



[www.porsaedu.ir](http://www.porsaedu.ir)

[@porsa\\_edu](https://www.instagram.com/porsa_edu)

[@MoshaverHajkaram](https://www.instagram.com/MoshaverHajkaram)

آکادمی آموزشی، پژوهشی و مشاوره تحصیلی پرسا

Porsa Consulting and Educational Academy

instagram:

[porsa\\_edu\\_konkooor](https://www.instagram.com/porsa_edu_konkooor)

026-33406346

026-33406537

# حسابان ۱

پایه یازدهم « رشته ی ریاضی فیزیک »

فصل ۳ : توابع نمایی و لگاریتمی

تهیه کننده : جابر عامری

دبیر ریاضی شهرستان های اهواز و باوی

[www.mathtower.ir](http://www.mathtower.ir)

@mathameri

مهر ۱۳۹۶

## درس اول : تعمیم توان رسانی

آشنایی با مفهوم تابع نمایی به عنوان یکی از انواع توابع در ریاضیات ، برای درک و فهم بسیاری مفاهیم دیگر در ریاضیات و فیزیک و از جمله شدت زلزله، شدت صدا، قدمت یک شیء و ... لازم و ضروری است. در اینجا ضمن یادآوری آن موضوعات تکمیلی دیگری را معرفی می کنیم.

### قسمت اول : یادآوری قوانین توان رسانی و ریشه گیری

در سال های قبل ، با توان های طبیعی، صحیح و گویای اعداد حقیقی و قوانین آنها آشنا شده اید. در اینجا چند رابطه در مورد توان و ریشه گیری را جهت یادآوری معرفی می کنیم.

۱: توان صفر

$$\begin{cases} a^0 = 1 \\ a \neq 0 \end{cases}$$

مثال:  $5^0 = 1$

\*\*\*

۲: توان منفی

$$\begin{cases} a^{-n} = \frac{1}{a^n} \\ a \neq 0 \end{cases}$$

مثال:  $5^{-3} = \frac{1}{5^3}$

\*\*\*

۳: توان کسری

$$\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$$

اگر  $n$  زوج باشد، باید  $a \geq 0$  باشد.

مثال:  $5^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{5^2}$

\*\*\*

۴: توان توان

$$(a^m)^n = a^{m.n}$$

مثال:  $(5^3)^2 = 5^{3 \times 2} = 5^6$

\*\*\*

## آموزش حسابان ۱ ..... تهیه کننده: جابر عامری

۵: ضرب اعداد تواندار با پایه های مساوی

$$a^m \times a^n = a^{m+n}$$

مثال:  $5^7 \times 5^2 = 5^{7+2} = 5^9$

\*\*\*

۶: تقسیم اعداد تواندار با پایه های مساوی

$$a^m \div a^n = a^{m-n}$$

مثال:  $5^7 \div 5^3 = 5^{7-3} = 5^4$

\*\*\*

۷: هرگاه دو عدد تواندار مساوی، پایه های مساوی داشته باشند، توان های آنها نیز مساویند.

$$\begin{cases} a^m = a^n \rightarrow m = n \\ a \neq 0, 1, -1 \end{cases}$$

مثال:  $5^x = 5^3 \rightarrow x = 3$

\*\*\*

تمرین ۱: در تساوی های مقابل مقدار  $x$  را حساب کنید.

الف)  $2^x = 32$

ج)  $9^x = 27$

ب)  $3^x \times 3^4 = 243$

د)  $3^{x-1} = \frac{1}{81}$

حل:

الف)  $2^x = 32 \rightarrow 2^x = 2^5 \rightarrow x = 5$

ب)  $3^x \times 3^4 = 243 \rightarrow 3^{x+4} = 3^5 \rightarrow x + 4 = 5 \rightarrow x = 1$

ج)  $9^x = 27 \rightarrow (3^2)^x = 3^3 \rightarrow 3^{2x} = 3^3 \rightarrow 2x = 3 \rightarrow x = \frac{3}{2}$

د)  $3^{x-1} = \frac{1}{81} \rightarrow 3^{x-1} = \frac{1}{3^4} \rightarrow 3^{x-1} = 3^{-4} \rightarrow x - 1 = -4 \rightarrow x = -4 + 1 = -3$

\*\*\*

## قسمت دوم: تعمیم قوانین توان رسانی

قوانین توان رسانی برای توان های حقیقی نیز برقرارند. اگر  $a$  و  $b$  دو عدد حقیقی مثبت و مخالف یک و  $y$  و  $x$  دو عدد حقیقی باشند، آنگاه داریم.

۱)  $a^0 = 1$

۶)  $\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$

۲)  $a^1 = a$

۷)  $a^x \times b^x = (ab)^x$

۳)  $a^{-x} = \frac{1}{a^x}$

۸)  $\frac{a^x}{b^x} = \left(\frac{a}{b}\right)^x$

۴)  $(a^x)^y = a^{xy}$

۹)  $\begin{cases} a^x = a^y \rightarrow x = y \\ a \neq 0, 1, -1 \end{cases}$

۵)  $a^x \times a^y = a^{x+y}$

**تمرین ۲:** حاصل عبارت  $\frac{4\sqrt{3} \times 2\sqrt{75}}{2\sqrt{12} \times 8\sqrt{3}}$  را به ساده ترین شکل بنویسید.

حل:

$$\frac{4\sqrt{3} \times 2\sqrt{75}}{2\sqrt{12} \times 8\sqrt{3}} = \frac{2^2\sqrt{3} \times 2^2\sqrt{3} \times 5}{2^2\sqrt{3} \times 2^3\sqrt{3}} = \frac{2^2\sqrt{3}}{2^5\sqrt{3}} = 2^{-3} = \frac{1}{8}$$

**تمرین ۳:** حاصل عبارت های زیر را به دست آورید.

۱)  $((\sqrt{2})^{\sqrt{3}})^{\sqrt{12}} =$

۲)  $((\sqrt{10})^{2-\sqrt{3}})^{2+\sqrt{3}} =$

۳)  $((\sqrt[3]{5})^{3-\sqrt{3}})^{3+\sqrt{3}} =$

۴)  $(\sqrt{3} - \sqrt{2})^{\sqrt{2}+1} (\sqrt{3} + \sqrt{2})^{\sqrt{2}-1} =$

۵)  $(2 - \sqrt[3]{7})^{\pi+1} (4 + 2\sqrt[3]{7} + \sqrt[3]{49})^{\pi+1} =$

**آموزش حسابان ۱..... تهیه کننده : جابر عامری****تمرین ۴:** مقدار  $x$  را از معادله‌ی زیر به دست آورید.

$$x^{\sqrt{2}} + 1 = 5$$

حل :

$$x^{\sqrt{2}} + 1 = 5 \rightarrow x^{\sqrt{2}} = 4 \rightarrow (x^{\sqrt{2}})^{\sqrt{2}} = (4)^{\sqrt{2}} \rightarrow x^2 = 2^2\sqrt{2} \rightarrow x = 2^{\sqrt{2}}$$

\*\*\*

**تهیه کننده : جابر عامری دبیر ریاضی شهرستان های اهواز و باوی****سایت : [www.mathtower.ir](http://www.mathtower.ir)****کانال تلگرام : [@mathameri](https://t.me/mathameri)**

## درس دوم : لگاریتم و معادلات لگاریتمی

جان نپر ریاضیدان اسکاتلندی (تولد ۱۵۵۰ و وفات ۱۶۱۷) مفهوم لگاریتم را پایه گذاری کرد. لگاریتم برای ساده کردن محاسبات ابداع شد و به عنوان بزرگترین پیشرفت علم حساب در قرن های ۱۶ و ۱۷ محسوب می شود. در این درس مفهوم لگاریتم را معرفی می کنیم و با خواص آن آشنا می شویم.

## قسمت اول : مفهوم لگاریتم

لگاریتم عدد مثبت  $b$  در مبنای عدد مثبت و مخالف یک  $a$ ، عددی مانند  $x$  است که اگر  $a$  به توان  $x$  برسد، حاصل برابر  $b$  می شود.

$$\log_a^b = x \leftrightarrow a^x = b$$

$$\begin{cases} a, b > 0 \\ a \neq 1 \end{cases}$$

$$2^3 = 8 \rightarrow \log_2^8 = 3 \quad \text{برای مثال:}$$

**تمرین ۱:** تساوی های زیر را به صورت لگاریتم بنویسید.

$$\text{الف) } 7^3 = 343$$

$$\text{ب) } 2^{-3} = \frac{1}{8}$$

$$\text{ج) } \sqrt[3]{64} = 4$$

حل:

$$\text{الف) } 7^3 = 343 \rightarrow \log_7^{343} = 3$$

$$\text{ب) } 2^{-3} = \frac{1}{8} \rightarrow \log_2^{\frac{1}{8}} = -3$$

$$\text{ج) } \sqrt[3]{64} = 4 \rightarrow 64^{\frac{1}{3}} = 4 \rightarrow \log_{64}^4 = \frac{1}{3}$$

**تمرین ۲:** تساوی های زیر را به صورت توانی بنویسید.

$$\text{الف) } \log_2^{64} = 6$$

$$\text{ب) } \log_2^{\sqrt[3]{8}} = \frac{3}{2}$$

$$\text{ج) } \log_{10}^{0.001} = -3$$

حل:

## آموزش حسابان ۱ ..... تهیه کننده: جابر عامری

الف)  $\log_2^{64} = 6 \rightarrow 2^6 = 64$

ب)  $\log_2^{\sqrt{8}} = \frac{3}{2} \rightarrow 2^{\frac{3}{2}} = \sqrt{8}$

ج)  $\log_{10}^{0.001} = -3 \rightarrow 10^{-3} = 0.001$

تمرین ۳: در هر مورد مقدار  $x$  را پیدا کنید.

