تاریخ :	وقت : دقیقه
نام و نام خانوادگی :	تعداد سوالات: ۲۲
موضوع ریاضی ۳(× پایه:معادلات و نامعادلات و تابع درجه دوم (معادله درجه دوم،معادلات و نامعادلات)، × پایه:معادلات و نامعادلات و تابع درجه دوم (تابع درجه دوم))	آموزشگاه پرسا

سریال ۱۱۰۵۸۰۲

۱.گزینه ۲

معادله‌ی درجه‌ی دومی که ریشه‌هایش k واحد بیشتر از ریشه های معادله‌ی $ax^۲+bx+c=۰$ می باشد به صورت زیر است:

$$a(x-k)^۲+b(x-k)+c=۰$$

پس کافی است x را به $x-۱$ تبدیل کنیم.

$$۳(x-۱)^۲+۷(x-۱)+۱=۰\Rightarrow ۳x^۲-۶x+۳+۷x-۷+۱=۰\Rightarrow ۳x^۲+x-۳=۰$$

برای مقایسه با $x^۲+ax+b=۰$ معادله را بر ۳ تقسیم می کنیم.

$$x^۲+\frac{۱}{۳}x-۱=۰\rightarrow a=\frac{۱}{۳}\ ,\ b=-۱$$

۲.گزینه ۲

$$mx-۳\sqrt{x}+m-۲=۰\ \Rightarrow\ m(\sqrt{x})^۲-۳\sqrt{x}+m-۲=۰\ (I)$$

$$\xrightarrow{\sqrt{x}=t}\ mt^۲-۳t+m-۲=۰$$

اگر این معادله دارای یک ریشه‌ی مثبت و یک ریشه‌ی منفی باشد معادله‌ی I فقط یک ریشه دارد (زیرا امکان ندارد $\sqrt{x}$ برابر یک مقدار منفی باشد) و شرط آن‌که یک معادله‌ی درجه‌ی دوم دارای دو ریشه‌ی متمایز مختلف‌العلامت باشد آن است که $\frac{c}{a}<۰$ باشد.

$$\frac{c}{a}<۰\ \Rightarrow\ \frac{m-۲}{m}<۰\xrightarrow{\text{تعیین علامت}}۰<m<۲$$

دقت کنید اگر معادله‌ی $mt^۲-۳t+m-۲=۰$ دارای یک ریشه‌ی مضاعف مثبت باشد، نیز معادله‌ی I فقط یک جواب دارد.

$$\begin{cases}\Delta=۰\ \Rightarrow\ b^۲-۴ac=۰\ \Rightarrow\ ۹-۴m(m-۲)=۰\ \Rightarrow\ ۴m^۲-۸m-۹=۰\begin{cases}m=\dfrac{۲+\sqrt{۱۳}}{۲}\\ m=\dfrac{۲-\sqrt{۱۳}}{۲}\end{cases}\\ \underset{\text{ریشه مضاعف}}{\underset{\downarrow}{\dfrac{-b}{۲a}}}>۰\ \Rightarrow\ \dfrac{۳}{۲m}>۰\ \Rightarrow\ m>۰\end{cases}$$

پس جواب می‌شود: $۰<m<۲\cup\left\{\frac{۲+\sqrt{۱۳}}{۲}\right\}$. بنابراین گزینه‌ی دوم می‌تواند صحیح باشد.

۳.گزینه ۲

$$(x^۲+x)^۲-۱۸(x^۲+x)+۷۲=۰\ \xrightarrow{x^۲+x=A}\ A^۲-۱۸A+۷۲=۰\ \Rightarrow(A-۱۲)(A-۶)=۰$$

$$\left.\begin{array}{l}A=۱۲\ \Rightarrow x^۲+x-۱۲=۰\ \xrightarrow{\Delta>۰}\ \alpha+\beta=-\dfrac{b}{a}=-۱\\ A=۶\ \Rightarrow\ x^۲+x-۶=۰\ \xrightarrow{\Delta>۰}\ \alpha'+\beta'=-\dfrac{b}{a}=-۱\end{array}\right\}\Rightarrow\ \alpha+\beta+\alpha'+\beta'=-۲$$

