نام آزمون: نمونه سوال تشریحی نهایی حد

آموزشگاه پرسا

۱ حد توابع زیر را به‌دست آورید.

الف

$$\lim_{x\to ۳^-} \frac{[x]-۳}{x-۳}$$

ب

$$\lim_{x\to ۳} \frac{x^۲-۹}{\sqrt{x+۱}-۲}$$

۲ نمودارتابع $f(x)=\sqrt{x-۲}$ را رسم کرده و از روی نمودار حد تابع $f(x)$ را وقتی که $x\to ۳$ بدست آورید.

۳ حد عبارت $f(x)=\dfrac{\sqrt{۹x+\sqrt{۹x}}-۳\sqrt{x}}{۵\sqrt{x}}$ وقتی که $x\to +\infty$ را بدست آورید.

۴ حدود زیر را محاسبه کنید.

الف

$$\lim_{x\to -\infty} (۹+\frac{۷}{x^۳})$$

ب

$$\lim_{x\to +\infty} (-\frac{۱}{۲}x^۳+۷x^۲-۶)$$

پ

$$\lim_{x\to -\infty} \frac{۱}{۲x-۳}$$

ت

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{۳+\frac{۱}{x^۲}}{\frac{۴}{x}-۵}$$

ث

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{۲x-۱}{۳x+۱}$$

ج

$$\lim_{x\to -\infty} \frac{۲x^۲-۳x+۱}{x^۲+۵x-۳}$$

چ

$$\lim_{x\to -\infty} \frac{۲x^۵-۶x^۳-x}{x^۲-۵x+۱}$$

ح

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{x^۲+x}{۳-x}$$

خ

$$\lim_{x\to -\infty} \frac{-۶x^۳+۷x-۹}{۲x^۳-۴x^۲+x}$$

د

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{۲x+۱}{۴}$$

۵ حدود زیر را محاسبه کنید.

الف

$$\lim_{x\to۱}\frac{۲x^۳+۵x^۲+۲x-۹}{۴x^۲+۷x-۱۱}$$

ب

$$\lim_{x\to۴}\frac{x^۲-۱۶}{|x-۴|}$$

پ

$$\lim_{x\to-۲}\frac{۲x^۳+۳x^۲+۴}{x^۳+۸}$$

ت

$$\lim_{x\to۱}\frac{۴x^۲+۳x-۷}{\sqrt{x^۲-۲x+۱}}$$

ث

$$\lim_{x\to۵}\frac{۲-\sqrt{x-۱}}{x-۵}$$

۶ حدود زیر را محاسبه کنید.

الف

$$\lim_{x\to۲}\frac{x^۳+۲x-۱۲}{\sqrt{x+۷}-۳}$$

ب

$$\lim_{x\to۲}\frac{x-\sqrt{x+۲}}{۳x-\sqrt{۱۳x+۱۰}}$$

پ

$$\lim_{x\to۸}\frac{x^۲-۸x}{\sqrt[۳]{x}-۲}$$

ت

$$\lim_{x\to۴}\frac{\sqrt{x+۵}-۳}{\sqrt[۳]{۲x}-۲}$$

ث

$$\lim_{x\to۱}\frac{\sqrt[۴]{x}-۱}{۲x^۲+۳x-۵}$$

۷ حدود زیر را محاسبه کنید.

الف

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{(۴x+۳)^۲+(۳x-۱)^۲}{(۵x+۱۷)^۲}$$

ب

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{۹x^۲+۱}+\sqrt{۴x^۲-x}}{\sqrt{۲۵x^۲+۹}+x}$$

پ

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{۶x-\sqrt{۴x^۲+۱}}{۷x+\sqrt{۹x^۲+۸}}$$

ت

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x}+\sqrt[۳]{x}+\sqrt[۴]{x}}{\sqrt{۲x+۱۷}}$$

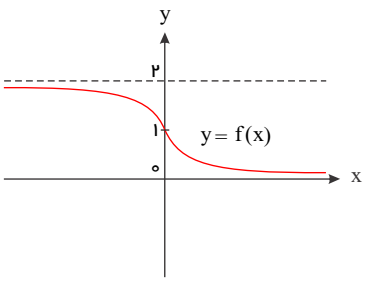
ث

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x\sqrt{x}-۱۷}{\sqrt{x^۳+۲}}$$

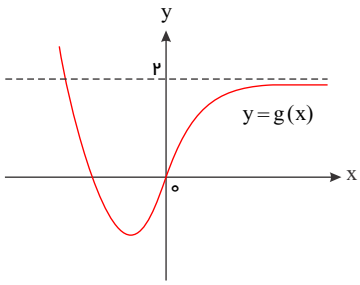
۸ حد عبارت $f(x)=\dfrac{\sqrt{x}-۲}{\sqrt{۲x+۱}-۳}$ را در $x=۴$ بدست آورید.

۹ با توجه به نمودار توابع، حدود خواسته شده را بنویسید.

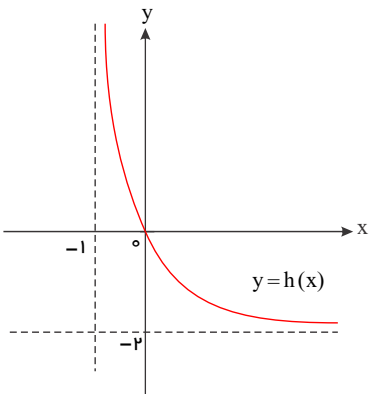
(الف)



(ب)



(پ)



$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\cdots$ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\cdots$

$\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)=\cdots$ $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=\cdots$

$\lim\limits_{x\to+\infty} h(x)=\cdots$ $\lim\limits_{x\to(-۱)^+} h(x)=\cdots$

۱۰ اگر باقی‌ماندهٔ تقسیم $P(x)=x^۳-mx^۲+x+۳$ بر $x+۱$ برابر -۳ باشد، آنگاه باقی‌ماندهٔ $P(x)$ بر $x-۲$ را بیابید.

