{۵x+۱۶}}\times\frac{۱+\sqrt{۵x+۱۶}}{۱+\sqrt{۵x+۱۶}}=\lim\frac{a\,\cancel{(x+۳)}\,(۱+\sqrt{۵x+۱۶})}{\underbrace{۱-۵x-۱۶}_{-۵\,\cancel{(x+۳)}}}$$

$$=\frac{۲a}{-۵}=۲\ \to ۲a=-۱۰\to a=-۵$$

.۳۶گزینه ۳

$$\lim\frac{۳-\sqrt{۲x+۱}}{۲-\sqrt{x}}\times\frac{۳+\sqrt{۲x+۱}}{۳+\sqrt{۲x+۱}}\times\frac{۲\sqrt{x}}{۲+\sqrt{x}}$$

$$=\lim_{x\to۴}\frac{(۹-(۲x+۱))\overbrace{(۲+\sqrt{x})}^{(۴)}}{(۴-x)\underbrace{(۳+\sqrt{۲x+۱})}_{۶}}=\lim\frac{(-۲x+۸)(۴)}{(۴-x)(۶)}=\lim\frac{۲(۴-x)(۴)}{(۴-x)(۶)}=\frac{۴}{۳}$$

.۳۷گزینه ۱ باید کسر را در مزدوج صورت $\lim_{x\to-۲}\frac{x+\sqrt{۲x+۸}}{x+۲}=?$ ضرب نمائیم. باید توجه داشت که می‌توان در مخرج کسر عامل صفرشونده وجود دارد:

$$\lim_{x\to-۲}\frac{x^۲-(۲x+۸)}{(x+۲)\underbrace{(x-\sqrt{۲x+۸})}_{-۴}}=\lim\frac{x^۲-۲x-۸}{(x+۲)(-۴)}=\lim\frac{\cancel{(x+۲)}\,(x-۴)}{\cancel{(x+۲)}\,(-۴)}=\frac{۳}{۲}$$

.۳۸گزینه ۱

$$\lim_{x\to۲^+}f(x)-\lim_{x\to۲^-}f(x)=۳\Rightarrow(۲+a)[۲^+]-(۲+a)[۲^-]=۳$$
$$\Rightarrow(۲+a)(۲)-(۲+a)(۱)=۳\Rightarrow۴+۲a-۲-a=۳\Rightarrow a=۱$$

.۳۹گزینه ۱

$$\lim_{x\to\frac{۳\pi}{۴}}\frac{\tan^۲x-۱}{\cos۲x}=\lim_{x\to\frac{۳\pi}{۴}}\frac{\sin^۲x-\cos^۲x}{\cos^۲x(\cos^۲x-\sin^۲x)}=\lim_{x\to\frac{۳\pi}{۴}}\frac{-۱}{\cos^۲x}=\frac{-۱}{\frac{۱}{۲}}=-۲$$

توجه کنید $\tan\frac{۳\pi}{۴}=-۱$ می‌باشد.

.۴۰گزینه ۴

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{۳-\sqrt{x^۲+۵}}{ax^n+۴}\overset{\text{پرتوان}}{=\!=}\lim_{x\to+\infty}\frac{-\sqrt{x^۲}}{ax^n}=\lim_{x\to+\infty}\frac{-|\overbrace{x}^{+}|}{ax^n}=\lim_{x\to+\infty}\frac{-x}{ax^n}=\frac{۱}{۲}\Rightarrow\begin{cases}n=۱\\a=-۲\end{cases}$$

$$\text{پس}:\lim_{x\to۲}\frac{۳-\sqrt{x^۲+۵}}{-۲x+۴}=\frac{۰}{۰}\xrightarrow{HOP}\lim_{x\to۲}\frac{\frac{-۲x}{۲\sqrt{x^۲+۵}}}{-۲}=\frac{\frac{-۴}{۶}}{-۲}=\frac{۱}{۳}$$

۴۱.گزینه ۲ در حدهای کسری وقتی x به سمت بی‌نهایت میل کند و جواب عدد شود باید بزرگ‌ترین توان x صورت و مخرج باید با هم برابر باشند و دقت کنید چون $n > ۳$ است در نتیجه $n - ۲ > ۱$ و جمله‌ی پر توان مخرج حتماً $mx^{n-۲}$ است.