الف)  $\log_3^{81} = x$

ب)  $\log_2^x = 3$

ج)  $\log_x^{64} = 2$

حل:

الف)  $\log_3^{81} = x \rightarrow 3^x = 81 \rightarrow 3^x = 3^4 \rightarrow x = 4$

ب)  $\log_2^x = 3 \rightarrow 2^3 = x \rightarrow x = 8$

ج)  $\log_x^{64} = 2 \rightarrow x^2 = 64 \rightarrow x = \sqrt{64} \rightarrow x = 8$

تمرین ۴: مقدار  $x$  را از تساوی زیر محاسبه کنید.

$$\log_7^{49} = 2x - 1$$

حل:

$$\log_7^{49} = 2x - 1 \rightarrow 7^{2x-1} = 49 \rightarrow 7^{2x-1} = 7^2 \rightarrow 2x - 1 = 2 \rightarrow 2x = 3 \rightarrow x = \frac{3}{2}$$

تمرین ۵: لگاریتم های زیر را محاسبه کنید.

الف)  $\log_2^{256}$

ج)  $\log_7^7$

ب)  $\log_4^{256}$

د)  $\log_3^1$

حل:

الف)  $\log_2^{256} = x \rightarrow 2^x = 256 \rightarrow 2^x = 2^8 \rightarrow x = 8$

ب)  $\log_4^{256} = y \rightarrow 4^y = 256 \rightarrow 4^y = 4^4 \rightarrow y = 4$

ج)  $\log_7^7 = z \rightarrow 7^z = 7 \rightarrow 7^z = 7^1 \rightarrow z = 1$



## آموزش حسابان ۱ ..... پایه ی ۱۱ ریاضی فیزیک

$$d) \log_3^1 = t \rightarrow 3^t = 1 \rightarrow 3^t = 3^0 \rightarrow t = 0$$

نتیجه:

۱: لگاریتم هر عدد مثبت و مخالف یک در مبنای خودش برابر یک است.

$$\begin{cases} \log_a^a = 1 \\ a > 0, a \neq 1 \end{cases}$$

۲: لگاریتم یک در هر مبنای مثبت و مخالف یک صفر است.

$$\begin{cases} \log_a^1 = 0 \\ a > 0, a \neq 1 \end{cases}$$

تمرین ۶: نشان دهید که تساوی زیر درست است.

$$\log_6^4 + \log_6^9 = 2$$

حل: قرار می دهیم  $\log_6^4 = x$  و  $\log_6^9 = y$  و نشان می دهیم که  $x + y = 2$

$$\left. \begin{array}{l} \log_6^4 = x \rightarrow 6^x = 4 \\ \log_6^9 = y \rightarrow 6^y = 9 \end{array} \right\} \rightarrow 6^x \times 6^y = 4 \times 9 \rightarrow 6^{x+y} = 36$$

$$\rightarrow 6^{x+y} = 6^2 \rightarrow x + y = 2$$

\*\*\*

تذکر ۱: لگاریتم صفر نامعین است.

$$\log_a^0 = \text{نامعین}$$

تذکر ۲: لگاریتم، روی اعداد منفی، تعریف نمی شود.

تذکر ۳: اگر مبنای لگاریتم عدد ۱۰ باشد، لگاریتم را **لگاریتم اعشاری** می نامند. معمولاً در لگاریتم

اعشاری مبنای ۱۰ نوشته نمی شود.

$$\log_{10}^a = \log a$$

## آموزش حسابان ۱ ..... تهیه کننده: جابر عامری

**تذکر ۴:** یکی از اعداد گنگ که کاربرد های زیادی در صنعت و اقتصاد و بازرگانی دارد، عددی معروف به عدد نپرین می باشد. این عدد به افتخار لئونارد اویلر را با  $e$  نمایش می دهند و مقدار تقریبی آن تا دو رقم اعشار  $۲/۷۱$  می باشد.

اگر مبنای لگاریتم عدد نپرین باشد، لگاریتم را لگاریتم طبیعی می نامند. معمولاً مبنای  $e$  نوشته نمی شود. حال به دلیل اینکه این لگاریتم با لگاریتم اعشاری اشتباه نشود،  $\log$  را به صورت  $L_n$  می نویسند.

$$\log_e^a = L_n a$$

واضح است که :

$$L_n e = \log_e^e = ۱$$

$$L_n ۱ = \log_e^1 = ۰$$

به کمک ماشین حساب نیز می توان لگاریتم طبیعی را محاسبه کرد.

**تذکر ۵:** ماشین های حساب ، فقط لگاریتم اعشاری و لگاریتم طبیعی را محاسبه می کنند. برای محاسبه ی لگاریتم در مبنای های دیگر به کمک ماشین حساب می توان از فرمولی به نام فرمول تغییر مبنا استفاده نمود. این فرمول در ادامه، گفته می شود.

\*\*\*

### قسمت دوم: روابط لگاریتمی

با توجه به تعریف لگاریتم ، روابط زیر را به راحتی می توان بیان کرد.

**۱:** جمع لگاریتم ها در یک مبنا

$$\log_x^a + \log_x^b = \log_x^{ab}$$

برای مثال :

$$\log_7^3 + \log_7^5 = \log_7^{3 \times 5} = \log_7^{15}$$

این رابطه برای مجموع چند لگاریتم در یک مبنا نیز برقرار است.

$$\log_x^a + \log_x^b + \log_x^c = \log_x^{abc}$$

برای مثال:

$$\log_{10} 2 + \log_{10} 5 + \log_{10} 10 = \log_{10}^{2 \times 5 \times 10} = \log_{10} 100 = 2$$

۲: تفریق لگاریتم ها در یک مبنا

$$\log_x a - \log_x b = \log_x \frac{a}{b}$$

مثال:

$$\log_7 20 - \log_7 5 = \log_7^{20 \div 5} = \log_7 4$$

۳: لگاریتم عدد تواندار

$$\log_x a^n = n \log_x a$$

مثال:

$$\log_7 32 = \log_7 2^5 = 5 \log_7 2 = 5 \times 1 = 5$$

۴: لگاریتم مبنای تواندار

$$\log_x^a m = \frac{1}{m} \log_x^a$$

مثال:

$$\log_{81}^3 = \log_{3^4}^3 = \frac{1}{4} \log_3^3 = \frac{1}{4}$$

$$\log_x^{a^n} = \log_x^a$$

نتیجه:

۵: تغییر مبنای لگاریتم

$$\log_b^a = \frac{\log_x^a}{\log_x^b}$$

مثال: فرض کنید که می خواهیم مبنای لگاریتم  $\log_3^4$  را به ۵ تبدیل کنیم. در این صورت

## آموزش حسابان ۱ ..... تهیه کننده: جابر عامری

$$\log_3^4 = \frac{\log_5^4}{\log_5^3}$$

۶: دو لگاریتم مساوی با مبنای برابر

$$\log_x^a = \log_x^b \rightarrow a = b$$

مثال:

$$\log_3^a = \log_3^8 \rightarrow a = 8$$

\*\*\*

تمرین ۷: حاصل عبارت های زیر را به دست آورید.

