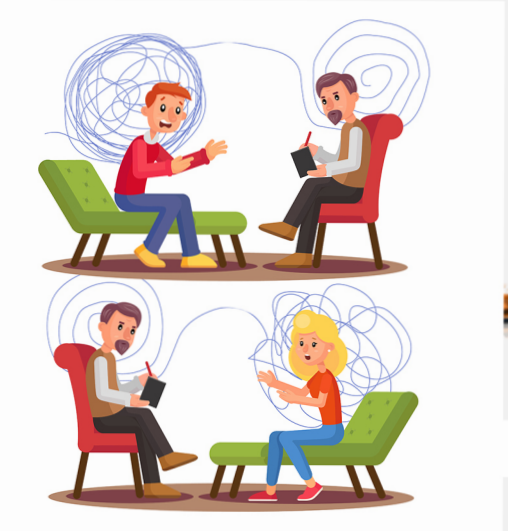
AKO
گروه مشاوره و برنامه ریزی

WWW.AKOEDU.IR

اولین و با کیفیت ترین

آکادمی کنکور در ایران

کلاس های vip کنکور



جهت دریافت برنامه ی شخصی سازی شده یک هفته ای رایگان کلیک کنید و یا به شماره ی ۰۹۰۲۵۶۴۶۲۳۴ عدد ۱ را ارسال کنید.

تلفن تماس: ۰۲۶۳۳۴۰۸۹۴۴

۵۰ تست ریاضی دوازدهم انسانی فصل ۱ - شمارش

۱) به چند طریق از بین ۵ دانش‌آموز سال دهم، ۴ دانش‌آموز سال یازدهم و ۲ دانش‌آموز سال دوازدهم، ۵ نفر روی یک نیمکت ۵ نفره می‌توانند بنشینند، به طوری که نفر وسط سال دوازدهم باشد؟

۱) $۳! \times ۵!$ ۲) $۳! \times ۶!$ ۳) $۲! \times ۷!$ ۴) $۳! \times ۷!$

۲) از ۱۰ کتاب داستان متفاوت و ۸ کتاب علمی متفاوت، چند نوع بسته‌ی هدیه‌ی کتاب ۵ تایی، شامل ۲ کتاب داستان و ۳ کتاب علمی می‌توان انتخاب کرد؟

۱) ۲۴۵۰ ۲) ۲۲۵۰ ۳) ۲۵۴۰ ۴) ۲۵۲۰

۳) تعداد ۴، ۴، ۱۰ و ۱۱، گوسفند، گاو، بز و اسب وجود دارد. به چند طریق از هر نوع ۲ حیوان را می‌توان انتخاب کرده و در یک ردیف قرار داد؟

۱) $۸! \times ۸۰۰$ ۲) $۹! \times ۸۱$ ۳) $۱۱!$ ۴) $۱۱! \times ۹۰$

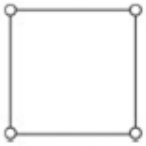
۴) به چند طریق ۵ نفر می‌توانند در ۴ سالن A، B، C و D قرار بگیرند، به طوری که سالن A خالی نماند؟

۱) ۵۱۲ ۲) ۶۲۵ ۳) ۷۸۱ ۴) ۱۰۲۴

۵) ۱۱ نفر به چند طریق می‌توانند ۴ اتاق ۳ نفره را انتخاب کنند، به گونه‌ای که ۲ نفر خاص بخواهند هم اتاق باشند؟

۱) ۵۴۰۰ ۲) ۶۴۰۰ ۳) ۶۶۴۰ ۴) ۶۷۲۰

۶) به چند طریق می‌توان رئوس مربع زیر را با سه رنگ مختلف رنگ کرد، به طوری‌که رأس‌هایی که به هم وصل هستند، هم‌رنگ نباشند؟



۱) ۲۴ ۲) ۱۸ ۳) ۱۲ ۴) ۸

۷) به چند طریق می‌توان ۷ اسباب‌بازی را بین ۳ کودک طوری تقسیم کرد که به کودک بزرگ‌تر ۳ عدد و به بقیه هر کدام ۲ عدد برسد؟

۱) ۲۱۰ ۲) ۲۸۰ ۳) ۳۲۰ ۴) ۳۶۰

۸) با ارقام ۵، ۴، ۳، ۲، ۱ چند عدد ۳ رقمی بدون رقم تکراری می‌توان نوشت به طوری که بر ۳ بخش‌پذیر باشد؟

۱) ۲۴ ۲) ۳۶ ۳) ۴۸ ۴) ۶۰

www.akoedu.ir

۹ با استفاده از ارقام عدد «۹۴۵۸۵» چند جایگشت پنج‌رقمی مضرب ۵ می‌توان نوشت؟

۱) ۱۲ ۲) ۱۸ ۳) ۲۴ ۴) ۲۸

۱۰ با حروف کلمه‌ی «Mohabat» چند جایگشت ۷ حرفی ساخته می‌شود، به طوری‌که حروف یکسان کنار هم باشند؟

۱) ۹۰ ۲) ۱۲۰ ۳) ۵۴۰ ۴) ۷۲۰

۱۱ با حروف کلمه ARRANGE چند کلمه ۷ رقمی می‌توان ساخت به طوری‌که دو حرف R پیش هم ولی دو حرف A پیش هم نباشند.