$m + ۳ = n - ۲ \Rightarrow m - n = -۵$

صفحه ۸

پر توان صورت و مخرج $\rightarrow \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^{m+۳}}{mx^{n-۲}} = \dfrac{۱}{m} = -۲ \Rightarrow m = \dfrac{-۱}{۲}\ ,\ n = \dfrac{۹}{۲} \Rightarrow m+n = ۴$

.۴۲ گزینه ۴

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{۲}^+} \frac{\cos x}{(۱-\sin x)} = \lim_{x\to\frac{\pi}{۲}^+} \frac{\cos x(۱+\sin x)}{۱-\sin^۲ x} = \lim_{x\to\frac{\pi}{۲}^+} \frac{۱+\sin x}{\cos x} = \frac{۲}{۰^-} = -\infty$$

.۴۳ گزینه ۱

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{۴}} \frac{\tan x - ۱}{\cos ۲x} = \lim_{x\to\frac{\pi}{۴}} \frac{\sin x - \cos x}{\cos x(\cos^۲ x - \sin^۲ x)}$$

$$= \lim_{x\to\frac{\pi}{۴}} \frac{(\sin x - \cos x)}{\cos x(\cos x - \sin x)(\cos x + \sin x)} = \frac{-۱}{\frac{\sqrt{۲}}{۲}\times\sqrt{۲}} = -۱$$

.۴۴ گزینه ۴

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \frac{۲}{۳} \Rightarrow \lim_{x\to\infty} \frac{ax^n - ۳x + ۱}{۳x^۲ + x} \overset{\text{پر توان}}{=\!=\!=} \lim_{x\to\infty} \frac{ax^n}{۳x^۲} \overset{n=۲}{=\!=\!=} \lim_{x\to\infty} \frac{ax^۲}{۳x^۲} = \frac{a}{۳} = \frac{۲}{۳} \Rightarrow a = ۲$$

حال با معلوم بودن مقادیر a و n، مقدار $f(-۱)$ را به دست می آوریم. داریم:

$$\xrightarrow[a=۲]{n=۲} f(x) = \frac{۲x^۲ - ۳x + ۱}{۳x^۲ + x} \Rightarrow f(-۱) = \frac{۲(-۱)^۲ - ۳(-۱) + ۱}{۳(-۱)^۲ + (-۱)} = \frac{۲+۳+۱}{۳-۱} = \frac{۶}{۲} = ۳$$

.۴۵ گزینه ۳

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = ۳ \Rightarrow \lim_{x\to-\infty} \frac{۲x - \sqrt{x^۲ + ۶x}}{ax - ۲}$$

$$\overset{\text{پر توان}}{=\!=\!=} \lim_{x\to-\infty} \frac{۲x - |\overbrace{x}^{-}|}{ax} = \lim_{x\to-\infty} \frac{۲x - (-x)}{ax} = \lim_{x\to-\infty} \frac{۳x}{ax} = \frac{۳}{a} = ۳ \Rightarrow a = ۱$$

$$\lim_{x\to۲} f(x) = \lim_{x\to۲} \frac{۲x - \sqrt{x^۲ + ۶x}}{x - ۲} = \frac{۰}{۰} \xrightarrow{HOP} \lim_{x\to۲} \frac{۲ - \dfrac{۲x+۶}{۲\sqrt{x^۲+۶x}}}{۱} = \frac{۲ - \frac{۵}{۴}}{۱} = \frac{۳}{۴}$$

.۴۶ گزینه ۲

$$\lim_{x\to۳^-} \frac{(۳-[x])\sqrt{x^۲ - ۶x + ۹}}{x - ۳} = \lim_{x\to۳^-} \frac{(۳ - \overset{\overset{۲}{\uparrow}}{[۳^-]})\sqrt{(x-۳)^۲}}{x - ۳}$$

$$= \lim_{x\to۳^-} \frac{|\overbrace{x-۳}^{-}|}{x-۳} = \lim_{x\to۳^-} \frac{-(x-۳)}{x-۳} = -۱$$