۱)  $\log 5 + \log 20$

۴)  $2 \log 5 + \log 4$

۲)  $\log_7^{70} - \log_7^{10}$

۵)  $6 \log_4^2 - \frac{1}{2} \log_2^{64}$

۳)  $\log_6^4 + \log_6^9$

۶)  $\log_2^8 + \log_2^5 - \log_2^{10}$

حل:

۱)  $\log 5 + \log 20 = \log 5 \times 20 = \log 100 = \log 10^2 = 2 \log 10 = 2 \times 1 = 2$

۲)  $\log_7^{70} - \log_7^{10} = \log_7^{70 \div 10} = \log_7^7 = 1$

۳)  $\log_6^4 + \log_6^9 = \log_6^{4 \times 9} = \log_6^{36} = \log_6^{6^2} = 2 \log_6^6 = 2 \times 1 = 2$

۴)  $2 \log 5 + \log 4 = \log 5^2 + \log 4 = \log 25 + \log 4 = \log 25 \times 4 = \log 100$   
 $= \log 10^2 = 2 \log 10 = 2 \times 1 = 2$

۵)  $6 \log_4^2 - \frac{1}{2} \log_2^{64} = \log_4^{2^6} - \log_2^{64} = \log_4^{64} - \log_4^{64} = \log_4^{64 \div 64} = \log_4^1 = 0$

۶)  $\log_2^8 + \log_2^5 - \log_2^{10} = \log_2^{(8 \times 5) \div 10} = \log_2^4 = \log_2^{2^2} = 2 \log_2^2 = 2 \times 1 = 2$

## آموزش حسابان ۱ ..... پایه ی ۱۱ ریاضی فیزیک

تمرین ۸: لگاریتم های زیر را به صورت یک لگاریتم بنویسید.

۱)  $\log_V^{15} - \log_V^3$

۴)  $\log a - \log b - \log c + \log d$

۲)  $\frac{\log 5}{\log 2}$

۵)  $2 \log x - 3 \log y - 4 \log c$

۳)  $5 \log a - 2 \log b + 3 \log c$

۶)  $2L_n a + 3L_n b$

حل:

۱)  $\log_V^{15} - \log_V^3 = \log_V^{15 \div 3} = \log_V^5$

۲)  $\frac{\log 5}{\log 2} = \log_2^5$

۳)  $5 \log a - 2 \log b + 3 \log c = \log a^5 - \log b^2 + \log c^3 = \log \frac{a^5 c^3}{b^2}$

۴)  $\log a - \log b - \log c + \log d = \log \frac{ad}{bc}$

۵)  $2 \log x - 3 \log y - 4 \log c = \log x^2 - \log y^3 - \log c^4 = \log \frac{x^2}{y^3 c^4}$

۶)  $2L_n a + 3L_n b = L_n a^2 + L_n b^3 = L_n a^2 b^3$

تمرین ۹: حاصل عبارت های زیر را به دست آورید.

۱)  $\log_5^{125}$

۳)  $\log_3^{\sqrt{27}}$

۵)  $\log 100$

۲)  $\log_4^{32}$

۴)  $\log_{\sqrt{4}}^{\sqrt[4]{4}}$

۶)  $\log \sqrt{1000}$

حل:

۱)  $\log_5^{125} = \log_5^{5^3} = 3 \log_5^5 = 3 \times 1 = 3$

۲)  $\log_4^{32} = \log_{2^2}^{2^5} = 5 \times \frac{1}{2} \log_2^2 = \frac{5}{2} \times 1 = \frac{5}{2}$

## آموزش حسابان ۱ ..... تهیه کننده: جابر عامری

$$۳) \log_3 \sqrt[3]{27} = \log_3 \sqrt[3]{3^3} = \log_3 3^{\frac{3}{2}} = \frac{3}{2} \log_3 3 = \frac{3}{2} \times 1 = \frac{3}{2}$$

$$۴) \log_{\sqrt[3]{4}}^{\wedge} = \log_{\sqrt[3]{2^2}}^{\wedge} = \log_{\frac{2^2}{2^3}}^{\wedge} = \log_{\frac{2}{2^3}}^{\wedge} = 3 \times \frac{3}{2} \log_2 2 = \frac{9}{2} \times 1 = \frac{9}{2}$$

$$۵) \log 100 = \log 10^2 = 2 \log 10 = 2 \times 1 = 2$$

$$۶) \log \sqrt{1000} = \log \sqrt{10^3} = \log 10^{\frac{3}{2}} = \frac{3}{2} \log 10 = \frac{3}{2} \times 1 = \frac{3}{2}$$

تمرین ۱۰: اگر  $\log 2 = a$  و  $\log 3 = b$  لگاریتم های زیر را بر حسب  $a$  و  $b$  به دست آورید.

۱)  $\log 81$

۵)  $\log 72$

۹)  $\log_3^2$

۲)  $\log 32$

۶)  $\log 5$

۱۰)  $\log_{81}^{32}$

۳)  $\log 6$

۷)  $\log 75$

۴)  $\log 12$

۸)  $\log_2^3$

حل:

۱)  $\log 81 = \log 3^4 = 4 \log 3 = 4b$

۲)  $\log 32 = \log 2^5 = 5 \log 2 = 5a$

۳)  $\log 6 = \log 2 \times 3 = \log 2 + \log 3 = a + b$

۴)  $\log 12 = \log 2^2 \times 3 = \log 2^2 + \log 3 = 2 \log 2 + \log 3 = 2a + b$

۵)  $\log 72 = \log 2^3 \times 3^2 = \log 2^3 + \log 3^2 = 3 \log 2 + 2 \log 3 = 3a + 2b$

۶)  $\log 5 = \log \frac{10}{2} = \log 10 - \log 2 = 1 - a$

۷)  $\log 75 = \log 3 \times 5^2 = \log 3 + \log 5^2 = \log 3 + 2 \log 5 = b + 2(1 - a)$

$$= b + 2 - 2a$$

## آموزش حسابان ۱ ..... پایه ی ۱۱ ریاضی فیزیک

$$۸) \log_2^3 = \frac{\log 3}{\log 2} = \frac{b}{a}$$

$$۹) \log_3^2 = \frac{\log 2}{\log 3} = \frac{a}{b}$$

$$۱۰) \log_{\frac{1}{3}}^{\frac{3}{2}} = \log_{\frac{3}{4}}^{\frac{5}{3}} = 5 \times \frac{1}{4} \log_3^2 = \frac{5}{4} \times \frac{a}{b} = \frac{5a}{4b}$$

**تمرین ۱۱:** اگر  $\log 2 = 0/3010$  و  $\log 7 = 0/8450$  حاصل لگاریتم های زیر را به دست آورید.

۱)  $\log 8$

۶)  $\log 56$

۲)  $\log 49$

۷)  $\log 5$

۳)  $\log 14$

۸)  $\log 25$

حل :

$$۱) \log 8 = \log 2^3 = 3 \log 2 = 3(0/3010) = 0/9030$$

$$۲) \log 49 = \log 7^2 = 2 \log 7 = 2(0/8450) = 0/1690$$

$$۳) \log 14 = \log 2 \times 7 = \log 2 + \log 7 = 0/3010 + 0/8450 = 0/11560$$

$$۶) \log 56 = \log 2^3 \times 7 = \log 2^3 + \log 7 = 3 \log 2 + \log 7 = 3(0/3010) + (0/8450)$$

$$= 0/9030 + 0/8450 = 0/17480$$

$$۷) \log 5 = \log \frac{10}{2} = \log 10 - \log 2 = 1 - (0/3010) = 0/6990$$

$$۸) \log 25 = \log 5^2 = 2 \log 5 = 2(0/6990) = 0/13980$$

**تمرین ۱۲:** معادله<sup>۱</sup> های زیر را حل کنید.

۱)  $\log_5^x + \log_5^3 = \log_5^{12}$

۴)  $\log^{x+3} + \log^x = 1$

<sup>۱</sup> . توجه کنید که بنابر تعریف لگاریتم، جوابی از یک معادله ی لگاریتمی، قابل قبول است که به ازای آن لگاریتم صفر یا

لگاریتم عدد منفی، پیش نیاید.

## آموزش حسابان ۱ ..... تهیه کننده: جابر عامری

۲)  $3 \log x = \log 8$

۵)  $\log_2^{4x} - \log_2^{x-3} = 3$

۳)  $2 \log x + \log 3 = \log 27$

۶)  $\log^{1-x} - \log^2 = \log^5$

حل:

۱)  $\log_5^x + \log_5^3 = \log_5^{12} \rightarrow \log_5^{3x} = \log_5^{12} \rightarrow 3x = 12 \rightarrow x = 4$

۲)  $3 \log x = \log 8 \rightarrow \log x^3 = \log 8 \rightarrow x^3 = 8 \rightarrow x = \sqrt[3]{8} = 2$

۳)  $2 \log x + \log 3 = \log 27 \rightarrow \log x^2 + \log 3 = \log 27 \rightarrow \log 3x^2 = \log 27$

$$\rightarrow 3x^2 = 27 \rightarrow x^2 = 9 \rightarrow x = \sqrt{9} = \pm 3$$

که ریشه‌ی  $x = -3$  غیر قابل قبول است.

۴)  $\log^{x+3} + \log^x = 1 \rightarrow \log^{x(x+3)} = \log^{10} \rightarrow x^2 + 3x = 10 \rightarrow x^2 + 3x - 10 = 0$

$$\rightarrow (x+5)(x-2) = 0 \rightarrow \begin{cases} x+5=0 \rightarrow x=-5 \\ x-2=0 \rightarrow x=2 \end{cases}$$

که ریشه‌ی  $x = -5$  غیر قابل قبول است.

