

WWW.AKOEDU.IR

اولین و با کیفیت ترین

کلاسی های vip کنکور
آگادمی کنکور در ایران



جهت دریافت برنامه ی شخصی سازی شده یک **هفته ای**
رایگان کلیک کنید و یا به شماره ی ۰۹۰۲۵۶۴۶۲۳۴ **عدد ۱**
را ارسال کنید.

۳۰ تست گسسته فصل ۱ - استدلال

۱ این نوع از استدلال که در آن با مشاهده و بررسی یک موضوع در چند حالت، نتیجه‌ای کلی از آن گرفته می‌شود را می‌نامیم.

(۱) استدلال استقرایی (۲) استدلال استتاجی (۳) برهان خلف (۴) مثال نقض

۲ برای اثبات گزاره‌ی «اگر $a > 0$ آن‌گاه $a + \frac{1}{a} \geq 2$ » به روش بازگشتی از کدام نابرابری بدیهی استفاده می‌شود؟

(۱) $a^2 > 0$ (۲) $(a + 1)^2 > 0$ (۳) $(a - 1)^2 \geq 0$ (۴) $a \geq 1$

۳ کدام یک از ترکیب‌های دو شرطی زیر همواره درست است؟

(۱) $a = b \Leftrightarrow a^2 - ab = -1$ (۲) $a = b \Leftrightarrow a^2 = b^2$

(۳) $a = b \Leftrightarrow a^3 = b^3$ (۴) $a < b \Leftrightarrow a^2 < b^2$

۴ گزاره درست را اثبات کنید و برای گزاره نادرست، مثال نقض ارائه دهید.
الف) مجموع هر دو عدد گنگ، عددی گنگ است.
ب) اگر از مربع عددی فرد یک واحد کم کنیم، حاصل همواره بر ۸ بخش پذیر است.

۵ کدام یک از گزاره‌های زیر درست نیست؟

(۱) برای هر عدد طبیعی n ، $n^2 - 5n + 7$ عددی فرد است.

(۲) برای هر دو عدد x, y ، حاصل $x^2 + y^2 + 1 - xy - x - y$ نامنفی است.

(۳) مقادیر حقیقی x, y چنان وجود دارد که $\frac{1}{x+y} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$ باشد.

(۴) میانگین حسابی دو عدد نامنفی، از میانگین هندسی آنها کمتر نیست.

۶ عددی حقیقی مانند x ارائه کنید به طوری که $x^3 < x^2$.



۷ در کدام گزینه، دو گزاره هم‌ارز نیستند؟

(۱) « $a, b \in \mathbb{R}$ » $\left(a + \frac{b}{2}\right)^2 + \frac{3b^2}{4} \geq 0$ و $a^2 + ab + b^2 \geq 0$

(۲) « $b > 0$ و $a > 0$ » $(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 \geq 0$ و $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$

(۳) « $x < 0$ » $(x+1)^2 \geq 0$ و $x + \frac{1}{x} \leq -2$

(۴) « $b > 0$ و $a > 0$ » $(a+b) \geq 0$ و $\frac{a}{b^2} + \frac{b}{a^2} \geq \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$

۸ اگر a و b دو عدد طبیعی باشد عدد $ab + a + b$ کدام نمی‌تواند باشد؟

- (۱) ۵۶ (۲) ۶۶ (۳) ۷۶ (۴) ۸۶

۹ اگر x عددی گنگ باشد کدام عدد همواره گنگ است؟

- (۱) $x^2 + x$ (۲) $[x] + x^2$ (۳) $\frac{1}{x} - x$ (۴) $\frac{1}{x} + [x]$

۱۰ کدام یک از گزینه‌های زیر مثال نقض ندارد؟

(۱) اگر $ab = 0$ ، آنگاه $a = 0$ و $b = 0$.

(۲) مقدار عبارت $3^n + 4$ برای هر عدد طبیعی n ، عددی اول است.

(۳) اگر a و b اعدادی گنگ باشند، آنگاه $a + b$ عددی گنگ است.