۱۲ ۸ نفر که a ، b ، c و d در میان آن‌ها هستند، به چند طریق می‌توانند در یک ردیف قرار بگیرند به طوری‌که a و b کنار هم باشند، ولی c و d کنار هم نباشند؟

۱) ۵۰۴۰ ۲) ۳۶۰۰ ۳) ۲۵۲۰ ۴) ۷۲۰۰

۱۳ با استفاده از ارقام ۰، ۲، ۴، ۶ و ۸ چند عدد سه رقمی بزرگ‌تر از ۴۶۰، بدون تکرار ارقام می‌توان نوشت؟

۱) ۳۰ ۲) ۳۶ ۳) ۲۹ ۴) ۳۲

۱۴ چند عدد سه‌رقمی زوج می‌توان نوشت که ارقام آن‌ها اعداد اول باشند؟

۱) ۳۸ ۲) ۱۶ ۳) ۳۴ ۴) ۳۶

۱۵ از بین تمام جایگشت‌های چهاررقمی ساخته شده با ارقام ۸ , ۹ , ۷ و ۵ عددی به تصادف انتخاب شده است. با کدام احتمال این عدد زوج است؟

۱) $\frac{۱}{۴}$ ۲) $\frac{۲}{۳}$ ۳) $\frac{۱}{۳}$ ۴) $\frac{۳}{۴}$

۱۶ به چند طریق می‌توان ۵ کتاب را کنار یکدیگر مرتب کرد به‌طوری که دو کتاب خاص کنار یکدیگر باشند؟

۱) ۱۲۰ ۲) ۹۶ ۳) ۴۸ ۴) ۲۴

۱۷ با حروف کلمهٔ "ELECTION" چند کلمهٔ رمز ۴ حرفی می‌توان نوشت که شامل دو حرف E باشد؟

۱) ۹۰ ۲) ۱۲۰ ۳) ۱۸۰ ۴) ۳۶۰

۱۸ با ارقام ۱، ۲، ۲، ۳ و ۴ چند عدد سه رقمی می‌توان ساخت؟

۱) ۲۴ ۲) ۳۰ ۳) ۳۳ ۴) ۳۶

۱۹ اگر $\frac{(n+۱)!}{(n-۱)!} = ۳۰$، حاصل $(n-۲)!$ کدام است؟

۱) ۱۲۰ ۲) ۲ ۳) ۲۴ ۴) ۶

۲۰ ۱۲ دوست که چهار نفر آن‌ها پارسا، پویا، طاها و رامتین هستند، به چند طریق می‌توانند در یک صف قرار گیرند به طوری که پویا و پارسا کنار هم باشند ولی طاها و رامتین کنار هم نباشند؟

۱) $۱۹۶ \times ۹!$ ۲) $۴ \times ۱۱!$ ۳) $۱۸ \times ۱۰!$ ۴) $۱۸ \times ۱۱!$

www.akoedu.ir

۲۱) حاصل عبارت $\binom{۴۰}{۲} + \ldots + \binom{۳}{۲} + \binom{۲}{۲}$ مضرب کدام عدد است؟

۱) ۱۷ ۲) ۴۰ ۳) ۴۱ ۴) ۳۹

۲۲) از بین ۱۲ خانواده انجمن اولیاء مدرسه به چند طریق می‌توان ۴ خانواده انتخاب کرد که در آن‌ها زن یا شوهر شرکت کنند؟

۱) ۴۹۵ ۲) ۷۲۰ ۳) ۸۴۰ ۴) ۹۹۰

۲۳) با ارقام ۰,۱,۲,۳,۴,۵ چند عدد سه‌رقمی فرد با تکرار ارقام می‌توان نوشت؟

۱) ۶۰ ۲) ۷۵ ۳) ۹۰ ۴) ۱۰۵

۲۴) اگر $P(n , ۳) - C(n , ۳) = ۲۵n$ باشد، مقدار $\frac{P(n - ۳ , ۲)}{C(n + ۱ , ۲)}$، کدام است؟

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) $\frac{۳}{۸}$ ۴) $\frac{۳}{۷}$

۲۵) با ارقام ۳ و ۲ و ۱ و ۷ و ۶ چند عدد سه رقمی که رقم صدگان آن بزرگ‌تر از ۵ باشد، می‌توان نوشت؟ (تکرار مجاز نیست)

۲۶) کدام‌یک از تساوی‌های زیر درست و کدام‌یک نادرست است؟

الف) $\frac{۸!}{۴!} = ۲!$

ب) $۱۰! = ۱۰ \times ۹!$

۲۷) در یک آزمون جور کردنی با ۵ سوال، به چند طریق می‌توان به آن‌ها پاسخ داد؟

۲۸) از میان ۶ دانش‌آموز رشته‌ی ریاضی و ۴ دانش‌آموز رشته‌ی تجربی به چند روش می‌توان ۳ نفر انتخاب کرد که حداقل یک نفر از رشته‌ی ریاضی باشد؟

۱) ۳۶ ۲) ۹۶ ۳) ۱۱۶ ۴) ۱۲۰

۲۹) اگر $\binom{n}{n-۱} + \binom{n}{۲} + \ldots + \binom{n}{۱} = ۲۰۴۶$ باشد، حاصل $\binom{n+۳}{n+۱}$ کدام است؟

۱) ۹۱ ۲) ۱۸۲ ۳) ۷۸ ۴) ۱۵۶

۳۰) اگر $\binom{n}{n} + \ldots + \binom{n}{۳} + \binom{n}{۲} + \binom{n}{۱} = ۲۰۴۷$ مقدار $\binom{n}{n-۱}$ کدام است؟

۱) ۹ ۲) ۱۲ ۳) ۱۰ ۴) ۱۱

www.akoedu.ir

۳۱) با استفاده از ارقام $\{۰,۱,۲,۳,۴,۵\}$ چند عدد چهاررقمی بخش‌پذیر بر ۵ می‌توان ساخت به طوری‌که از ۲۰۰۰ بزرگ‌تر و از ۵۰۰۰ کوچک‌تر باشند؟

