 سریال ۱۸۸۵۱۱	وقت : دقیقه تعداد سوالات: ۴۷	تاریخ : نام و نام خانوادگی :
آموزشگاه پارسا	موضوع ریاضی ۳ (فصل چهارم : مثلثات، دوازدهم: فصل دوم: مثلثات)	

۱. گزینه ۱

$$\sin\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right) = -\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = -\cos \alpha, \quad \sin(3\pi + \alpha) = \sin(\pi + \alpha) = -\sin \alpha$$

$$\cos\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right) = \sin \alpha, \quad \cos(\alpha - \pi) = \cos(\pi - \alpha) = -\cos \alpha$$

$$\frac{\sin\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right) + \sin(3\pi + \alpha)}{\cos\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right) + \cos(\alpha - \pi)} = \frac{-\cos \alpha - \sin \alpha}{\sin \alpha - \cos \alpha} = \frac{\cos \alpha + \sin \alpha}{\cos \alpha - \sin \alpha}$$

$$\frac{1 + \tan \alpha}{1 - \tan \alpha} = \frac{1 + \frac{2}{4}}{1 - \frac{2}{4}} = 5$$

تک تک جملات را بر α تقسیم می کنیم

۲. گزینه ۴

$1 + \cot^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha}$

 می دانیم:

$$\sqrt{1 + \cot^2 \alpha} = \sqrt{\frac{1}{\sin^2 \alpha}} = \left| \frac{1}{\sin \alpha} \right| = \frac{1}{\sin \alpha}$$

$$\sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha}} \xrightarrow{\text{در مزدوج مخرج ضرب و تقسیم می کنیم}} \sqrt{\frac{(1 - \cos \alpha)(1 - \cos \alpha)}{(1 + \cos \alpha)(1 - \cos \alpha)}} = \sqrt{\frac{(1 - \cos \alpha)^2}{1 - \cos^2 \alpha}} = \sqrt{\frac{(1 - \cos \alpha)^2}{\sin^2 \alpha}}$$

$$= \left| \frac{1 - \cos \alpha}{\sin \alpha} \right| = \frac{1 - \cos \alpha}{\sin \alpha}$$

$$\text{پس: } \sqrt{1 + \cot^2 \alpha} - \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha}} = \frac{1}{\sin \alpha} - \frac{1 - \cos \alpha}{\sin \alpha} = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = \cot \alpha$$

۳. گزینه ۱ ابتدا تمام زوایا را بر حسب 15° می نویسیم:

$$\cos 285^\circ = \cos(270^\circ + 15^\circ) = \sin 15^\circ, \quad \sin 255^\circ = \sin(270^\circ - 15^\circ) = -\cos 15^\circ$$

$$\sin 525^\circ = \sin(540^\circ - 15^\circ) = \sin(180^\circ - 15^\circ) = \sin 15^\circ, \quad \sin 105^\circ = \sin(90^\circ + 15^\circ) = \cos 15^\circ$$

$$\text{بنابراین داریم: } \frac{\cos 285^\circ - \sin 255^\circ}{\sin 525^\circ - \sin 105^\circ} = \frac{\sin 15^\circ + \cos 15^\circ}{\sin 15^\circ - \cos 15^\circ}$$

تمام جملات را بر $\cos 15^\circ$ تقسیم می کنیم در نتیجه:

$$\frac{\tan 15^\circ + 1}{\tan 15^\circ - 1} = \frac{0.28 + 1}{0.28 - 1} = \frac{1.28}{-0.72} = \frac{-128}{72} = -\frac{16}{9}$$

۴. گزینه ۳ دوره تناوب تابع $y = \sin kx$ برابر $\frac{2\pi}{|k|}$ می باشد.

$$y = a \sin(b\pi x) \rightarrow T = \frac{2\pi}{|b|\pi} = \frac{2}{|b|} = 6 \rightarrow |b| = \frac{1}{3} \rightarrow b = \pm \frac{1}{3}$$

صفحه ۲

باتوجه به شکل داده شده a و b هر دو مثبت یا هر دو منفی هستند و چون همه گزینه‌ها مثبت می‌باشند پس $b = \frac{1}{3}$ قابل قبول است.

بیشترین مقدار این تابع از روی شکل ۲ می‌باشد و بیشترین مقدار $y = a \sin(b\pi x)$ زمانی رخ می‌دهد که سینوس برابر ۱ باشد

$$a + b = 2 + \frac{1}{3} = \frac{7}{3}$$

۵.گزینه ۳

ابتدا تمام زوایا را بر حسب 20° می‌نویسیم:

$$\sin 25^\circ = \sin(27^\circ - 2^\circ) = -\cos 2^\circ, \quad \sin 70^\circ = \sin(72^\circ - 2^\circ) = \sin(-2^\circ) = -\sin 2^\circ$$

$$\cos 56^\circ = \cos(54^\circ + 2^\circ) = \cos(18^\circ + 2^\circ) = -\cos 2^\circ, \quad \cos 11^\circ = \cos(9^\circ + 2^\circ) = -\sin 2^\circ$$