صفحه ۲

۴.گزینه ۱

روش اول: اگر t ریشه‌ی معادله‌ی جدید و x ریشه‌ی معادله ی قدیم باشد آن گاه:

$$t=\frac{۲}{x}\Rightarrow x=\frac{۲}{t}\xrightarrow{\text{معادله}}\frac{۱۶}{t^۲}-\frac{۱۴}{t}+۳=۰\xrightarrow{\times t^۲}۱۶-۱۴t+۳t^۲=۰\to ۳t^۲-۱۴t+۱۶=۰$$

$$\xrightarrow{\text{مقایسه با } ۳x^۲+ax+۱۰=۰} a=-۱۴\ \ ,\ \ b=۱۶$$

روش دوم: ابتدا معادله‌ی درجه‌ی دومی مینویسیم که ریشه‌هایش معکوس ریشه‌های معادله‌ی درجه دوم داده شده باشد سپس معادله ی درجه‌ی دومی می‌نویسیم که ریشه هایش دو برابر ریشه‌های معادله‌ی درجه‌ی دوم بدست آمده باشد پس جای a , c را عوض کرده و سپس b را در ۲ و c را در $۲^۲$ ضرب کنیم.

$$۴x^۲-۷x+۳=۰\ \Rightarrow\ ۳x^۲-۷x+۴=۰\ \Rightarrow\ ۳x^۲-۱۴x+۱۶=۰$$

این معادله را با $۳x^۲+ax+b=۰$ مقایسه می‌کنیم و داریم:

$$a=-۱۴\ \ ,\ \ b=۱۶$$

توجه کنید ریشه‌های معادله‌ی $cx^۲+bx+a=۰$ عکس ریشه‌های معادله‌ی $ax^۲+bx+c=۰$ است. و ریشه‌های معادله‌ی $ax^۲+bkx+ck^۲=۰$، k برابر ریشه‌های معادله‌ی $ax^۲+bx+c=۰$ می‌باشند.

۵.گزینه ۱

اگر بخواهیم دو ریشه ی متمایز داشته باشیم Δ باید بزرگتر از صفر باشد پس داریم:

$$۲x^۲+ax+a-\frac{۳}{۲}=۰$$

$$\Delta=b^۲-۴ac=a^۲-۸a+۱۲>۰\Rightarrow(a-۲)(a-۶)>۰$$

$$\to\begin{array}{c|ccccccc} a & -\infty & & ۲ & & ۶ & & +\infty \\ \hline \text{عبارت}>۰ & & + & ۰ & - & ۰ & + & \end{array}\Rightarrow\begin{cases}a>۶\\ a<۲\end{cases}$$

۶.گزینه ۴

خط $x=۲$ محور تقارن تابع درجه‌ی دوم داده شده است.

$$x=\frac{-b}{۲a}\Rightarrow x=۲=-\frac{۱}{۲a-۲}\Rightarrow ۴a-۴=-۱\Rightarrow a=\frac{۳}{۴}$$

$$y=-\frac{۱}{۴}x^۲+x+۳\xrightarrow[y=۰]{\times(-۴)}y=۰x^۲-۴x-۱۲=۰\Rightarrow(x-۶)(x+۲)=۰\begin{cases}x=-۲\\ x=۶\end{cases}$$

چون طول مثبت را خواسته پس $x=۶$ جواب مسأله است.

۷.گزینه ۱ شرط آنکه معادله‌ی درجه دوم $۲x^۲+(m+۱)x+\frac{۱}{۲}m+۲=۰$ فاقد ریشه‌ی حقیقی باشد، آن است که دلتای معادله، منفی باشد. پس داریم:

$$\Delta<۰\Rightarrow b^۲-۴ac<۰\Rightarrow(m+۱)^۲-۴(۲)(\frac{۱}{۲}m+۲)=(m^۲+۲m+۱)-۴m-۱۶$$

$$=m^۲-۲m-۱۵=(m-۵)(m+۳)<۰\to\begin{array}{c|ccccccc} m & -\infty & & -۳ & & ۵ & & +\infty \\ \hline & & + & ۰ & - & ۰ & + & \end{array}\to -۳<m<۵$$

۸.گزینه ۲ معادله را به صورت $mx^۲+۳x+m^۲-۲=۰$ مرتب می‌کنیم.