۱) ۲۱۶ ۲) ۷۱ ۳) ۷۲ ۴) ۲۱۵

۳۲) پنج نامه‌ی مختلف را به چند طریق می‌توان در ۷ پاکت متفاوت قرار داد؟

۱) ۶۳۰ ۲) ۸۴۰ ۳) ۱۱۲۰ ۴) ۲۵۲۰

۳۳) اگر $C(n+۲, n) = ۴۵$ باشد، مقدار $C(n+۲, ۳)$ ، کدام است؟

۱) ۸۸ ۲) ۹۶ ۳) ۱۰۰ ۴) ۱۲۰

۳۴) با ارقام ۲۸۵۸۸۸۵ چند ترتیب مختلف می توان ساخت؟

۳۵) در معادله‌ی $۱۲C(n-۲, n-۴) = C(n-۱, ۳)$، مقدار n کدام است؟

۱) ۳۷ ۲) ۳۳ ۳) ۲۹ ۴) ۲۵

۳۶) چند عدد چهار رقمی با ارقام غیر صفر وجود دارد که از ۴۰۰۰ کم‌تر و فرد باشند؟

۱) ۱۲۰۰ ۲) ۱۲۱۵ ۳) ۱۶۲۰ ۴) ۱۵۰۰

۳۷) تعداد جایگشت‌های حروف کلمه‌ی MADARAN کدام است؟

۱) ۸۴۰ ۲) ۷۲۰ ۳) ۶۸۰ ۴) ۴۲۰

۳۸) تعداد جایگشت‌های حروف واژه‌ی «خلیج فارس» به‌طوری که کلمه‌ی «فارس» همه‌جا به همین صورت بیاید، کدام است؟

۱) ۹۶ ۲) ۱۲۰ ۳) ۱۴۴ ۴) ۱۸۰

۳۹) به چند طریق می‌توان ۶ عدد اسباب‌بازی متمایز را بین سه بچه، با تعداد یکسان تقسیم کرد؟

۱) ۵۴ ۲) ۶۰ ۳) ۷۲ ۴) ۹۰

۴۰) اگر $p(n-۱, ۲) = ۱۲p(n+۱, ۳)$ باشد، مجموع مقادیر n ، که در معادله صدق می‌کنند، کدام است؟

۱) ۱۱ ۲) ۱۲ ۳) ۱۳ ۴) ۱۴

۴۱) حاصل $\binom{n}{k} + \binom{n}{k-۱}$ برابر کدام است؟

۱) $\binom{n}{k+۱}$ ۲) $\binom{n+۲}{k}$ ۳) $\binom{n+۱}{k}$ ۴) $\binom{n+۱}{k+۱}$

۴۲) به چند طریق می‌توان از بین ۶ کلاس اولی، ۵ کلاس دومی و ۷ کلاس سومی دو نفر را انتخاب کرد که هم‌کلاس نباشند؟

۱) ۹۶ ۲) ۱۰۷ ۳) ۱۱۳ ۴) ۱۲۰

۴۳) در معادله‌ی $۳p(۲n, ۳) = ۱۴p(n, ۲)$، مقدار n برابر است با:

۱) ۴ ۲) ۶ ۳) ۷ ۴) جواب ندارد.

www.akoedu.ir

۴۴ به چند طریق می‌توانیم از بین ۵ مهره‌ی آبی و ۴ مهره‌ی سبز، سه‌مهره انتخاب کنیم به طوری که دوتا آبی و یکی سبز باشد؟

۱) ۴۰ ۲) ۱۰ ۳) ۸۴ ۴) ۱۴

۴۵ چند عدد زوج چهار رقمی با ارقام ۰ و ۲ و ۲ و ۳ می‌توان نوشت؟

۱) ۳ ۲) ۷ ۳) ۴ ۴) ۱۲

۴۶ با استفاده از فرمول $\frac{n!}{a_1!\, a_2!\, a_3! \cdots a_k!}$ ، تعداد ترتیب‌های مختلف عبارت «آفتاب آمد دلیل آفتاب» را بنویسید.

۴۷ درستی تساوی مقابل را نشان دهید. $P(n,5) = 18P((n-2),4)$

۴۸ چند عدد دو رقمی می‌توان نوشت؟

۴۹ با ارقام طبیعی ۶ , ۴ , ۳ , ۲ , ۱ چند عدد سه رقمی فرد می‌توان نوشت؟ (تکرار ارقام جایز نیست.)

۱) ۴۸ ۲) ۳۶ ۳) ۲۴ ۴) ۱۲

۵۰ تعداد شماره تلفن‌های ۷ رقمی برابر است با:

۱) 8×9^9 ۲) 8×9^6 ۳) 9×10^7 ۴) 9×10^6

www.akoedu.ir

۱ گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$\binom{۲}{۱} \times \binom{۱۰}{۴} \times ۴! = ۲ \times ۱۰ \times ۹ \times ۸ \times ۷ = ۲! \times ۷!$$

۲ گزینه ۴ پاسخ صحیح است. انتخاب k شی متمایز از n شیء متمایز برابر است با: $\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!k!}$

بنابراین:

$$\binom{۱۰}{۲} \times \binom{۸}{۳} = ۴۵ \times ۵۶ = ۲۵۲۰$$

۳ گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

$$\binom{۴}{۲} \times \binom{۴}{۲} \times \binom{۱۰}{۲} \times \binom{۱۱}{۲} \times ۸! = ۲ \times ۳ \times ۲ \times ۳ \times ۹ \times ۵ \times ۵ \times ۱۱ \times ۸! = ۹۰ \times ۱۱!$$

۴ گزینه ۳ پاسخ صحیح است. تعداد حالتی که ۵ نفر می‌توانند سالن‌ها را انتخاب کنند برابر $۴ \times ۴ \times ۴ \times ۴ \times ۴$ و تعداد حالتی که سالن A خالی می‌ماند برابر $۳ \times ۳ \times ۳ \times ۳ \times ۳$ پس تعداد حالتی که سالن A خالی نمی‌ماند برابراست با:

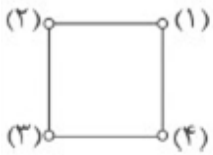
$$۴^۵ - ۳^۵ = ۱۰۲۴ - ۲۴۳ = ۷۸۱$$

۵ گزینه ۴ پاسخ صحیح است. تعداد حالت $۳ - ۳ - ۳ - ۲$ برابر است با:

حالتی که شخصی را با خود هم اتاق می کنند — حالتی که دو نفر در یک اتاق باشند

$$\binom{۹}{۱}\binom{۸}{۳}\binom{۵}{۳}\binom{۲}{۲} + \binom{۹}{۳}\binom{۶}{۳}\binom{۳}{۳} = ۹ \times ۵۶ \times ۱۰ + ۸۴ \times ۲۰ = ۶۷۲۰$$

۶ گزینه ۲ پاسخ صحیح است. فرض کنید سه رنگ A، B و C را برای رنگ‌آمیزی انتخاب کرده‌ایم. دو حالت زیر را داریم:



حالت اول: برای رأس ۱ سه انتخاب داریم.