بنابراین داریم:

$$\frac{\sin 25^\circ + \sin 70^\circ}{\cos 56^\circ - \cos 11^\circ} = \frac{-\cos 2^\circ - \sin 2^\circ}{-\cos 2^\circ + \sin 2^\circ}$$

تمام جملات را بر $\cos 2^\circ$ تقسیم می‌کنیم در نتیجه:

$$\frac{-1 - \tan 2^\circ}{-1 + \tan 2^\circ} = \frac{-1 - 0.4}{-1 + 0.4} = \frac{-1.4}{-0.6} = \frac{14}{6} = \frac{7}{3}$$

۶.گزینه ۳

$$2 \sin(\pi - x) \cos\left(\frac{3\pi}{2} + x\right) + 3 \cot x \sin(\pi + x) = 0 \Rightarrow 2 \sin x \cdot \sin x + 3 \frac{\cos x}{\sin x} (-\sin x) = 0$$

$$\Rightarrow 2 \sin^2 x - 3 \cos x = 0 \Rightarrow 2(1 - \cos^2 x) - 3 \cos x = 0 \Rightarrow 2 \cos^2 x + 3 \cos x - 2 = 0$$

$$\xrightarrow{\cos x = A} 2A^2 + 3A - 2 = 0 \Rightarrow \Delta = b^2 - 4ac = 9 + 16 = 25 \rightarrow \begin{cases} A = \frac{-3+5}{4} = \frac{1}{2} \\ A = \frac{-3-5}{4} = -2 \end{cases}$$

$$A = \frac{1}{2} \Rightarrow \cos x = \frac{1}{2} = \cos \frac{\pi}{3} \Rightarrow x = 2k\pi \pm \alpha \Rightarrow x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{3}$$

$$A = -2 \Rightarrow \cos x = -2 \text{ امکان ندارد } (-1 \leq \cos x \leq 1)$$

۷.گزینه ۲

$$\cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a \text{ می‌دانیم:}$$

$$\sin^2 x - \cos^2 x = \sin\left(\frac{3\pi}{2} + x\right) \Rightarrow -\cos 2x = -\cos x \Rightarrow \cos 2x = \cos x$$

$$\xrightarrow{x=2k\pi \pm \alpha} 2x = 2k\pi \pm x \Rightarrow \begin{cases} x = 2k\pi \\ \text{یا} \\ x = \frac{2k\pi}{3} \end{cases} \rightarrow x = \frac{2k\pi}{3}$$

$$x = \frac{2k\pi}{3} \text{ جواب‌های } x = 2k\pi \text{ را پوشش می‌دهد.}$$

۸.گزینه ۲

$$\cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a \text{ می‌دانیم:}$$

$$\tan \frac{2\pi}{3} \sin\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) = 1 \Rightarrow \tan\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) \sin\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) = 1$$

$$\Rightarrow -\tan \frac{\pi}{3} (-\cos x) = 1 \Rightarrow \sqrt{3} \cos x = 1 \Rightarrow \cos x = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\cos 2x = 2 \cos^2 x - 1 = 2 \times \frac{1}{3} - 1 = \frac{-1}{3}$$

صفحه ۳

گزینه ۳

$$\sin(\pi + x) \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) - 2 \sin(\pi - x) + 1 = 0 \Rightarrow (-\sin x)(-\sin x) - 2 \sin x + 1 = 0$$

$$\Rightarrow \sin^2 x - 2 \sin x + 1 = 0 \Rightarrow (\sin x - 1)^2 = 0 \Rightarrow \sin x = 1 \xrightarrow{\text{حالت خاص}} x = 2k\pi + \frac{\pi}{2}$$

گزینه ۱۰

$$\frac{\sin 16^\circ - \cos 20^\circ}{\cos 11^\circ + \sin 7^\circ} = \frac{\sin(18^\circ - 2^\circ) - \cos(18^\circ + 2^\circ)}{\cos(9^\circ + 2^\circ) + \sin(9^\circ - 2^\circ)} = \frac{\sin 2^\circ + \cos 2^\circ}{-\sin 2^\circ + \cos 2^\circ}$$

$$\frac{\div \cos 2^\circ}{\div \cos 2^\circ} \frac{\tan 2^\circ + 1}{-\tan 2^\circ + 1} = \frac{\frac{36}{100} + 1}{-\frac{36}{100} + 1} = \frac{136}{64} = \frac{17}{8}$$

گزینه ۱۱

$$\sin u \cos u = \frac{1}{2} \sin 2u \quad \text{می دانیم:}$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) \sin(\pi + \alpha) - \sin(\pi - \alpha) \cos(-\alpha) = \cos \alpha (-\sin \alpha) - \sin \alpha \cos \alpha = -2 \sin \alpha \cos \alpha = -\sin 2\alpha$$

گزینه ۱۲

$$2 \cos^2 x - \cos x - 3 = 0 \xrightarrow{\cos x = A} 2A^2 - A - 3 = 0 \xrightarrow{a+c=b} \begin{cases} A = -1 \\ A = -\frac{c}{a} = \frac{3}{2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \cos x = -1 \xrightarrow{\text{حالت خاص}} x = 2k\pi + \pi \\ \cos x = \frac{3}{2} > 1 \text{ غ ق ق } (-1 \leq \cos x \leq 1) \end{cases}$$