.۴۷ گزینه ۲

$$\lim_{x\to۱^+} f(x) = ۳\ ,\ \lim_{x\to(-۱)^-} f(x) = ۱ \Rightarrow \lim_{x\to۱^+} f(x) - \lim_{x\to(-۱)^-} f(x) = ۳ - ۱ = ۲$$

.۴۸ گزینه ۱

$$\lim_{x\to۱^-} f(x) = ۱$$

تنها گزینه‌ای که جواب آن عدد یک می‌شود گزینه‌ی اول است زیرا برای محاسبه‌ی $f(0)$ باید سراغ ضابطه‌ی پایین برویم که جواب یک می‌شود.

صفحه ۹

۴۹.گزینه ۳

$$\lim_{x\to(\frac{\pi}{۲})^+}\frac{\tan x}{\cot x}=\lim_{x\to(\frac{\pi}{۲})^+}\frac{\tan x}{\frac{۱}{\tan x}}=\lim_{x\to(\frac{\pi}{۲})^+}\tan^۲ x=(-\infty)^۲=+\infty$$

$(\frac{\pi}{۲})^+$ در ناحیه‌ی دوم است و در این ناحیه تانژانت، منفی است.

۵۰.گزینه ۱

$$\lim_{x\to-۲^+}\frac{x+\sqrt{x+۲}}{x+۲}=\frac{-۲+۰}{\underbrace{(-۲)^++۲}_{-۱/۹}}=\frac{-۲}{۰^+}=-\infty$$

۵۱.گزینه ۳

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{ax+۹}{۱-x+\sqrt{x+۱}}\overset{\text{پرتوان}}{=\!=}\lim_{x\to+\infty}\frac{ax}{-x}=-a=۳\Rightarrow a=-۳$$

$$\text{پس}:\lim_{x\to۳}\frac{-۳x+۹}{۱-x+\sqrt{x+۱}}=\frac{۰}{۰}\xrightarrow{HOP}\lim_{x\to۳}\frac{-۳}{-۱+\frac{۱}{۲\sqrt{x+۱}}}=\frac{-۳}{-۱+\frac{۱}{۴}}=\frac{-۳}{-\frac{۳}{۴}}=۴$$

۵۲.گزینه ۲

روش اول:

$$\lim_{x\to۱}\frac{(۱-\sqrt{x})}{۲-\sqrt{۵-x}}=\lim_{x\to۱}\frac{(۱-x)(۲+\sqrt{۵-x})}{(۴+x-۵)(۱+\sqrt{x})}=\lim_{x\to۱}\frac{۲+\sqrt{۵-x}}{-(۱+\sqrt{x})}=\frac{۴}{-۲}=-۲$$

روش دوم:

$$\lim_{x\to۱}\frac{۱-\sqrt{x}}{۲-\sqrt{۵-x}}=\frac{۰}{۰}\xrightarrow{HOP}\lim_{x\to۱}\frac{-\frac{۱}{۲\sqrt{x}}}{-\frac{-۱}{۲\sqrt{۵-x}}}=\frac{-\frac{۱}{۲}}{\frac{۱}{۴}}=-۲$$

۵۳.گزینه ۱

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{ax^n+۱۵}{۳x-\sqrt{۴x^۲+۱۵x}}\overset{\text{پرتوان}}{=\!=}\lim_{x\to-\infty}\frac{ax^n}{۳x-\sqrt{۴x^۲}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{ax^n}{۳x-۲|\underbrace{x}_{-}|}=\lim_{x\to-\infty}\frac{ax^n}{۵x}$$

چون جواب حد، عدد شده است پس بزرگترین توان x صورت و مخرج با هم برابرند یعنی $n=۱$. پس داریم:

