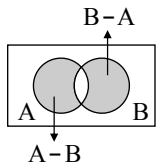
	وقت : دقیقه تعداد سوالات: ۲۶	تاریخ : نام و نام خانوادگی :
آموزشگاه پرسا	موضوع ریاضی ۳ (مجموعه، الگو و دنباله، × پای، مجموعه - الگو - دنباله)	

۱. گزینه ۱

$$\begin{aligned} \text{متمم} &= ((B-A)' - A)' = ((B \cap A')' \cap A')' = ((B \cap A')')' \cup (A')' = (B \cap A') \cup A \\ &= (B \cup A) \cap (A' \cup A) = B \cup A = A \cup B \end{aligned}$$

۲. گزینه ۴



A و B را روی نمودار ون ببینید: $A-B$ و $B-A$ هیچ عضو مشترکی ندارند، پس وقتی $B-A$ را از $A-B$ کم می کنیم، چیزی از $A-B$ کم نمی شود و $A-B$ تغییری نمی کند.

$$(A-B) - (B-A) = A-B$$

در نتیجه:

از طرفی:

$$(A \cap B') - (B-A) = (A-B) - (B-A) = A-B$$

۳. گزینه ۱

$$\begin{aligned} (A-B)' \cap (A \cup B) \cap A' &= (A \cap B')' \cap (A \cup B) \cap A' \\ &= (A' \cup B) \cap (A \cup B) \cap A' = \underbrace{(B \cup \emptyset)}_B \cap A' = B \cap A' = B-A \end{aligned}$$

۴. گزینه ۱

$$\begin{aligned} (A \cup (A \cap B))' \cap ((B \cap A) \cup (B-A)) &= (A' \cap (A \cap B)') \cap (B \cap \underbrace{(A \cup A')}_M) \\ &= (A' \cap (A' \cup B')) \cap \underbrace{(B \cap M)}_B = A' \cap (A' \cup B') \cap B \\ &= A' \cap ((A' \cup B') \cap B) = A' \cap ((A' \cap B) \cup \underbrace{(B' \cap B)}_{\emptyset}) \\ &= A' \cap (A' \cap B) = \underbrace{(A' \cap A')}_{A'} \cap B = A' \cap B = A' - B' \end{aligned}$$

۵. گزینه ۲

$$\begin{aligned} A_1 &= \{m \in \mathbb{Z} \mid -1 \leq m \leq 7\} = \{-1, 0, \dots, 7\} \\ A_2 &= \{m \in \mathbb{Z} \mid -2 \leq m \leq 6\} = \{-2, -1, \dots, 6\} \\ &\vdots \\ A_8 &= \{-8, -7, \dots, 0\} \end{aligned}$$

$$\left. \begin{aligned} \hat{\cup}_{i=1}^8 A_i &= \{-8, -7, -6, \dots, 5, 6, 7\} \Rightarrow \text{تعداد اعضا} = 16 \\ \hat{\cap}_{i=1}^8 A_i &= \{-1, 0\} \Rightarrow \text{تعداد اعضا} \end{aligned} \right\} \begin{aligned} (-) &\longrightarrow \\ &\text{تعداد اعضای باقی مانده} = 14 \end{aligned}$$

۶. گزینه ۱

$$\begin{aligned} a_n &= a_1 + (n-1)d = 5 + (n-1) \times 3 = 5 + 3n - 3 = 3n + 2 \\ a'_n &= a'_1 + (n-1)d' = 4 + (n-1) \times 3 = 4 + 3n - 3 = 3n + 1 \\ a'_n, a_n \text{ اختلاف} &= (3n + 2) - (3n + 1) = 1 \end{aligned}$$

صفحه ۲

۷. گزینه ۲

$$S_n = \frac{n}{2}(2a_1 + (n-1)d) \xrightarrow{S_5=105} 105 = \frac{5}{2}(2a_1 + 4d) \Rightarrow 105 = 5a_1 + 10d$$

