

WWW.AKOEDU.IR

اولین و با کیفیت ترین

کلاسی های vip کنکور
آگادمی کنکور در ایران



جهت دریافت برنامه ی شخصی سازی شده یک **هفته ای** رایگان کلیک کنید و یا به شماره ی ۰۹۰۲۵۶۴۶۲۳۴ **عدد ۱** را ارسال کنید.

۱۰۰ تست هندسه دوازدهم فصل ۲ - آشنایی با مقاطع مخروطی

۱ در صورتی که صفحه‌ی قاطع یک سطح مخروطی موازی محور آن و غیرمنطبق با آن باشد، مقطع مخروطی ایجاد شده کدام است؟

- (۱) دایره (۲) بیضی (۳) هذلولی (۴) سهمی

۲ کدام عبارت زیر درست است؟

- (۱) مجموعه‌ی خطوط عمود بر یک خط در فضا، بی‌نهایت صفحه در فضا تشکیل می‌دهند.
 (۲) مجموعه‌ی نقاطی که از یک خط مفروض در فضا، متساوی‌فاصله‌اند، روی سطح یک کره قرار می‌گیرند.
 (۳) مجموعه‌ی نقاطی که مجموع فواصل آن‌ها از دو نقطه‌ی ثابت در فضا، به یک اندازه باشند، روی محیط یک بیضی قرار می‌گیرند.
 (۴) مجموعه‌ی خطوط گذرا از یک نقطه که با محور گذرا از آن نقطه، زاویه‌ی یکسان می‌سازند، روی سطح یک مخروط قرار می‌گیرند.

۳ کدام عبارت درست است؟

- (۱) مجموعه نقاطی از فضا که از دو خط موازی به یک فاصله باشند، در تعداد نامتناهی صفحه قرار می‌گیرند.
 (۲) مجموعه نقاطی از فضا که از دو خط موازی به یک فاصله باشند، در صفحه‌ی عمود بر آن دو خط قرار می‌گیرند.
 (۳) مجموعه نقاطی از فضا که از یک نقطه و یک خط که از آن نقطه نمی‌گذرد، به یک فاصله باشد، روی منحنی سهمی شکل قرار دارند.
 (۴) مجموعه نقاطی از فضا که مجموع فاصله‌های هر نقطه‌ی آن از دو نقطه‌ی ثابت در فضا، به یک اندازه باشند، روی محیط یک بیضی قرار می‌گیرند.

۴ دو خط d و d' در نقطه‌ی O بر هم عمودند. نقاط A و B به ترتیب بر خطوط d و d' طوری جابه‌جا می‌شوند که طول AB همواره برابر با L می‌باشد. مکان هندسی محل هم‌رسی میانه‌های مثلث OAB کدام است؟

- (۱) دایره‌ای به شعاع $\frac{L}{3}$ (۲) دایره‌ای به شعاع $\frac{L}{2}$ (۳) دایره‌ای به شعاع $\frac{2L}{3}$ (۴) دایره‌ای به شعاع L

۵ نقطه‌ی A و خط L را در صفحه رسم می‌کنیم، حداکثر چند نقطه در این صفحه می‌توان پیدا کرد، که از A به فاصله‌ی ۵ واحد از L به فاصله‌ی ۲ واحد باشد؟

- (۱) ۵ (۲) ۴ (۳) ۳ (۴) ۲

۶ مکان هندسی مرکز دایره‌ای که بر یک دایره‌ی مفروض و بر یک قطر ثابت آن مماس باشد، چه شکلی است؟

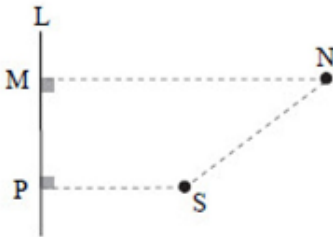
- (۱) دایره (۲) بیضی (۳) سهمی (۴) هذلولی



۷ در خط L و L' در نقطه‌ی A متقاطع‌اند، مکان هندسی «مرکز» دایره‌هایی که بر این دو خط مماس‌اند، چگونه شکلی است؟
 (۱) یک خط
 (۲) دو خط متقاطع غیر عمود
 (۳) یک دایره
 (۴) دو خط عمود بر هم

۸ اگر در مثلث $\triangle ABC$ نقاط B, C و اندازه‌ی میانه‌ی وارد بر BC ثابت باشند، مکان هندسی رأس A در مثلث $\triangle ABC$ چگونه است؟
 (۱) دو خط موازی
 (۲) نیم دایره
 (۳) دایره
 (۴) عمود منصف BC

۹ در شکل روبه‌رو داریم $PM = 6$ و $MN = 16$ و $SP = 8$ نقطه‌ی A از N و S به یک فاصله و از خط L به فاصله‌ی 10 می‌باشد. اندازه‌ی مینیمم پاره‌خط SA کدام است؟



- (۱) $\frac{7\sqrt{13}}{3}$
 (۲) $\frac{5\sqrt{13}}{3}$
 (۳) $\frac{7\sqrt{3}}{13}$
 (۴) $\frac{5\sqrt{3}}{13}$