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{ax}{۵x}=\frac{a}{۵}=-۱\to a=-۵$$

$$\lim_{x\to۳}f(x)=\lim_{x\to۳}\frac{-۵x+۱۵}{۳x-\sqrt{۴x^۲+۱۵x}}=\frac{۰}{۰}\xrightarrow{HOP}\lim_{x\to۳}\frac{-۵}{۳-\frac{۱(۸x+۱۵)}{۲\sqrt{۴x^۲+۱۵x}}}=\frac{-۵}{۳-\frac{۳۹}{۱۸}}=\frac{-۵}{\frac{۱۵}{۱۸}}=-۶$$

۵۴.گزینه ۲

$$\lim_{x\to۲^+}\frac{۲-\sqrt[۳]{x+۶}}{\sqrt{x^۲-۴x+۴}}=\lim_{x\to۲^+}\frac{۲-\sqrt[۳]{x+۶}}{\sqrt{(x-۲)^۲}}=\lim_{x\to۲^+}\frac{۲-\sqrt[۳]{x+۶}}{\underbrace{|x-۲|}_{+}}$$

$$=\lim_{x\to۲^+}\frac{۲-\sqrt[۳]{x+۶}}{x-۲}=\frac{۰}{۰}\xrightarrow{HOP}\lim_{x\to۲^+}\frac{-\frac{۱}{۳\sqrt[۳]{(x+۶)^۲}}}{۱}=-\frac{۱}{۱۲}$$

صفحه ۱۰

۵۵.گزینه ۲

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{۲x+\sqrt{x^۲-۳x}}{ax^n-۶}\overset{\text{پرتوان}}{=\!=}\lim_{x\to+\infty}\frac{۲x+\sqrt{x^۲}}{ax^n}=\lim_{x\to+\infty}\frac{۲x+|\overbrace{x}^{+}|}{ax^n}=\lim_{x\to+\infty}\frac{۳x}{ax^n}$$

چون جواب حد، عدد شده است پس بزرگترین توان x صورت و مخرج با هم برابرند یعنی $n=۱$ پس داریم:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{۳x}{ax}=\frac{۳}{a}=-\frac{۱}{۲}\to a=-۶$$

$$\lim_{x\to-۱}f(x)=\lim_{x\to-۱}\frac{۲x+\sqrt{x^۲-۳x}}{-۶x-۶}=\frac{۰}{۰}\xrightarrow{HOP}\lim_{x\to-۱}\frac{۲+\dfrac{۱(۲x-۳)}{۲\sqrt{x^۲-۳x}}}{-۶}=\frac{۲-\frac{۵}{۴}}{-۶}=\frac{-۱}{۸}$$

۵۶.گزینه ۲ چون نمودار تابع f از نقطه‌ی $(۲,۱)$ می‌گذرد، مختصات آن در ضابطه‌ی تابع f صدق می‌کند، پس داریم:

$$f(۲)=۱\Rightarrow\frac{۲a+۱+\sqrt{۲۵}}{۳(۲)-۲}=۱\Rightarrow\frac{۲a+۶}{۴}=۱\Rightarrow ۲a+۶=۴\Rightarrow ۲a=-۲\Rightarrow a=-۱$$

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{-x+۱+\sqrt{۴x^۲+۹}}{۳x-۲}\overset{\text{پرتوان}}{=\!=}\lim_{x\to+\infty}\frac{-x+\sqrt{۴x^۲}}{۳x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{-x+۲|\overbrace{x}^{+}|}{۳x}=$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{۳x}=\frac{۱}{۳}$$

۵۷.گزینه ۱

روش اول: در مزدوج عبارت رادیکالی ضرب و تقسیم می‌کنیم.

$$\lim_{x\to-۱}\frac{۴x^۲+x-۳}{x(x+۱)(۲x-\sqrt{۳-x})}=\lim_{x\to-۱}\frac{(x+۱)(۴x-۳)}{x(x+۱)(۲x-\sqrt{۳-x})}=\frac{-۷}{۴}$$