۵)  $\log_2^{4x} - \log_2^{x-3} = 3 \rightarrow \log_2^{\frac{4x}{x-3}} = 3 \log_2^2 \rightarrow \log_2^{\frac{4x}{x-3}} = \log_2^{2^3} \rightarrow \log_2^{\frac{4x}{x-3}} = \log_2^8$

$$\rightarrow \frac{4x}{x-3} = 8 \rightarrow 4x = 8(x-3) \rightarrow 4x = 8x - 24 \rightarrow 4x - 8x = -24$$

$$\rightarrow -4x = -24 \rightarrow x = \frac{-24}{-4} = 6$$

۶)  $\log^{1-x} - \log^2 = \log^5 \rightarrow \log^{\frac{1-x}{2}} = \log^5 \rightarrow \frac{1-x}{2} = 5 \rightarrow 1-x = 10 \rightarrow x = -9$

تمرین ۱۳: معادله‌ی زیر را حل کنید.

$$L_n(x-3) = 2$$

حل:

$$L_n(x-3) = 2 \rightarrow x-3 = e^2 \rightarrow x = 3 + e^2$$



## تمرین برای حل :

۱۴: درستی یا نادرستی عبارت های زیر را تعیین کنید.

الف: لگاریتم اعداد مثبت کمتر از ۱ همواره عددی منفی است.

ب: لگاریتم اعداد منفی تعریف نمی شود.

ب:  $a > b > 0$  آنگاه  $\log_{10} a < \log_{10} b$ .

۱۵: حاصل عبارت های زیر را به دست آورید.

۱)  $\log 25 + \log 4$

۴)  $3 \log 5 + \log 8$

۲)  $\log_8^{40} - \log_8^5$

۵)  $\log_9^3 - \frac{1}{2} \log_3^{81}$

۳)  $\log_{12}^{16} + \log_{12}^9$

۶)  $\log_2^8 - \log_2^5 + \log_2^{20}$

۱۶: لگاریتم های زیر را به صورت یک لگاریتم بنویسید.

۱)  $\log_5^{18} - \log_5^3$

۴)  $\log a + \log b - \log c - \log d$

۲)  $\frac{\log_2^7}{\log_2^5}$

۵)  $2 \log x - 5 \log y - 3 \log c$

۳)  $5 \log p + 2 \log q + 3 \log r$

۱۷: حاصل عبارت های زیر را به دست آورید.

۱)  $\log_{125}^{25}$

۴)  $\log_{81}^{27}$

۷)  $\log_{\frac{1}{20}}^{400}$

۲)  $\log_8^{32}$

۵)  $\log_{\sqrt{5}}^{25}$

۳)  $\log_5^{\sqrt{125}}$

۶)  $\log_{\sqrt{3}}^{27}$

۱۸: اگر  $\log 2 = a$  و  $\log 3 = b$  و  $\log 7 = c$  لگاریتم های زیر را بر حسب  $a$  و  $b$  و  $c$  به دست آورید.

۱)  $\log 49$

۵)  $\log 42$

۹)  $\log_7^2$

۲)  $\log 128$

۶)  $\log 5$

۱۰)  $\log_{81}^{49}$

۳)  $\log 21$

۷)  $\log 576$

۴)  $\log 28$

۸)  $\log_2^7$

## آموزش حسابان ۱ ..... تهیه کننده: جابر عامری

۱۹: اگر  $\log 3 = 0.4771$  و  $\log 7 = 0.8450$  حاصل لگاریتم های زیر را به دست آورید.

۱)  $\log 9$

۳)  $\log 21$

۵)  $\log 63$

۲)  $\log 49$

۴)  $\log 210$

۶)  $\log_3^7$

۲۰: اگر  $\log^2 = 0.3$  باشد، مقدار  $\log^{\frac{25}{4}}$  را محاسبه کنید.

$$\log_{x+1}^{64} = 2$$

۲۱: مقدار  $x$  را از تساوی مقابل به دست آورید.

۲۲: اگر  $\log_x^{\wedge 1} = -4$  مقدار  $x$  را بیابید.

۲۳: معادله  $\log_x^{2x+15} = 2$  را حل کنید.

۲۴: معادله های زیر را حل کنید.

۱)  $\log^{2x+1} = 2 \log^3$

۶)  $\log^x + \log^{x+2} = \log^3$

۲)  $\log^{2x+5} - \log^3 = 2 \log^5$

۷)  $L_n(x-3) = 2$

۳)  $\log x^4 = 4 \log^3$

۸)  $L_n(4x-5) = L_n(2-x)$

۴)  $\log^{3x+1} = \log^5 + 3 \log^2$

۹)  $L_n(2x-1) + L_n(x-7) = L_n 7$

۵)  $\log_x^x + \log_y^5 = \log_y^{15} - \log_y^3$

۲۵: معادله ی زیر را حل کنید.

$$\log^{x+1} + \log^{x-1} = \log^3$$

۲۶: معادله ی زیر را حل کنید.

$$\log^{2-x} + \log^{1-x} = \log^5 + 2 \log^2$$

۲۷: معادله های زیر را حل کنید.

۱)  $(e^x - 5)(2e^x - 7) = 0$

۵)  $9^x = 2 \times 3^{x+2} - 45$

۲)  $(e^x + 3)^2 - 25 = 0$

۶)  $2e^{2x} + e^x - 3 = 0$

۳)  $(2^x - 1)(2^x - 3) = 0$

۷)  $|e^x - 1| = |3 - 2e^x|$

۴)  $3^{2x} - 4 \times 3^x - 45 = 0$

۸)  $1 \cdot \log(x+1) = 3$

\*\*\*

## قسمت سوم : اثبات روابط لگاریتمی

در اینجا روابط لگاریتمی را که پیش از این بیان کرده ایم، اثبات می کنیم.

۱: جمع لگاریتم ها در یک مبنا

$$\log_x^a + \log_x^b = \log_x^{ab}$$

اثبات : فرض می کنیم که  $\log_x^a = \alpha$  و  $\log_x^b = \beta$  پس :

$$\log_x^a = \alpha \rightarrow a = x^\alpha$$

$$\log_x^b = \beta \rightarrow b = x^\beta$$

$$\Rightarrow a.b = x^\alpha . x^\beta \rightarrow a.b = x^{\alpha+\beta} \rightarrow \log_x^{a.b} = \alpha + \beta \rightarrow \log_x^{a.b} = \log_x^a + \log_x^b$$

توجه : اثبات تعمیم این رابطه ی به مجموع چند لگاریتم در یک مبنا نیز به همین صورت انجام می گیرد.

$$\log_x^a + \log_x^b + \log_x^c = \log_x^{abc}$$

دانش آموزان عزیز می توانند، این تساوی را خود اثبات کنند.

\*\*\*

۲: تفریق لگاریتم ها در یک مبنا

$$\log_x^a - \log_x^b = \log_x^{\frac{a}{b}}$$

اثبات : فرض می کنیم که  $\log_x^a = \alpha$  و  $\log_x^b = \beta$  پس :

$$\log_x^a = \alpha \rightarrow a = x^\alpha$$

$$\log_x^b = \beta \rightarrow b = x^\beta$$

$$\Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{x^\alpha}{x^\beta} \rightarrow \frac{a}{b} = x^{\alpha-\beta} \rightarrow \log_x^{\frac{a}{b}} = \alpha - \beta \rightarrow \log_x^{\frac{a}{b}} = \log_x^a - \log_x^b$$

\*\*\*

تمرین ۲۸: به کمک رابطه ی فوق ثابت کنید که  $\log_x^{\frac{1}{a}} = -\log_x^a$

## آموزش حسابان ۱ ..... تهیه کننده: جابر عامری

\*\*\*

۳: لگاریتم عدد تواندار

$$\log_x a^n = n \log_x a$$

اثبات: فرض می کنیم که  $\log_x a = \alpha$  پس:

$$\log_x a = \alpha \rightarrow a = x^\alpha$$

$$\Rightarrow (a)^n = (x^\alpha)^n \rightarrow a^n = x^{n\alpha} \rightarrow \log_x a^n = n\alpha \rightarrow \log_x a^n = n \log_x a$$

\*\*\*

۴: لگاریتم مبنای تواندار

$$\log_{x^m} a = \frac{1}{m} \log_x a$$

اثبات: فرض می کنیم که  $\log_x a = \alpha$  پس:

$$\log_x a = \alpha \rightarrow a = x^\alpha$$

$$\Rightarrow a = (x^{m\alpha})^{\frac{1}{m}} \rightarrow a = (x^m)^{\frac{\alpha}{m}} \rightarrow \log_{x^m} a = \frac{\alpha}{m}$$

$$\rightarrow \log_{x^m} a = \frac{1}{m}(\alpha) \rightarrow \log_{x^m} a = \frac{1}{m}(\log_x a)$$