۱۰ مثلث ABC مفروض است. مکان هندسی نقاطی مانند O در صفحه‌ی مثلث ABC به طوری که $\frac{S_{OAB}}{S_{OAC}} = \frac{AB}{AC}$ کدام است؟

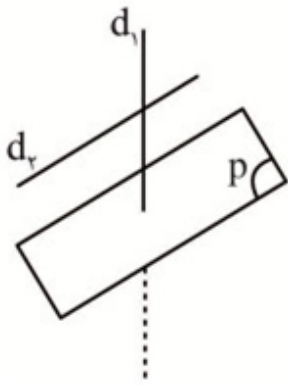
- (۱) یک خط
 (۲) دو خط عمود بر هم
 (۳) یک دایره
 (۴) دو خط موازی

۱۱ تقاطع یک صفحه با سطح مخروطی در کدام وضعیت می‌تواند یک خط باشد؟
 (۱) در حالتی که صفحه از رأس مخروطی عبور کند.
 (۲) در حالتی که صفحه از مولد سطح مخروطی عبور کند.
 (۳) در حالتی که صفحه از محور سطح مخروطی عبور کند.
 (۴) هیچگاه یک خط تولید نمی‌شود.

۱۲ دو نقطه‌ی A و B به فاصله‌ی 5 از یکدیگر قرار دارند. مکان هندسی نقاطی از فضا که از A به فاصله‌ی $2/5$ و از B به فاصله‌ی $1/5$ باشد یک مجموعه‌ی چند عضوی است؟
 (۱) صفر
 (۲) ۱
 (۳) ۲
 (۴) بی‌شمار

۱۳ مکان هندسی مرکزهای همه‌ی دایره‌هایی در صفحه که بر خط d در نقطه‌ی ثابت A روی خط d مماس‌اند، کدام است؟
 (۱) دو خط عمود بر هم
 (۲) خطی عمود بر d
 (۳) دایره‌ای به مرکز A
 (۴) خطی موازی d





۱۴ اگر در شکل زیر $d_1 \parallel p$ و d_1 و d_2 متقاطع باشند، شکل حاصل از برخورد دوران یافته خط d_2 حول خط d_1 و صفحه p کدام است؟

- (۱) نیم خط
- (۲) بیضی
- (۳) هذلولی
- (۴) سهمی

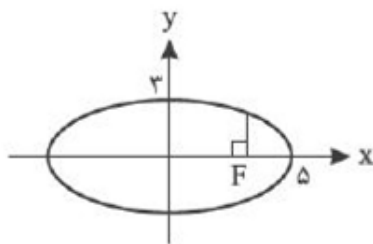
۱۵ چه تعداد از گزاره‌های زیر درست است؟

الف- اگر خط d بر خط L عمود نباشد، سطح حاصل از دوران d حول محور L ، یک سطح مخروطی است.
ب- سطح مقطع صفحه P با یک سطح مخروطی، یک منحنی است، اگر و تنها اگر صفحه شامل رأس سطح مخروطی نباشد.

ج- حداکثر دو نقطه در صفحه وجود دارد که روی دایره $C(O, 2)$ باشد و از خط d واقع در آن صفحه به فاصله ۳ باشد.

- (۱) صفر (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) ۳

۱۶ مرکز بیضی زیر در مبدأ مختصات قرار دارد و F کانون بیضی است. اگر اشعه نوری به صورت عمود بر محور X ها از F بر بدنه داخلی بیضی بتابد، انعکاس نور از کدام نقطه عبور خواهد کرد؟



- (۱) $(4, 0)$
- (۲) $(-4, 0)$
- (۳) $(\sqrt{2}, 0)$
- (۴) $(-\sqrt{2}, 0)$

۱۷ یک بیضی بر چهار خط $x = -1, x = 5, y = 3, y = -1$ مماس شده است. کدام یک از گزینه‌های زیر مختصات یکی از کانون‌های این بیضی است؟

- (۱) $(1, \sqrt{5})$
- (۲) $(\sqrt{5}, 1)$
- (۳) $(2 - \sqrt{5}, 1)$
- (۴) $(1, 2 - \sqrt{5})$

۱۸ روی دایره C حداکثر چند نقطه وجود دارد که از دو خط متقاطع d و d' به یک فاصله باشند؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۴ (۴) ۸

۱۹ مکان هندسی نقاطی که به فاصله واحد از خط L بوده و روی صفحه‌ای متقاطع و غیر عمود با خط L باشد، کدام است؟

- (۱) دایره (۲) بیضی (۳) یک خط (۴) دو خط

۲۰ اگر پاره‌خط AB با صفحه P زاویه غیر عمود بسازد، مکان هندسی نقاطی از فضا که به فاصله واحد از صفحه P و به فاصله برابر از دو نقطه A و B هستند، کدام است؟