روش دوم:

$$\lim_{x\to-۱}\frac{۲x+\sqrt{۳-x}}{x^۲+x}=\frac{۰}{۰}\xrightarrow{HOP}\lim_{x\to-۱}\frac{۲+\dfrac{۱(-۱)}{۲\sqrt{۳-x}}}{۲x+۱}=\frac{۲-\frac{۱}{۴}}{-۱}=\frac{-۷}{۴}$$

۵۸.گزینه ۴

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\overbrace{|x^۲-۴|}^{+}}{ax^۲-x+۲}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^۲-۴}{ax^۲-x+۲}\overset{\text{پرتوان}}{=\!=}\lim_{x\to+\infty}\frac{x^۲}{ax^۲}=\frac{۱}{a}=-۱\Rightarrow a=-۱$$

وقتی $x\to(-۲)^+$ ، $x^۲-۴<۰$ بوده و لذا $|x^۲-۴|=۴-x^۲$ می شود. بنابراین :

$$\lim_{x\to(-۲)^+}\frac{|x^۲-۴|}{ax^۲-x+۲}=\lim_{x\to(-۲)^+}\frac{۴-x^۲}{-x^۲-x+۲}=\lim_{x\to(-۲)^+}\frac{-(x-۲)(x+۲)}{-(x+۲)(x-۱)}=\frac{۴}{۳}$$

دقت کنید $(-۲)^+$ را حدوداً $-۱٫۹۹$ در نظر می گیریم.

۵۹.گزینه ۲

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{ax+\sqrt{۴x^{۲}+۵}}{۲x+۲} \xlongequal{\text{پرتوان}} \lim_{x\to+\infty} \frac{ax+\sqrt{۴x^{۲}}}{۲x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{ax+۲|\overbrace{x}^{+}|}{۲x}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{ax+۲x}{۲x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{(a+۲)x}{۲x} = \frac{a+۲}{۲} = \frac{۵}{۲} \to a=۳$$

$$\lim_{x\to-۱} \frac{۳x+\sqrt{۴x^{۲}+۵}}{۲x+۲} = \frac{۰}{۰} \xrightarrow{HOP} \lim_{x\to-۱} \frac{۳+\frac{۱(۸x)}{۲\sqrt{۴x^{۲}+۵}}}{۲} = \frac{۳-\frac{۸}{۶}}{۲} = \frac{\frac{۱۰}{۶}}{\frac{۲}{۱}} = \frac{۱۰}{۱۲} = \frac{۵}{۶}$$

صفحه ۱۱

۶۰.گزینه ۲

$$\lim_{x\to ۲}\frac{x-\sqrt{۳x-۲}}{ax+b}=\frac{۰}{۲a+b}\xrightarrow[\text{بوده که پس از رفع ابهام جوابش } \frac{۱}{۲} \text{ شده است } \frac{۰}{۰}]{\text{چون جواب حد، برابر عدد شده است پس این کسر حتما}}۲a+b=۰$$

$$\xrightarrow{HOP}\lim_{x\to ۲}\frac{۱-\frac{۳}{۲\sqrt{۳x-۲}}}{a}=\frac{۱-\frac{۳}{۴}}{a}=\frac{۱}{۴a}=\frac{۱}{۲}\to a=\frac{۱}{۲}\ ,\ b=-۱$$

۶۱.گزینه ۱

$$\lim_{x\to +\infty}\frac{x-\sqrt{۴x^۲+۹x}}{۳x+\sqrt{x}}\overset{\text{پر توان}}{=\!=}\lim_{x\to +\infty}\frac{x-\sqrt{۴x^۲}}{۳x}=\lim_{x\to +\infty}\frac{x-۲|\overbrace{x}^{+}|}{۳x}=\lim_{x\to +\infty}\frac{x-۲x}{۳x}=$$
$$\lim_{x\to +\infty}\frac{-x}{۳x}=\frac{-۱}{۳}$$

۶۲.گزینه ۴

$$\lim_{x\to(-۲)^-}f(x)=\lim_{x\to(-۲)^+}\frac{۱}{f(x)}\to ۴+a=\frac{۱}{-۶+۴}\to ۴+a=\frac{-۱}{۲}$$
$$\to ۸+۲a=-۱\to ۲a=-۹\to a=-\frac{۹}{۲}=-۴/۵$$