(۴) حاصل ضرب سه عدد صحیح زوج متوالی، مضرب ۴۸ است.

۱۱ به ازای کدام عدد طبیعی n حاصل $\frac{1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2}{1 + 2 + 3 + \dots + n}$ یک عدد طبیعی است؟

- (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۶ (۴) ۷

۱۲ برای اثبات حکم $2^n \geq n^2$ در حوزه‌ی اعداد طبیعی از استفاده می‌کنیم.

- (۱) درستی - استدلال استقرایی
(۲) درستی - استدلال استتجاجی
(۳) نادرستی - مثال نقض
(۴) نادرستی - برهان خلف

۱۳ حاصل $\frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{2 \times 3} + \frac{1}{3 \times 4} + \dots + \frac{1}{n(n+1)}$ برابر کدام یک از مقادیر زیر می‌تواند باشد؟

- (۱) $\frac{999}{1000}$ (۲) $\frac{1000}{999}$ (۳) $\frac{99}{1000}$ (۴) $\frac{1000}{99}$



۱۴ برای اثبات درستی یک عبارت با فرض درستی آن به یک رابطه‌ی بدیهی یا دانسته شده رسیده‌ایم، در صورتی اثبات کامل است که:

- ۱) مثالی ارایه که در شرایط داده شده صدق کند.
- ۲) نشان دهیم مراحل انجام شده برگشت پذیراند.
- ۳) نشان دهیم نتیجه‌ی به دست آمده برای همه‌ی اعداد برقرار است.
- ۴) با برهان خلف نادرستی فرض را هم ثابت کنیم.

۱۵ می‌خواهیم با برهان خلف ثابت کنیم اگر n^m مضرب m باشد، آن‌گاه n مضرب m است. m کدام گزینه نمی‌تواند باشد؟

- ۳ (۱) ۴ (۲) ۷ (۳) ۱۰ (۴)

۱۶ کدام یک از گزینه‌های زیر مثال نقض مناسبی برای عبارت «اگر x عددی گنگ باشد آن‌گاه $5x^2 - 20x + 23$ نیز همواره عددی گنگ است» خواهد بود؟

- ۵ $\sqrt{2} + 7$ (۱) ۲ $\sqrt{3} + 5$ (۲) ۷ $\sqrt{5} + 3$ (۳) ۳ $\sqrt{7} + 2$ (۴)

۱۷ چند مورد از موارد زیر را می‌توان با برهان خلف ثابت نمود؟

- الف- اگر n^2 مضربی از ۳ باشد، نشان دهید که n نیز مضربی از ۳ است.
 ب- از یک نقطه خارج یک خط نمی‌توان بیش از یک خط بر آن عمود کرد.
 ج- ثابت کنید $\sqrt{3}$ گنگ است.

- ۱ (صفر) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴)

۱۸ درستی کدام یک از نامساوی‌های زیر را به ازای همه‌ی مقادیر $n \in \mathbb{N}$ نمی‌توان ثابت کرد؟

- (۱) $\left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n \geq 1 - \frac{\sqrt{2}}{2}n$ (۲) $(1 + \sqrt{3})^n \geq 1 + \sqrt{3}n$
 (۳) $(1 + \sqrt{2})^n \geq 1 + \sqrt{2}n$ (۴) $(1 - 2\sqrt{2})^n \geq 1 - 2\sqrt{2}n$

۱۹ با استفاده از برهان خلف، ثابت کنید اگر x گویا و y گنگ باشد، آن‌گاه $(x + y)$ گنگ است.

۲۰ اگر a و b دو عدد حقیقی باشند، با استفاده از استدلال بازگشتی ثابت کنید:

$$a^2 + b^2 \geq 2(b-1)$$

۲۱ مثال نقض، مثالی است که نشان می‌دهد نتیجه کلی است.

۲۲ عبارت زیر درست است یا نادرست؟ برای عبارت نادرست مثال نقض بیاورید.