۱۱ اگر باقی‌ماندهٔ تقسیم چندجمله‌ای $f(x)$ بر $x+۱$ و $x-۱$ به‌ترتیب ۱ و ۳ باشد، باقی‌ماندهٔ تقسیم $f(x)$ بر $x^۲-۱$ را بیابید.

۱۲ m و n را چنان بیابید که چندجمله‌ای $x^۴-۳x^۳+mx+n$ بر $x^۲-۵x+۶$ بخش‌پذیر باشد.

۱۳ اگر باقی‌ماندهٔ تقسیم $f(x)=x^۳-x^۲+m^۲+۳$ بر $x+۱$ بزرگ‌تر از ۱۰ باشد، حدود m را بیابید.

۱۴ اگر $f(x)=x^۲-mx+۲$ بر $۲x-۴$ بخش‌پذیر باشد، m را بیابید.

۱۵ حدهای زیر را در صورت وجود محاسبه کنید.

الف

$$\lim_{x\to\frac{۱}{۲}}\frac{۲x^۲-x}{۴x^۲-۱}$$

ب

$$\lim_{x\to۵}\frac{x^۳-۴x^۲-۴x-۵}{x^۲-۲۵}$$

پ

$$\lim_{x\to -۴}\frac{x^۲+۳x-۴}{x^۳+۴x^۲+x+۴}$$

۱۶ حدود زیر را در صورت وجود، به دست آورید.

الف

$$\lim_{x\to ۱}\frac{x-\sqrt{۲x-۱}}{x^۲-x}$$

ب

$$\lim_{x\to ۳}\frac{x^۲-۹}{۲-\sqrt{x+۱}}$$

پ

$$\lim_{x\to -۸}\frac{۲x+۱۶}{\sqrt[۳]{x}+۲}$$

۱۷ در جاهای خالی عبارت مناسب بنویسید.

الف حد تابع $f(x)=\dfrac{-۳x^۷+۵x^۲}{۲x^۳+۹}$ وقتی $x\to -\infty$ میل می‌کند برابر ..... می‌باشد.

۱۸ حد کسر $\dfrac{(x+\sqrt{x}+۱)^۲-(x+\sqrt{x}-۱)^۲}{(\sqrt{x}-۱)^۲+(۲\sqrt{x}-۱)^۲}$ وقتی $x\to +\infty$ چقدر است؟

۱۹ اگر $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{|x^۲-۴|}{ax^۲-x+۲}=-۱$ آن‌گاه حد راست این عبارت در نقطهٔ $x=-۲$ چقدر است؟

۲۰ حاصل هر یک از حدهای زیر را به‌دست آورید.

الف

$$\lim_{x\to ۰}\frac{\sqrt{۲+\sin x}-\sqrt{۲-\sin x}}{۳x}$$

ب

$$\lim_{x\to ۱^+}\frac{\sqrt{x^۲-۱}+x-۱}{\sqrt{۴x-۴}+x^۲-۱}$$

پ

$$\lim_{x\to ۳^-}\frac{۳-[x]}{x-۳}\sqrt{x^۲-۶x+۹}$$

پاسخ‌نامه تشریحی

۱

الف

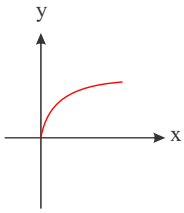
$$\lim_{x\to ۳^-}\frac{[x]-۳}{x-۳}=\frac{[۳^-]-۳}{۳^--۳}=\frac{۲-۳}{۰^-}=\frac{-۱}{۰^-}=+\infty$$

ب

$$\lim_{x\to ۳}\frac{x^۲-۹}{\sqrt{x+۱}-۲}=\frac{۰}{۰}\longrightarrow\lim_{x\to ۳}\frac{x^۲-۹}{\sqrt{x+۱}-۲}\times\frac{\sqrt{x+۱}+۲}{\sqrt{x+۱}+۲}$$

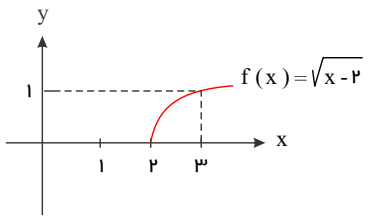
$$=\lim_{x\to ۳}\frac{(x+۳)(x-۳)(\sqrt{x+۱}+۲)}{(x+۱-۴)}=\lim_{x\to ۳}(x+۳)(\sqrt{x+۱}+۲)=۶\times ۴=۲۴$$

۲ می‌دانیم: نمودار $f(x)=\sqrt{x}$ به صورت



است.

پس نمودار $f(x)=\sqrt{x-۲}$ به کمک انتقال $f(x)=\sqrt{x}$ دو واحد روی نمودار محور xها به سمت مثبت xها انتقال پیدا می‌کند. پس با توجه به داریم:



$$\lim_{x\to ۳^+}f(x)=\sqrt{۳^+-۲}=۱\ ,\ \lim_{x\to ۳^-}f(x)=\sqrt{۳^--۲}=۱$$

پس حد تابع $f(x)$ برابر یک است.