- (۱) یک نقطه (۲) دو نقطه (۳) یک خط (۴) دو خط



- ۲۱) اگر صفحه‌ای شامل محور، هر دو تکه بالا و پایین سطح مخروطی را قطع کند، فصل مشترک صفحه و سطح مخروطی کدام است؟
 (۱) یک خط (۲) دو خط متقاطع (۳) هذلولی (۴) سهمی
- ۲۲) دایره C به مرکز O با شعاع R و خط d در صفحه مفروض هستند. حداکثر چند وتر به طول a در این دایره می‌توان رسم کرد که وسط آن روی خط d قرار گیرد؟
 (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) صفر (۴) بی‌شمار
- ۲۳) مکان هندسی نقاطی که از دو خط متنافر L_1 و L_2 به یک فاصله باشند، کدام است؟
 (۱) یک خط (۲) یک نقطه (۳) یک صفحه (۴) دو خط موازی
- ۲۴) مکان هندسی تمام نقاطی که با پاره‌خط معلوم AB یک مثلث منفرجه‌الزاویه می‌سازند به طوری که زاویه‌ی روبه‌رو به ضلع AB منفرجه باشد، کدام است؟
 (۱) محیط مربعی به قطر AB به‌جز نقاط A و B
 (۲) محیط دایره‌ای به قطر AB به‌جز نقاط A و B
 (۳) سطح مربعی به قطر AB به‌جز نقاط روی محیط آن و قطر AB
 (۴) سطح دایره‌ای به قطر AB به‌جز نقاط روی محیط آن و قطر AB
- ۲۵) دو خط d_1 و d_2 متقاطع‌اند، چند نقطه در صفحه‌ی این دو خط می‌توان یافت که از d_1 به فاصله‌ی $1/5$ سانتی‌متر و از d_2 به فاصله‌ی $2/5$ باشد؟
 (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴
- ۲۶) دو خط d و l موازی می‌باشند. از دوران خط d حول خط l سطحی ایجاد می‌شود. اگر صفحه‌ی P که موازی d و l است، سطح را قطع کند، شکل حاصل کدام خواهد بود؟
 (۱) یک نقطه (۲) یک خط (۳) دو خط موازی (۴) دو خط متقاطع
- ۲۷) سه نقطه‌ی A ، B و C غیرواقع بر یک خط راست مفروض‌اند. مکان هندسی نقاطی از فضا که از این سه نقطه به یک فاصله‌اند، کدام است؟
 (۱) یک صفحه (۲) یک خط (۳) یک نقطه (۴) یک کره
- ۲۸) دایره C و نقاط A و B در صفحه مفروض هستند. چند نقطه روی C وجود دارد که تا A و B فاصله برابر داشته باشند؟
 (۱) صفر (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) حداکثر ۲
- ۲۹) در صفحه مثلث مختلف‌الاضلاع ABC ، حداکثر چند نقطه می‌توان یافت که از رأس A به فاصله r و از ضلع BC به فاصله L باشد؟
 (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۴ (۴) ۳
- ۳۰) در مثلث مختلف‌الاضلاع ABC ، حداکثر چند نقطه می‌توان یافت که از رأس A به فاصله r و از ضلع BC به فاصله L باشد؟
 (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۴ (۴) ۳



۳۱ اگر معادله $x^2 + (m - 2)y^2 + 3x + (n + 1)y + 2 = 0$ معادله دو خط موازی باشد، $m + n$ کدام است؟

(۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

۳۲ در صفحه مثلث مختلف الاضلاع ABC، دو نقطه M و N وجود دارد که از رأس های B و C به یک فاصله و از اضلاع AB و AC یا امتداد آن ها به یک فاصله می باشد. اگر $MA = 4$ و $NA = 2$ باشد، طول MN کدام است؟

(۱) $\sqrt{10}$ (۲) $\sqrt{5}$ (۳) $2\sqrt{5}$ (۴) $2\sqrt{10}$

۳۳ دو نقطه ای متمایز A و A' و همچنین دو خط موازی d و d' در صفحه وجود دارند. چند نقطه در این صفحه وجود دارد که از دو نقطه ای A و A' به یک فاصله و از دو خط d و d' نیز به یک فاصله باشند؟

(۱) صفر با یک نقطه (۲) صفر، یک یا بی شمار نقطه
(۳) یک یا دو نقطه (۴) صفر، یک یا دو نقطه

۳۴ هرگاه صفحه، غیر موازی با مولد، محور را قطع کند، مقطع حاصل کدام است؟

(۱) بیضی (۲) دایره (۳) دایره یا نقطه (۴) بیضی یا دایره یا نقطه

۳۵ کدام نادرست است؟

(۱) مکان هندسی نقاطی که دو مماس با زاویه بین 60° بر دایره ای به مرکز O و شعاع ۳ می توان رسم کرد، دایره ای به مرکز O و شعاع ۶ است.
(۲) مکان هندسی مرکز دایره هایی که در یک نقطه مفروض بر دایره ای به مرکز O و شعاع ۳ مماس است دایره ای به مرکز O است.
(۳) مکان هندسی مرکز دایره هایی که در درون دایره به مرکز O و شعاع ۳ مماس است، دایره ای به مرکز O است.
(۴) مکان هندسی مرکز دایره هایی به شعاع ۳ که بر خط d مماس است، دو خط موازی به فاصله ۳ از خط d است.