برای رأس ۲، دو انتخاب از بین رنگ‌ها باقی می‌ماند. حال اگر رأس ۳ هم‌رنگ رأس ۱ باشد، برای رأس ۴ دو انتخاب داریم. پس در کل طبق اصل ضرب $۳ \times ۲ \times ۱ \times ۲ = ۱۲$ حالت داریم.

حالت دوم: برای رئوس ۱ و ۲ به‌ترتیب ۳ و ۲ انتخاب داریم. حال اگر رنگ رأس ۳، هم‌رنگ رأس ۱ نباشد و چون باید هم‌رنگ رأس ۲ هم نباشد، پس فقط یک انتخاب برای رأس ۳ وجود دارد. با توجه به این امر برای رأس ۴ هم تنها یک انتخاب داریم. پس در این حالت $۳ \times ۲ \times ۱ \times ۱ = ۶$ حالت داریم. بنابراین در کل با $۱۲ + ۶ = ۱۸$ حالت مختلف می‌توان رئوس را با شرط داده شده رنگ کرد.

www.akoedu.ir

۷ گزینه ۱ پاسخ صحیح است. به کودک بزرگ‌تر ۳ اسباب‌بازی می‌دهیم، بنابراین ۴ اسباب‌بازی می‌ماند که ۲ تای آن را به کودک بعدی می‌هیم و در نهایت ۲ اسباب‌بازی می‌ماند که به کودک آخر می‌دهیم:

$$\binom{۷}{۳}\binom{۴}{۲}\binom{۲}{۲}$$

$$\binom{۷}{۳}=\frac{۷!}{۳!\,۴!}=\frac{۷\times ۶\times ۵\times ۴!}{۳\times ۲\times ۱\times ۴!}=۳۵$$

$$\binom{۴}{۲}=\frac{۴!}{۲!\,۲!}=\frac{۴\times ۳\times ۲!}{۲\times ۲!}=۶$$

$$\binom{۲}{۲}=۱$$

$$\Rightarrow ۳۵\times ۶\times ۱=۲۱۰$$

۸ گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

عددی بر ۳ بخش‌پذیر است که جمع ارقامش بر ۳ بخش‌پذیر باشد، پس رقم‌ها را به شکل زیر انتخاب می‌کنیم:

$۱,۲,۳ \rightarrow ۳!$

$۱,۳,۵ \rightarrow ۳!$

$۲,۳,۴ \rightarrow ۳!$

$۲,۳,۴ \rightarrow ۳!$

$۳,۴,۵ \rightarrow ۳!$

$$\Rightarrow ۳!+۳!+۳!+۳!=۲۴$$

۹ گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$\boxed{۴}\times\boxed{۳}\times\boxed{۲}\times\boxed{۱}\times\boxed{۱}=۲۴$$

جایگشت ۴ رقم باقی‌مانده — رقم ۵

۱۰ گزینه ۴ پاسخ صحیح است. در کلمه‌ی «Mohabat» حرف a دوبار تکرار شده و یکسان است که آن‌ها را کنار هم قرار می‌دهیم:

$$\boxed{aa}\ M\ o\ h\ b\ t$$

بنابراین ۶ شیء داریم که جایگشت آن‌ها برابر $۶!$ است.

$$۶!=۶\times ۵\times ۴\times ۳\times ۲\times ۱=۷۲۰$$

۱۱

تعداد کلماتی که هر دو R پیش هم باشند $=\frac{۶!}{۲!}=۳۶۰$

تعداد کلماتی که هر دو R و هر دو A پیش هم باشند $=۵!=۱۲۰$

تعداد کلماتی که هر دو R پیش هم ولی هر دو A پیش هم نباشند $=۳۶۰-۱۲۰=۲۴۰$

۱۲ گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

نکته: اگر بخواهیم تعداد حالت‌هایی که اشیاء خاصی کنار هم نباشند را به دست آوریم، تعداد کل حالت‌ها را منهای تعدادحالت‌هایی می‌کنیم که کنار هم باشند:

$$\underbrace{۶!\times ۲!\times ۲!}_{(d,c),(b,a)\text{ ۴ نفر}}=۶!\times ۲!(۷-۲)=۵\times ۶!\times ۲!=۷۲۰۰$$

$$-\ \underbrace{۷!\times ۲!}_{d\ ,\ c\ ,(b,a)\text{ ۴ نفر}}$$

www.akoedu.ir

۱۳ گزینه ۳ پاسخ صحیح است. دو حالت داریم:
حالت اول: صدگان ۴ باشد:

$$\underbrace{\frac{۴}{۱}\ \frac{۸\ \text{یا}\ ۶}{۲}\ \frac{\ }{۳}}_{\text{تعداد حالت ها}} \Rightarrow ۱\times۲\times۳=۶$$

اما یکی از اعداد ساخته‌شده، ۴۶۰ است که مطلوب نیست، پس ۵ = ۱ - ۶ عدد در این حالت داریم.
حالت دوم: صدگان ۶ یا ۸ باشد:

$$\underbrace{\frac{۶\ \text{یا}\ ۸}{۲}\ \frac{\ }{۴}\ \frac{\ }{۳}}_{\text{تعداد حالت ها}} \Rightarrow ۲\times۴\times۳=۲۴$$

بنابراین طبق اصل جمع، ۲۹ = ۵ + ۲۴ عدد با ویژگی‌های مطلوب داریم.