\*\*\*

۵: توان لگاریتمی

$$x^{\log_x a} = a$$

فرض کنیم که  $\log_x a = \alpha$  پس  $x^\alpha = a \rightarrow x^{\log_x a} = a$ 

۶: تغییر مبنای لگاریتم

$$\log_b a \times \log_x b = \log_x a$$

## آموزش حسابان ۱ ..... پایه ی ۱۱ ریاضی فیزیک

فرض می کنیم که

$$\log_b^a = \alpha \rightarrow b^\alpha = a \quad (۱)$$

$$\log_x^b = \beta \rightarrow x^\beta = b \quad (۲)$$

از روابط (۱) و (۲) می توان نتیجه گرفت :

$$(x^\beta)^\alpha = a \rightarrow x^{\alpha\beta} = a \rightarrow \alpha\beta = \log_x^a$$

پس :

$$\log_b^a \times \log_x^b = \log_x^a$$

نتیجه :

$$\log_b^a = \frac{\log_x^a}{\log_x^b}$$

\*\*\*

## تمرین برای حل :

۲۹ : تساوی های زیر را ثابت کنید.

$$۱) \log_b^a = \frac{1}{\log_a^b}$$

$$۲) a^{\log^b} = b^{\log^a}$$

$$۳) \log_{b^n}^{a^n} = \log_b^a$$

۳۰ : حاصل عبارت های زیر را بیابید.

$$۱) \log_3^{18} \times \log_{18}^3$$

$$۲) \frac{1}{\log_{18}^3} - \frac{1}{\log_3^3}$$

۳۱ : حاصل عبارت زیر را تعیین کنید.

$$\text{الف) } ۲ \log_{10}^2 + \log_{10}^{25} =$$

$$\text{ب) } \log_4^3 \times \log_3^{16} =$$

$$\text{ج) } ۳ \log_{10}^{\sqrt[3]{4}} + \log_{10}^{25} =$$

$$\text{د) } \log_8^{\frac{1}{32}} =$$

$$\text{ه) } ۲ \log_2^5 - \log_2^3 =$$

۳۲: اگر  $\log_3^5 = b$  و  $\log_3^2 = a$  باشد، مقدار  $\log_4^1$  را بیابید.

۳۳: مقدار  $x$  از معادله  $\log_{\frac{1}{3}}^x - \log_{\sqrt{3}}^x - 2\log_3^x = \frac{1}{3}$  به دست آورید.

۳۴: جواب معادله  $\log_4^{\log_3^{\log_2^x}} = 0$  را تعیین کنید.

۳۵: اگر  $a^2 + b^2 = 6ab$  ، آنگاه ثابت کنید که  $\log \frac{a-b}{2} = \frac{\log a + \log b}{2}$

\*\*\*

**تهیه کننده : جابر عامری**

**دبیر ریاضی شهرستان های اهواز و باوی**

سایت : [www.mathtower.ir](http://www.mathtower.ir)

کانال تلگرام : @mathameri

## درس سوم: تابع نمایی و تابع لگاریتمی

در این درس با توابع نمایی و لگاریتمی آشنا می شویم. شناخت این توابع جهت مدل سازی بسیاری از پدیده های طبیعی می تواند مفید باشد.

## قسمت اول: تابع نمایی

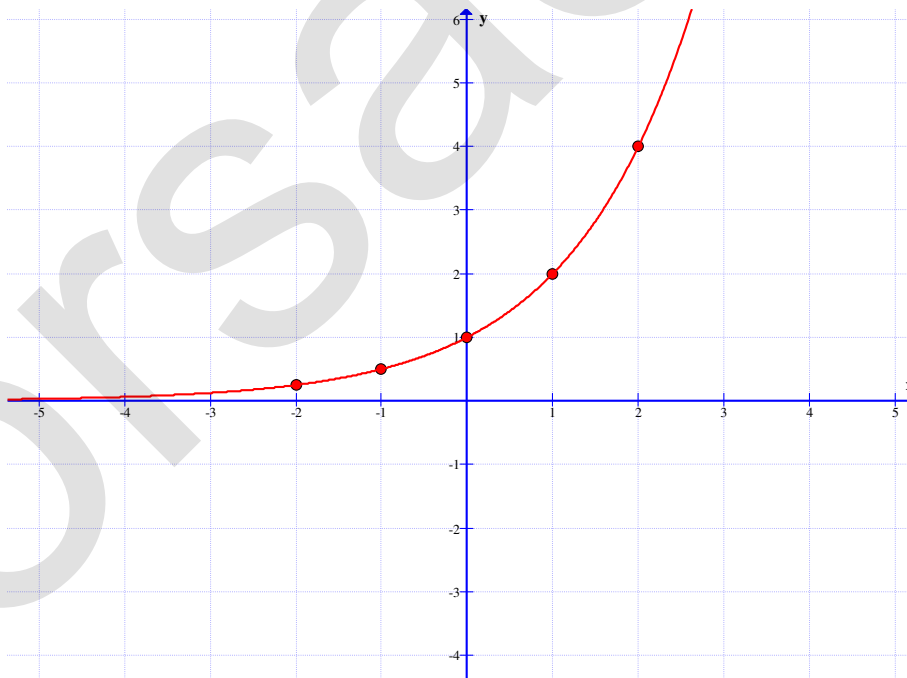
هر تابع به صورت  $f(x) = a^x$  به شرط اینکه  $a > 0$  و  $a \neq 1$  را تابع نمایی می نامند.

مانند تابع  $f(x) = 2^x$

**تمرین ۱:** نمودار تابع  $f(x) = 2^x$  را رسم کنید.

حل: ابتدا چند نقطه ی دلخواه از نمودار تابع را مشخص و سپس آنها را روی دستگاه مختصات تعیین می کنیم.

$x$	-۲	-۱	۰	۱	۲
$y$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	۱	۲	۴



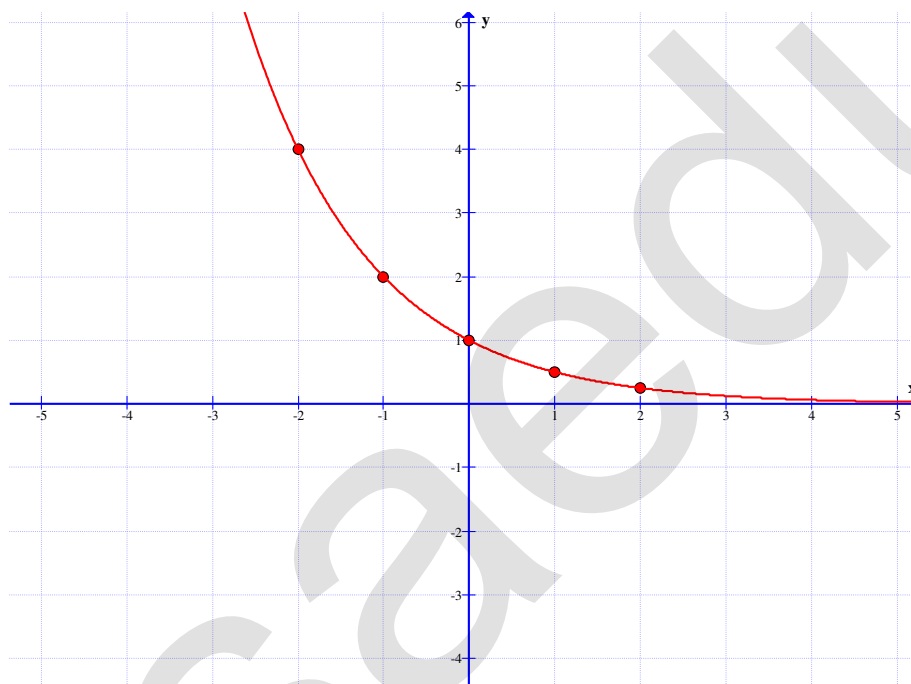
## آموزش حسابان ۱ ..... تهیه کننده: جابر عامری

تمرین ۲: نمودار تابع  $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$  را رسم کنید.

حل: ابتدا چند نقطه‌ی دلخواه از نمودار تابع را مشخص و سپس آنها را روی دستگاه مختصات تعیین می

کنیم.

$x$	-۲	-۱	۰	۱	۲
$y$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	۱	۲	۴



**توجه:** هر تابع با ضابطه‌ی  $f(x) = ka^x$  که در آن  $(k \neq 0, a > 0, a \neq 1)$  با تابع نمایی رفتاری

مشابه دارند و به همین دلیل می گویند، این توابع **رفتار نمایی** دارند. برای مثال، توابع  $f(x) = 3 \times 2^x$

و  $g(x) = \left(\frac{2}{5}\right)^{x-1}$  رفتار نمایی دارند.