تقسیم بر ۵
 $\rightarrow \boxed{a_1 + 2d = 21}$

$$a_3 + a_4 + a_5 = 6(a_1 + a_2) \Rightarrow a_1 + 2d + a_1 + 3d + a_1 + 4d = 6(a_1 + a_1 + d)$$

$$\Rightarrow 3a_1 + 9d = 12a_1 + 6d \Rightarrow 12a_1 + 6d - 3a_1 - 9d = 0 \Rightarrow \boxed{9a_1 - 3d = 0}$$

$$-9 \begin{cases} a_1 + 2d = 21 \\ 9a_1 - 3d = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -9a_1 - 18d = -189 \\ 9a_1 - 3d = 0 \end{cases}$$

$$-21d = -189 \Rightarrow d = \frac{189}{21} = 9 \Rightarrow a_1 + 2(9) = 21 \Rightarrow a_1 = 21 - 18 = 3$$

$$\Rightarrow a_5 = a_1 + 4d \Rightarrow a_5 = 3 + 4(9) = 39$$

۸. گزینه ۴ به کمک روابط $S_n = \frac{n}{2}(2a_1 + (n-1)d)$ و $a_n = a_1 + (n-1)d$ می توان نوشت:

$$\begin{cases} a_1 + a_2 + \dots + a_5 = 60 \\ a_4 + a_5 = 3(a_1 + a_2 + a_3) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{5}{2}(2a_1 + 4d) = 60 \\ a_1 + 3d + a_1 + 4d = 3(3a_1 + 3d) \end{cases}$$

$$\begin{cases} 5a_1 + 10d = 60 \\ 2a_1 + 7d - 9a_1 - 9d = 0 \end{cases} \xrightarrow{\times 5} \begin{cases} 5a_1 + 10d = 60 \\ -7a_1 - 2d = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 5a_1 + 10d = 60 \\ -35a_1 - 10d = 0 \end{cases}$$

$$-30a_1 = 60 \Rightarrow 5a_1 = \frac{60}{-30} = -2$$

$$-7a_1 - 2d = 0 \xrightarrow{a_1 = -2} -7(-2) - 2d = 0 \Rightarrow 14 = 2d \Rightarrow d = \frac{14}{2} = 7$$

۹. گزینه ۳

$$x + \frac{10}{100}x = x + 0,1x = 1,1x$$

قیمت کالا را x در نظر می گیریم که قرار است هر سال ۱۰٪ به آن افزوده شود:

پس در هر سال قیمت ها در ۱٫۱ ضرب می شوند، به عبارت دیگر یک دنباله ی هندسی با نسبت مشترک $(1,1)$ می سازند و داریم:

$$\frac{a_5}{a_1} = \frac{a_1 r^4}{a_1} = r^4 = (1,1)^4 = ((1,1)^2)^2 = (1,21)^2 = 1,4641$$

۱۰. گزینه ۲

$$a_1 + a_2 + a_3 = 33$$

مجموع سه جمله اول ۳۳ است.

$$a_4 + a_5 + a_6 = 60$$

مجموع سه جمله بعدی (یعنی a_4 و a_5 و a_6) برابر ۶۰ می باشد.

با ساده کردن دو معادله نوشته شده مسأله را حل می کنیم.

صفحه ۳

$$a_1 + a_2 + a_3 = 33 \rightarrow a_1 + a_1 + d + a_1 + 2d = 33 \rightarrow 3a_1 + 3d = 33$$

$$a_4 + a_5 + a_6 = 60 \rightarrow a_1 + 3d + a_1 + 4d + a_1 + 5d = 60 \rightarrow 3a_1 + 12d = 60$$

دو معادله را در دستگاه قرار می‌دهیم و حل می‌کنیم.

$$\times (-1) \begin{cases} 3a_1 + 3d = 33 \\ 3a_1 + 12d = 60 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} -3a_1 - 3d = -33 \\ \underline{3a_1 + 12d = 60} \\ 9d = 27 \rightarrow d = 3 \end{cases}$$

با استفاده از یکی از معادلات a_1 را به دست می‌آید.