برای هر عدد طبیعی n آن‌گاه $2^n + 3$ عددی اول است.



۲۳ عبارت زیر درست است یا نادرست؟ (با ذکر دلیل)

اگر a یک عدد حقیقی و $a^2 > 0$ آن گاه $a > 0$ است.

۲۴ با استفاده از استدلال استنتاجی نشان دهید حاصل ضرب دو عدد فرد، یک عدد فرد است.

۲۵ با استفاده از استدلال استنتاجی نشان دهید که حاصل ضرب سه عدد زوج متوالی مضرب ۸ است.

۲۶ برای هر دو عدد حقیقی و مثبت x و y ثابت کنید:

$$y^2 + 1 \geq 2x(y - x + 1)$$

۲۷ با استفاده از استدلال استنتاجی نشان دهید، مجموع سه عدد زوج متوالی مضرب ۳ است.

۲۸ اگر $2, 3, 5, \dots, P$ تمام اعداد اول کوچکتر یا مساوی P باشند، ثابت کنید که $N = (2 \times 3 \times 5 \times \dots \times P) + 1$ یا اول است و یا عامل اول بزرگتر از P دارد.

۲۹ ثابت کنید $\sqrt{3}$ گنگ است.

۳۰ کدام یک از احکام زیر درست هستند؟

الف) اگر x گنگ و y گویا باشد، آن گاه $(x + y)$ گویا است.

ب) اگر x و y هر دو گویا باشند، آن گاه $x + y$ گویا است.

احکام درست را اثبات کنید و برای رد کردن احکام نادرست مثالهای نقض بیاورید.



۱) گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

۲) گزینه ۳ پاسخ صحیح است. این گزاره را به روش بازگشتی اثبات می‌کنیم:

$$a + \frac{1}{a} \geq 2 \Leftrightarrow a^2 + 1 \geq 2a \Leftrightarrow a^2 - 2a + 1 \geq 0 \Leftrightarrow (a - 1)^2 \geq 0$$

چون نامساوی آخر همواره درست است و روابط بازگشت پذیرند در نتیجه درستی گزاره‌ی فوق اثبات می‌شود.

۳) گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

اگر $a = b$ می‌توان طرفین را به توان ۳ رساند و اگر $a^3 = b^3$ می‌توان از طرفین ریشه‌ی سوم گرفت و سایر گزینه‌ها با مثال نقض رد می‌شوند.

۴) الف) نادرست (مشابه قسمت ت کار در کلاس ص ۳)

$$\sqrt{2}, -\sqrt{2} \in \mathbb{Q}^c, \sqrt{2} + (-\sqrt{2}) = 0 \notin \mathbb{Q}^c$$

ب) درست (مساله ۳ ص ۱۵)

$$(2k+1)^2 - 1 = 4k^2 + 4k + 1 - 1 = 4k(k+1) = 4 \times 2q = 8q$$

۵) گزینه ۳ پاسخ صحیح است. در گزاره، گزینه ۳ داریم:

$$\frac{1}{x+y} = \frac{x+y}{xy} \Rightarrow (x+y)^2 = xy \Rightarrow x^2 - xy + y^2 = 0$$

این معادله به دلیل $\Delta = -3y^2 \leq 0$ جواب غیر صفر ندارد پس عبارت امکان پذیر نیست ولی گزاره‌های ۱، ۲ و ۴ درست می‌باشند.

۶) $\dots, x = -2, x = -1, x = 0/1$



7

گزینه 4 پاسخ صحیح است.