گزینه ۱۳

روش اول:

$$\frac{\cos 2x}{\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)} = 0 \Rightarrow \cos 2x = 0 \xrightarrow{\text{حالت خاص}} 2x = k\pi + \frac{\pi}{2} \Rightarrow x = \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{4}$$

$$\text{مخرج} \neq 0 \Rightarrow \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \neq 0 \xrightarrow{\text{حالت خاص}} x + \frac{\pi}{4} \neq k\pi + \frac{\pi}{2} \Rightarrow x \neq k\pi + \frac{\pi}{4}$$

روش دوم: اگر به k صفر دهیم گزینه‌های ۱، ۲، ۳ جواب $x = \frac{\pi}{4}$ بدست می‌آید که غیر قابل قبول است (چون مخرج را صفر می‌کند)

پس گزینه‌ی ۴ جواب صحیح است.

$$\tan 2\alpha = \frac{2 \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha} \quad \text{می دانیم:} \quad \text{گزینه ۲}$$

$$\frac{2 \tan x}{1 - \tan^2 x} = \sqrt{3} \Rightarrow \tan 2x = \sqrt{3} = \tan \frac{\pi}{3} \xrightarrow{x = k\pi + \alpha} 2x = k\pi + \frac{\pi}{3} \rightarrow x = \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{6}$$

صفحه ۴

گزینه ۱۵

$$\begin{aligned}
 (\sin x - \tan x) \tan\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) &= \cos \frac{4\pi}{3} \Rightarrow (\sin x - \tan x) \cot x = \cos\left(\pi + \frac{\pi}{3}\right) \\
 \Rightarrow \sin x \cot x - \tan x \cot x &= -\cos \frac{\pi}{3} \Rightarrow \sin x \cdot \frac{\cos x}{\sin x} - 1 = -\cos \frac{\pi}{3} \Rightarrow \cos x - 1 = -\frac{1}{2} \\
 \Rightarrow \cos x &= \frac{1}{2} = \cos \frac{\pi}{3} \Rightarrow x = 2k\pi \pm \alpha \Rightarrow x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{3}
 \end{aligned}$$

گزینه ۱۶

$$\begin{aligned}
 \sin\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right) &= -\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = -\cos \alpha, \quad \sin(3\pi + \alpha) = \sin(\pi + \alpha) = -\sin \alpha \\
 \cos\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right) &= \sin \alpha, \quad \cos(\alpha - \pi) = \cos(\pi - \alpha) = -\cos \alpha
 \end{aligned}$$

$$\frac{\sin\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right) + \sin(3\pi + \alpha)}{\cos\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right) + \cos(\alpha - \pi)} = \frac{-\cos \alpha - \sin \alpha}{\sin \alpha - \cos \alpha} = \frac{\cos \alpha + \sin \alpha}{\cos \alpha - \sin \alpha}$$

$$\frac{1 + \tan \alpha}{1 - \tan \alpha} = \frac{1 + \frac{2}{3}}{1 - \frac{2}{3}} = 5$$

تک تک جملات را بر $\cos \alpha$ تقسیم می کنیم

گزینه ۱۷

$$\sin u \cdot \cos u = \frac{1}{2} \sin 2u, \quad \cos 2a = 1 - 2 \sin^2 a \quad \text{می دانیم:}$$

$$\sin 7,5 \cos 7,5 (1 - 2 \sin^2 7,5) = \frac{1}{2} \sin 15 \times \cos 15 = \frac{1}{4} \sin 30 = \frac{1}{8}$$

گزینه ۱۸

$$1 + \cot^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha} \quad \text{می دانیم:}$$

$$\sqrt{1 + \cot^2 \alpha} = \sqrt{\frac{1}{\sin^2 \alpha}} = \sqrt{\frac{1}{\sin^2 \alpha}} = \frac{1}{\sin \alpha}$$

$$\sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha}} \xrightarrow{\text{در مزدوج مخرج ضرب و تقسیم می کنیم}} \sqrt{\frac{(1 - \cos \alpha)(1 - \cos \alpha)}{(1 + \cos \alpha)(1 - \cos \alpha)}} = \sqrt{\frac{(1 - \cos \alpha)^2}{1 - \cos^2 \alpha}} = \sqrt{\frac{(1 - \cos \alpha)^2}{\sin^2 \alpha}}$$

$$= \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{\sin^2 \alpha}} = \frac{1 - \cos \alpha}{\sin \alpha}$$

$$\text{پس: } \sqrt{1 + \cot^2 \alpha} - \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha}} = \frac{1}{\sin \alpha} - \frac{1 - \cos \alpha}{\sin \alpha} = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = \cot \alpha$$

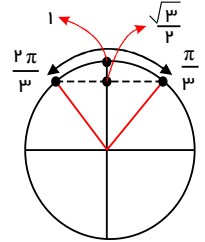
صفحه ۵

۱۹. گزینه ۴

$$\frac{1 - \tan^2 \alpha}{1 + \tan^2 \alpha} = \cos 2\alpha \text{ می دانیم:}$$

$$\frac{1 - \tan^2(45 - \alpha)}{1 + \tan^2(45 - \alpha)} = \cos 2(45 - \alpha) = \cos(90 - 2\alpha) = \sin 2\alpha$$

$$\frac{\pi}{6} \leq \alpha \leq \frac{\pi}{3} \Rightarrow \frac{\pi}{3} \leq 2\alpha \leq \frac{2\pi}{3}$$



مقدار سینوس در این بازه از $\frac{\sqrt{3}}{2}$ تا ۱ متغیر است که کمترین مقدار آن $\frac{\sqrt{3}}{2}$ است.