$$3a_1 + 3d = 33 \xrightarrow{d=3} 3a_1 + 9 = 33 \rightarrow 3a_1 = 24 \rightarrow a_1 = 8$$

حال جمله هشتم را محاسبه می‌کنیم.

$$a_8 = a_1 + 7d = 8 + 7(3) = 8 + 21 = 29$$

۱۱. گزینه ۳

در هر دنباله‌ی حسابی با جمله‌ی اول a_1 و قدر نسبت d جمله‌ی n ام از رابطه‌ی $a_n = a_1 + (n-1)d$ بدست می‌آید و اگر a, b, c سه جمله‌ی متوالی یک دنباله‌ی هندسی باشند آن گاه $b^2 = ac$ است.

$$a_3, a_7, a_9 \Rightarrow a_1 + 2d, a_1 + 6d, a_1 + 8d$$

دنباله‌ی هندسی

$$\rightarrow (a_1 + 2d)(a_1 + 8d) = (a_1 + 6d)^2$$

$$\Rightarrow a_1^2 + 8a_1d + 2a_1d + 16d^2 = a_1^2 + 36d^2 + 12a_1d$$

$$\Rightarrow 20d^2 + 2a_1d = 0 \xrightarrow{\text{تقسیم بر } 2d} 10d + a_1 = 0 \Rightarrow a_1 = -10d$$

۱۲. گزینه ۴

روش اول:

در هر دنباله‌ی حسابی با جمله‌ی اول a_1 و قدر نسبت d جمله‌ی n ام از رابطه‌ی $a_n = a_1 + (n-1)d$ بدست می‌آید و اگر a, b, c سه جمله‌ی متوالی یک دنباله‌ی هندسی باشند آن گاه $b^2 = ac$ است.

$$a_2, a_5, a_{12} \Rightarrow a_1 + d, a_1 + 4d, a_1 + 11d \xrightarrow{\text{دنباله‌ی هندسی}} (a_1 + 4d)^2 = (a_1 + d)(a_1 + 11d)$$

$$\Rightarrow a_1^2 + 8a_1d + 16d^2 = a_1^2 + 12a_1d + 11d^2 \Rightarrow 4a_1d = 5d^2 \Rightarrow d = \frac{4}{5}a_1$$

$$a_1 + d, a_1 + 4d, a_1 + 11d \xrightarrow{d = \frac{4}{5}a_1} \frac{9}{5}a_1, \frac{21}{5}a_1, \frac{49}{5}a_1$$

$$q = \frac{\frac{21}{5}a_1}{\frac{9}{5}a_1} = \frac{21}{9} = \frac{7}{3}$$

روش دوم: اگر a_m, a_n, a_p, \dots جملات یک دنباله‌ی حسابی باشند که با یکدیگر تشکیل دنباله‌ی هندسی می‌دهند قدر نسبت دنباله‌ی هندسی از رابطه‌ی $q = \frac{p-n}{n-m}$ به دست می‌آید.

$$q = \frac{p-n}{n-m} \Rightarrow q = \frac{12-5}{5-2} = \frac{7}{3}$$

۱۳. گزینه ۴

اگر a, b, c سه جمله‌ی متوالی یک دنباله‌ی حسابی باشند آن‌گاه $a + c = 2b$ است و در یک دنباله‌ی هندسی با جمله‌ی اول a_1 و قدر نسبت q ، جمله‌ی n ام از رابطه‌ی $a_n = a_1 q^{n-1}$ بدست می‌آید.