۱۴ گزینه ۲ پاسخ صحیح است. اعداد اول یک‌رقمی ۲، ۳، ۵ و ۷ می‌باشند. یکی از این اعداد زوج است، پس رقم سمت راست فقط ۲ می‌تواند باشد، پس:

تعداد حالات = ۴ × ۴ × ۱ = ۱۶

۱۵ گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$n(S) = \text{تعداد جایگشت های ۴ رقمی} = \boxed{۴}\times\boxed{۳}\times\boxed{۲}\times\boxed{۱} = ۴! = ۲۴$$

فقط رقم ۸ ۲ رقم باقی مانده

$$n(A) = \text{تعداد جایگشت های زوج} = \boxed{۳}\times\boxed{۲}\times\boxed{۱}\times\boxed{۱} = ۶$$

همه ارقام به جز ۸ ۱ رقم باقی مانده

$$P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{۶}{۲۴}=\frac{۱}{۴}$$

۱۶ گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$۲!\times۴! = ۲\times۲۴ = ۴۸$$

۱۷ گزینه ۳ پاسخ صحیح است.
نکته: تعداد جایگشت‌های n شیء که $n_۱$ شیء آن از نوع اول و $n_۲$ شیء آن از نوع دوم، ... و n_k شیء آن از نوع k ام است، برابر است با:

$$\frac{n!}{n_۱!\ n_۲!\ \dots\ n_k!}$$

$$\binom{۶}{۲}\times\frac{۴!}{۲!}=\frac{۶!}{۲!\,۴!}\times\frac{۴!}{۲!}=\frac{۶\times۵}{۲}\times۴\times۳=۱۵\times۱۲=۱۸۰$$

انتخاب ۲ حرف از حروف LCTION
جایگشت ۴ حرف که ۲ حرف آن تکراری است

www.akoedu.ir

۱۸ گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

نکته: (اصل ضرب): اگر عملی طی دو مرحله‌ی اول و دوم انجام پذیرد، به طوری که مرحله‌ی اول به m طریق و در مرحله‌ی دوم هر کدام از این m طریق به n روش انجام‌پذیر باشند، در کل آن عمل به $m \times n$ طریق انجام‌پذیر است.

نکته (اصل جمع): اگر بتوان عملی را به m طریق و عمل دیگری را به n طریق انجام داد و این دو عمل را نتوان با هم انجام داد، در این صورت به $m + n$ طریق می‌توان عمل اول یا عمل دوم را انجام داد. برای نوشتن عدد سه‌رقمی با ارقام ۱، ۲، ۲، ۳ و ۴ یکی از دو حالت زیر را داریم:

حالت اول:

رقم ۲، حداکثر یکبار استفاده شده باشد، در این حالت کافیست تعداد اعداد سه‌رقمی را که با ارقام ۱، ۲، ۳ و ۴ می‌توانیم بنویسیم، حساب کنیم:

تعداد انتخاب‌ها → ۴ (صدگان) ۳ (دهگان) ۲ (یکان) $\xrightarrow{\text{اصل ضرب}}$ $۴ \times ۳ \times ۲ = ۲۴$

حالت دوم:

رقم ۲، دقیقاً دوبار استفاده شده باشد، در این حالت عدد سه‌رقمی به یکی از شکل‌های زیر است:

۲۲○ (۳ حالت: ۱ یا ۳ یا ۴) ۲○۲ (۳ حالت: ۱ یا ۳ یا ۴) ○۲۲ (۳ حالت: ۱ یا ۳ یا ۴) $\xrightarrow{\text{اصل جمع}}$ $۳ + ۳ + ۳ = ۹$

پس در کل طبق اصل جمع، $۲۴ + ۹ = ۳۳$ عدد سه‌رقمی با این شرایط می‌توانیم بنویسیم.

۱۹ گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

نکته: برای ضرب یک عدد طبیعی و بزرگ‌تر از ۱ در تمام اعداد طبیعی کوچک‌تر از خودش از نماد فاکتوریل استفاده می‌شود، یعنی:

$$n! = n \times (n - ۱) \times (n - ۲) \times \dots \times ۱$$

با استفاده از نکته: تساوی داده‌شده را ساده می‌کنیم:

$$\frac{(n + ۱)!}{(n - ۱)!} = ۳۰ \Rightarrow \frac{(n + ۱)(n)\cancel{(n - ۱)!}}{\cancel{(n - ۱)!}} = ۳۰ \Rightarrow (n + ۱)\, n = ۳۰ \Rightarrow n^{۲} + n - ۳۰ = ۰$$

$$\xrightarrow{\text{تجزیه با اتحاد جمله مشترک}} (n + ۶)(n - ۵) = ۰ \Rightarrow \begin{cases} n + ۶ = ۰ \Rightarrow n = -۶ \times \\ n - ۵ = ۰ \Rightarrow n = ۵ \end{cases}$$

چون n باید عددی طبیعی باشد، فقط $n = ۵$ قابل‌قبول است. حال مقدار $(n - ۲)!$ را حساب می‌کنیم:

$$(n - ۲)! = (۵ - ۲)!\ ۳! = ۳ \times ۲ \times ۱ = ۶$$

۲۰ گزینه ۳ پاسخ صحیح است. ابتدا تعداد حالاتی که پویا و پارسا کنار هم هستند را می‌یابیم.

$$\text{تعداد حالات} = ۱۱! \times ۲! = ۲ \times ۱۱! \Rightarrow \text{۱۰ نفر دیگر} + \text{پارسا، پویا}$$

حالا تعداد حالاتی که پویا و پارسا کنار هم و طاها و رامتین کنار هم هستند را یافته و از $۲ \times ۱۱!$ کم می‌کنیم.

$$\text{تعداد حالات} = ۱۰! \times ۲! \times ۲! = ۴ \times ۱۰! \Rightarrow \text{۸ نفر دیگر} + \text{طاها و رامتین} + \text{پارسا و پویا}$$

$$\text{جواب نهایی} = ۲ \times ۱۱! - ۴ \times ۱۰! = ۲ \times ۱۱ \times ۱۰! - ۴ \times ۱۰! = (۲۲ - ۴) \times ۱۰! = ۱۸ \times ۱۰!$$

www.akoedu.ir

۲۱ گزینه ۳ پاسخ صحیح است. با توجه به تمرین ۶ صفحه ۳۶ کتاب درسی گسسته (روابط اثبات شده از طریق استقرا) داریم:

$$\binom{۲}{۲}+\binom{۳}{۲}+\ldots+\binom{۴۰}{۲}=\binom{۴۱}{۳}=\frac{۴۱\times ۴۰\times ۳۹}{۳!}=۴۱\times ۲۰\times ۱۳$$

تنها مقدار صحیح عدد ۴۱ می‌توان باشد.