۶۳.گزینه ۴

$$\lim_{x\to ۰}\frac{۱-\sqrt{\cos x}}{\sin^۲ x}=\lim_{x\to ۰}\frac{(۱-\sqrt{\cos x})}{(۱-\cos x)(۱+\cos x)}=\lim_{x\to ۰}\frac{(۱-\sqrt{\cos x})}{(۱-\sqrt{\cos x})(۱+\sqrt{\cos x})(۱+\cos x)}=\frac{۱}{۲\times ۲}$$
$$=\frac{۱}{۴}$$

۶۴.گزینه ۱

روش اول:

$$\lim_{x\to ۴}\frac{۳x^۲-۱۰x-۸}{\sqrt{۳-\sqrt{x}}-۱}=\lim_{x\to ۴}\frac{(x-۴)(۳x+۲)(\sqrt{۳-\sqrt{x}}+۱)}{(۳-\sqrt{x}-۱)}$$

$$=\lim_{x\to ۴}\frac{(\sqrt{x}-۲)(\sqrt{x}+۲)(۳x+۲)(\sqrt{۳-\sqrt{x}}+۱)}{-(\sqrt{x}-۲)}=-(۴)(۱۴)(۲)=-۱۱۲$$

روش دوم:

$$\lim_{x\to ۴}\frac{۳x^۲-۱۰x-۸}{\sqrt{۳-\sqrt{x}}-۱}=\frac{۰}{۰}\xrightarrow{HOP}\lim_{x\to ۴}\frac{۶x-۱۰}{\frac{\frac{-۱}{۲\sqrt{x}}}{۲\sqrt{۳-\sqrt{x}}}}=\frac{۱۴}{\frac{-\frac{۱}{۴}}{۲}}=\frac{۱۴}{-\frac{۱}{۸}}=-۱۱۲$$

صفحه ۱۲

۶۵.گزینه ۳

روش اول:

$$\lim_{x\to -۱}\frac{۲x^۲+۵x+۳}{۲-\sqrt{۲+\sqrt{۳-x}}}=\lim_{x\to -۱}\frac{(x+۱)(۲x+۳)(۲+\sqrt{۲+\sqrt{۳-x}}}{(۴-۲-\sqrt{۳-x})}$$

$$=\lim_{x\to -۱}\frac{(x+۱)(۱)(۴)(۲+\sqrt{۳-x})}{(۲-\sqrt{۳-x})(۲+\sqrt{۳-x})}=\lim_{x\to -۱}\frac{(x+۱)(۱)(۴)(۴)}{(۴-۳+x)}=۱۶$$

روش دوم:

$$\lim_{x\to -۱}\frac{۲x^۲+۵x+۳}{۲-\sqrt{۲+\sqrt{۳-x}}}=\frac{۰}{۰}\xrightarrow{HOP}\lim_{x\to -۱}\frac{۴x+۵}{-\frac{\frac{-۱}{۲\sqrt{۳-x}}}{۲\sqrt{۲+\sqrt{۳-x}}}}=\frac{۱}{\frac{\frac{۱}{۴}}{۴}}=\frac{۱}{\frac{۱}{۱۶}}=۱۶$$

۶۶.گزینه ۱ روش اول: عبارت را در مزدوج صورت، ضرب و تقسیم می‌کنیم.

$$\lim_{x\to -۲}\frac{x+\sqrt{۲x+۸}}{x+۲}=\lim_{x\to -۲}\frac{(x+\sqrt{۲x+۸})(x-\sqrt{۲x+۸})}{(x+۲)(x-\sqrt{۲x+۸})}$$

$$=\lim_{x\to -۲}\frac{x^۲-۲x-۸}{(x+۲)(x-\sqrt{۲x+۸})}=\lim_{x\to -۲}\frac{(x+۲)(x-۴)}{(x+۲)(x-\sqrt{۲x+۸})}=\frac{-۶}{-۴}=\frac{۳}{۲}$$

