آموزشگاه پرسا

۱ تعداد جواب های صحیح و نامنفی معادلهٔ $x_1+x_2+x_3+x_4=20$ با شرط $x_1\geq 1$ را محاسبه کنید.

۲ حداقل چند نفر در یک سالن ورزشی مشغول تماشای مسابقهٔ کشتی باشند تا مطمئن باشیم لااقل ۲ نفر از آن‌ها روز تولدشان یکسان است؟ (سال را غیرکبیسه در نظر بگیرید.)

۳ اگر داشته باشیم $A=\{۱,۲,۳,۴\}$ و $B=\{۵,۶,۷,۸,۹\}$، در این‌صورت چند رمز یا کد ۵ رقمی می‌توان نوشت که هریک شامل دو رقم از A و سه رقم از B باشد؟

۴ در جعبه‌ای ۴ گوی زرد، ۶ گوی مشکی، ۸ گوی سبز و ۱۰ گوی آبی داریم. حداقل چند گوی خارج کنیم تا مطمئن شویم که حداقل ۷ گوی خارج‌شده هم‌رنگ هستند؟

۵ آیا دو مربع لاتین زیر متعامدند؟

۴	۳	۲	۱
۲	۱	۴	۳
۱	۴	۳	۲
۳	۲	۱	۴

۴	۳	۲	۱
۱	۲	۳	۴
۳	۱	۴	۲
۲	۴	۱	۳

۶ ثابت کنید حاصل‌ضرب سه عدد صحیح متوالی همواره بر $۳!$ بخش‌پذیر است.

۷ ثابت کنید: الف) هر دو عدد صحیح و متوالی نسبت به هم اول‌اند. ب) هر دو عدد صحیح و فرد متوالی نسبت به هم اول‌اند.
(راهنمایی: فرض کنید $(m,m+۱)=d$ و ثابت کنید $d|۱$ و نتیجه بگیرید $d=۱$).

۸ یک گراف ۲-منتظم ۱۲ رأسی بکشید که عدد احاطه‌گری آن کم‌ترین مقدار ممکن باشد.

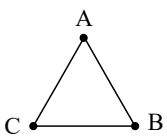
۹ اگر $a,b\in\mathbb{N}$ و $(a,۱۳)\neq ۱$ و $(۲a,b)=۱$ آنگاه $(۱۳b,۲a]$ را محاسبه کنید:

۱۰ فرض کنید $(۸a+۲,۶a-۴)=d$ آنگاه d چند مقدار متمایز می‌تواند داشته باشد؟

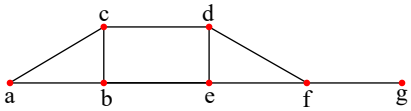
۱۱ ثابت کنید اگر n برابر حاصلضرب دو عدد زوج متوالی باشد آنگاه $n+۱$ مربع کامل است.

۱۲ به‌ازای چند عدد صحیح از n رابطهٔ $n+۱\mid ۷n+۵$ برقرار است؟

۱۳ رأس‌های مثلث متساوی الاضلاع مقابل با نام ABC را به چند طریق می توان با رنگ‌های قرمز و آبی و سبز رنگ آمیزی کرد؟

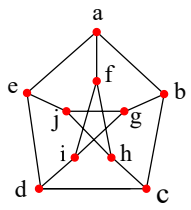


۱۴ در گراف روبه‌رو تمام دورها را بنویسید.



۱۵ در گراف $K_۵$ بین ۲ رأس دلخواه و متمایز u,v چند مسیر متفاوت وجود دارد؟

۱۶ برای گراف مقابل سه مجموعهٔ احاطه‌گر بنویسید.



۱۷ گراف G با مجموعهٔ رأس‌های $V(G)=\{a,b,c,d,e\}$ و مجموعهٔ یال‌های $E(G)=\{ae,bc,bd,be,ec,ed\}$ مفروض است. بدون کشیدن نمودار آن به قسمت‌های «الف» تا «ج» پاسخ دهید.

الف) مجموعهٔ همسایگی باز رأس d را بنویسید.

ب) اندازهٔ گراف را مشخص کنید.

پ) مجموع درجات رئوس این گراف برابر چند است؟

۱۸ متعامد بودن دو مربع لاتین زیر را بررسی کنید.

۱	۲	۳
۳	۱	۲
۲	۳	۱

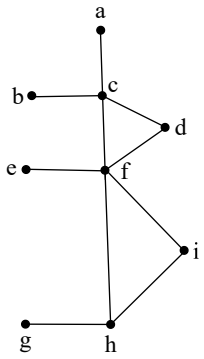
۱	۲	۳
۲	۳	۱
۳	۱	۲

۱۹ ثابت کنید تعداد رأس‌های فرد هر گراف، عددی زوج است.

۲۰ برای گراف روبه‌رو:

الف) یک مجموعه احاطه‌گر با ۴ عضو مشخص کنید.