نکته: اگر ارزش دو گزاره یکسان باشد، آن‌ها را گزاره‌های هم‌ارز (هم‌ارزش) می‌نامیم.

$$(p \Leftrightarrow q) \equiv [(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)]$$

گزینه‌های 1، 2 و 3 در اثبات به روش بازگشتی ثابت می‌شود که هم‌ارز هستند. (اثبات‌ها در کتاب درسی آمده‌اند).
اما در گزینه‌ی 4 به روش اثبات بازگشتی داریم:

$$\frac{a}{b^2} + \frac{b}{a^2} \geq \frac{1}{a} + \frac{1}{b} \Leftrightarrow \frac{a^3 + b^3}{a^2 b^2} \geq \frac{a+b}{ab} \xrightarrow{\times ab > 0} \frac{a^3 + b^3}{ab} \geq a+b$$

$$\Leftrightarrow (a+b)(a^2 - ab + b^2) \geq ab(a+b)$$

$$\xrightarrow{\div (a+b) > 0} a^2 - ab + b^2 \geq ab \Leftrightarrow a^2 - 2ab + b^2 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (a-b)^2 \geq 0 \neq (a+b) \geq 0$$

پس گزینه‌ی 4 پاسخ صحیح است.

8

گزینه 2 پاسخ صحیح است.

$$A = ab + a + b$$

$$A + 1 = ab + a + b + 1 = a(b+1) + (b+1) = (b+1)(a+1) \Rightarrow A + 1 = \text{عدد مرکب}$$

پس اگر گزینه‌ها را با عدد 1 جمع کنیم باید مرکب شود در گزینه 2 چنین نمی‌شود.

9

گزینه 4 پاسخ صحیح است.

گزینه 1: $x^2 + x = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}$ $\xrightarrow{\text{نقض گنگ بودن}} x = \sqrt{2} - \frac{1}{2}$

گزینه 2: $\xrightarrow{\text{نقض گنگ بودن}} x = \sqrt{2}$

گزینه 3: $\xrightarrow{\text{نقض گنگ بودن}} d = \sqrt{2} - 1 \Rightarrow \frac{1}{x} = \frac{1}{\sqrt{2} - 1} = \sqrt{2} + 1$

گویا $\Rightarrow \frac{1}{x} - x = (\sqrt{2} + 1) - (\sqrt{2} - 1) = 2$

گزینه 4: $\left(\frac{1}{x}\right) + \boxed{x} = \text{گنگ}$
عدد صحیح



۱۰

گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

نکته: به مثالی که نشان می‌دهد یک حکم در حالت کلی درست نیست، مثال نقض می‌گویند.

ابتدا درستی گزینه‌ی ۴ را اثبات می‌کنیم:

اگر فرض کنیم $a = 2k$, $b = 2k$ و $c = 2k + 4$ ، آنگاه داریم:

$$abc = (2k)(2k + 2)(2k + 4) = 8k \times (k + 1)(k + 2) = 8 \times 6q = 48q$$



حاصل ضرب ۳ عدد صحیح متوالی مضرب ۶ است.

اکنون برای سایر گزینه‌ها، مثال نقض ارائه می‌کنیم:

گزینه‌ی ۱: اگر $a = 5$ و $b = 0$ ، آنگاه $ab = 5 \times 0 = 0$ ولی a و b هر دو با هم صفر نیستند.

گزینه‌ی ۲: به‌ازای $n = 4$ ، مقدار عبارت $n^2 + 4 = 16 + 4 = 20$ عددی اول نیست.

گزینه‌ی ۳: اگر $a = \sqrt{2}$ و $b = -\sqrt{2}$ ، آنگاه $a + b$ مساوی صفر خواهد شد که عددی گویا است.

۱۱

گزینه‌ی ۴ پاسخ صحیح است.

$$\frac{1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2}{1 + 2 + 3 + \dots + n} = \frac{\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)}{\frac{n(n+1)}{2}} = \frac{2n+1}{3}$$

$$n = 2 \Rightarrow \frac{2n+1}{3} = \frac{5}{3} \notin \mathbb{N}$$

$$n = 3 \Rightarrow \frac{2n+1}{3} = \frac{7}{3} \notin \mathbb{N}$$

$$n = 6 \Rightarrow \frac{2n+1}{3} = \frac{13}{3} \notin \mathbb{N}$$

$$n = 7 \Rightarrow \frac{2n+1}{3} = \frac{15}{3} = 5 \in \mathbb{N}$$

۱۲

گزینه‌ی ۳ پاسخ صحیح است. حکم $2^n > n^2$ همواره درست است جز برای $n = 3$ لذا با مثال نقض این حکم از کلیت خارج می‌شود.