۲۲ گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

ابتدا انتخاب ۴تایی از ۱۲ خانواده سپس دو حالت برای انتخاب زن یا شوهر پیش می‌آید:

$$\binom{۱۲}{۴}\times ۲=\frac{۱۲\times ۱۱\times ۱۰\times ۹}{۲۴}\times ۲=۹۹۰$$

۲۳ گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

رقم صدگان به ۵ طریق، رقم دهگان به ۶ طریق و رقم یکان به ۳ طریق نوشته می‌شود، پس تعداد آن‌ها:

$$۵\times ۶\times ۳=۹۰$$

۲۴ گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

$$\frac{n!}{(n-۳)!}-\frac{n!}{(n-۳)!۳!}=۲۵n$$

$$\frac{\cancel{(n-۳)!}(n-۲)(n-۱)n}{\cancel{(n-۳)!}}-\frac{\cancel{(n-۳)!}(n-۲)(n-۱)n}{\cancel{(n-۳)!}\times ۶}=۲۵n$$

$$\frac{۶n(n^۲-۳n+۲)-n(n^۲-۳n+۲)}{۶}=۲۵n$$

در نتیجه: $۵n(n^۲-۳n+۲)=۶\times ۲۵n\Rightarrow n^۲-۳n+۲=۳۰\Rightarrow n^۲-۳n-۲۸=۰\ ,\ n\neq ۰$

بنابراین: $(n-۷)(n+۴)=۰\Rightarrow\begin{cases}n=۷ & \text{قابل قبول}\\ n=-۴ & \text{غیر قابل قبول}\end{cases}$

$$\frac{P(n-۳,۲)}{C(n+۱,۲)}=\frac{P(۴,۲)}{C(۸,۲)}=\frac{\frac{۴!}{(۴-۲)!}}{\frac{۸!}{(۸-۲)!۲!}}=\frac{\frac{(۳\times ۴)\times ۲!}{۲!}}{\frac{۶!\times ۷\times ۸}{۶!۲!}}=\frac{۱۲}{۲۸}=\frac{۳}{۷}$$

۲۵ صفحه ۱۱۶ کتاب

$$\underset{(۰/۷۵)}{۲}\times\underset{(۰/۵)}{۴}\times ۳=۲۴$$

۲۶ صفحه ۱۱۶ کتاب

الف) نادرست (۰/۵)　　ب) درست (۰/۵)

۲۷ صفحه ۹۹ کتاب

$$\underset{(۰/۲۵)}{۵!}=۵\times ۴\times ۳\times ۲\times \underset{(۰/۵)}{۱}=۱۲۰\quad (۰/۲۵)$$

www.akoedu.ir

۲۸ گزینه‌ی ۳ پاسخ صحیح است. کافی است از تعداد کل حالات انتخاب ۳ نفر از ۱۰ نفر، حالتی را که هر ۳ نفر از رشته‌ی تجربی باشند کم کنیم:

$$\binom{۱۰}{۳} - \binom{۴}{۳} = \frac{۱۰ \times ۹ \times ۸ \times ۷!}{۳! \times ۷!} - ۴ = ۱۱۶$$

۲۹ گزینه‌ی ۱ پاسخ صحیح است.

$$۲^n - \binom{n}{۰} - \binom{n}{n} = ۲^n - ۲ = ۲۰۴۶ \Rightarrow ۲^n = ۲۰۴۸ = ۲^n \Rightarrow n = ۱۱$$

$$\binom{۱۱+۳}{۱۱+۱} = \binom{۱۴}{۱۲} = \frac{۱۴!}{۱۲!\,۲!} = \frac{۱۴ \times ۱۳}{۲} = ۹۱$$

۳۰ گزینه‌ی ۴ پاسخ صحیح است. می‌دانیم:

$$\binom{n}{۰} + \binom{n}{۱} + \binom{n}{۲} + \binom{n}{۳} + \ldots + \binom{n}{n} = ۲^n$$

بنابراین می‌توان نوشت:

$$۲^n - ۱ = ۲۰۴۷ \Rightarrow ۲^n = ۲۰۴۸ = ۲^{۱۱} \Rightarrow n = ۱۱$$

از طرفی:

$$\binom{n}{n-۱} = n = ۱۱$$

۳۱ گزینه‌ی ۴ پاسخ صحیح است.

$$\frac{۳}{۴,۳,۲}\ \frac{۶}{}\ \frac{۶}{}\ \frac{۲}{۰,۵} \Rightarrow ۳ \times ۶ \times ۶ \times ۲ = ۲۱۶$$

ولی دقت کنید یکی از این ۲۱۶ عدد ۲۰۰۰ است و قابل قبول نیست.