۳

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\frac{\sqrt{۹x+\sqrt{۹x}}-۳\sqrt{x}}{۵\sqrt{x}}\times\frac{\sqrt{۹x+\sqrt{۹x}}+۳\sqrt{x}}{\sqrt{۹x+\sqrt{۹x}}+۳\sqrt{x}}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{(۹x+\sqrt{۹x}-۹x)}{۵\sqrt{x}\times(\sqrt{۹x+\sqrt{۹x}}+۳\sqrt{x})}=\lim_{x\to+\infty}\frac{۳\sqrt{x}}{۱۵x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{۱}{۵\sqrt{x}}=\frac{۱}{\infty}=۰$$

۴

الف

$$\lim_{x\to-\infty}(۹+\frac{۷}{x^۳})=۹+۰=۹$$

ب

می‌دانیم:

$$\lim_{x\to+\infty}ax^n=\begin{cases}+\infty & (a\text{ مثبت})\\ -\infty & (a\text{ منفی})\end{cases}$$

$$\lim_{x\to+\infty}(-\frac{۱}{۲}x^۳+۷x^۲-۶)=\lim_{x\to+\infty}x^۳(-\frac{۱}{۲}+\frac{۷}{x}-\frac{۶}{x^۳})=\lim_{x\to+\infty}-\frac{۱}{۲}x^۳=-\infty$$

پ

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{۱}{۲x-۳}=\frac{۱}{-\infty}=۰$$

ت

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{۳+\frac{۱}{x^۲}}{\frac{۴}{x}-۵}=\frac{۳+۰}{۰-۵}=-\frac{۳}{۵}$$

ث

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{۲x-۱}{۳x+۱}=\lim_{x\to+\infty}\frac{۲x}{۳x}=\frac{۲}{۳}$$

ج

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{۲x^۲-۳x+۱}{x^۲+۵x-۳}=\lim_{x\to-\infty}\frac{۲x^۲}{x^۲}=۲$$

چ

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{۲x^۵-۶x^۳-x}{x^۲-۵x+۱}=\lim_{x\to-\infty}\frac{۲x^۵}{x^۲}=\lim_{x\to-\infty}۲x^۳=-\infty$$

ح

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^۲+x}{۳-x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^۲}{-x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{-۱}=\frac{+\infty}{-۱}=-\infty$$

خ

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{-۶x^۳+۷x-۹}{۲x^۳-۴x^۲+x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-۶x^۳}{۲x^۳}=-۳$$

د

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{۲x+۱}{۴}=\frac{+\infty}{۴}=+\infty$$

۵

الف

$$\lim_{x\to۱}\frac{۲x^۳+۵x^۲+۲x-۹}{۴x^۲+۷x-۱۱}=\frac{۰}{۰}\ \text{مبهم}$$

برای رفع ابهام، صورت و مخرج را بر عامل ابهام یعنی $x-۱$ تقسیم می‌کنیم.

$$\begin{array}{r|l}۲x^۳+۵x^۲+۲x-۹ & x-۱\\ \hline -۲x^۳+۲x^۲ & ۲x^۲+۷x+۹\\ \hline ۷x^۲+۲x-۹ & \\ -۷x^۲+۷x & \\ \hline ۹x-۹ & \\ -۹x+۹ & \\ \hline \text{صفر} & \end{array}\qquad \text{و}\qquad \begin{array}{r|l}۴x^۲+۷x-۱۱ & x-۱\\ \hline -۴x^۲+۴x & ۴x+۱۱\\ \hline ۱۱x-۱۱ & \\ -۱۱x+۱۱ & \\ \hline \text{صفر} & \end{array}$$

پس: $\lim_{x\to۱}\frac{۲x^۳+۵x^۲+۲x-۹}{۴x^۲+۷x-۱۱}=\lim_{x\to۱}\frac{(x-۱)(۲x^۲+۷x+۹)}{(x-۱)(۴x+۱۱)}$

$$=\lim_{x\to۱}\frac{۲x^۲+۷x+۹}{۴x+۱۱}=\frac{۱۸}{۱۵}=\frac{۶}{۵}$$

ب

$$\lim_{x\to۴}\frac{x^۲-۱۶}{|x-۴|}=\frac{۰}{۰}\ \text{مبهم}\to\lim_{x\to۴}\frac{x^۲-۱۶}{|x-۴|}=\lim_{x\to۴}\frac{(x+۴)(x-۴)}{\underbrace{|x-۴|}_{۰}}$$

$$\to\begin{cases}\lim\limits_{x\to۴^+}\dfrac{(x+۴)(x-۴)}{\underbrace{|x-۴|}_{+}}=\lim\limits_{x\to۴^+}\dfrac{(x+۴)(x-۴)}{(x-۴)}=۸\\ \lim\limits_{x\to۴^-}\dfrac{(x+۴)(x-۴)}{\underbrace{|x-۴|}_{-}}=\lim\limits_{x\to۴^-}\dfrac{(x+۴)(x-۴)}{-(x-۴)}=-۸\end{cases}$$

بنابراین تابع در $x=۴$ حد ندارد.