۱۳

گزینه‌ی ۱ پاسخ صحیح است.

$$\frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{2 \times 3} + \frac{1}{3 \times 4} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} = \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \dots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)$$

$$= \frac{1}{1} - \frac{1}{n+1} = \frac{n+1-1}{n+1} = \frac{n}{n+1}$$

با توجه به این تساوی فقط گزینه‌ی (۱) صحیح می‌باشد که مخرج یک واحد از صورت بیش‌تر است.

۱۴

گزینه‌ی ۲ پاسخ صحیح است. اثبات بازگشتی وقتی کامل می‌شود که برعکس تمام روابط را هم ثابت کنیم.



گزینه‌ی ۲ پاسخ صحیح است. اگر n^2 مضربی از ۳ باشد، n مضربی از ۳ است. (۱۵)

اگر n^2 مضربی از ۱۰ باشد، n مضربی از ۱۰ است.

اگر n^2 مضربی از ۷ باشد، n مضربی از ۷ است.

دقت کنید برای حکم «اگر n^4 مضرب ۴ باشد n مضرب ۴ است» مثال نقض $n = 2$ وجود دارد.

گزینه‌ی ۴ پاسخ صحیح است. (۱۶)

$$5x^2 - 20x + 23 = 5(x^2 - 4x) + 23 = 5(x - 2)^2 + 3$$

به ازای $x = 2 + \sqrt{7}$ عبارت فوق گویا خواهد بود.

گزینه‌ی ۴ پاسخ صحیح است. (۱۷)

گزینه‌ی ۴ پاسخ صحیح است. به ازای $a \geq -1$ عبارت $(1+a)^n \geq 1+na$ برقرار است. ولی گزینه‌ی ۴ مقدار $a = -2\sqrt{2}$ است. (۱۸)

فرض خلف: فرض می‌کنیم $(x+y)$ گنگ نباشد، بنابراین عددی گویا است. (۱۹)

گویا $x+y=a \rightarrow y = a-x$ (یا $y = a+(-x)$) (۰/۲۵)

می‌دانیم تفاضل (یا جمع) دو عدد گویا، عددی گویا است در نتیجه y گویا است. (۰/۲۵)

که این خلاف فرض مسأله است. پس فرض خلف باطل و حکم برقرار است. (۰/۲۵)

عبارت همواره درست است و تمام مراحل بازگشت پذیر می‌باشند. (۰/۲۵) (۲۰)

$$a^2 + b^2 \geq 2(b-1) \Leftrightarrow a^2 + b^2 \geq 2b - 2 \Leftrightarrow a^2 + b^2 - 2b + 2 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow a^2 + b^2 - 2b + 1 + 1 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow a^2 + 1 + (b-1)^2 \geq 0$$

عبارت همواره درست است و تمام مراحل بازگشت پذیر می‌باشند. (۰/۲۵)

نادرست (۰/۲۵) (۲۱)

نادرست (۰/۲۵) مثال نقض (۰/۲۵) (۲۲)

نادرست است. (۰/۲۵) (۲۳)

$a = -3 < 0 \Rightarrow a^2 = 9 > 0$ (۰/۲۵)

$$\begin{cases} x = 2K + 1 \\ y = 2K' + 1 \end{cases} \quad \begin{matrix} K \in Z \\ K' \in Z \end{matrix} \quad (۰/۲۵)$$

$$x.y = (2K + 1)(2K' + 1)$$

$$x.y = 4KK' + 2K + 2K' + 1 \quad (۰/۲۵)$$

$x.y = 2(2KK' + K + K') + 1 \Rightarrow x.y = 2q + 1$ فرد (۰/۲۵)