\*\*\*

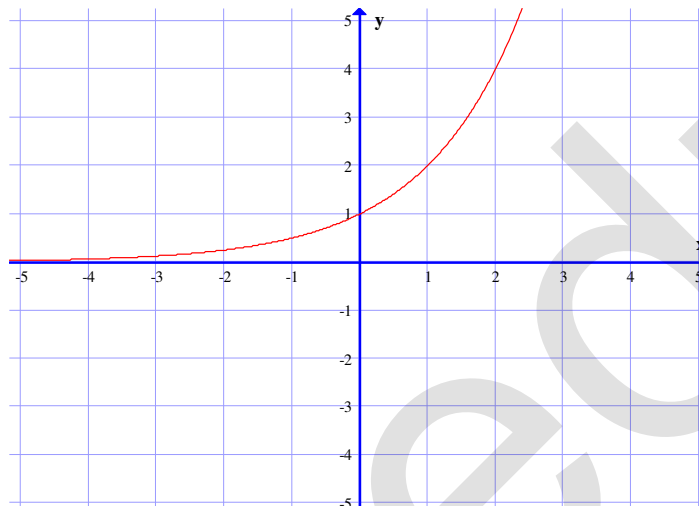


## خواص تابع نمایی

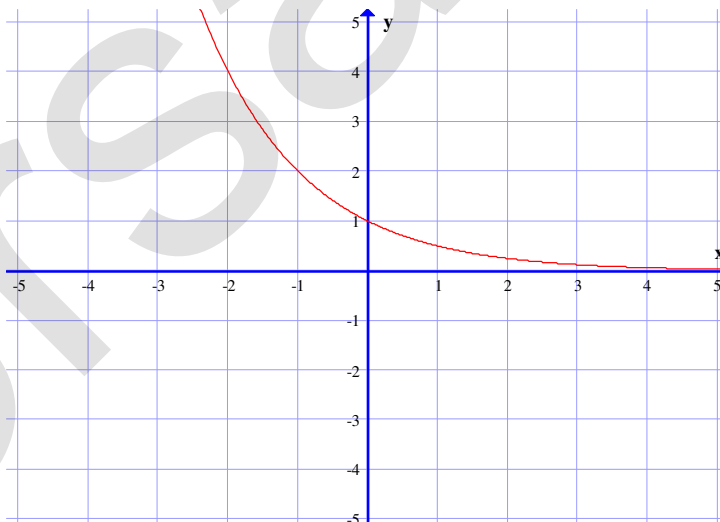
هر تابع نمایی به صورت  $y = a^x$  دارای ویژگی های زیر است.

## ویژگی اول :

اگر  $a > 1$  باشد. تابع دارای نموداری به شکل زیر خواهد بود، که همواره صعودی (افزایشی) است. یعنی با افزایش مقدار  $x$ ، مقادیر  $f$  افزایش می یابند.



همچنین اگر  $0 < a < 1$  باشد. تابع دارای نموداری به شکل زیر خواهد بود، که همواره نزولی (کاهشی) می باشد. یعنی با افزایش مقدار  $x$ ، مقادیر  $f$  کاهش می یابند.



اگر پایه ی تابع نمایی عدد نپرین ( $e = 2.718$ ) باشد. تابع، را تابع نمایی طبیعی می نامند.

ویژگی دوم : هر تابع نمایی  $y = a^x$  محور عرض ها را در نقطه ی  $(0, 1)$  قطع می کند.

## آموزش حسابان ۱ ..... تهیه کننده: جابر عامری

ویژگی سوّم: دامنه‌ی تابع نمایی  $y = a^x$  مجموعه‌ی اعداد حقیقی و برد آن مجموعه‌ی اعداد حقیقی مثبت است.

## تمرین برای حل:

۳: تابع  $y = (\sqrt{3})^x$  محور عرض‌ها را در چه نقطه‌ای قطع می‌کند؟

۴: تابع  $y = -2 + \left(\frac{1}{3}\right)^x$  محور عرض‌ها را در چه نقطه‌ای قطع می‌کند؟

۵: نمودار تابع  $y = x^2$  در چند نقطه نمودار تابع  $y = 2^x$  را قطع می‌کند؟

۶: کدام یک از توابع زیر، یک تابع نمایی است؟

الف)  $f(x) = x^3$       ب)  $f(x) = (2x)^x$

ج)  $f(x) = (\sqrt{2})^x$       د)  $f(x) = (\sqrt{x})^3$

۷: در تابع  $f(x) = a^x$

الف: اگر  $a > 1$ ، با افزایش مقدار  $x$ ، مقادیر  $f$  ..... می‌یابند.

ب: اگر  $0 < a < 1$ ، با افزایش مقدار  $x$ ، مقادیر  $f$  ..... می‌یابند.

۸: محل برخورد نمودار تابع  $f(x) = 3^{2x+1}$  با محور عرض‌ها را به دست آورید.

۹: نمودار تابع‌های زیر را رسم کنید.

الف)  $f(x) = 1 + 2^x$       ب)  $f(x) = 2^{x+1}$       ج)  $f(x) = 2^{x-2}$

\*\*\*

## قسمت دوم : تابع لگاریتمی

هر تابع به صورت  $y = \log_a^x$  (به شرط اینکه  $a > 0$  و  $a \neq 1$  و  $x > 0$ ) را یک تابع لگاریتمی می نامند.

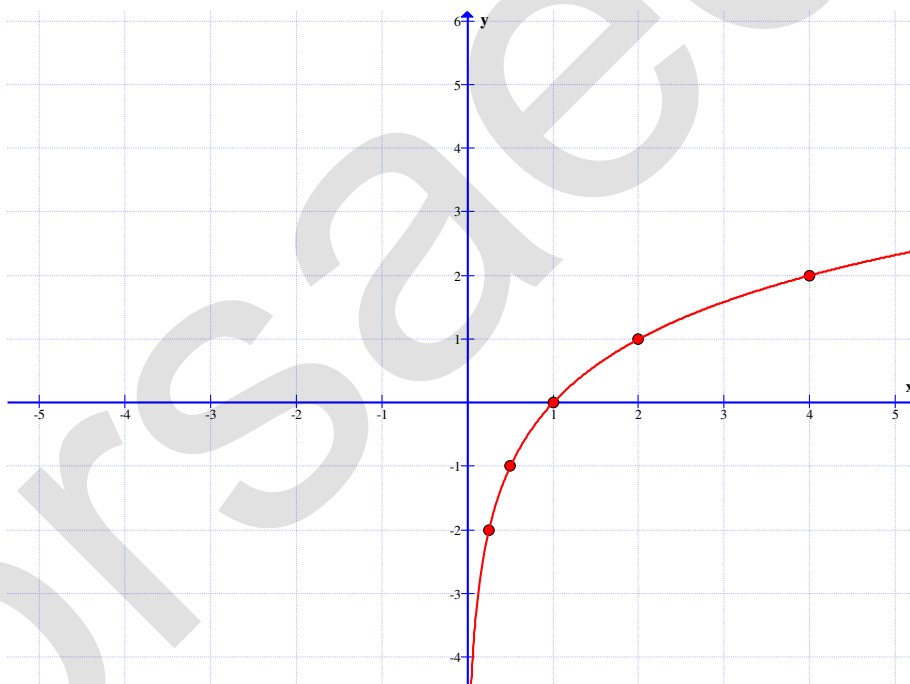
مثال :

$$y = \log_2^x$$

**تمرین ۱۰ :** نمودار تابع  $f(x) = \log_2^x$  را رسم کنید.

حل : ابتدا چند نقطه ی دلخواه از نمودار تابع را مشخص و سپس آنها را روی دستگاه مختصات تعیین می کنیم.

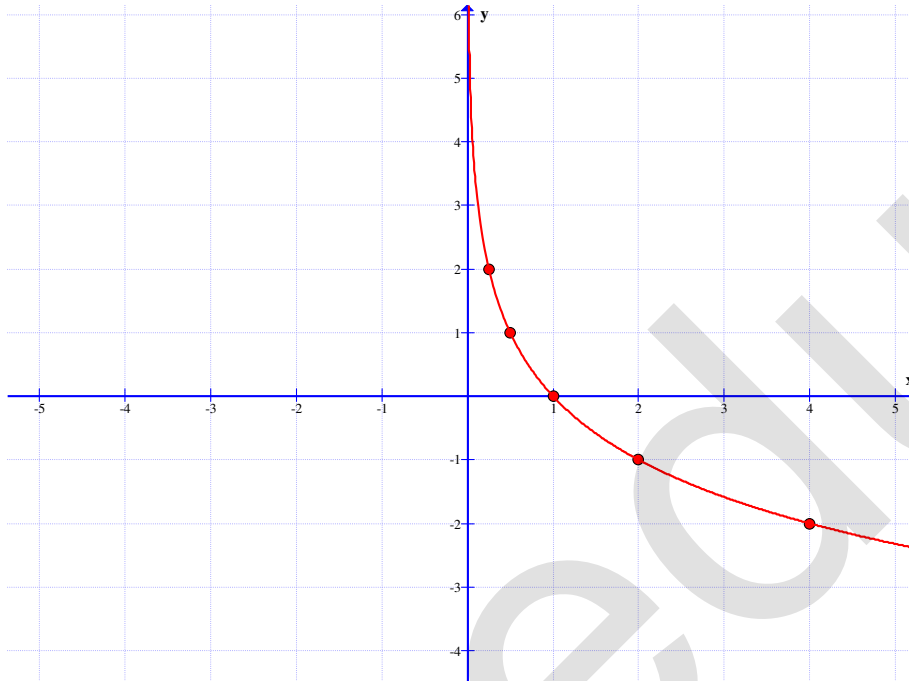
$x$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	۱	۲	۴
$y$	-۲	-۱	۰	۱	۲



**تمرین ۱۱ :** نمودار تابع  $f(x) = \log_{\frac{1}{2}}^x$  را رسم کنید.

حل : ابتدا چند نقطه ی دلخواه از نمودار تابع را مشخص و سپس آنها را روی دستگاه مختصات تعیین می کنیم.