ب) مجموعه‌ای از رئوس را مشخص کنید که احاطه‌گر مینیمال باشد.



پاسخ‌نامه تشریحی

۱

$$x_۱ + x_۲ + x_۳ + x_۳ + x_۵ = ۱۰ \to x_۱ + y_۲ + ۱ + y_۳ + ۱ + y_۴ + ۱ + y_۵ + ۱ = ۱۰$$

$$x_۱ + y_۲ + y_۳ + y_۴ + y_۵ = ۶ \xrightarrow{\text{تعداد جواب‌های معادله} = \binom{n+k-۱}{k-۱}} \binom{۶ + ۵ - ۱}{۵ - ۱} = \binom{۱۰}{۴}$$

۲

طبق تعمیم اصل لانهٔ کبوتری، تعداد لانه‌ها همان روزهای سال می‌باشد: $n = ۳۶۵$

بنابراین تعداد کبوترها برابر است با: $kn + ۱ = ۳۶۵ \times ۱۹ + ۱ = ۶۹۳۶$

۳

تعداد انتخاب دو رقم از A: $\binom{۴}{۲} = ۶$

تعداد انتخاب سه رقم از B: $\binom{۵}{۳} = ۱۰$

جایگشت ۵ رقم: $۵! = ۱۲۰$

پس تعداد کل حالات برابر است با: $۶ \times ۱۰ \times ۱۲۰ = ۷۲۰۰$

۴ در بدترین حالت همهٔ گوی‌های زرد و مشکی و ۶ گوی سبز و ۶ گوی آبی خارج کرده‌ایم و حالا با خارج کردن یک گوی دیگر به مقصودمان می‌رسیم. پس حداقل باید ۲۳ گوی خارج کنیم.

۵

دیگر نوشتن اعداد مربع مقابل را ادامه نمی‌دهیم. چون ۴۳ تکرار شد و همین کافی است تا بگوییم دو مربع لاتین متعامد نیستند.

۴۴	۳۳	۲۲	۱۱
۱۲	۲۱	۳۴	۴۳
۳۱	۱۴	۴۳	

۶ اعداد صحیح متوالی دلخواه n، $n+۱$ و $n-۱$ را در نظر می‌گیریم با توجه به تمرین ۱۱ نشان دادیم که حاصل‌ضرب هر ۳ عدد صحیح متوالی بر ۳ بخش‌پذیر است از طرفی می‌دانیم حاصل‌ضرب هر دو عدد صحیح متوالی نیز بر ۲ بخش‌پذیر است؛ پس حاصل‌ضرب هر ۳ عدد صحیح متوالی نیز مضرب ۲ می‌باشد؛ در نتیجه $n(n+۱)(n-۱)$ بر $۳!$ بخش‌پذیر است.

۷ الف) فرض کنید $(m, m+۱) = d$ آن‌گاه می‌توان نوشت:

$$\left.\begin{matrix} d|m \\ d|m+۱ \end{matrix}\right\} \to d|m+۱-m \to d|۱$$

حال چون $d > ۰$ می‌توان نتیجه گرفت $d = ۱$ یعنی عدد دو صحیح و متوالی m و $m+۱$ نسبت به هم اول‌اند.

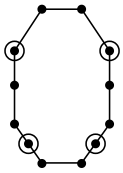
ب) فرض کنید $(۲m+۱, ۲m+۳) = d$ آن‌گاه می‌توان نوشت:

$$\left.\begin{matrix} d|۲m+۱ \\ d|۲m+۳ \end{matrix}\right\} \to d|۲m+۳-۲m-۱ \to d|۲$$

با توجه به اینکه $d > ۰$ می‌توان نتیجه گرفت $d = ۱$ یا $d = ۲$ چون هیچ عدد فردی مقسوم‌علیه زوج ندارد بنابراین $d = ۱$.

۸ عدد احاطه‌گری حداقل برابر ۴ است زیرا $\gamma(G) \geq \left\lceil \frac{۱۲}{۳} \right\rceil = ۴$ پس کافی است گراف ۲-منتظم مرتبهٔ ۱۲ را رسم کنیم که عدد احاطه‌گری آن ۴ باشد.

تشریحی گسسته



۹ می‌دانیم ۱۳ عددی اول است چون $(a\ ,\ ۱۳) \neq ۱$ پس $(a\ ,\ ۱۳) = ۱۳$ بنابراین $a = ۱۳k$.

همینطور از اینکه $(۲a\ ,\ b) = ۱$ می‌توان نتیجه گرفت $۱۳ \not| b\ ,\ ۲ \not| b$ حال می‌توان نوشت:

$$[۱۳b\ ,\ ۲a] = [۱۳b\ ,\ ۲ \times ۱۳k] = ۲ \times ۱۳ \times k \times b = ۲ab$$

۱۰

$$\left.\begin{matrix} d|۶a - ۴ \to d|۲۴a - ۱۶ \\ d|۸a + ۲ \to d|۲۴a + ۶ \end{matrix}\right\} \to d|۲۲$$

بنابراین $d \in \{۱\ ,\ ۲\ ,\ ۱۱\ ,\ ۲۲\ ,\}$ با توجه به اینکه $۶a - ۴$ و $۸a + ۲$ زوج هستند d تنها می‌تواند ۲ یا ۲۲ باشد.