صفحه ۳

$$x' = \frac{۱}{x''} \Rightarrow x'x'' = ۱ \Rightarrow \frac{c}{a} = ۱ \Rightarrow \frac{m^۲ - ۲}{m} = ۱ \Rightarrow m^۲ - ۲ = m \Rightarrow m^۲ - m - ۲ = ۰$$

$$\Rightarrow (m-۲)(m+۱) = ۰ \Rightarrow m = ۲ \ , \ m = -۱$$

$m = ۲ \xrightarrow{\text{معادله}} ۲x^۲ + ۳x + ۲ = ۰ \Rightarrow \Delta = b^۲ - ۴ac = ۹ - ۱۶ = -۷ < ۰$ غیر قابل قبول

$m = -۱ \xrightarrow{\text{معادله}} -x^۲ + ۳x - ۱ = ۰ \Rightarrow \Delta = b^۲ - ۴ac = ۹ - ۴ = ۵ > ۰$ قابل قبول

.۹ **گزینه ۳**

برای حل معادله ی $x - ۲\sqrt{x} + m - ۱ = ۰$ از روش تغییر متغیر بهره می گیریم. اگر به جای عبارت $\sqrt{x}$ ، t قرار دهیم، داریم:

$$(\sqrt{x})^۲ - ۲(\sqrt{x}) + m - ۱ = ۰ \xrightarrow{\sqrt{x}=t} t^۲ - ۲t + m - ۱ = ۰$$

برای این که معادله ی داده شده در تست، دو جواب متمایز برای x داشته باشد، باید در معادله ی $t^۲ - ۲t + m - ۱ = ۰$ یکی از حالات زیر اتفاق بیفتد:

-۱ دارای دو ریشه ی حقیقی متمایز مثبت باشد، برای این منظور داریم:

شرط وجود دو ریشه ی مثبت $\Rightarrow \begin{cases} \Delta > ۰ \Rightarrow ۴ - ۴(m-۱) > ۰ \Rightarrow ۸ - ۴m > ۰ \Rightarrow m < ۲ \\ \frac{c}{a} > ۰ \Rightarrow \frac{m-۱}{۱} > ۰ \Rightarrow m - ۱ > ۰ \Rightarrow m > ۱ \\ -\frac{b}{a} > ۰ \Rightarrow -\frac{-۲}{۱} > ۰ \Rightarrow ۲ > ۰ \ \text{برقرار است} \end{cases} \xrightarrow{\text{اشتراک}} ۱ < m < ۲$

-۲ دارای یک ریشه ی صفر و یک ریشه ی مثبت باشد. برای این منظور باید $c = ۰$ و $-\frac{b}{a} > ۰$ باشد. داریم:

$m - ۱ = ۰ \Rightarrow m = ۱$

حال از اجتماع مقادیر به دست آمده در (۱) و (۲) ، حدود m برابر است با: $۱ \leq m < ۲$

.۱۰ **گزینه ۱**

می دانیم: $\boxed{\log_k^a + \log_k^b = \log_k^{ab} \ , \ \log_k^a - \log_k^b = \log_k^{\frac{a}{b}} \ , \ \log_k^{a^n} = n \log_k^a}$

$$a + b = S = -\frac{b}{a} = ۱۰ \ , \ ab = P = \frac{c}{a} = \frac{۱}{۱۰}$$

$$\log a + \log b - \log(a+b) = \log \frac{ab}{a+b} = \log \frac{\frac{۱}{۱۰}}{۱۰} = \log \frac{۱}{۱۰۰} = \log ۱۰^{-۲} = -۲$$

.۱۱ **گزینه ۱** اگر x' و x'' ریشه های معادله باشند داریم:

$$x' + x'' = -\frac{b}{a} = \frac{m+۳}{m} \ , \ x'x'' = \frac{c}{a} = \frac{۵}{m}$$