$x$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	۱	۲	۴
$y$	۲	۱	۰	-۱	-۲



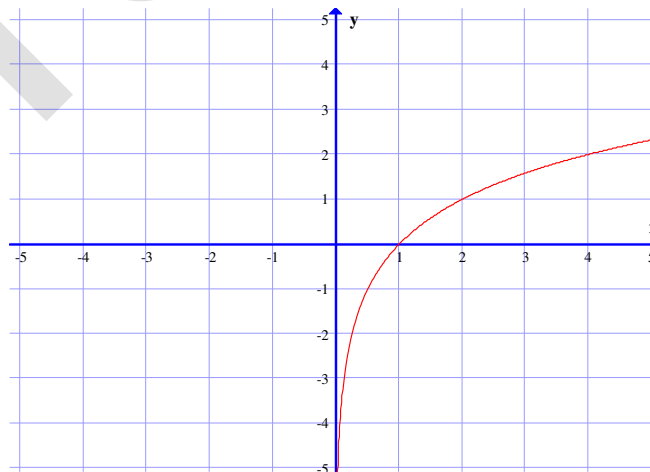
### خواص تابع لگاریتمی

هر تابع لگاریتمی به صورت  $y = \log_a^x$  دارای ویژگی های زیر است.

#### ویژگی اول:

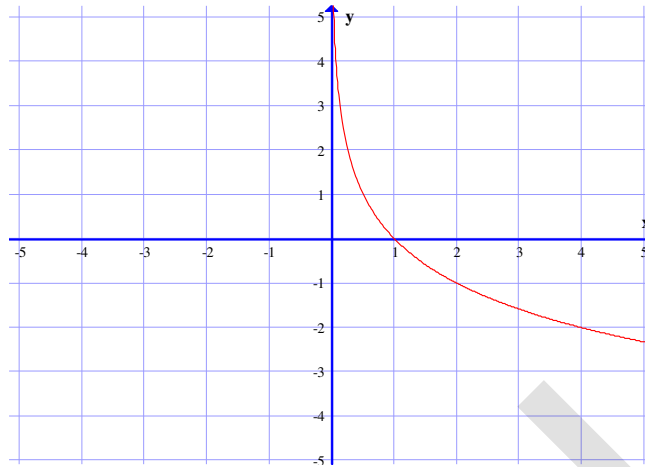
اگر  $a > 1$  باشد. تابع دارای نموداری به شکل زیر خواهد بود، که همواره صعودی (افزایشی) است. یعنی با

افزایش مقدار  $x$ ، مقادیر  $f$  افزایش می یابند.



## آموزش حسابان ۱ ..... پایه ی ۱۱ ریاضی فیزیک

همچنین اگر  $0 < a < 1$  باشد. تابع دارای نموداری به شکل زیر خواهد بود، که همواره نزولی (کاهشی) می باشد. یعنی با افزایش مقدار  $x$ ، مقادیر  $f$  کاهش می یابند.



اگر پایه ی تابع لگاریتمی عدد نپرین ( $e = 2.71$ ) باشد. تابع، را تابع لگاریتمی طبیعی می نامند.

**ویژگی دوّم:** هر تابع لگاریتمی به صورت  $y = \log_a^x$  محور عرض ها را در نقطه ی  $(1, 0)$  قطع می کند.

**ویژگی سوّم:** دامنه ی تابع لگاریتمی به صورت  $y = \log_a^x$  مجموعه ی اعداد حقیقی مثبت و برد آن مجموعه ی اعداد حقیقی است.

**تمرین برای حل:**

**۱۲:** نمودار تابع های زیر را رسم کنید.

الف)  $y = (\sqrt{2})^x$

ب)  $y = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^x$

**۱۳:** دامنه ی تابع  $f(x) = \log_3^{x+1}$  را به دست آورید.

**۱۴:** نمودار تابع  $y = \log_{\sqrt{2}}^x$  را رسم کنید.

**۱۵:** ابتدا دامنه ی تابع  $y = \log_3^{x-1}$  را به دست آورده و سپس نمودار آن را رسم کنید.

**۱۶:** درستی یا نادرستی عبارت های زیر را برای تابع لگاریتم به صورت  $f(x) = \log_a^x$  تعیین کنید.

الف: تابع لگاریتم محور  $y$  ها را قطع می کند.

ب: دامنه ی تابع لگاریتمی مجموعه ی اعداد حقیقی است.

ج: برد تابع لگاریتمی، اعداد حقیقی مثبت است.

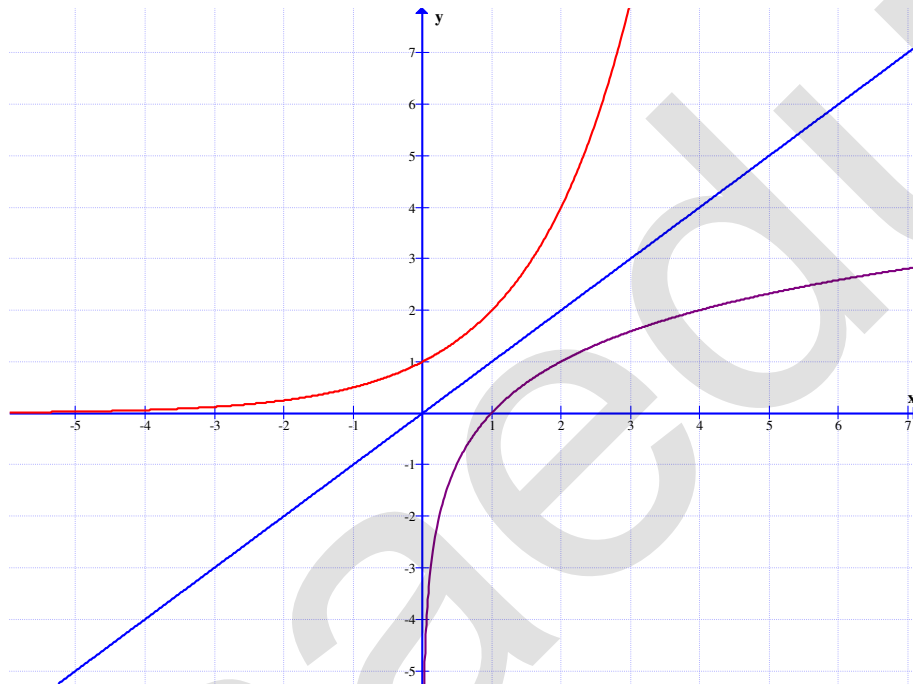
## آموزش حسابان ۱ ..... تهیه کننده: جابر عامری

**توجه:** تابع نمایی  $y = a^x$  یک به یک است و لذا معکوس پذیر می باشد. معکوس آن یک تابع لگاریتمی به صورت زیر است.

$$y = \log_a^x$$

لذا نمودار تابع نمایی  $y = a^x$  و معکوس آن یعنی  $y = \log_a^x$  نسبت به نیمساز ربع اول و سوم قرینه اند.

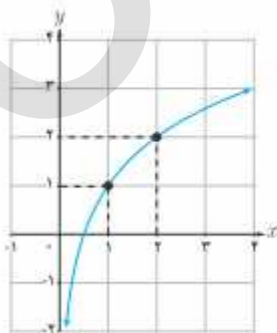
در زیر نمودار تابع  $f(x) = 2^x$  و معکوس آن یعنی  $g(x) = \log_2^x$  را مشاهده می کنید.



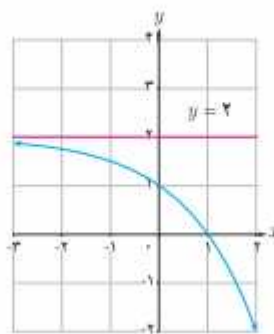
بنابراین اگر نقطه‌ی  $(b, c)$  روی تابع  $y = a^x$  قرار داشته باشد، آنگاه نقطه‌ی  $(c, b)$  روی نمودار  $y = \log_a^x$  قرار دارد.