(۲۴)

$$\begin{aligned} x &= 2k \\ y &= 2k + 2 \\ z &= 2k + 4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x.y.z &= 2k(2k+2)(2k+4) \\ &= 2^3 k(k+1)(k+2) \\ &= 8k^3 \end{aligned}$$

(۲۵)



$$y^2 + 1 \geq 2xy - 2x^2 + 2x \rightarrow y^2 + 1 - 2xy + 2x^2 - 2x \geq 0 \quad (26)$$

$$y^2 - 2xy + x^2 + x^2 - 2x + 1 \geq 0$$

$$(y-x)^2 + (x-1)^2 \geq 0 \quad \Leftrightarrow \text{بدیهی}$$

$$x = 2k, y = 2k + 2, z = 2k + 4 \quad (27)$$

$$x + y + z = 2k + 2k + 2 + 2k + 4 = 6k + 6 = 3(2k + 2) = 3k'$$

می‌دانیم هر عدد طبیعی حداقل یک مقسوم‌علیه اول دارد. (28)

فرض خلف/فرض می‌کنیم N اول نباشد و عامل اولی بزرگتر از P نداشته باشد:

$$N \text{ اول نباشد} \xrightarrow[\text{وجود دارد}]{\text{وجود دارد}} P_i | N \quad (2 \leq P_i \leq P, \text{طبق فرض خلف}) \xrightarrow[\text{تفاضل}]{P_i | N - 2 \times 3 \times \dots \times P} P_i | 1 \Rightarrow P_i = 1$$

پس تناقض با اول بودن P_i یعنی فرض خلف غلط است به عبارت بهتر یا N اول است یا P_i بزرگتر از P می‌باشد.

$$\sqrt{3} \text{ گنگ نیست} \Rightarrow \sqrt{3} = \frac{a}{b}, a, b \in \mathbb{N} \quad (29)$$

کسر $\frac{a}{b}$ ساده‌ترین فرم ممکن است یعنی دیگر عامل مشترکی ندارند به عبارت دیگر ب.م.م a و b برابر ۱ می‌باشد.

$$\sqrt{3} = \frac{a}{b} \xrightarrow{\uparrow 2} 3 = \frac{a^2}{b^2} \Rightarrow a^2 = 3b^2 \xrightarrow{\text{مضرب } 3} a = 3k \quad (I)$$

$$\xrightarrow{\text{جاگذاری}} 9k^2 = 3b^2 \Rightarrow b^2 = 3k^2 \xrightarrow{\text{مضرب } 3} b = 3k' \quad (II)$$

هم a و هم b مضرب ۳ هستند پس ب.م.م آنها حداقل ۳ می‌باشد که متناقض با فرض اولیه است پس فرض خلف غلط است پس $\sqrt{3}$ گنگ است.

$$\text{الف) نتیجه درست نیست. مثال نقض: گنگ } x = \sqrt{2} - 1 \text{ و گویا } y = 1 \Rightarrow x + y = \sqrt{2} \text{ گنگ} \quad (30)$$

ب) نتیجه درست است.

$$x = \frac{a}{b} \text{ گویا}$$

$$y = \frac{c}{d} \text{ گویا}$$

$$a, b, c, d \in \mathbb{Z}$$

$$\Rightarrow x + y = \frac{ad + bc}{bd} \in \frac{\mathbb{Z}}{\mathbb{Z}} \Rightarrow x + y \in \mathbb{Q}$$



۱	۱	۲	۳	۴
۲	۱	۲	۳	۴
۳	۱	۲	۳	۴
۵	۱	۲	۳	۴
۷	۱	۲	۳	۴
۸	۱	۲	۳	۴
۹	۱	۲	۳	۴
۱۰	۱	۲	۳	۴
۱۱	۱	۲	۳	۴
۱۲	۱	۲	۳	۴
۱۳	۱	۲	۳	۴
۱۴	۱	۲	۳	۴
۱۵	۱	۲	۳	۴
۱۶	۱	۲	۳	۴
۱۷	۱	۲	۳	۴
۱۸	۱	۲	۳	۴

www.akoedu.ir