روش دوم:

$$\lim_{x\to -۲}\frac{x+\sqrt{۲x+۸}}{x+۲}=\frac{۰}{۰}\xrightarrow{HOP}\lim_{x\to -۲}\frac{۱+\frac{۲}{۲\sqrt{۲x+۸}}}{۱}=\frac{۱+\frac{۱}{۲}}{۱}=\frac{۳}{۲}$$

۶۷.گزینه ۳ روش اول: عبارت را در مزدوج صورت و مخرج، ضرب و تقسیم می‌کنیم.

$$\lim_{x\to ۴}\frac{۳-\sqrt{۲x+۱}}{۲-\sqrt{x}}=\lim_{x\to ۴}\frac{(۳-\sqrt{۲x+۱})(۳+\sqrt{۲x+۱})(۲+\sqrt{x})}{(۲-\sqrt{x})(۲+\sqrt{x})(۳+\sqrt{۲x+۱})}$$

$$=\lim_{x\to ۴}\frac{(۹-۲x-۱)(۲+\sqrt{x})}{(۴-x)(۳+\sqrt{۲x+۱})}=\lim_{x\to ۴}\frac{-۲(x-۴)(۲+\sqrt{x})}{-(x-۴)(۳+\sqrt{۲x+۱})}=\frac{۲\times ۴}{۳+۳}=\frac{۸}{۶}=\frac{۴}{۳}$$

روش دوم:

$$\lim_{x\to ۴}\frac{۳-\sqrt{۲x+۱}}{۲-\sqrt{x}}=\frac{۰}{۰}\xrightarrow{HOP}\lim_{x\to ۴}\frac{\frac{-۲}{۲\sqrt{۲x+۱}}}{-\frac{۱}{۲\sqrt{x}}}=\frac{\frac{-۲}{۶}}{\frac{-۱}{۴}}=\frac{۴}{۳}$$

۶۸.گزینه ۴

$$\left.\begin{array}{l}\lim_{x\to ۱^+}\frac{۲x^۲-x-۱}{\underbrace{|x-۱|}_{+}}=\lim_{x\to ۱^+}\frac{۲x^۲-x-۱}{x-۱}=\lim_{x\to ۱^+}\frac{(x-۱)(۲x+۱)}{(x-۱)}=۳\\ \lim_{x\to ۱^-}\frac{۲x^۲-x-۱}{\underbrace{|x-۱|}_{-}}=\lim_{x\to ۱^-}\frac{۲x^۲-x-۱}{-(x-۱)}=\lim_{x\to ۱^-}\frac{(x-۱)(۲x+۱)}{-(x-۱)}=-۳\end{array}\right\}\Rightarrow |-۳-(۳)|=|-۶|=۶$$

صفحه ۱۳

۶۹.گزینه ۴

$$\lim_{x\to -۳}\frac{ax+۳a}{۱-\sqrt{۵x+۱۶}}=\lim_{x\to -۳}\frac{a(x+۳)(۱+\sqrt{۵x+۱۶})}{(۱-\sqrt{۵x+۱۶})(۱+\sqrt{۵x+۱۶})}$$

$$\lim_{x\to -۳}\frac{a(x+۳)(۲)}{-۵(x+۳)}=\frac{۲a}{-۵}=۲\Rightarrow ۲a=-۱۰\Rightarrow a=-۵$$

۷۰.گزینه ۱

$$\lim_{x\to \frac{۳\pi}{۴}}\frac{۱+\cot x}{۱+\tan x}=\lim_{x\to \frac{۳\pi}{۴}}\frac{۱+\frac{۱}{\tan x}}{۱+\tan x}=\lim_{x\to \frac{۳\pi}{۴}}\frac{(۱+\tan x)}{\tan x(۱+\tan x)}=\frac{۱}{-۱}=-۱$$

توجه کنید که $\tan\frac{۳\pi}{۴}=\cot\frac{۳\pi}{۴}=-۱$ است.