۲۰. گزینه ۴

$$1 + \tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}, \quad 2 \cos^2 x = 1 + \cos 2x \text{ می دانیم:}$$

$$(1 + \tan^2 x) \cdot \cos(\pi + 2x) = 2 \Rightarrow \left(\frac{1}{\cos^2 x}\right)(-\cos 2x) = 2 \Rightarrow 2 \cos^2 x = -\cos 2x$$

$$\Rightarrow 1 + \cos 2x = -\cos 2x \Rightarrow 2 \cos 2x = -1 \Rightarrow \cos 2x = -\frac{1}{2} = \cos \frac{2\pi}{3}$$

$$\frac{x=2k\pi \pm \alpha}{\longrightarrow} 2x = 2k\pi \pm \frac{2\pi}{3} \Rightarrow x = k\pi \pm \frac{\pi}{3}$$

۲۱. گزینه ۲

$$\sin u \cdot \cos u = \frac{1}{2} \sin 2u \text{ می دانیم:}$$

$$\sin \frac{\pi}{12} \sin \frac{7\pi}{12} = \sin \frac{\pi}{12} \sin \left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{12}\right) = \sin \frac{\pi}{12} \cos \frac{\pi}{12} = \frac{1}{2} \sin \left(\frac{2\pi}{12}\right) = \frac{1}{2} \sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{4}$$

۲۲. گزینه ۴

$$\cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a \text{ می دانیم:}$$

$$\sin^4 x - \cos^4 x = \sin^2 \frac{5\pi}{4} \Rightarrow (\sin^2 x - \cos^2 x) \underbrace{(\sin^2 x + \cos^2 x)}_1 = \left(\frac{-\sqrt{2}}{2}\right)^2 \Rightarrow -\cos 2x = \frac{1}{2}$$

$$\cos 2x = -\frac{1}{2} = \cos \frac{2\pi}{3} \xrightarrow{x=2k\pi \pm \alpha} 2x = 2k\pi \pm \frac{2\pi}{3} \Rightarrow x = k\pi \pm \frac{\pi}{3}$$

توجه کنید که $\sin \frac{5\pi}{4} = \sin\left(\pi + \frac{\pi}{4}\right) = -\sin \frac{\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ است.

۲۳. گزینه ۱ ابتدا تمام زوایا را برحسب 15° می نویسیم:

$$\cos 285^\circ = \cos(270^\circ + 15^\circ) = \sin 15^\circ, \quad \sin 255^\circ = \sin(270^\circ - 15^\circ) = -\cos 15^\circ$$

$$\sin 525^\circ = \sin(540^\circ - 15^\circ) = \sin(180^\circ - 15^\circ) = \sin 15^\circ, \quad \sin 105^\circ = \sin(90^\circ + 15^\circ) = \cos 15^\circ$$

$$\text{بنابراین داریم: } \frac{\cos 285^\circ - \sin 255^\circ}{\sin 525^\circ - \sin 105^\circ} = \frac{\sin 15^\circ + \cos 15^\circ}{\sin 15^\circ - \cos 15^\circ}$$

تمام جملات را بر $\cos 15^\circ$ تقسیم می کنیم در نتیجه:

$$\frac{\tan 15^\circ + 1}{\tan 15^\circ - 1} = \frac{0,28 + 1}{0,28 - 1} = \frac{1,28}{-0,72} = \frac{-128}{72} = -\frac{16}{9}$$

صفحه ۶

۲۴. گزینه ۱

می دانیم: $\boxed{2 \sin a \cos a = \sin 2a, \cos 2a = 2 \cos^2 a - 1}$

$$2 \cos^2 x + 2 \sin x \cos x = 1 \rightarrow 2 \sin x \cos x = 1 - 2 \cos^2 x$$

$$\rightarrow 2 \sin x \cos x = -(2 \cos^2 x - 1) \rightarrow \sin 2x = -\cos 2x$$

طرفین را بر $\cos 2x$ تقسیم می کنیم:

$$\rightarrow \tan 2x = -1 = \tan\left(-\frac{\pi}{4}\right) \xrightarrow{x=k\pi+\alpha} 2x = k\pi - \frac{\pi}{4} \rightarrow x = \frac{k\pi}{2} - \frac{\pi}{8}$$

۲۵. گزینه ۳ دوره تناوب تابع $y = \sin kx$ برابر $\frac{2\pi}{|k|}$ می باشد.

$$y = a \sin(b\pi x) \rightarrow T = \frac{2\pi}{|b|\pi} = \frac{2}{|b|} = 6 \rightarrow |b| = \frac{1}{3} \rightarrow b = \pm \frac{1}{3}$$