پ

$$\lim_{x\to -۲}\frac{۲x^۳+۳x^۲+۴}{x^۳+۸}=\frac{۰}{۰}$$ مبهم

برای رفع ابهام، صورت را بر عامل ابهام یعنی $x+۲$ تقسیم می‌کنیم و در مخرج از اتحاد چاق‌ولاغر استفاده می‌کنیم.

$$a^۳+b^۳=(a+b)(a^۲+b^۲-ab)$$

$$\begin{array}{r|l} ۲x^۳+۳x^۲+۴ & x+۲ \\ \hline -۲x^۳-۴x^۲ & ۲x^۲-x+۲ \\ \hline -x^۲+۴ & \\ x^۲+۲x & \\ \hline ۲x+۴ & \\ -۲x-۴ & \\ \hline \text{صفر} & \end{array}$$

پس: $$\lim_{x\to -۲}\frac{۲x^۳+۳x^۲+۴}{x^۳+۸}=\lim_{x\to -۲}\frac{(x+۲)(۲x^۲-x+۲)}{(x+۲)(x^۲+۴-۲x)}$$

$$=\lim_{x\to -۲}\frac{۲x^۲-x+۲}{x^۲+۴-۲x}=\frac{۱۲}{۱۲}=۱$$

ت

$$\lim_{x\to ۱}\frac{۴x^۲+۳x-۷}{\sqrt{x^۲-۲x+۱}}=\lim_{x\to ۱}\frac{۴x^۲+۳x-۷}{\sqrt{(x-۱)^۲}}=\lim_{x\to ۱}\frac{۴x^۲+۳x-۷}{|x-۱|}=\frac{۰}{۰}$$ مبهم

برای رفع ابهام، صورت را بر عامل ابهام یعنی $x-۱$ تقسیم می‌کنیم و چون داخل قدرمطلق، صفر شده است باید حد راست و حد چپ را محاسبه کنیم.

$$\begin{array}{r|l} ۴x^۲+۳x-۷ & x-۱ \\ \hline -۴x^۲+۴x & ۴x+۷ \\ \hline ۷x-۷ & \\ -۷x+۷ & \\ \hline \text{صفر} & \end{array}$$

پس: $$\lim_{x\to ۱}\frac{۴x^۲+۳x-۷}{|x-۱|}=\lim_{x\to ۱}\frac{(x-۱)(۴x+۷)}{|x-۱|}$$

$$\to\begin{cases}\lim\limits_{x\to ۱^+}\dfrac{(x-۱)(۴x+۷)}{\underbrace{|x-۱|}_{+}}=\lim\limits_{x\to ۱^+}\dfrac{(x-۱)(۴x+۷)}{(x-۱)}=۱۱\\ \lim\limits_{x\to ۱^-}\dfrac{(x-۱)(۴x+۷)}{\underbrace{|x-۱|}_{-}}=\lim\limits_{x\to ۱^-}\dfrac{(x-۱)(۴x+۷)}{-(x-۱)}=-۱۱\end{cases}$$

بنابراین تابع در $x=۱$ حد ندارد.

ث

$$\lim_{x\to ۵}\frac{۲-\sqrt{x-۱}}{x-۵}=\frac{۰}{۰}$$ مبهم

برای رفع ابهام ،عبارت را در مزدوج صورت، ضرب و تقسیم می‌کنیم.

$$\lim_{x\to ۵}\frac{۲-\sqrt{x-۱}}{x-۵}\times\frac{۲+\sqrt{x-۱}}{۲+\sqrt{x-۱}}=\lim_{x\to ۵}\frac{۴-(x-۱)}{(x-۵)(۲+\sqrt{x-۱})}$$

$$=\lim_{x\to ۵}\frac{-x+۵}{(x-۵)(۲+\sqrt{x-۱})}=\lim_{x\to ۵}\frac{-(x-۵)}{(x-۵)(۲+\sqrt{x-۱})}=\lim_{x\to ۵}\frac{-۱}{۲+\sqrt{x-۱}}=\frac{-۱}{۴}$$

الف

$$\lim_{x\to ۲}\frac{x^۳+۲x-۱۲}{\sqrt{x+۷}-۳}=\frac{۰}{۰}$$ مبهم

برای رفع ابهام، عبارت را در مزدوج مخرج، ضرب و تقسیم می‌کنیم و برای تجزیهٔ صورت، آن را بر عامل ابهام یعنی $x-۲$ تقسیم می‌کنیم.

$$\begin{array}{r|l} x^۳+۲x-۱۲ & x-۲ \\ \hline -x^۳+۲x^۲ & x^۲+۲x+۶ \\ \hline ۲x^۲+۲x-۱۲ & \\ -۲x^۲+۴x & \\ \hline ۶x-۱۲ & \\ -۶x+۱۲ & \\ \hline \text{صفر} & \end{array}$$

پس: $$\lim_{x\to ۲}\frac{(x-۲)(x^۲+۲x+۶)}{\sqrt{x+۷}-۳}\times\frac{\sqrt{x+۷}+۳}{\sqrt{x+۷}+۳}$$

$$=\lim_{x\to ۲}\frac{(x-۲)(x^۲+۲x+۶)(\sqrt{x+۷}+۳)}{(x+۷-۹)}=\lim_{x\to ۲}(x^۲+۲x+۶)(\sqrt{x+۷}+۳)=(۱۴)(۶)=۸۴$$

ب

$$\lim_{x\to ۲}\frac{x-\sqrt{x+۲}}{۳x-\sqrt{۱۳x+۱۰}}=\frac{۰}{۰}$$ مبهم

برای رفع ابهام، عبارت را در مزدوج صورت و مخرج، ضرب و تقسیم می‌کنیم.