۳۶ تعداد نقاطی که به فاصله ۴ سانتی متر از نقطه C قرار دارند و از نقاط A و B متساوی الفاصله باشند، کدام است؟

(۱) دقیقاً ۲ (۲) حداکثر ۱ (۳) حداکثر ۲ (۴) حداقل ۱

۳۷ در یک مکان هندسی، مجموع فواصل نقاط آن از دو نقطه ثابت $(2, -4)$ و $(2, 2)$ برابر ۸ است. اندازه پاره خطی که از نقاط ثابت گذشته بر قطر آن عمود می باشد، چه قدر است؟

(۱) $2/5$ (۲) $1/3$ (۳) $2/5$ (۴) $1/8$

۳۸ مکان هندسی نقطه ای که فاصله آن از یک دایره و یک نقطه ثابت درون آن دایره برابر باشد:

(۱) خطی موازی قطر دایره (۲) دایره ای به مرکز N
(۳) خطی عمود بر قطر دایره (۴) هیچ کدام

۳۹ مکان هندسی رأس های مثلث هایی که در قاعده مشترک بوده و مساحت برابر دارند چگونه ست؟

(۱) خطی موازی قاعده و به فاصله ثابت (۲) دایره ای به قطر قاعده
(۳) دو خط موازی قاعده و به فاصله ثابت (۴) نیم دایره ای به قطر قاعده

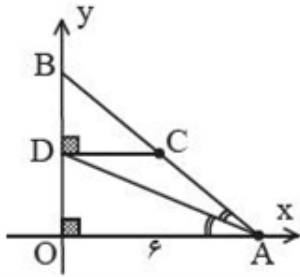
۴۰ مراکز همه ی دایره هایی به شعاع ۱ که داخل دایره ی $C(O, 3)$ بر آن مماس باشد، چه وضعیتی دارند؟

(۱) روی خطی به فاصله ۲ از مرکز (۲) روی دایره ای به شعاع ۲ از مرکز
(۳) روی خطی به فاصله ۴ از مرکز (۴) روی دایره ای به قطر ۲ از مرکز



- ۴۱ در صفحه یک مثلث چند نقطه وجود دارد که از هر سه ضلع آن به یک فاصله است؟
 ۱ (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴)

- ۴۲ در مثلث قائم‌الزاویه AOB، نیمساز A، ضلع OB را در D قطع می‌کند. عمودی که در D بر OB خارج می‌شود، AB را در C قطع می‌کند. با جابه‌جا شدن رأس B، معادله مکان هندسی نقطه C کدام است؟



$$\begin{aligned} (1) \quad y^2 &= 12x \\ (2) \quad y &= 3x \\ (3) \quad x^2 + y^2 &= 9 \\ (4) \quad y^2 - 12x + 36 &= 0 \end{aligned}$$

- ۴۳ مکان هندسی نقاطی از صفحه که مجموعه فواصلشان از دو نقطه ثابت، مقداری ثابت باشد، کدام است؟
 ۱ (سهی) ۲ (هذلولی) ۳ (بیضی) ۴ (دایره)

- ۴۴ مکان هندسی مرکز دایره‌هایی در صفحه که بر خط d در نقطه T مماس باشند، چگونه شکلی است؟
 ۱ (خطی موازی با خط d) ۲ (دایره‌ای به مرکز T)
 ۳ (خطوط عمود بر خط d) ۴ (خط عمود بر خط d در نقطه T)

- ۴۵ چند نقطه روی دایره C وجود دارد که از دو خط متقاطع d و d' به یک فاصله هستند؟
 ۱ (۲) ۲ (حداکثر ۲) ۳ (۴) ۴ (حداکثر ۴)

- ۴۶ نقاط A، B، C و D در صفحه مفروضند. تعداد نقاطی در این صفحه که از A و B به یک فاصله و از C و D نیز به یک فاصله باشند، کدام نمی‌تواند باشد؟
 ۱ (صفر) ۲ (۱) ۳ (۲) ۴ (بی‌شمار)

- ۴۷ صفحه‌ای گذرنده بر محور «مخروط دوار» آن را قطع می‌کند. سطح مقطع این دو چگونه است؟ (مخروط دوار همان رویه مخروطی)
 ۱ (خط) ۲ (دو خط متقاطع) ۳ (نقطه) ۴ (تهی)

- ۴۸ مکان هندسی مراکز دایره‌هایی به شعاع ثابت r که بر دایره‌ای به شعاع R مماس هستند، کدام است؟
 ۱ (یک دایره) ۲ (دو خط موازی) ۳ (دو خط عمود بر هم) ۴ (دو دایره)

- ۴۹ صفحه P یک سطح استوانه‌ای را قطع می‌کند. سطح مقطع حاصل کدام می‌تواند باشد؟
 ۱ (دایره و بیضی) ۲ (دو خط موازی)
 ۳ (یک خط) ۴ (همه موارد می‌تواند صحیح باشد).