باتوجه به شکل داده شده a و b هر دو مثبت یا هر دو منفی هستند و چون همه گزینه ها مثبت می باشند پس $b = \frac{1}{3}$ قابل قبول است.بیشترین مقدار این تابع از روی شکل ۲ می باشد و بیشترین مقدار $y = a \sin(b\pi x)$ زمانی رخ می دهد که سینوس برابر ۱ باشد

$$\text{بنابراین } a = 2 \text{ است پس } a + b = 2 + \frac{1}{3} = \frac{7}{3}$$

۲۶. گزینه ۴

$$\frac{\sin 3x}{\cos\left(\frac{3\pi}{2} + x\right)} = 1 \rightarrow \frac{\sin 3x}{\sin x} = 1 \xrightarrow{\sin x \neq 0 \rightarrow x \neq k\pi} \sin 3x = \sin x$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 2k\pi + \alpha \\ x = 2k\pi + \pi - \alpha \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 3x = 2k\pi + x \rightarrow 2x = 2k\pi \rightarrow x = k\pi \\ 3x = 2k\pi + \pi - x \rightarrow 4x = 2k\pi + \pi \rightarrow x = \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{4} \end{cases}$$

چون $x \neq k\pi$ می باشد پس جواب $x = \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{4}$ است.۲۷. گزینه ۴ برای پیدا کردن نقاط برخورد نمودار تابع $y = 3 \sin\left(\frac{\pi}{4} - 2x\right)$ با محور x ها روی بازه $\left[-\pi, \frac{3\pi}{2}\right]$ ، کافی استمعادله $3 \sin\left(\frac{\pi}{4} - 2x\right) = 0$ را روی بازه مورد نظر حل کنیم. داریم:

$$3 \sin\left(\frac{\pi}{4} - 2x\right) = 0 \Rightarrow \sin\left(\frac{\pi}{4} - 2x\right) = 0$$

$$\xrightarrow{\text{حالت خاص}} \frac{\pi}{4} - 2x = k\pi \Rightarrow -2x = k\pi - \frac{\pi}{4} \Rightarrow x = \frac{\pi}{8} - \frac{k\pi}{2}$$

حال، جواب های قابل قبول x را که در بازه $\left[-\pi, \frac{3\pi}{2}\right]$ قرار دارند به دست می آوریم:

$$k = 2 \Rightarrow x = \frac{\pi}{8} - \pi = -\frac{7\pi}{8}, \quad k = 1 \Rightarrow x = \frac{\pi}{8} - \frac{\pi}{2} = -\frac{3\pi}{8}$$

$$k = 0 \Rightarrow x = \frac{\pi}{8}, \quad k = -1 \Rightarrow x = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi}{2} = \frac{5\pi}{8}$$

$$k = -2 \Rightarrow x = \frac{\pi}{8} + \pi = \frac{9\pi}{8}$$

در نتیجه، پنج جواب قابل قبول وجود دارد.

صفحه ۷

گزینه ۲۸. ۳

ابتدا تمام زوایا را بر حسب ۲۰° می نویسیم:

$$\sin ۲۵^\circ = \sin(۲۷^\circ - ۲^\circ) = -\cos ۲^\circ, \quad \sin ۷۰^\circ = \sin(۷۲^\circ - ۲^\circ) = \sin(-۲^\circ) = -\sin ۲^\circ$$

$$\cos ۵۶^\circ = \cos(۵۴^\circ + ۲^\circ) = \cos(۱۸^\circ + ۲^\circ) = -\cos ۲^\circ, \quad \cos ۱۱^\circ = \cos(۹^\circ + ۲^\circ) =$$

$$-\sin ۲^\circ$$

$$\text{بنابراین داریم: } \frac{\sin ۲۵^\circ + \sin ۷۰^\circ}{\cos ۵۶^\circ - \cos ۱۱^\circ} = \frac{-\cos ۲^\circ - \sin ۲^\circ}{-\cos ۲^\circ + \sin ۲^\circ}$$

تمام جملات را بر $\cos ۲^\circ$ تقسیم می کنیم در نتیجه:

$$\frac{-1 - \tan ۲^\circ}{-1 + \tan ۲^\circ} = \frac{-1 - ۰/۴}{-1 + ۰/۴} = \frac{-۱/۴}{-۰/۶} = \frac{۱۴}{۶} = \frac{۷}{۳}$$

$$\tan ۲a = \frac{۲ \tan a}{1 - \tan^2 a}, \quad \cot a - \tan a = ۲ \cot ۲a \quad \text{می دانیم: } ۳ \text{ گزینه ۲۹}$$

$$\tan \frac{x}{۲} - \cot \frac{x}{۲} = 1 \rightarrow \cot \frac{x}{۲} - \tan \frac{x}{۲} = -1 \rightarrow ۲ \cot x = -1 \rightarrow \cot x = \frac{-1}{۲} \rightarrow \tan x = -۲$$

$$\tan ۲x = \frac{۲ \tan x}{1 - \tan^2 x} \rightarrow \tan ۲x = \frac{۲(-۲)}{1 - ۴} = \frac{-۴}{-۳} = \frac{۴}{۳}$$