$$\lim_{x\to ۲}\frac{x-\sqrt{x+۲}}{۳x-\sqrt{۱۳x+۱۰}}\times\frac{x+\sqrt{x+۲}}{x+\sqrt{x+۲}}\times\frac{۳x+\sqrt{۱۳x+۱۰}}{۳x+\sqrt{۱۳x+۱۰}}$$

$$=\lim_{x\to ۲}\frac{(x^۲-x-۲)(۳x+\sqrt{۱۳x+۱۰})}{\underbrace{(۹x^۲-۱۳x-۱۰)}_{\text{تقسیم بر } x-۲}(x+\sqrt{x+۲})}=\lim_{x\to ۲}\frac{(x-۲)(x+۱)(۳x+\sqrt{۱۳x+۱۰})}{(x-۲)(۹x+۵)(x+\sqrt{x+۲})}$$

$$=\lim_{x\to ۲}\frac{(x+۱)(۳x+\sqrt{۱۳x+۱۰})}{(۹x+۵)(x+\sqrt{x+۲})}=\frac{(۳)(۱۲)}{(۲۳)(۴)}=\frac{۹}{۲۳}$$

پ

$$\lim_{x\to ۸}\frac{x^۲-۸x}{\sqrt[۳]{x}-۲}=\frac{۰}{۰}$$ مبهم

برای رفع ابهام از اتحاد چاق‌ولاغر استفاده می‌کنیم: $(a-b)(a^۲+b^۲+ab)=a^۳-b^۳$

پس: $$\lim_{x\to ۸}\frac{x^۲-۸x}{\sqrt[۳]{x}-۲}\times\frac{\sqrt[۳]{x^۲}+۴+۲\sqrt[۳]{x}}{\sqrt[۳]{x^۲}+۴+۲\sqrt[۳]{x}}=\lim_{x\to ۸}\frac{x(x-۸)(\sqrt[۳]{x^۲}+۴+۲\sqrt[۳]{x})}{(x-۸)}$$

$$=\lim_{x\to ۸}x(\sqrt[۳]{x^۲}+۴+۲\sqrt[۳]{x})=۸(۱۲)=۹۶$$

ت

$$\lim_{x\to ۴}\frac{\sqrt{x+۵}-۳}{\sqrt[۳]{۲x}-۲}=\frac{۰}{۰}$$ مبهم

برای رفع ابهام، عبارت را در مزدوج صورت، ضرب و تقسیم می‌کنیم و برای مخرج از اتحاد چاق و لاغر استفاده می‌کنیم:

$(a-b)(a^۲+b^۲+ab)=a^۳-b^۳$

پس: $\lim\limits_{x\to ۴}\dfrac{\sqrt{x+۵}-۳}{\sqrt[۳]{۲x}-۲}\times\dfrac{\sqrt{x+۵}+۳}{\sqrt{x+۵}+۳}\times\dfrac{\sqrt[۳]{۴x^۲}+۴+۲\sqrt[۳]{۲x}}{\sqrt[۳]{۴x^۲}+۴+۲\sqrt[۳]{۲x}}$

$=\lim\limits_{x\to ۴}\dfrac{(x+۵-۹)(\sqrt[۳]{۴x^۲}+۴+۲\sqrt[۳]{۲x})}{(۲x-۸)(\sqrt{x+۵}+۳)}=\lim\limits_{x\to ۴}\dfrac{(x-۴)(\sqrt[۳]{۴x^۲}+۴+۲\sqrt[۳]{۲x})}{۲(x-۴)(\sqrt{x+۵}+۳)}$

$=\lim\limits_{x\to ۴}\dfrac{\sqrt[۳]{۴x^۲}+۴+۲\sqrt[۳]{۲x}}{۲(\sqrt{x+۵}+۳)}=\dfrac{۴+۴+۴}{۲(۶)}=\dfrac{۱۲}{۱۲}=۱$

ث

$\lim\limits_{x\to ۱}\dfrac{\sqrt[۴]{x}-۱}{۲x^۲+۳x-۵}=\dfrac{۰}{۰}$ مبهم

برای رفع ابهام، عبارت را در مزدوج صورت، ضرب و تقسیم می‌کنیم و مخرج را بر عامل ابهام یعنی $x-۱$ تقسیم می‌کنیم.

$$\begin{array}{r|l} ۲x^۲+۳x-۵ & x-۱ \\ \hline -۲x^۲+۲x & ۲x+۵ \\ \hline ۵x-۵ & \\ -۵x+۵ & \\ \hline \text{صفر} & \end{array}$$

پس: $\lim\limits_{x\to ۱}\dfrac{\sqrt[۴]{x}-۱}{۲x^۲+۳x-۵}\times\dfrac{\sqrt[۴]{x}+۱}{\sqrt[۴]{x}+۱}=\lim\limits_{x\to ۱}\dfrac{\sqrt{x}-۱}{(۲x^۲+۳x-۵)(\sqrt[۴]{x}+۱)}=\dfrac{۰}{۰}$

مجددً عبارت را در مزدوج صورت، ضرب و تقسیم می‌کنیم.