۵۰ مکان هندسی نقاطی مانند $M\left(1 + \operatorname{tg}^2 \alpha, \frac{1}{\cos \alpha} - 1\right)$ با تغییر α ، بخشی از کدام سهمی زیر است؟

- (۱) سهمی با رأس $S(0, 1)$ و سهمی با کانون $F\left(\frac{1}{4}, 1\right)$
- (۲) سهمی با کانون $F\left(\frac{1}{4}, -1\right)$ و سهمی با رأس $S(-1, 0)$

۵۱ در مثلث $\triangle ABC$ ، $BC = a$ و طول میانه AM برابر مقدار ثابت m است. مکان هندسی محل تلاقی میانه‌های مثلث $\triangle ABC$ ، کدام است؟

- (۱) دایره به مرکز B و شعاع $\frac{a}{2}$ (۲) پاره‌خط عمود بر BC به طول m
- (۳) دایره به مرکز M و شعاع $\frac{m}{3}$ (۴) دایره به مرکز M و شعاع $\frac{2m}{3}$

۵۲ دو خط موازی هم مفروض است. مکان هندسی مرکز تجانس با نسبت تجانس $k \neq \pm 1$ ، به طوری دو خط مجانس هم باشند، کدام است؟

- (۱) خط ۴ (۲) خط ۲ (۳) یک خط (۴) یک دایره

۵۳ پاره‌خط AB به فاصله‌ی ۱۰ مفروض است. مکان هندسی نقطه‌ی M از صفحه که در تساوی $\frac{2MA - MB}{MA - 3} = 3$ صدق می‌کند، کدام است؟

- (۱) بیضی (۲) پاره‌خط (۳) تهی (۴) دو نقطه

۵۴ نقطه‌ی $M(x, y)$ در صفحه به گونه‌ای حرکت می‌کند که فاصله‌ی آن از نقطه‌ی $(3, 0)$ مساوی $\sqrt{2}$ برابر فاصله‌ی آن از نقطه‌ی $(-1, 2)$ است. بیش‌ترین فاصله‌ی بین نقاط مکان هندسی M کدام است؟

- (۱) $2\sqrt{5}$ (۲) $4\sqrt{5}$ (۳) $2\sqrt{10}$ (۴) $4\sqrt{10}$

۵۵ با انتقال مبدأ مختصات به کدام یک از نقاط زیر معادله‌ی خط $y = 3x - 5$ در دستگاه جدید تغییر نمی‌کند؟

- (۱) $(1, -5)$ (۲) $(-1, 5)$ (۳) $(1, 3)$ (۴) $(-1, 3)$

۵۶ اگر نقطه‌ی $A(m-1, m+n, n+2)$ در مکان هندسی $B = \{(x, y, z) \mid x^2 + z^2 + 2x = 2z - 2\}$ صدق کند، عرض نقطه‌ی A چقدر است؟

- (۱) -1 (۲) 1 (۳) -2 (۴) 2

۵۷ دو نقطه‌ی ثابت A و B در صفحه مفروض‌اند. مکان هندسی نقاطی در صفحه که فاصله‌ی آن‌ها از نقطه‌ی A دو برابر فاصله‌ی آن‌ها از نقطه‌ی B باشد، کدام نمی‌تواند باشد؟

- (۱) تهی (۲) یک نقطه (۳) دو نقطه (۴) یک خط



- ۵۸ خط d به فاصله 2 واحد از دایره $C(O, 2)$ مفروض است. مکان هندسی نقاطی که فاصله d آن‌ها از نقطه O برابر 6 واحد و از خط d برابر یک واحد باشد، کدام است؟
 (۱) چهار نقطه (۲) سه نقطه (۳) دو نقطه (۴) دو خط موازی
- ۵۹ مکان هندسی نقاطی در فضا که از سه نقطه‌ی غیر واقع بر یک خط راست به یک فاصله باشند، چیست؟
 (۱) نقطه (۲) خط (۳) صفحه (۴) استوانه
- ۶۰ اگر یک رویه‌ی مخروطی را با صفحه‌ی P قطع دهیم، چه تعداد از اشکال «دایره، بیضی، سهمی، نقطه و هذلولی» ممکن است تشکیل نشود؟
 (۱) صفر (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) ۳
- ۶۱ نقاط A, B, C و D در صفحه مفروض‌اند. مکان هندسی نقاطی در آن صفحه که از هر چهار نقطه به یک فاصله باشند، کدام است؟
 (۱) یک نقطه یا تهی (۲) دو نقطه (۳) یک خط (۴) یک خط یا تهی
- ۶۲ پاره‌خط AB و خط d در یک صفحه مفروض‌اند. اگر AB و d متقاطع غیرعمود باشند، چند نقطه در صفحه وجود دارد که فاصله d آن‌ها از دو سر پاره‌خط AB یکسان و از خط d به فاصله 2 واحد باشد؟
 (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۱ (۴) بی‌شمار
- ۶۳ دو خط موازی d و d' به فاصله 4 cm از یک‌دیگر در صفحه قرار دارند. مکان هندسی نقاطی که فاصله d آن‌ها از یکی از دو خط d یا d' دو برابر فاصله d آن‌ها از خط دیگر باشد، چیست؟
 (۱) یک خط (۲) دو خط موازی (۳) سه خط موازی (۴) چهار خط موازی
- ۶۴ مکان هندسی نقاطی در فضا که فاصله d آن‌ها از دو سر پاره‌خطی به طول 8 سانتی‌متر برابر 6 سانتی‌متر و فاصله d آن‌ها از وسط پاره‌خط برابر 3 سانتی‌متر باشد، چه شکلی است؟
 (۱) دایره (۲) کره (۳) صفحه (۴) تهی
- ۶۵ مکان هندسی مراکز دایره‌ی که بر خط $X = -2$ مماس باشد و از نقطه‌ی $A(2, 2)$ عبور کند، کدام است؟
 (۱) $y^2 + 4y + 8x + 8 = 0$
 (۲) $y^2 - 4y - 8x + 4 = 0$
 (۳) $y^2 - 4y - 8x - 4 = 0$
 (۴) $y^2 + 4y - 8x + 4 = 0$
- ۶۶ دو خط موازی d و d' به فاصله 7 از یک‌دیگر مفروض‌اند. مکان هندسی نقاطی از صفحه که قدرمطلق تفاضل فواصل آن‌ها از d و d' برابر 3 باشد، کدام است؟
 (۱) خطی عمود بر d و d'
 (۲) دو خط موازی d و d'
 (۳) دایره‌ای مماس بر d و d'
 (۴) خطی موازی d و d'
- ۶۷ دو خط متقاطع d و d' و دایره‌ی C به مرکز O و شعاع R در صفحه مفروض هستند. حداکثر چند نقطه روی دایره‌ی C وجود دارد که از دو خط d و d' به یک فاصله باشد؟
 (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴



۶۸ یک سطح مخروطی با محور l و مولد d ، مفروض است. فصل مشترک صفحه P با این سطح مخروطی در حالتی که صفحه P بر محور l عمود نباشد و با مولد d نیز موازی نباشد و فقط یکی از دو نیمه‌ی مخروط را قطع کند، کدام است؟
 (۱) هذلولی (۲) یک خط راست (۳) بیضی (۴) سهمی

۶۹ پاره‌خط دلخواه AB مفروض است. مکان هندسی نقاطی که با این پاره‌خط تشکیل یک مثلث با مساحت S می‌دهند، کدام است؟
 (۱) دو نقطه (۲) یک پاره‌خط عمود بر AB
 (۳) دایره‌ای به قطر AB (۴) دو خط موازی پاره‌خط AB

۷۰ مکان هندسی مرکز دایره‌هایی به شعاع $2\sqrt{13}$ که بر خط $2y - 2x = 36$ مماس شده و در زیر آن قرار گیرند، کدام است؟
 (۱) $2y - 2x = 10$ (۲) $3y - 2x = 62$ (۳) $2y + 3x = 20$ (۴) $2y + 3x = 52$

۷۱ نقطه A در صفحه P است. مکان هندسی نقاطی که از صفحه P به فاصله ۴ واحد و از نقطه A به فاصله ۵ واحد باشند، کدام است؟
 (۱) یک خط موازی صفحه (۲) دو خط موازی (۳) دو دایره (۴) یک دایره

۷۲ مکان هندسی، کدام مجموعه نقاط است؟
 (۱) برخی از آنها یک ویژگی مشترک دارند.
 (۲) همه آنها واقع در یک خط هستند.
 (۳) برخی از آنها در یک صفحه هستند.
 (۴) همه آنها یک ویژگی مشترک دارند.

۷۳ مکان هندسی نقاطی که می‌توان دو مماس مساوی بر هر یک از دو دایره متقاطع رسم کرد، کدام است؟
 (۱) یک نیم‌خط (۲) دو نیم‌خط (۳) یک دایره (۴) یک نیم‌دایره

۷۴ در مثلث $\triangle ABC$ ضلع BC ثابت و طول میانه AM نیز ثابت است. مکان هندسی نقطه G مرکز ثقل مثلث وقتی رأس A تغییر مکان می‌دهد، چگونه است؟
 (۱) دایره‌ای به مرکز G با شعاع $\frac{1}{3}AM$
 (۲) دایره‌ای به مرکز وسط BC با شعاع $\frac{1}{3}AM$
 (۳) خطی به موازات BC به فاصله $\frac{1}{3}AM$
 (۴) خطی به موازات BC به فاصله $\frac{1}{2}AM$

۷۵ دایره‌ی $C(O, 6)$ مفروض است. خط Δ به فاصله‌ی ۲ از نقطه‌ی O قرار دارد. چند نقطه روی محیط دایره‌ی C وجود دارد که فاصله‌اش از خط Δ برابر ۴ باشد؟
 (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴) صفر

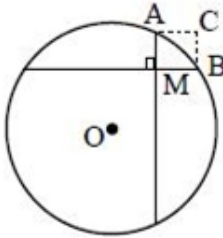
۷۶ مکان هندسی مرکز دایره‌هایی که بر دو ضلع زاویه‌ای مماس باشند، کدام است؟
 (۱) دو خط موازی (۲) دو خط عمود بر هم (۳) دو دایره (۴) محیط یک مستطیل