گزینه ۳۰. ۱

$$\cos ۳x + \cos x = 0 \rightarrow \cos ۳x = -\cos x \rightarrow \cos ۳x = \cos(\pi - x)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = ۲k\pi + \alpha \\ \xrightarrow{\quad} ۳x = ۲k\pi + \pi - x \rightarrow ۴x = ۲k\pi + \pi \rightarrow x = \frac{k\pi}{۲} + \frac{\pi}{۴} \\ \\ x = ۲k\pi - \alpha \\ \xrightarrow{\quad} ۳x = ۲k\pi - \pi + x \rightarrow ۲x = ۲k\pi - \pi \rightarrow x = k\pi - \frac{\pi}{۲} \end{cases}$$

چون $\cos x \neq 0$ است پس جواب $x = \frac{k\pi}{۲} + \frac{\pi}{۴}$ قابل قبول است.

$$(\sin a - \cos a)^2 = 1 - \sin ۲a \quad \text{می دانیم: } ۱ \text{ گزینه ۳۱}$$

$$\sin \alpha - \cos \alpha = \frac{۱}{۲} \xrightarrow{\text{توان}} 1 - \sin ۲\alpha = \frac{۱}{۴} \rightarrow \sin ۲\alpha = \frac{۳}{۴}$$

$$\cos\left(\frac{۳\pi}{۲} - ۲\alpha\right) = -\sin ۲\alpha = -\frac{۳}{۴}$$

گزینه ۳۲. ۱

$$\sin^2 x + ۳\cos x = 0 \rightarrow ۲(1 - \cos^2 x) + ۳\cos x = 0$$

$$\rightarrow ۲ - ۲\cos^2 x + ۳\cos x = 0 \rightarrow ۲\cos^2 x - ۳\cos x - ۲ = 0$$

$$\xrightarrow{\cos x = A} ۲A^2 - ۳A - ۲ = 0 \rightarrow \Delta = b^2 - ۴ac = ۹ + ۱۶ = ۲۵$$

$$\rightarrow \begin{cases} \cos x = \frac{۳+۵}{۴} = ۲ \rightarrow (-1 \leq \cos x \leq 1) \text{ امکان ندارد} \\ \\ \cos x = \frac{۳-۵}{۴} = -\frac{۱}{۲} = \cos \frac{۲\pi}{۳} \xrightarrow{x=۲k\pi \pm \alpha} x = ۲k\pi \pm \frac{۲\pi}{۳} \end{cases}$$

گزینه ۳۳. ۱

$$\begin{cases} 1 + \cos u = ۲ \cos^2 \frac{u}{۲} \\ \sin u = ۲ \sin \frac{u}{۲} \cos \frac{u}{۲} \end{cases} \quad \text{می دانیم:}$$

صفحه ۸

$$\frac{\sin \alpha}{1 + \cos \alpha} = \frac{1}{2} \rightarrow \frac{2 \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2}}{2 \cos^2 \frac{\alpha}{2}} = \tan \frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2}$$

$$\tan\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\alpha}{2}\right) = -\cot \frac{\alpha}{2} = \frac{-1}{\tan \frac{\alpha}{2}} = \frac{-1}{\frac{1}{2}} = -2$$

۳۴. گزینه ۲ می‌دانیم: $\sin 2a = 2 \sin a \cos a$

$$2 \tan x \cos^2 x = 1 \rightarrow 2 \frac{\sin x}{\cos x} \cdot \cos^2 x = 1 \rightarrow 2 \sin x \cos x = 1$$

$$\rightarrow \sin 2x = 1 \xrightarrow{\text{حالت خاص}} 2x = 2k\pi + \frac{\pi}{2} \rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{4}$$

$$x = 2k\pi + \frac{\pi}{4}$$

۳۵. گزینه ۴

$$\cos^2 x + 3 \sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) + 2 = 0 \rightarrow \cos^2 x + 3 \cos x + 2 = 0 \xrightarrow{\cos x = A} A^2 + 3A + 2 = 0$$

$$\xrightarrow{a+c=b} \begin{cases} A = -1 \rightarrow \cos x = -1 \xrightarrow{\text{حالت خاص}} x = 2k\pi + \pi = (2k+1)\pi \\ A = -\frac{c}{a} = -2 \rightarrow \cos x = -2 \quad (-1 \leq \cos x \leq 1) \text{ امکان ندارد} \end{cases}$$

۳۶. گزینه ۴

$$\sin 5x + \sin 4x = 1 + \underbrace{\cos \pi}_{-1} \rightarrow \sin 5x = -\sin 4x \rightarrow \sin 5x = \sin(-4x)$$

$$\rightarrow \begin{cases} \xrightarrow{x=2k\pi+\alpha} \delta x = 2k\pi - 4x \rightarrow 9x = 2k\pi \rightarrow x = \frac{2k\pi}{9} \\ \xrightarrow{x=2k\pi+\pi-\alpha} \delta x = 2k\pi + \pi + 4x \rightarrow x = 2k\pi + \pi \end{cases}$$

$$x = \frac{2k\pi}{9} \rightarrow \begin{array}{c|cccccc} k & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & \dots & 9 \\ \hline x & 0 & \frac{2\pi}{9} & \frac{4\pi}{9} & \frac{6\pi}{9} & \frac{8\pi}{9} & \dots & 2\pi \end{array}$$

$$x = 2k\pi + \pi \rightarrow \begin{array}{c|cc} k & 0 & 1 \\ \hline x & \pi & 2\pi \end{array}$$

$$\text{مجموع جواب‌ها} = \frac{2\pi + 4\pi + 6\pi + \dots + 18\pi}{9} + \underbrace{\pi}_{\text{جدول پایین}}$$

$$= \frac{(2+4+6+\dots+18)\pi}{9} + \pi = \frac{90\pi}{9} + \pi = 10\pi + \pi = 11\pi$$