۳۲ گزینه‌ی ۴ پاسخ صحیح است. انتخاب ۷ پاکت به‌صورت ۵ تایی و با جابه‌جایی است. $۷ \times ۶ \times ۵ \times ۴ \times ۳ = ۲۵۲۰$

۳۳ گزینه‌ی ۴ پاسخ صحیح است.

$$C(n+۲, n) = \frac{(n+۲)!}{(n+۲-n)!\,n!} = \frac{n!\,(n+۱)(n+۲)}{n!\,۲!} = \frac{n^۲+۳n+۲}{۲} = ۴۵$$

بنابراین:

$$n^۲+۳n+۲ = ۹۰ \Rightarrow n^۲+۳n-۸۸ = ۰ \Rightarrow (n+۱۱)(n-۸) = ۰$$

$$\Rightarrow \begin{cases} n = -۱۱ & \text{غیرقابل قبول} \\ n = ۸ & \text{قابل قبول} \end{cases}$$

$$C(n+۲, ۳) = C(۱۰, ۳) = \frac{۱۰!}{(۱۰-۳)!\,۳!} = \frac{۷! \times ۸ \times ۹ \times ۱۰}{۷! \times ۶} = ۱۲۰$$

۳۴

$$\frac{۷!}{۴! \times ۲!} = \frac{۷ \times ۶ \times ۵ \times ۴!}{۴! \times ۲ \times ۱} = ۱۰۵$$

(۰/۵) (۰/۵)

www.akoedu.ir

۳۵ گزینه‌ی ۱ پاسخ صحیح است. با توجه به فرمول ترکیب r شیء از n شیء، طرفین معادله را ساده می‌نماییم:

$$C(n,r)=\frac{n!}{r!(n-r)!}$$

معادله: $۱۲C(n-۲,n-۴)=C(n-۱,۳)\rightarrow ۱۲\times\frac{(n-۲)!}{(n-۴)!\times ۲!}=\frac{(n-۱)!}{۳!(n-۴)!}$

$$\rightarrow ۱۲\times(n-۲)!=\frac{(n-۲)!(n-۱)}{۳}\rightarrow ۱۲\times ۳=n-۱\rightarrow n=۳۷$$

۳۶ گزینه‌ی ۲ پاسخ صحیح است.

$۳\times ۹\times ۹\times ۵$ حالت

رقم یکان باید ۱ یا ۳ یا ۵ یا ۷ یا ۹ باشد. پس رقم یکان ۵ حالت دارد. رقم هزارگان هم فقط می‌تواند ۱ یا ۲ یا ۳ باشد، یعنی ۳ حالت دارد. اما در مورد دو رقم دیگر حرفی نزده، پس هر کدام ۹ حالت دارند:

$$۳\times ۹\times ۹\times ۵=۱۵\times ۸۱=۱۲۱۵$$

۳۷ گزینه‌ی ۱ پاسخ صحیح است. کلمه‌ی "MADARAN" دارای هفت حرف است که حرف A سه بار تکرار شده است و تعداد جایگشت‌های آن برابر است با: $\frac{۷!}{۳!}=\frac{۷\times ۶\times ۵\times ۴\times ۳!}{۳!}=۸۴۰$

۳۸ گزینه‌ی ۲ پاسخ صحیح است. کلمه‌ی «فارس» را به همین صورت نگه داشته که همراه چهار حرف کلمه «خلیج» روی هم ۵ حرف داریم و جایگشت ۵ حرف برابر است با: $۵!=۵\times ۴\times ۳\times ۲\times ۱=۱۲۰$

۳۹ گزینه‌ی ۴ پاسخ صحیح است. به هر کودک باید ۲ اسباب‌بازی برسد بنابراین باید ابتدا ۲ اسباب‌بازی از بین ۶ اسباب‌بازی را انتخاب کرده و به کودک اول بدهیم سپس ۲ اسباب‌بازی از بین ۴ اسباب‌بازی باقیمانده را انتخاب کرده و به کودک دوم بدهیم و سپس دو اسباب‌بازی باقی‌مانده را به کودک سوم بدهیم.

$$\binom{۶}{۲}\times\binom{۴}{۲}\times\binom{۲}{۲}=۱۵\times ۶\times ۱=۹۰$$

۴۰ گزینه‌ی ۱ پاسخ صحیح است.

$$P(n+۱,۳)=۱۲P(n-۱,۲)$$

$$\frac{(n+۱)!}{(n+۱-۳)!}=۱۲\times\frac{(n-۱)!}{(n-۱-۲)!}\Rightarrow\frac{(n+۱)!}{(n-۲)!}=۱۲\times\frac{(n-۱)!}{(n-۳)!}\Rightarrow\frac{\cancel{(n-۲)!}\cancel{(n-۱)}n(n+۱)}{\cancel{(n-۲)!}}$$

$$=۱۲\times\frac{\cancel{(n-۳)!}(n-۲)\cancel{(n-۱)}}{\cancel{(n-۳)!}}\Rightarrow$$

$$n(n+۱)=۱۲(n-۲)\Rightarrow n^۲+n=۱۲n-۲۴\Rightarrow n^۲-۱۱n+۲۴=۰$$

$$(n-۳)(n-۸)=۰\Rightarrow\begin{cases}n-۳=۰\Rightarrow n=۳\\ n-۸=۰\Rightarrow n=۸\end{cases}$$

$$۳+۸=۱۱$$

۴۱ گزینه‌ی ۳ پاسخ صحیح است. عبارت $\binom{n}{k-۱}+\binom{n}{k}$ مجموع دو ضریب متوالی در بسط دو جمله‌ای نیوتن است که بنابر مثلث خیام برابر ضریب همان جمله در توان یکی بیشتر است یعنی حاصل $\binom{n+۱}{k}$ می‌باشد.

www.akoedu.ir

۴۲ گزینه‌ی ۲ پاسخ صحیح است. برای این‌که دو نفر انتخابی هم‌کلاس نباشند، این‌گونه دو نفر را انتخاب می‌کنیم:

تعداد حالات = (یک دومی و یک سومی) یا (یک اولی و یک سومی) یا (یک اولی و یک دومی)

$$\text{تعداد حالات} = \binom{۵}{۱} \times \binom{۶}{۱} + \binom{۷}{۱} \times \binom{۶}{۱} + \binom{۷}{۱} \times \binom{۵}{۱} = ۱۰۷$$

۴۳ گزینه‌ی ۴ پاسخ صحیح است.