۷۷ دو مربع به ضلع ۶ را کنار هم طوری قرار می‌دهیم که در یک ضلع مشترک باشند و سکه‌ای به قطر یک را روی این دو مربع رها می‌کنیم. مکان هندسی مراکز سکه‌ها در صورتی که هیچ‌گاه از شکل ایجاد شده خارج نشوند، سطحی با کدام قطر را ایجاد می‌کنند؟

$\sqrt{164}$ (۴) $6\sqrt{5}$ (۳) $\sqrt{116}$ (۲) $\sqrt{146}$ (۱)

۷۸ نقطه‌ی ثابت M درون دایره‌ای به مرکز O مفروض است. از M دو وتر عمود بر هم رسم می‌کنیم تا دایره را در نقاط A و B قطع کند. مکان هندسی نقطه‌ی C راس چهارم مستطیل MACB کدام است؟



(۱) چهار رأس مربعی که اضلاع آن مماس بر دایره‌ی مفروض است.

(۲) دایره‌ای به مرکز O با شعاع $\sqrt{2R^2 - OM^2}$

(۳) مربعی به مرکز O با طول قطر $\sqrt{2R^2 + OM^2}$

(۴) دایره‌ای به مرکز O با شعاع $\sqrt{R^2 + OM^2}$

۷۹ اگر نقطه‌ی M درون مثلث ABC و مساحت $\triangle MBC$ برابر مجموع مساحت‌های $\triangle MAB$ و $\triangle MAC$ باشد، مکان هندسی نقطه‌ی M کدام است؟

(۱) پاره‌خطی عمود بر BC که از M می‌گذرد.

(۲) پاره‌خطی موازی BC که از M می‌گذرد.

(۳) پاره‌خطی عمود بر BC به اندازه‌ی $\frac{1}{3}h_a$.

(۴) پاره‌خطی موازی BC که از M گذشته به فاصله‌ی $\frac{1}{3}h_a$ از BC.

۸۰ مربع ABCD به ضلع ۴ مفروض است. چند نقطه روی محیط ABCD وجود دارد که فاصله‌اش از قطر BD برابر π باشد؟

(۱) ۴ (۲) ۲ (۳) ۱ (۴) هیچ نقطه‌ای

۸۱ حداکثر چند نقطه روی یک دایره به شعاع ۴ وجود دارد که از خط مفروض Δ به فاصله ۲ باشند؟

(۱) ۴ (۲) ۳ (۳) ۲ (۴) ۱

۸۲ مربعی به طول ضلع ۸ مفروض است. چند نقطه روی محیط این مربع وجود دارد که از مرکز مربع به فاصله‌ی ۵ باشد؟

(۱) هیچ (۲) ۴ (۳) ۶ (۴) ۸

۸۳ چند نقطه با فاصله‌های مساوی از سه خط دویبه‌دو متقاطع وجود دارد؟

(۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴



- ۸۴ دو خط متقاطع d و d' و دو نقطه ثابت A و B در یک صفحه مفروض اند. در تعیین نقطه‌ای که فاصله آن از دو نقطه A و B یکسان و از دو خط مفروض به یک فاصله باشد، در کدام حالت جواب منحصر به فرد است؟ (پاره خط AB هیچ یک از دو خط d و d' را قطع نمی کند.)
- (۱) فاصله A از خط d برابر فاصله B از خط d'
- (۲) AB عمود بر نیمساز d و d'
- (۳) AB عمود بر d
- (۴) فاقد جواب

- ۸۵ روی یک دایره چند نقطه وجود دارد که از دو سر پاره خط مفروض PQ به یک فاصله باشد، اگر PQ از مرکز دایره بگذرد؟
- (۱) دو (۲) حداقل ۲ (۳) حداکثر ۲ (۴) یک

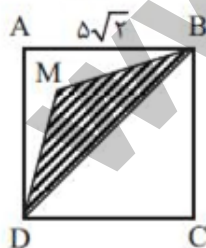
- ۸۶ دایره‌ی متغیری از دو رأس یک مثلث می گذرد. مکان هندسی مراکز این دایره‌ها کدام است؟
- (۱) خطی موازی یک ضلع (۲) عمود منصف یک ضلع
- (۳) خطی گذرنده از یک رأس (۴) خطی عمود بر یک ضلع و گذرنده از یک رأس

- ۸۷ دو نقطه‌ی ثابت A و B را در صفحه به گونه‌ای در نظر بگیرید که طول AB برابر واحد باشد. مکان هندسی نقطه‌ی C به طوری که $AC^2 + BC^2 = 9$ باشد، کدام است؟
- (۱) خطی عمود بر AB (۲) دایره‌ای به شعاع $\frac{1}{2}$
- (۳) دایره‌ای به شعاع $\frac{5}{3}$ (۴) خطی متعام با AB به فاصله $\frac{1}{3}$ از A

- ۸۸ نقطه‌ی O و خط d مفروض اند. چند نقطه در صفحه وجود دارد که از نقطه‌ی O به فاصله‌ی ۲ و از خط d به فاصله‌ی $\frac{2}{5}$ باشد؟
- (۱) ۴ (۲) حداکثر ۴ (۳) ۲ (۴) حداکثر ۲