$\lim\limits_{x\to ۱}\dfrac{\sqrt{x}-۱}{\underbrace{(۲x^۲+۳x-۵)}_{\text{تقسیم بر } x-۱}(\sqrt[۴]{x}+۱)}\times\dfrac{\sqrt{x}+۱}{\sqrt{x}+۱}=\lim\limits_{x\to ۱}\dfrac{(x-۱)}{(۲x+۵)(x-۱)(\sqrt[۴]{x}+۱)(\sqrt{x}+۱)}$

$=\lim\limits_{x\to ۱}\dfrac{۱}{(۲x+۵)(\sqrt[۴]{x}+۱)(\sqrt{x}+۱)}=\dfrac{۱}{(۷)(۲)(۲)}=\dfrac{۱}{۲۸}$

۷

الف

$\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{(۴x+۳)^۲+(۳x-۱)^۲}{(۵x+۱۷)^۲}\overset{\text{توان بیشتر}}{=\!=\!=}\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{۱۶x^۲+۹x^۲}{۲۵x^۲}=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{۲۵x^۲}{۲۵x^۲}=۱$

ب

$\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{۹x^۲+۱}+\sqrt{۴x^۲-x}}{\sqrt{۲۵x^۲+۹}+x}\overset{\text{توان بیشتر}}{=\!=\!=}\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{۹x^۲}+\sqrt{۴x^۲}}{\sqrt{۲۵x^۲}+x}$

$=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{۳|\overbrace{x}^{-}|+۲|\overbrace{x}^{-}|}{۵|\underbrace{x}_{-}|+x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{-۳x-۲x}{-۵x+x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{-۵x}{-۴x}=\dfrac{۵}{۴}$

پ

$\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{۶x-\sqrt{۴x^۲+۱}}{۷x+\sqrt{۹x^۲+۸}}\overset{\text{توان بیشتر}}{=\!=\!=}\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{۶x-\sqrt{۴x^۲}}{۷x+\sqrt{۹x^۲}}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{۶x-۲|\overbrace{x}^{-}|}{۷x+۳|\underbrace{x}_{-}|}$

$=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{۶x+۲x}{۷x-۳x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{۸x}{۴x}=\dfrac{۸}{۴}=۲$

ت

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}+\sqrt[4]{x}}{\sqrt{2x+17}}\overset{\text{توان بیشتر}}{=\!=\!=}\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{2x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{2}\sqrt{x}}=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

ث

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x\sqrt{x}-17}{\sqrt{x^3+2}}\overset{\text{توان بیشتر}}{=\!=\!=}\lim_{x\to+\infty}\frac{x\sqrt{x}}{\sqrt{x^3}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x\sqrt{x}}{x\sqrt{x}}=1$$

۸ حد صورت و مخرج تابع $f(x)$ در سمت راست ۴ برابر صفر است. برای بدست آوردن مقدار حد صورت و مخرج کسر را هم در $\sqrt{x}+2$ و هم در $\sqrt{2x+1}+3$ ضرب می‌کنیم:

$$\lim_{x\to4}f(x)=\lim\frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{2x+1}-3}\times\frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}+2}\times\frac{\sqrt{2x+1}+3}{\sqrt{2x+1}+3}$$

$$=\lim_{x\to4}\frac{(x-4)(\sqrt{2x+1}+3)}{(2x+1-9)(\sqrt{x}+2)}=\lim_{x\to4}\frac{(x-4)\sqrt{2x+1}+3}{2(x-4)\sqrt{x}+2}=\frac{6}{4}\times\frac{1}{2}=\frac{3}{4}$$

۹ الف)

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=2\quad،\quad\lim_{x\to+\infty}f(x)=0$$

ب)

$$\lim_{x\to-\infty}g(x)=+\infty\quad،\quad\lim_{x\to+\infty}g(x)=2$$

پ)

$$\lim_{x\to+\infty}h(x)=-2\quad،\quad\lim_{x\to(-1)^+}h(x)=+\infty$$

۱۰

$$x+1=0\Rightarrow x=-1\Rightarrow\text{باقی‌مانده}=P(-1)=-3\Rightarrow-1-m-1+3=-3$$
$$\Rightarrow-m+1=-3\Rightarrow m=4\Rightarrow P(x)=x^3-4x^2+x+3$$
$$x-2=0\Rightarrow x=2\Rightarrow\text{باقی‌مانده}=P(2)=8-16+2+3=-3$$

۱۱

$$x+1=0\Rightarrow x=-1\Rightarrow\text{باقی‌مانده}=f(-1)=1$$
$$x-1=0\Rightarrow x=1\Rightarrow\text{باقی‌مانده}=f(1)=3$$

باقی‌ماندهٔ $f(x)$ بر x^2-1 عبارت درجهٔ اولی به‌صورت $ax+b$ می‌باشد، که داریم:

$$f(x)=(x^2-1)q(x)+ax+b\quad(1)$$

$$x=1\overset{(1)}{\longrightarrow}f(1)=0+a+b\Rightarrow$$
$$x=-1\overset{(1)}{\longrightarrow}f(-1)=0-a+b\Rightarrow\quad\begin{cases}a+b=3\\-a+b=1\end{cases}$$
$$2b=4\to b=2\to a=1$$
$$\text{باقی‌مانده}=ax+b=x+2$$

۱۲ باتوجه به اینکه مقسوم‌علیه دو ریشهٔ متمایز دارد، رابطهٔ تقسیم را می‌نویسیم و از ریشه‌های مقسوم‌علیه در این رابطه استفاده می‌کنیم.

$$x^4-3x^3+mx+n=(x^2-5x+6)q(x)+0$$
$$x^4-3x^3+mx+n=(x-2)(x-3)q(x)$$
$$x=2\Rightarrow16-24+2m+n=0\Rightarrow2m+n=8$$
$$x=3\Rightarrow81-81+3m+n=0\Rightarrow3m+n=0$$
$$-\begin{cases}2m+n=8\\3m+n=0\end{cases}$$
$$m=-8\Rightarrow n=-3m\Rightarrow n=24$$

۱۳ برای یافتن باقی‌مانده باید ریشهٔ مقسوم‌علیه را در مقسوم قرار دهیم.