فرض مسأله: $x'^۲ + x''^۲ = ۶ \Rightarrow (x' + x'')^۲ - ۲x'x'' = ۶ \Rightarrow (\frac{m+۳}{m})^۲ - \frac{۱۰}{m} - ۶ = ۰$

صفحه ۴

$$\Rightarrow \frac{m^۲+۶m+۹}{m^۲}-\frac{۱۰}{m}-۶=۰ \xrightarrow{\times m^۲} m^۲+۶m+۹-۱۰m-۶m^۲=۰$$

$$\Rightarrow ۵m^۲+۴m-۹=۰$$

$$\xrightarrow{a+b+c=۰} \begin{cases} m=۱ \xrightarrow{\text{معادله}} x^۲-۴x+۵=۰ \ : \quad \Delta=۱۶-۲۰<۰ \ \text{غ ق ق} \\ m=-\frac{۹}{۵} \rightarrow \text{با توجه به گزینه ها } \Delta>۰ \text{ است و نیازی به چک کردن گزینه ها نیست} \end{cases}$$

۱۲.**گزینه ۴** می‌دانیم برای نوشتن معادله‌ی درجه‌ی دومی که ریشه‌هایش عکس ریشه‌های معادله‌ی درجه‌ی دوم داده شده‌ای باشد باید جای a و c را عوض کنیم و برای نوشتن معادله‌ی درجه‌ی دومی که ریشه‌هایش k واحد کمتر از ریشه‌های معادله‌ی درجه‌ی دوم داده شده‌ای باشد باید x را به $x+k$ تبدیل کنیم.

$$۲x^۲-۳x-۱=۰ \xrightarrow[\text{جای } a,c \text{ عوض}]{\text{معکوس}} -x^۲-۳x+۲=۰ \xrightarrow[x\rightarrow x+۱]{\text{یک واحد کمتر}} -(x+۱)^۲-۳(x+۱)+۲=۰$$

$$\rightarrow -x^۲-۲x-۱-۳x-۳+۲=۰ \rightarrow x^۲+۵x+۲=۰$$

۱۳.**گزینه ۱**

$$x^۳+(a-۱)x^۲+(۴-a)x-۴=۰$$

چون جمع ضرایب این معادله صفر است پس حتماً یک ریشه‌ی معادله $x=۱$ است و معادله بر $x-۱$ بخش‌پذیر است.

$$\begin{array}{l|l} x^۳+(a-۱)x^۲+(۴-a)x-۴ & x-۱ \\ \hline -x^۳+x^۲ & x^۲+ax+۴ \\ \hline ax^۲+(۴-a)x-۴ & \\ -ax^۲+ax & \\ \hline ۴x-۴ & \\ -۴x+۴ & \\ \hline \text{صفر} & \end{array}$$

بنابراین عبارت درجه‌ی سوم به صورت $(x-۱)(x^۲+ax+۴)=۰$ تجزیه می‌شود یک ریشه‌ی این معادله $x=۱$ است پس معادله‌ی درجه‌ی دوم در پرانتز دوم باید دارای ۲ ریشه‌ی متمایز مثبت باشد (چون سوال گفته معادله دارای ۳ ریشه‌ی حقیقی متمایز مثبت باشد)

$$\Delta>۰ \rightarrow b^۲-۴ac>۰ \rightarrow a^۲-۱۶>۰ \rightarrow a^۲>۱۶ \rightarrow a>۴ \text{ یا } a<-۴ \quad (I)$$

$$S>۰ \rightarrow -\frac{b}{a}>۰ \rightarrow -a>۰ \rightarrow a<۰ \quad (II)$$

$$P>۰ \rightarrow \frac{c}{a}>۰ \rightarrow ۴>۰ \text{ همواره برقرار است} (III)$$

از اشتراک $I\ ,\ II\ ,\ III$ به جواب $a<-۴$ می‌رسیم.