صفحه ۴

$$a_2, 2a_5, a_8 \Rightarrow a_1q, 2a_1q^4, a_1q^7$$

$$\xrightarrow{\text{دنباله‌ی حسابی}} a_1q + a_1q^7 = 4a_1q^4 \xrightarrow{\div a_1q} 1 + q^6 = 4q^3 \Rightarrow q^6 - 4q^3 + 1 = 0$$

$$\xrightarrow{q^3=A} A^2 - 4A + 1 = 0 \Rightarrow \Delta = 16 - 4 = 12 \begin{cases} A = \frac{4 + 2\sqrt{3}}{2} = 2 + \sqrt{3} = q^3 \\ A = \frac{4 - 2\sqrt{3}}{2} = 2 - \sqrt{3} = q^3 \end{cases}$$

اگر فرض کنیم دنباله صعودی است جمله‌ی هشتم بزرگترین جمله است.

$$\frac{a_8}{a_2} = \frac{a_1q^7}{a_1q} = q^6 = (q^3)^2 = (2 + \sqrt{3})^2 = 4 + 3 + 4\sqrt{3} = 7 + 4\sqrt{3}$$

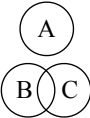
۱۴. گزینه ۲

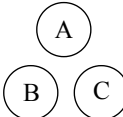
$$\begin{cases} a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 15 \\ a_5 + a_6 + a_7 + a_8 + a_9 = 30 \end{cases} \xrightarrow{a_n = a_1 + (n-1)d} \begin{cases} 4a_1 + 6d = 15 \times (-5) \\ 5a_1 + 30d = 30 \end{cases}$$

$$\rightarrow \begin{cases} -20a_1 - 30d = -75 \\ 5a_1 + 30d = 30 \end{cases} \Rightarrow -15a_1 = -45 \Rightarrow a_1 = 3, d = \frac{1}{2}$$

$$a_{11} = a_1 + 10d = 3 + 10 \left(\frac{1}{2}\right) = 8$$

۱۵. گزینه ۳ به بررسی هر ۴ گزینه می‌پردازیم:

گزینه‌ی اول: سه مجموعه‌ی A و B و C را به صورت  در نظر بگیرید. $A \cap B = \emptyset$ و $A \cap C = \emptyset$ است ولی $B \cap C$ تهی نمی‌باشد پس گزینه‌ی یک نادرست است.

گزینه‌ی دوم: سه مجموعه‌ی A و B و C را به صورت  در نظر بگیرید. $A \cap B = \emptyset$ و $A \cap C = \emptyset$ است و $B \cap C = \emptyset$ است پس گزینه‌ی دوم نادرست است.

گزینه‌ی سوم درست است. $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C) = \emptyset \cup \emptyset = \emptyset$.گزینه‌ی چهارم نادرست است. $A \cap (B - C) = A \cap (B \cap C') = \underbrace{(A \cap B)}_{\emptyset} \cap C' = \emptyset \cap C' = \emptyset \rightarrow$

۱۶. گزینه ۳

$$\begin{array}{ccc} \begin{array}{c} A \quad B \\ \text{Venn diagram with A and B overlapping, A shaded} \end{array} & \begin{array}{c} A \quad B \\ \text{Venn diagram with A and B overlapping, A \cap B shaded} \end{array} & \begin{array}{c} A \quad B \\ \text{Venn diagram with A and B overlapping, A - B shaded} \end{array} \\ A & - & (A \cap B) = A - B \end{array}$$

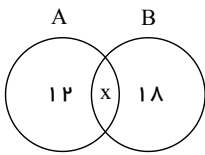
$$\begin{array}{ccc} \begin{array}{c} A \quad B \\ \text{Venn diagram with A and B overlapping, A \cup B shaded} \end{array} & \begin{array}{c} A \quad B \\ \text{Venn diagram with A and B overlapping, A - B shaded} \end{array} & \begin{array}{c} A \quad B \\ \text{Venn diagram with A and B overlapping, B shaded} \end{array} \\ (A \cup B) & - & (A - B) = B \end{array}$$

$$A - (A \cap B) = A - B \Rightarrow (A \cup B) - (A - (A \cap B)) = (A \cup B) - (A - B) = B$$

و مجموعه‌ی B دارای ۴ عضو است.