$$x+1=0\Rightarrow x=-1\Rightarrow\text{باقی‌مانده}=f(-1)>10\Rightarrow-1-1+m^2+3>10$$
$$\Rightarrow m^2>9\Rightarrow|m|>3\Rightarrow m<-3\text{ یا }m>3$$

۱۴ برای یافتن باقی‌مانده باید ریشهٔ مقسوم‌علیه را در مقسوم قرار دهیم.

$$2x-4=0\Rightarrow x=2\Rightarrow\text{باقی‌مانده}=f(2)=0\Rightarrow4-2m+2=0$$
$$\Rightarrow2m=6\Rightarrow\boxed{m=3}$$

۱۵

الف

$\lim\limits_{x\to\frac{۱}{۲}}\frac{۲x^۲-x}{۴x^۲-۱}=\frac{۰}{۰}$ مبهم

پس: $\lim\limits_{x\to\frac{۱}{۲}}\frac{۲x^۲-x}{۴x^۲-۱}=\lim\limits_{x\to\frac{۱}{۲}}\frac{x(۲x-۱)}{(۲x-۱)(۲x+۱)}=\lim\limits_{x\to\frac{۱}{۲}}\frac{x}{۲x+۱}=\frac{\frac{۱}{۲}}{۲}=\frac{۱}{۴}$

ب

$\lim\limits_{x\to۵}\frac{x^۳-۴x^۲-۴x-۵}{x^۲-۲۵}=\frac{۰}{۰}$ مبهم

برای رفع ابهام، کافی است صورت را بر عامل ابهام یعنی $x-۵$ تقسیم کنیم و مخرج را با استفاده از اتحاد مزدوج، تجزیه کنیم.

$$\begin{array}{r|l} x^۳-۴x^۲-۴x-۵ & x-۵ \\ \hline -(x^۳-۵x^۲) & x^۲+x+۱ \\ \hline x^۲-۴x-۵ & \\ -(x^۲-۵x) & \\ \hline x-۵ & \\ -(x-۵) & \\ \hline ۰ & \end{array}$$

پس: $\lim\limits_{x\to۵}\frac{x^۳-۴x^۲-۴x-۵}{x^۲-۲۵}=\lim\limits_{x\to۵}\frac{(x-۵)(x^۲+x+۱)}{(x+۵)(x-۵)}=\lim\limits_{x\to۵}\frac{x^۲+x+۱}{x+۵}=\frac{۳۱}{۱۰}$

پ

$\lim\limits_{x\to-۴}\frac{x^۲+۳x-۴}{x^۳+۴x^۲+x+۴}=\frac{۰}{۰}$ مبهم

برای رفع ابهام، مخرج را بر عامل ابهام یعنی $x=۴$ تقسیم می‌کنیم و صورت را به‌کمک اتحاد جملهٔ مشترک تجزیه می‌کنیم.

$$\begin{array}{r|l} x^۳+۴x^۲+x+۴ & x+۴ \\ \hline -(x^۳+۴x^۲) & x^۲+۱ \\ \hline ۰+x+۴ & \\ -(x+۴) & \\ \hline ۰ & \end{array}$$

پس: $\Rightarrow \lim\limits_{x\to-۴}\frac{x^۲+۳x-۴}{x^۳+۴x^۲+x+۴}=\lim\limits_{x\to-۴}\frac{(x-۱)(x+۴)}{(x+۴)(x^۲+۱)}=\lim\limits_{x\to-۴}\frac{x-۱}{x^۲+۱}=\frac{-۵}{۱۷}$

۱۶

الف

$\lim\limits_{x\to۱}\frac{x-\sqrt{۲x-۱}}{x^۲-x}=\frac{۰}{۰}$ مبهم

برای رفع ابهام، عبارت را در مزدوج صورت، ضرب و تقسیم می‌کنیم.

$$\text{پس}: \lim_{x\to۱}\frac{x-\sqrt{۲x-۱}}{x^۲-x}\times\frac{x+\sqrt{۲x-۱}}{x+\sqrt{۲x-۱}}=\lim_{x\to۱}\frac{x^۲-(۲x-۱)}{(x^۲-x)(x+\sqrt{۲x-۱})}$$

$$=\lim_{x\to۱}\frac{(x-۱)^۲}{x(x-۱)(x+\sqrt{۲x-۱})}=\lim_{x\to۱}\frac{(x-۱)}{x(x+\sqrt{۲x-۱})}=\frac{۰}{۱(۱+۱)}=۰$$

ب

$\lim\limits_{x\to۳}\frac{x^۲-۹}{۲-\sqrt{x+۱}}=\frac{۰}{۰}$

برای رفع ابهام، عبارت را در مزدوج مخرج، ضرب و تقسیم می‌کنیم.

$$\lim_{x\to۳}\frac{x^۲-۹}{۲-\sqrt{x+۱}}\times\frac{۲+\sqrt{x+۱}}{۲+\sqrt{x+۱}}=\lim_{x\to۳}\frac{(x-۳)(x+۳)(۲+\sqrt{x+۱})}{۴-(x+۱)}$$

$$=\lim_{x\to۳}\frac{(x-۳)(x+۳)(۲+\sqrt{x+۱})}{-(x-۳)}=\lim_{x\to۳}\frac{(x+۳)(۲+\sqrt{x+۱})}{-۱}=-(۶)(۴)=-۲۴$$