دقت کنید که $2+4+6+\dots+2n = n(n+1)$ است روی همین اصل داریم:

$$2+4+6+\dots+18 = 9(9+1) = 90$$

۳۷. گزینه ۴ می‌دانیم: $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$

$$2 \sin^2 x = 3 \cos x \rightarrow 2(1 - \cos^2 x) = 3 \cos x \rightarrow 2 \cos^2 x + 3 \cos x - 2 = 0$$

$$\xrightarrow{\cos x = A} 2A^2 + 3A - 2 = 0 \rightarrow \Delta = b^2 - 4ac = 9 + 16 = 25$$

$$\rightarrow \begin{cases} \cos x = \frac{-3+5}{4} = \frac{1}{2} = \cos \frac{\pi}{3} \xrightarrow{x=2k\pi \pm \alpha} x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{3} \\ \cos x = \frac{-3-5}{4} = -2 \text{ است. } -1 \leq \cos x \leq 1 \text{ امکان ندارد زیرا} \end{cases}$$

$$\cot a - \tan a = 2 \cot 2a$$

۳۸. گزینه ۲ می‌دانیم:

صفحه ۹

$$\tan \frac{x}{2} - \cot \frac{x}{2} = -(\cot \frac{x}{2} - \tan \frac{x}{2}) = -2 \cot x = -2 \left(\frac{1}{\tan x} \right) = -2 \left(\frac{3}{4} \right) = -\frac{3}{2}$$

۳۹. گزینه ۳ می‌دانیم: $1 + \cos 2a = 2 \cos^2 a$

$$\cos 2x + 2 \cos^2 x = 0 \rightarrow \cos 2x + 1 + \cos 2x = 0 \rightarrow 2 \cos 2x = -1 \rightarrow \cos 2x = -\frac{1}{2}$$

$$\rightarrow \cos 2x = \cos(\pi - \frac{\pi}{3}) = \cos \frac{2\pi}{3} \xrightarrow{x=2k\pi \pm \alpha} 2x = 2k\pi \pm \frac{2\pi}{3} \rightarrow x = k\pi \pm \frac{\pi}{3}$$

۴۰. گزینه ۴ مساحت هر چهار ضلعی از نصف حاصل ضرب دو سینوس زاویه‌ی بینشان به دست می‌آید.

$$S = \frac{1}{2} (12)(8\sqrt{3})(\sin 60^\circ) = (48\sqrt{3}) \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right) = 24 \times 3 = 72$$

۴۱. گزینه ۴ می‌دانیم: $\sin 2a = 2 \sin a \cos a$, $\cos(\frac{\pi}{2} - \alpha) = \sin \alpha$

$$\sin 2x + \cos(\frac{\pi}{2} - x) = 0 \rightarrow 2 \sin x \cos x + \sin x = 0 \rightarrow \sin x(2 \cos x + 1) = 0$$

$$\rightarrow \begin{cases} \text{حال خاص} & k=0,1,2 \\ \sin x = 0 \rightarrow x = k\pi \rightarrow x = 0, \pi, 2\pi \\ 2 \cos x + 1 = 0 \rightarrow \cos x = -\frac{1}{2} = \cos \frac{2\pi}{3} \xrightarrow{x=2k\pi \pm \alpha} \begin{cases} x = 2k\pi + \frac{2\pi}{3} \xrightarrow{k=0} x = \frac{2\pi}{3} \\ x = 2k\pi - \frac{2\pi}{3} \xrightarrow{k=1} x = \frac{4\pi}{3} \end{cases} \end{cases}$$

بنابراین مجموع جواب‌ها برابر $0 + \pi + 2\pi + \frac{2\pi}{3} + \frac{4\pi}{3} = 5\pi$ است.

۴۲. گزینه ۱ می‌دانیم دوره‌ی تناوب تابع $y = a \cos bx$ برابر $T = \frac{2\pi}{|b|}$ است. از روی شکل مشخص است که دوره‌ی تناوب تابع

برابر 4π است.

$$T = \frac{2\pi}{|b|} \rightarrow 4\pi = \frac{2\pi}{|m|} \rightarrow 2 = \frac{1}{|m|} \rightarrow |m| = \frac{1}{2} \rightarrow m = \frac{1}{2}, m = -\frac{1}{2}$$

چون $\cos(-\alpha) = \cos \alpha$ است فرقی نمی‌کند که $m = \frac{1}{2}$ یا $m = -\frac{1}{2}$ باشد.