**تمرین ۱۷:** مشخص کنید، هر یک از نمودارهای زیر به کدام یک از ضابطه‌های زیر تعلق دارد؟

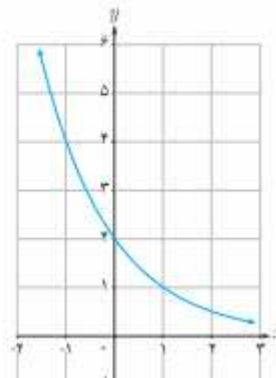
ب)  $y = \left(\frac{1}{2}\right)^{x-1}$



ب)  $y = \log_2(x+1)$



الف)  $y = -2^x + 2$



## آموزش حسابان ۱ ..... پایه ی ۱۱ ریاضی فیزیک

**تمرین ۱۸:** خط  $y = 27$  نمودار تابع  $y = 3^x$  را در چه نقطه ای قطع می کند؟

**تمرین ۱۹:** خط  $y = 10$  نمودار تابع  $y = (0.1)^x$  را در چه نقطه ای قطع می کند؟

**تمرین ۲۰:** تعیین کنید که خط  $y = \sqrt{7}$ ، نمودار تابع  $y = 2^x$  را بین کدام دو عدد صحیح قطع می کند؟

\*\*\*

## حل چند مسئله ی کاربردی توابع نمایی و لگاریتمی

## الف: مسائل مربوط به رشد

اگر  $A_0$  مقدار اولیه و  $A_t$  مقدار ثانویه جمعیت انسانی ها که با آهنگ رشد  $r$  با گذشت زمان  $t$  حاصل شود. در این صورت داریم.

$$A_t = A_0(1+r)^t$$

**تمرین ۲۳:** ایران در سال ۱۳۵۷ دارای ۳۶ میلیون نفر جمعیت بوده است، اگر آهنگ رشد سالانه ی جمعیت

در ایران برابر  $0.05$  باشد، حساب کنید که پس از ۳۰ سال جمعیت کشور چقدر می شود؟

حل:

$$A_t = A_0(1+r)^t = 36(1+0.05)^{30} = 36 \times (1.05)^{30} = 155/58 \quad M$$

## ب: مسائل مربوط به زوال

به مدت زمانی که طول می کشد که مقدار یک ماده نصف شود را نیمه عمر آن ماده می نامند. اگر  $A$  نیمه ی عمر یک ماده و  $B$  باشد. آنگاه جرم باقی مانده از این ماده بعد از گذشت  $t$  سال از رابطه ی زیر به دست می آید.

$$m(t) = B \times 2^{-\frac{t}{A}}$$

**تمرین ۲۴:** نیمه ی عمر یک نوع ماده ی هسته ای حدود ۲۵ سال است، اگر جرم نمونه ای از این ماده ۲۴

میلی گرم باشد و تغییرات جرم پس از  $t$  سال از رابطه ی زیر بدست آید.

$$m(t) = 24 \times 2^{-\frac{t}{25}}$$

## آموزش حسابان ۱ ..... تهیه کننده: جابر عامری

الف: جرم باقی مانده این نمونه بعد از ۵۰ سال را به دست آورید.

ب: حساب کنید که بعد از چند سال جرم باقی مانده برابر ۳ میلی گرم است.

حل:

الف:

$$m(50) = 24 \times 2^{-\frac{50}{25}} = 24 \times 2^{-2} = \frac{24}{4} = 6 \text{ mgr}$$

ب:

$$m(t) = 3 \rightarrow 24 \times 2^{-\frac{t}{25}} = 3 \rightarrow 2^{-\frac{t}{25}} = \frac{3}{24} \rightarrow 2^{-\frac{t}{25}} = 2^{-3} \rightarrow -\frac{t}{25} = -3 \rightarrow t = 75$$

## ج: مسائل مربوط به قدرت زلزله

زمانی زلزله به وقوع می پیوندد که انرژی از زمین آزاد شود. بین شدت نسبی زلزله (قدرت آن) بر حسب ریشتر و میزان انرژی آزاد شده از آن بر حسب ارگ (Erg) رابطه‌ی زیر وجود دارد.

$$\log E = 11/8 + 1/5M$$

که در آن  $M$  قدرت زلزله بر حسب ریشتر و  $E$  انرژی آزاد شده بر حسب ارگ می باشد.

**تمرین ۲۵:** مقدار انرژی آزاد شده توسط زلزله ای به قدرت ۶/۶ ریشتر را به دست آورید.

حل:

$$\log E = 11/8 + 1/5M = 11/8 + 1/5(6/6) = 21/7$$

$$\rightarrow E = 10^{21/7} \text{ Erg}$$

**تمرین ۲۶:** شدت زلزله‌ی ۱۳۶۹ رودبار ۷/۲ ریشتر گزارش شده است. مقدار تقریبی انرژی آزاد شده ی آن

را بر حسب ارگ پیدا کنید.

حل:

$$\log E = 11/8 + 1/5M = 11/8 + 1/5(7/2) = 22/6$$

$$\rightarrow E = 10^{22/6} \text{ Erg}$$



## آموزش حسابان ۱ ..... پایه ۱۱ ریاضی فیزیک

### د: سایر مسائل

علاوه بر مسائل فوق الاشاره می توان موارد دیگر نیز مطرح نمود.

**تمرین ۲۶:** کارآیی کارگر عادی، در کارخانه‌ای پس از  $t$  ماه، روزانه به تعداد  $f(t) = 90 - 40e^{-0.02t}$  واحد است. پس از چند ماه تجربه‌ی کاری، روزانه ۷۰ واحد را کامل می کند؟ ( $L_n 2 = 0.68$ )

حل:

$$f(t) = 90 - 40e^{-0.02t} \xrightarrow{f(t)=70} 90 - 40e^{-0.02t} = 70 \rightarrow -40e^{-0.02t} = -20$$

$$\xrightarrow{\div(-40)} e^{-0.02t} = \frac{1}{2} \rightarrow e^{-0.02t} = 2^{-1} \rightarrow L_n e^{-0.02t} = L_n 2^{-1}$$

$$\rightarrow -0.02t L_n e = -L_n 2 \xrightarrow{L_n e=1} 0.02t = 0.68 \rightarrow t = 34$$

**تمرین ۲۷:** در شروع یک نوع کشت ۱۴۰۰ باکتری موجود است. تعداد باکتری ها پس از  $t$  دقیقه به

صورت  $f(t) = Ae^{0.04t}$  است. پس از چند دقیقه ۷۰۰۰ باکتری موجود است؟ ( $L_n 5 = 1.68$ )

حل:

$$f(t) = Ae^{0.04t} \xrightarrow{f(0)=1400} A = 1400$$

$$\rightarrow f(t) = 1400 e^{0.04t} \xrightarrow{f(t)=7000} 1400 e^{0.04t} = 7000 \rightarrow e^{0.04t} = 5$$

$$\rightarrow 0.04t = L_n 5 \rightarrow 0.04t = 1.68 \rightarrow t = 42$$

\*\*\*

### تمرین برای حل:

**۲۸:** نیمه‌ی عمر یک نوع ماده‌ی هسته‌ای حدود ۳۰ سال است، اگر جرم نمونه‌ای از این ماده ۱۲۸ میلی

گرم باشد، جرمی که پس از ۳۰۰ سال باقی می ماند، چقدر است؟

**۲۹:** اگر جرم باکتری ها در زمان  $t$  از فرمول  $m(t) = 2^t$  به دست آید، حساب کنید که در چه زمانی جرم

باکتری ها حدود ۵۰۰۰ گرم می شود؟

**آموزش حسابان ۱..... تهیه کننده : جابر عامری**

۳۰: اگر آهنگ رشد جمعیت جهان ۰/۰۲ در سال باشد و در سال ۲۰۱۶ جمعیت جهان ۷/۳۲ میلیارد نفر بوده

است. حساب کنید که در سال ۲۰۲۰ جمعیت جهان چقدر می شود؟

۳۱: در دی ماه ۱۳۸۲ در شهرستان بم زلزله ای با قدرت ۶/۳ ریشتر به وقوع پیوست، محاسبه کنید که این

زلزله چند ارگ انرژی آزاد کرده است؟

۳۲: در آذر ماه ۱۳۹۶ در شهرستان کرمانشاه زلزله ای با قدرت ۷/۱ ریشتر به وقوع پیوست، محاسبه کنید که

این زلزله چند ارگ انرژی آزاد کرده است؟

\*\*\*

**تهیه کننده : جابر عامری**

**دبیر ریاضی شهرستان های اهواز و باوی**

سایت : [www.mathtower.ir](http://www.mathtower.ir)

کانال تلگرام : @mathameri