۱۱ طبق فرض داریم $n = ۲k(۲k + ۲)$ در نتیجه:

$$n + ۱ = ۲k(۲k + ۲) + ۱ = ۴k^۲ + ۴k + ۱ = (۲k + ۱)^۲$$

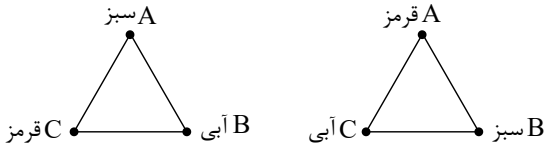
پس $n + ۱$ مربع کامل است.

۱۲

$$\left.\begin{matrix} n + ۱ \,|\, ۷n + ۵ \\ n + ۱ \,|\, ۷(n + ۱) \end{matrix}\right\} \Rightarrow n + ۱ \,|\, (۷n + ۷) - (۷n + ۵) \to n + ۱ \,|\, ۲$$

$$\begin{cases} ۱)\ n + ۱ = ۲ \to n = ۱ \\ ۲)\ n + ۱ = -۲ \to n = -۳ \\ ۳)\ n + ۱ = ۱ \to n = ۰ \\ ۴)\ n + ۱ = -۱ \to n = -۲ \end{cases}$$

۱۳ در این سؤال نمی توان از جایگشت دوری کمک گرفت. چون شکل تقارن ندارد و مثلاً ۲ حالت زیر با هم متفاوت‌اند. (به دلیل نام گذاری رأس‌ها)



بنابراین تعداد کل حالات برابر با جایگشت ۳ شیء است داریم:

$$۳! = ۶$$

۱۴

a, c, b, a

d, f, e, d

c, d, e, b, c

c, d, f, e, b, c

a, c, d, f, e, b, a

a, c, d, e, b, a

۱۵

راه اول :

مسیر به طول ۱۱ $\to u, v \to$

مسیر به طول ۳۲ $\to u\underline{۳}v \to u, \boxed{۳}, v \to$

مسیر به طول ۶۳ $\to u\underline{۳}\underline{۲}v \to u, \boxed{۳}, \boxed{۲}, ۷ \to$

مسیر به طول ۴ $\to u\underline{۳}\underline{۲}\underline{۱}v \to u, \boxed{۳}, \boxed{۲}, \boxed{۱}, v \to \underline{\underline{۶}}_{۱۶}$

راه دوم:

$$(p - ۲)! \sum_{k=۰}^{p-۲} \frac{۱}{k!} = ۳!(\frac{۱}{۰!} + \frac{۱}{۱!} + \frac{۱}{۲!} + \frac{۱}{۳!}) = ۱۶$$

۱۶

تشریحی گسسته

$A = \{a, b, c, d, e\}$
$B = \{f, g, h, i, j\}$
$C = \{f, g, h, e\}$

۱۷

الف

فرض کنیم $v \in V(G)$، به مجموعهٔ رأس‌هایی از گراف G که به رأس v متصل هستند همسایگی باز رأس v می‌گوییم و با $N_G(v)$ نمایش می‌دهیم.

$N_G(d) = \{b, e\}$

ب

تعداد یال‌های گراف یعنی $|E(G)|$ را اندازهٔ گراف G می‌گوییم و با $q(G)$ نشان می‌دهیم.

$q = ۶$

پ

۱۲

۱۸ در مربع لاتین مقابل، اعداد ۲رقمی تکراری نداریم. پس دو مربع لاتین، متعامدند.

۱۱	۲۲	۳۳
۳۲	۱۳	۲۱
۲۳	۳۱	۱۲

۱۹ فرض کنیم G یک گراف و A مجموعه همه رئوس فرد گراف و B مجموعه همه رئوس زوج گراف G باشد. در این صورت داریم:

$$\sum_{v \in V(G)} \deg(v) = \sum_{v \in A} \deg(v) + \sum_{v \in B} \deg(v)$$.

از طرفی $\sum_{v \in V(G)} \deg(v) = ۲q$ و $\sum_{v \in B} \deg(v) = ۲k$ زوج‌اند.

لذا $\sum_{v \in A} \deg(v) = ۲q - ۲k$ باید زوج باشد. می‌دانیم تعدادی زوج عدد فرد، حاصل زوج را تولید می‌کنند بنابراین تعداداعضای A باید زوج باشد.

۲۰ الف) مجموعه احاطه‌گر با ۴ عضو مانند: $\{c, f, h, g\}$

ب) احاطه‌گر مینیمال مانند: $\{c, f, g\}$