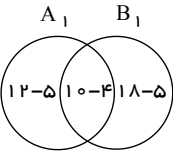
۱۷. گزینه ۴ با توجه به اطلاعات مسئله، نمودار ون مقابل را داریم:

صفحه ۵



$$\rightarrow 12 + x + 18 = 40 \Rightarrow x = 40 - 30 = 10 \Rightarrow n(A \cap B) = 10$$

در برداشتن ۹ عضو از هر یک از مجموعه‌های A و B ، چون از مجموعه‌ی $A \cap B$ ، ۴ عضو کم می‌شود، پس ۵ عضو دیگر از $A - B$ و $B - A$ کم می‌شود:



$$\Rightarrow n(A_1 \cup B_1) = (12 - 5) + (10 - 4) + (18 - 5) = 7 + 6 + 13 = 26$$

۱۸. گزینه ۳ بررسی گزینه‌ها:

گزینه‌ی (۱): چون $A \cap B \subset B$ ، پس تعداد اعضای $A \cap B$ کم‌تر یا مساوی تعداد اعضای B اند و چون B مجموعه‌ای متناهی است، بنابراین $A \cap B$ نیز حتماً متناهی است.

گزینه‌ی (۲): $B - A \subset B$ و B مجموعه‌ای متناهی است. پس $B - A$ نیز مجموعه‌ای متناهی خواهد بود.

گزینه‌ی (۳): A نامتناهی و B متناهی است، پس در مجموعه‌ی $A - B$ از نامتناهی عضو تعداد متناهی عضو را برمی‌داریم، در نتیجه نامتناهی عضو باقی می‌ماند. یعنی $A - B$ مجموعه‌ای نامتناهی است.

گزینه‌ی (۴): $A - B \subset A$ ، پس $(A - B) - A = \emptyset$ در نتیجه فاقد عضو است، یعنی مجموعه‌ای متناهی می‌باشد.

۱۹. گزینه ۲

مجموعه‌ی A به صورت $A = \{1, 3, 5, \dots\}$ و مجموعه‌ی B به صورت $B = \{2, 3, 5, 7, \dots\}$ است.

به بررسی گزینه‌ها می‌پردازیم:

نامتناهی و غیرتهی $A - B = \{1, 9, 15, 21, \dots\}$ گزینه‌ی اول

متناهی و غیرتهی $B - A = \{2\}$ گزینه‌ی دوم

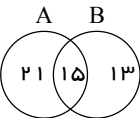
نامتناهی و غیرتهی $A \cap B = \{3, 5, 7, \dots\}$ گزینه‌ی سوم

گزینه‌ی چهارم $A - (A \cup B) = \emptyset$

چون $A \subset (A \cup B)$ است، بنابراین مجموعه‌ی $A - (A \cup B)$ تهی است.

۲۰. گزینه ۳

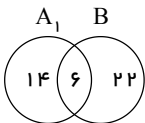
باتوجه به اطلاعات مسئله، نمودار ون مقابل را داریم:



حال وقتی ۱۶ عضو از مجموعه‌ی A حذف شود، ۹ عضو از $A \cap B$ حذف می‌شود، یعنی ۹ عضو از این ۱۶ عضو با B نیز مشترک است

و حذف می‌شوند. پس تنها $6 = 15 - 9$ عضو از مجموعه‌ی جدید (A_1) با B مشترک است و توجه کنید تعداد اعضای مجموعه‌ی B

نباید تغییر کند.



$$\rightarrow n(A_1 \cup B) = 14 + 6 + 22 = 42$$

۲۱. گزینه ۱

$$\begin{cases} a_n = a_1 q^{n-1} \\ a_1 + a_2 = 81 \longrightarrow a_1 + a_1 q = 81 \Rightarrow a_1(1+q) = 81 \quad (1) \\ a_n = a_1 q^{n-1} \\ a_5 + a_6 = 16 \longrightarrow a_1 q^4 + a_1 q^5 = 16 \Rightarrow a_1 q^4(1+q) = 16 \quad (2) \end{cases}$$