۱۴.**گزینه ۱** بیشترین مقدار تابع درجه‌ی دوم همان عرض رأس سهمی است.

$$y_S=۰ \frac{۴ac-b^۲}{۴a}=۰ \rightarrow ۴ac-b^۲=۰ \rightarrow ۴(k+۳)(k)-۱۶=۰$$

$$\rightarrow ۴k^۲+۱۲k-۱۶=۰ \xrightarrow{a+b+c=۰} \begin{cases} k=۱ \\ k=\frac{c}{a}=-۴ \end{cases}$$

تابع درجه‌ی دوم وقتی دارای Max است که ضریب $x^۲$ منفی باشد پس فقط $k=-۴$ قابل قبول است.

۱۵.**گزینه ۲** ابتدا با قرار دادن $x=۲$ در معادله‌ی داده شده، a را می‌یابیم:

$$x(ax^۲-x-۵)=۲ \xrightarrow{x=۲} ۲(۴a-۲-۵)=۲ \Rightarrow ۴a-۷=۱ \Rightarrow a=۲$$

پس معادله به صورت $۲x^۳-x^۲-۵x-۲=۰$ می‌شود. حال با تقسیم معادله بر $x-۲$ آن را به شکل زیر بازنویسی می‌کنیم:

$$۲x^۳-x^۲-۵x-۲=۰ \Rightarrow (x-۲)(۲x^۲+۳x+۱)=۰$$

صفحه ۵

می‌دانیم مجموع دو ریشه‌ی دیگر که ریشه‌های معادله‌ی درجه دوم داخل پرانتز می‌باشند، برابر با $-\frac{۳}{۲}=-\frac{b}{a}$ می‌شود.

۱۶.گزینه ۳ ریشه‌های معادله‌ی داده شده را α و β در نظر می‌گیریم و طبق فرض $\alpha=۲\beta$ است.

می‌دانیم: $\alpha\cdot\beta=\frac{c}{a}\rightarrow ۲\beta^۲=\frac{۹}{۲}\rightarrow \beta^۲=\frac{۹}{۴}\rightarrow \beta=\pm\frac{۳}{۲}\xrightarrow[\text{مثبت هستند}]{\text{طبق فرض، ریشه‌ها}}\beta=\frac{۳}{۲}\ ,\ \alpha=۳$

$\alpha+\beta=۳+\frac{۳}{۲}=\frac{۹}{۲}=۴/۵$

۱۷.گزینه ۲ اگر در این مثلث طول قاعده را a و ارتفاع وارد بر آن را h بنامیم در این صورت $a+h=۱۶$ است.

$S=\frac{۱}{۲}ah\xrightarrow{h=۱۶-a}S(a)=\frac{۱}{۲}a(۱۶-a)=-\frac{۱}{۲}a^۲+۸a$ تابع درجه‌ی دوم:

$$SMax=\frac{۴ac-b^۲}{۴a}=\frac{۴(-\frac{۱}{۲})(۰)-۶۴}{۴(\frac{-۱}{۲})}=\frac{-۶۴}{-۲}=۳۲$$

۱۸.گزینه ۴ شرط آنکه یک معادله‌ی درجه‌ی دوم دارای دو ریشه‌ی متمایز مثبت باشد آن است که $\Delta>۰$ و $\frac{c}{a}>۰$ و $-\frac{b}{a}>۰$ باشد.

$$\Delta>۰\rightarrow b^۲-۴ac>۰\rightarrow ۴(a-۲)^۲-۴(۱۴-a)>۰\rightarrow (a-۲)^۲-(۱۴-a)>۰$$

$$\rightarrow a^۲+۴-۴a-۱۴+a>۰\rightarrow a^۲-۳a-۱۰>۰\rightarrow (a-۵)(a+۲)>۰\xrightarrow{\text{تعیین علامت}} a<-۲ \text{ یا } a>۵ : I$$

$$\frac{c}{a}>۰\rightarrow ۱۴-a>۰\rightarrow a<۱۴\quad :II$$

$$-\frac{b}{a}>۰\rightarrow ۲(a-۲)>۰\rightarrow a-۲>۰\rightarrow a>۲\quad :III$$

از اشتراک I و II و III به جواب $۵<a<۱۴$ می‌رسیم.