$$P(۲n,۳) = \frac{(۲n)!}{(۲n-۳)!} = \frac{۲n(۲n-۱)(۲n-۲)(۲n-۳)!}{(۲n-۳)!} = ۲n(۲n-۱)(۲n-۲)$$

$$P(n,۲) = \frac{n!}{(n-۲)!} = \frac{n \times (n-۱) \times (n-۲)!}{(n-۲)!} = n(n-۱)$$

$$۳P(۲n,۳) = ۱۴P(n,۲) \Rightarrow ۳ \times ۲n(۲n-۱)(۲n-۲) = ۱۴n(n-۱) \Rightarrow ۱۲(۲n-۱) = ۱۴$$

$$\Rightarrow ۲n-۱ = \frac{۷}{۶} \Rightarrow n = \frac{۱۳}{۱۲} \notin N$$

۴۴ گزینه‌ی ۱ پاسخ صحیح است.

$$\text{۱ سبز و ۲ تا آبی} \Rightarrow \text{تعداد حالات} = \binom{۵}{۲} \times \binom{۴}{۱} = ۱۰ \times ۴ = ۴۰$$

۴۵ گزینه‌ی ۲ پاسخ صحیح است. برای زوج بودن عدد، رقم یکان (آخرین رقم) باید صفر یا ۲ باشد و رقم اول نباید صفر باشد. اگر رقم آخر صفر باشد، رقم اول دو حالت ۲ یا ۳، رقم دوم دو حالت ۲ یا ۳ و رقم سوم تنها یک عدد باقی‌مانده را شامل می‌شود:

□ □ □ □

$۲ \times ۲ \times ۱ \times ۱ = ۴$

اگر رقم آخر ۲ باشد، رقم سوم، رقم اول دو حالت ۳ یا ۲ را شامل می‌گردد:

الف) فرض کنیم رقم اول ۳ باشد پس رقم دوم و سوم تنها عدد ۲را شامل می‌شوند:

□ □ □ □

$۱ \times ۲ \times ۱ \times ۱ = ۲$

پس در مجموع ۷ حالت وجود دارد.

۴۶

$$\frac{۱۷!}{۵!\,۲!\,۲!\,۲!\,۲!} = ۱۱۱۷۴۰۴۲۸۸۰$$

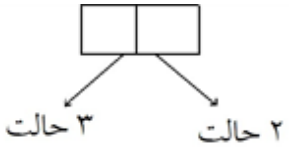
۴۷

$$P(n,۵) = \frac{n!}{(n-۵)!} = n(n-۱)(n-۲)(n-۳)(n-۴)$$

$$\neq$$

$$۱۸P((n-۲),۴) = ۱۸ \times \frac{(n-۲)!}{(n-۶)!} = ۱۸(n-۲)(n-۳)(n-۴)(n-۵)$$

۴۸



جواب: $۲ \times ۱ = ۲$

www.akoedu.ir

۴۹ گزینه‌ی ۳ پاسخ صحیح است.

چون می‌خواهیم عدد سه رقمی بنویسیم، سه خانه در نظر می‌گیریم، به دلیل این که اعداد مورد نظر باید فرد باشند، پس خانه‌ی سمت راست فقط ۲ حالت دارد و چون تکرار ارقام جایز نیست، لذا دو خانه‌ی دیگر، یکی ۴ حالت و دیگری ۳ حالت خواهد داشت، پس:

$$۳ \times ۴ \times ۲ = ۲۴$$

۵۰ گزینه‌ی ۴ پاسخ صحیح است. ابتدا هفت‌خانه در نظر می‌گیریم:

می‌دانیم از میان ده رقم $\{۰, ۱, ۲, ۳, ۴, ۵, ۶, ۷, ۸, ۹\}$ رقم صفر را نمی‌توان در خانه‌ی اول قرار داد، پس خانه‌ی سمت چپ فقط ۹ حالت دارد. از طرفی چون تکرار ارقام جایز است، خانه‌های دیگر ۱۰ حالت خواهند داشت، پس تعداد حالات ممکن برابر است با:

$$۹ \times ۱۰^{۶}$$

www.akoedu.ir

۱	۱	۲	**۳**	۴
۲	۱	۲	۳	**۴**
۳	۱	۲	۳	**۴**
۴	۱	۲	**۳**	۴
۵	۱	۲	۳	**۴**
۶	۱	**۲**	۳	۴
۷	**۱**	۲	۳	۴
۸	**۱**	۲	۳	۴
۹	۱	۲	**۳**	۴
۱۰	۱	۲	۳	**۴**
۱۲	۱	۲	۳	**۴**
۱۳	۱	۲	**۳**	۴
۱۴	۱	**۲**	۳	۴
۱۵	**۱**	۲	۳	۴
۱۶	۱	۲	**۳**	۴
۱۷	۱	۲	**۳**	۴
۱۸	۱	۲	**۳**	۴
۱۹	۱	۲	۳	**۴**
۲۰	۱	۲	**۳**	۴
۲۱	۱	۲	**۳**	۴
۲۲	۱	۲	۳	**۴**
۲۳	۱	۲	**۳**	۴
۲۴	۱	۲	۳	**۴**
۲۸	۱	۲	**۳**	۴
۲۹	**۱**	۲	۳	۴
۳۰	۱	۲	۳	**۴**
۳۱	۱	۲	۳	**۴**
۳۲	۱	۲	۳	**۴**
۳۳	۱	۲	۳	**۴**
۳۵	**۱**	۲	۳	۴
۳۶	۱	**۲**	۳	۴
۳۷	**۱**	۲	۳	۴
۳۸	۱	**۲**	۳	۴
۳۹	۱	۲	۳	**۴**
۴۰	**۱**	۲	۳	۴
۴۱	۱	۲	**۳**	۴
۴۲	۱	**۲**	۳	۴
۴۳	۱	۲	۳	**۴**
۴۴	**۱**	۲	۳	۴
۴۵	۱	**۲**	۳	۴
۴۹	۱	۲	**۳**	۴
۵۰	۱	۲	۳	**۴**

www.akoedu.ir

تیم مشاوره مهندس حاج کرم ۱
تلفن تماس: ۰۲۶۳۳۴۰۸۹۴۴