پ

$$\lim_{x\to -۸}\frac{۲x+۱۶}{\sqrt[۳]{x}+۲}=\frac{۰}{۰}$$

برای رفع ابهام از اتحاد چاق‌ولاغر کمک می‌گیریم: $(a+b)(a^۲+b^۲-ab)=a^۳+b^۳$

پس: $\lim_{x\to -۸}\frac{۲x+۱۶}{\sqrt[۳]{x}+۲}\times\frac{\sqrt[۳]{x^۲}+۴-۲\sqrt[۳]{x}}{\sqrt[۳]{x^۲}+۴-۲\sqrt[۳]{x}}=\lim_{x\to -۸}\frac{۲(x+۸)(\sqrt[۳]{x^۲}+۴-۲\sqrt[۳]{x})}{(x+۸)}$

$=\lim_{x\to -۸}۲(\sqrt[۳]{x^۲}+۴-۲\sqrt[۳]{x})=۲(۴+۴+۴)=۲۴$

۱۷

الف

علت: $\lim_{x\to -\infty}f(x)=\lim_{x\to -\infty}\frac{-۳x^۷+۵x^۲}{۲x^۳+۹}\to\lim_{x\to -\infty}\frac{-۳x^۷}{۲x^۳}=\lim_{x\to -\infty}-\frac{۳}{۲}x^۴=-\frac{۳}{۲}(+\infty)=-\infty$

۱۸

$$\lim_{x\to +\infty}\frac{(x+\sqrt{x}+۱)^۲-(x+\sqrt{x}-۱)^۲}{(\sqrt{x}-۱)^۲+(۲\sqrt{x}-۱)^۲}$$

در صورت از اتحاد مزدوج و در مخرج از اتحاد مربع دو جمله‌ای استفاده می‌کنیم:

$$\lim_{x\to +\infty}\frac{(x+\sqrt{x}+۱+x+\sqrt{x}-۱)(x+\sqrt{x}+۱-x-\sqrt{x}+۱)}{x-۲\sqrt{x}+۱+۴x-۴\sqrt{x}+۱}=\lim_{x\to +\infty}\frac{۲(۲x+۲\sqrt{x})}{۵x-۶\sqrt{x}+۲}=\lim_{x\to +\infty}\frac{۴x}{۵x}=\frac{۴}{۵}$$

۱۹

$$\lim_{x\to \infty}\frac{|x^۲-۴|}{ax^۲-x+۲}=-۱$$

ناچاریم هر دو حالت $x\to +\infty$ و $x\to -\infty$ را در نظر بگیریم:

$$\lim_{x\to +\infty}\frac{|x^۲-۴|}{ax^۲-x+۲}=\lim_{x\to +\infty}\frac{x^۲-۴}{ax^۲-x+۲}=-۱\Rightarrow\lim_{x\to +\infty}\frac{x^۲}{ax^۲}=-۱\Rightarrow\frac{۱}{a}=-۱\Rightarrow a=-۱$$

لذا خواهیم داشت:

$$\lim_{x\to -۲^+}\frac{|x^۲-۴|}{-x^۲-x+۲}=\lim_{x\to -۲^+}\frac{-(x-۲)(x+۲)}{-(x+۲)(x-۱)}=\frac{۴}{۳}$$

حالت دوم:

$$\lim_{x\to -\infty}\frac{|x^۲-۴|}{ax^۲-x+۲}=\lim_{x\to -\infty}\frac{-x^۲+۴}{ax^۲-x+۲}\Rightarrow\lim_{x\to -\infty}\frac{-x^۲}{ax^۲}=\frac{-۱}{a}=-۱\Rightarrow a=۱$$

پس خواهیم داشت:

$$\lim_{x\to -۲^+}\frac{|x^۲-۴|}{x^۲-x+۲}=\lim_{x\to -۲^+}\frac{-(x-۲)(x+۲)}{x^۲-x+۲}=\frac{۰}{۸}=۰$$

۲۰

الف

$$\lim_{x\to ۰}\frac{\sqrt{۲+\sin x}-\sqrt{۲-\sin x}}{۳x}\times\underbrace{\frac{\sqrt{۲+\sin x}+\sqrt{۲-\sin x}}{\sqrt{۲+\sin x}+\sqrt{۲-\sin x}}}_{A}=\lim_{x\to ۰}\frac{۲+\sin x-۲+\sin x}{(۳x)(A)}=\lim_{x\to ۰}\frac{۲}{۳A}=\frac{۲}{۳\times ۲\sqrt{۲}}=\frac{۱}{۳\sqrt{۲}}=\frac{\sqrt{۲}}{۶}$$

ب

$$\lim_{x\to ۱^+}\frac{\sqrt{x^۲-۱}+x-۱}{\sqrt{۴x-۴}+x^۲-۱}=\lim_{x\to ۱}\frac{\sqrt{x-۱}\sqrt{x+۱}+x-۱}{۲\sqrt{x-۱}+(x-۱)(x+۱)}=\lim_{x\to ۱}\frac{\sqrt{x-۱}\,(\sqrt{x+۱}+\sqrt{x-۱})}{\sqrt{x-۱}\,(۲+\sqrt{x-۱}(x+۱))}=\frac{\sqrt{۲}}{۲}$$

پ

$$\lim_{x\to ۳^-}\frac{۳-[x]}{x-۳}\sqrt{x^۲-۶x+۹}=\lim_{x\to ۳^-}\frac{۳-[۳^-]}{x-۳}\sqrt{(x-۳)^۲}$$

$$\lim_{x\to ۳^-}\frac{۱}{x-۳}|x-۳|=\lim_{x\to ۳^-}\frac{-(x-۳)}{x-۳}=-۱$$