۱۹.گزینه ۴ اگر ریشه‌های معادله‌ی درجه‌ی دوم $ax^۲+bx+c=۰$ را α و β بنامیم در این صورت $\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}=\sqrt{S+۲\sqrt{p}}$ است. $(\alpha,\beta>۰)$

$$\begin{cases} S=\alpha+\beta=-\frac{b}{a}=\frac{m+۱}{۲} \\ P=\alpha\beta=\frac{c}{a}=\frac{۱}{۱۶}\end{cases}\rightarrow \sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}=۲\rightarrow\sqrt{S+۲\sqrt{P}}=۲\xrightarrow{\text{توان ۲}}S+۲\sqrt{P}=۴$$

$$\rightarrow\frac{m+۱}{۲}+۲(\frac{۱}{۴})=۴\rightarrow\frac{m+۱}{۲}+\frac{۱}{۲}=۴\rightarrow\frac{m+۲}{۲}=۴\rightarrow m+۲=۸\rightarrow m=۶$$

۲۰.گزینه ۲ شرط آنکه یک تابع درجه‌ی دوم همواره مثبت باشد (بالای محور xها باشد) آن است که $a>۰$ و $\Delta<۰$ باشد.

$$a>۰\rightarrow ۱-a>۰\rightarrow a<۱\ :\ I$$

$$\Delta<۰\rightarrow b^۲-۴ac<۰\rightarrow ۲۴-۴(۱-a)(-a)<۰\rightarrow ۲۴+۴a-۴a^۲<۰$$

$$\xrightarrow{\div(-۴)}a^۲-a-۶>۰\rightarrow(a-۳)(a+۲)>۰\xrightarrow{\text{تعیین علامت}}a<-۲ \text{ یا } a>۳\ :\ II$$

از اشتراک I و II به جواب $a<-۲$ می‌رسیم.

۲۱.گزینه ۳ اگر ریشه‌های معادله‌ی $۲x^۲-x-۲=۰$ را α و β در نظر بگیریم در این صورت ریشه‌های معادله‌ی $۸x^۲-mx-۸=۰$ برابر $\alpha^۳$ و $\beta^۳$ هستند.

صفحه ۶

$$S=\alpha+\beta=-\frac{b}{a}=\frac{۱}{۲} \quad , \quad P=\alpha\beta=\frac{c}{a}=-۱$$

داریم : $\alpha^{۳}+\beta^{۳}=(\alpha+\beta)^{۳}-۳\alpha\beta(\alpha+\beta)=\frac{۱}{۸}+\frac{۳}{۲}=\frac{۱۳}{۸}$

$$\alpha^{۳}\cdot\beta^{۳}=(\alpha\cdot\beta)^{۳}=(-۱)^{۳}=-۱$$

معادله‌ی درجه‌ی دوم : $x^{۲}-Sx+P=۰\rightarrow x^{۲}-\frac{۱۳}{۸}x-۱=۰\rightarrow ۸x^{۲}-۱۳x-۸=۰$

$$\xrightarrow{\text{مقایسه با } ۸x^{۲}-mx-۸=۰} m=۱۳$$

۲۲.گزینه ۴ شرط آنکه یک معادله‌ی درجه‌ی دوم دارای دو ریشه‌ی حقیقی منفی متمایز باشد آن است که $\Delta>۰$، $S<۰$ و $P>۰$ باشد.

$$\Delta>۰\xrightarrow{b^{۲}-۴ac>۰}۴m^{۲}-۴(m-۶)(-۳)>۰\rightarrow m^{۲}+۳m-۱۸>۰\rightarrow(m+۶)(m-۳)>۰$$

$$\xrightarrow{\text{تعیین علامت}} m<-۶ \quad \text{یا} \quad m>۳ \quad (I)$$

$$S<۰\rightarrow\frac{-b}{a}<۰\rightarrow\frac{۲m}{m-۶}<۰\xrightarrow{\text{تعیین علامت}}۰<m<۶ \qquad (II)$$

$$P>۰\rightarrow\frac{c}{a}>۰\rightarrow\frac{-۳}{m-۶}>۰\rightarrow m-۶<۰\rightarrow m<۶ \qquad (III)$$

از اشتراک جواب‌های I و II و III به جواب $۳<m<۶$ می‌رسیم.