$$y = \frac{1}{2} + 2 \cos\left(\frac{1}{2}x\right) \rightarrow y\left(\frac{16\pi}{3}\right) = \frac{1}{2} + 2 \cos\left(\frac{1}{2} \times \frac{16\pi}{3}\right) = \frac{1}{2} + 2 \cos \frac{8\pi}{3}$$

$$\rightarrow y\left(\frac{16\pi}{3}\right) = \frac{1}{2} + 2 \cos\left(2\pi + \frac{2\pi}{3}\right) = \frac{1}{2} + 2 \cos \frac{2\pi}{3} = \frac{1}{2} + 2\left(\frac{-1}{2}\right) = \frac{1}{2} - 1 = -\frac{1}{2}$$

۴۳. گزینه ۳ می‌دانیم: $\sin a \cos a = \frac{1}{2} \sin 2a$

$$\frac{1}{\sin 15^\circ} - \frac{1}{\cos 15^\circ} = \frac{\cos 15^\circ - \sin 15^\circ}{\sin 15^\circ \cos 15^\circ} = \frac{\cos 15^\circ - \sin 15^\circ}{\frac{1}{2} \sin 30^\circ}$$

$$\rightarrow A^2 = \frac{\sin^2 15^\circ + \cos^2 15^\circ - 2 \sin 15^\circ \cos 15^\circ}{\frac{1}{16}} = \frac{1 - \sin 30^\circ}{\frac{1}{16}} = \frac{1}{16} = 8$$

$$\rightarrow A = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

۴۴. گزینه ۴ می‌دانیم دوره‌ی تناوب تابع $y = a \sin bx$ برابر $T = \frac{2\pi}{|b|}$ است. از روی شکل مشخص است که دوره‌ی تناوب تابع برابر $\frac{2\pi}{3}$ است.

صفحه ۱۰

$$T = \frac{2\pi}{|b|} \rightarrow \frac{2\pi}{3} = \frac{2\pi}{|m|} \rightarrow |m| = 3 \rightarrow m = 3, m = -3$$

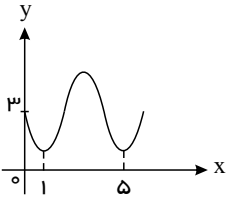
از طرفی تابع در همسایگی راست $x = 0$ نزولی است پس $m > 0$ است یعنی $m = 3$ قابل قبول است.

$$y = 1 - \sin 3x \rightarrow y\left(\frac{7\pi}{6}\right) = 1 - \sin \frac{21\pi}{6} = 1 - \sin \frac{7\pi}{2} = 1 - \sin\left(4\pi - \frac{\pi}{2}\right)$$

$$= 1 - \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 1 - (-1) = 2$$

گزینه ۲

با توجه به شکل روبه رو به راحتی پی می بریم که دوره‌ی تناوب اصلی تابع $y = a + \sin(b\pi x)$ برابر $T = 4$ می باشد. از طرفی عرض از مبدأ این تابع برابر ۳ است یعنی: $f(0) = 3 \rightarrow a = 3$



توجه کنید دوره‌ی تناوب تابع $y = \sin kx$ برابر $T = \frac{2\pi}{|k|}$ است.

$$y = a + \sin\left(\underbrace{b\pi x}_k\right) \Rightarrow \text{دوره‌ی تناوب} = T = \frac{2\pi}{|k|} = \frac{2\pi}{|b\pi|} = \frac{2}{|b|} \xrightarrow{T=4} \frac{2}{|b|} = 4 \Rightarrow |b| = \frac{1}{2} \rightarrow b = \pm \frac{1}{2}$$

چون به ازای $x > 0$ ، تابع ابتدا نزولی می باشد، پس مقدار b منفی می باشد، یعنی $b = -\frac{1}{2}$ است. داریم:

$$y = 3 + \sin\left(-\frac{1}{2}\pi x\right)$$

$$\Rightarrow y\left(\frac{25}{3}\right) = 3 + \sin\left(-\frac{25}{6}\pi\right) = 3 - \sin\left(4\pi + \frac{\pi}{6}\right) = 3 - \sin \frac{\pi}{6} = 3 - \frac{1}{2} = 2,5$$

گزینه ۴

$$\tan 3x \cdot \tan x = 1 \rightarrow \tan 3x = \frac{1}{\tan x} \rightarrow \tan 3x = \cot x \rightarrow \tan 3x = \tan\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$$

$$\xrightarrow{x=k\pi+\alpha} 3x = k\pi + \frac{\pi}{2} - x \rightarrow 4x = k\pi + \frac{\pi}{2} \rightarrow x = \frac{k\pi}{4} + \frac{\pi}{8}$$

گزینه ۲ کسری برابر صفر است که صورتش صفر باشد.

$$\sin 3x + \sin 2x = 0 \rightarrow \sin 3x = -\sin 2x \rightarrow \sin 3x = \sin(-2x)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x = 2k\pi + \alpha \\ \xrightarrow{} 3x = 2k\pi - 2x \rightarrow 5x = 2k\pi \rightarrow x = \frac{2k\pi}{5} \\ \\ x = 2k\pi + \pi - \alpha \\ \xrightarrow{} 3x = 2k\pi + \pi + 2x \rightarrow x = 2k\pi + \pi \end{array} \right. \text{ غ ق ق (مخرج را صفر می کند)}$$