حال دو عبارت به دست آمده را بر هم تقسیم می‌کنیم در نتیجه داریم:

$$\Rightarrow \frac{a_1(1+q)}{a_1 q^4(1+q)} = \frac{81}{16} \Rightarrow q^4 = \frac{16}{81}$$

$$\text{مجموع شش جمله} = \underbrace{a_1 + a_2 + a_3 + a_4}_{81} + \underbrace{a_5 + a_6}_{16} = 97 + a_3 + a_4$$

$$97 + a_1 q^2 + a_1 q^3 = 97 + a_1 q^2(1+q) \stackrel{a_1(1+q)=81}{=} 97 + 81 q^2$$

$$97 + 81 \sqrt{q^4} = 97 + 81 \sqrt{\frac{16}{81}} = 97 + 81 \left(\frac{4}{9}\right) = 97 + 36 = 133$$

۲۲. گزینه ۴

$$a_1 = 1 = 2^1 - 1$$

$$a_2 = 2a_1 + 1 = 2(1) + 1 = 3 = 2^2 - 1$$

$$a_3 = 2a_2 + 1 = 2(3) + 1 = 7 = 2^3 - 1$$

$$a_4 = 2a_3 + 1 = 2(7) + 1 = 15 = 2^4 - 1$$

بنابراین جمله ی دهم، برابر $1023 - 1 = 1024 - 1 = 2^{10} - 1$ است.

۲۳. گزینه ۴ این مسأله نشان دهنده ی یک دنباله ی حسابی با جمله ی $a_1 = 750$ و قدر نسبت $d = 25$ و جمله ی آخر $a_n = 2000$ است:

$$750, 775, \dots, 2000$$

$$a_n = a_1 + (n-1)d \rightarrow 2000 = 750 + (n-1)(25) \rightarrow 2000 = 750 + 25n - 25$$

$$\rightarrow 25n = 2000 - 750 + 25 \rightarrow 25n = 1275 \rightarrow n = \frac{1275}{25} = 51$$

۲۴. گزینه ۲

$$A = \{6, 12, 18, \dots\}, \quad B = \{12, 15, 18, \dots, 39\}$$

$B - A$ اعضایی از B هستند که در A نباشند، یعنی اعضایی از B که بر ۶ بخش پذیر نباشند. می‌دانیم اعضای B بر ۳ بخش پذیرند، پس برای آن که بر ۶ بخش پذیر نباشند باید مضرب ۲ نباشند، پس کافی است اعضای فرد B را جدا کنیم:

$$B - A = \{15, 21, 27, 33, 39\} \Rightarrow \text{۵ عضو دارد.}$$

۲۵. گزینه ۴

$$A = \{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, \dots\}$$

$$B = \{1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, \dots\}$$

غیر از عدد ۲ که زوج است تمام اعداد اول، فرد هستند پس غیر از عدد ۲ تمام اعضای مجموعه ی A در مجموعه ی B وجود دارند بنابراین: $A - B = \{2\}$ است که متناهی می‌باشد.

۲۶. گزینه ۳ ابتدا اعضای دو مجموعه را مشخص می‌کنیم:

صفحه ۷

$$A = \left\{ \frac{1}{x} \mid x \in N \right\} = \left\{ 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \frac{1}{7}, \frac{1}{8}, \frac{1}{9}, \frac{1}{10}, \dots \right\}$$

$$B = \left\{ \frac{x}{8} \mid x \in N \right\} = \left\{ \frac{1}{8}, \frac{2}{8}, \frac{3}{8}, \frac{4}{8}, \frac{5}{8}, \frac{6}{8}, \frac{7}{8}, \frac{8}{8}, \frac{9}{8}, \frac{10}{8}, \dots \right\}$$

تمام اعضای مجموعه‌ی A کوچکتر یا مساوی یک هستند ولی در مجموعه‌ی B فقط ۸ عضو این ویژگی را دارند پس اشتراک این دو مجموعه قطعاً محدود است.

$$A \cap B = \left\{ 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \frac{1}{7}, \frac{1}{8}, \dots \right\} \cap \left\{ \frac{1}{8}, \frac{1}{4}, \frac{3}{8}, \frac{1}{2}, \frac{5}{8}, \frac{3}{4}, \frac{7}{8}, 1, \dots \right\}$$

$$= \left\{ 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8} \right\}$$