- ۸۹ فاصله‌ی خط d از مرکز دایره‌ای به شعاع ۵ برابر ۳ است. چند نقطه روی دایره وجود دارد که از خط d به فاصله‌ی ۱ باشد؟
- (۱) صفر (۲) ۲ (۳) ۴ (۴) بی شمار

- ۹۰ در داخل مربعی به ضلع $5\sqrt{2}$ طبق شکل، مکان هندسی نقاط M که با قطر BD از مربع، مثلث‌هایی با مساحت ۲۰ یا کم تر ایجاد می کنند، چه کسری از مساحت مربع خواهد بود؟



- (۱) $\frac{24}{25}$ (۲) $\frac{4}{5}$
- (۳) $\frac{22}{25}$ (۴) $\frac{23}{25}$

- ۹۱ دو دایره بیشماری به شعاع m وجود دارد که بر خطوط موازی d_1 یا d_2 که به فاصله‌ی $2m$ از هم قرار دارند، مماس باشند. مکان هندسی مراکز این دایره‌ها کدام است؟
- (۱) خطی موازی d_1 و d_2 (۲) دو خط موازی d_1 و d_2
- (۳) سه خط موازی d_1 و d_2 (۴) چهار خط موازی d_1 و d_2



۹۲ مکان هندسی نقاطی که از دو خط AB و BC از مثلث ABC به فاصله‌ی یکسان قرار می‌گیرند، کدام است؟
 (۱) عمود منصف AC (۲) نیمساز وارد بر AC (۳) میانه‌ی AC (۴) دو خط موازی AC

۹۳ در مثلث PQR ، ضلع PQ ثابت است و R در صفحه تغییر می‌کند. مکان هندسی پای عمود از P بر RQ کدام است؟

(۱) یک خط (۲) دو خط (۳) کمانی از دایره (۴) یک دایره

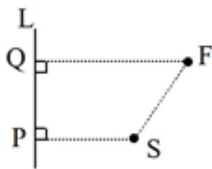
۹۴ دو خط موازی d و d' و نقطه‌ی A غیر واقع بر این دو خط مفروض‌اند. نقطه‌ی B روی d و نقطه‌ی C روی d' تغییر مکان می‌دهند. مکان هندسی نقطه‌ی هم‌رسی میانه‌های مثلث ABC کدام است؟

(۱) دو خط موازی d (۲) خطی عمود بر d (۳) خطی موازی d (۴) یک دایره

۹۵ خطی متغیر موازی یک ضلع مثلث مفروض رسم می‌شود. مکان هندسی وسط پاره‌خطهای حاصل از برخورد این خط با دو ضلع دیگر کدام است؟

(۱) یک خط (۲) یک کمان (۳) یک پاره خط (۴) یک دایره

۹۶ در شکل مقابل می‌دانیم: $PQ = 6$, $FQ = 16$, $SP = 8$. با خط‌کش و پرگار نقطه‌ی A را چنان یافته‌ایم که از S و F به یک فاصله بوده و فاصله‌ی A از خط L برابر 10 است. طول AS کدام است؟



(۱) $\frac{5\sqrt{13}}{3}$ (۲) $\frac{4\sqrt{13}}{3}$ (۳) $\sqrt{13}$ (۴) $2\sqrt{13}$

۹۷ سه خط واقع در یک صفحه دو به دو متقاطع‌اند. چند نقطه متساوی‌فاصله از این سه خط وجود دارد؟

(۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

۹۸ نقطه‌ی O و خط d مفروض است. حداکثر چند نقطه در صفحه وجود دارد که از نقطه‌ی O به فاصله‌ی 2 سانتی متر بوده و از خط d به فاصله‌ی $2/5$ سانتی متر باشد؟

(۱) یک (۲) دو (۳) سه (۴) چهار

۹۹ نقطه‌ی A به فاصله‌ی 4 cm از خط d قرار گرفته است. چند نقطه روی خط d وجود دارد که فاصله‌اش از نقطه‌ی A برابر 6 سانتی متر باشد؟

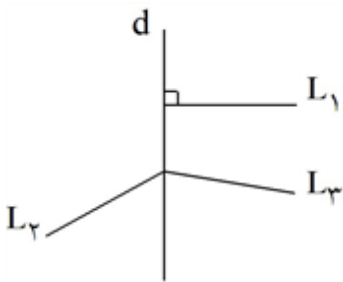
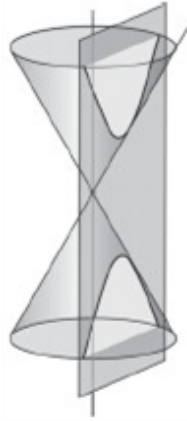
(۱) یک (۲) دو (۳) صفر (۴) بی‌شمار

۱۰۰ در یک صفحه اگر دو نقطه‌ی A و B در یک طرف خط d باشند، چند نقطه وجود دارد که روی خط d بوده و از نقطه‌های A و B به یک فاصله باشند؟

(۱) یک (۲) دو (۳) هیچ یا یک یا بی‌شمار (۴) یک یا هیچ



۱) گزینه ۳ پاسخ صحیح است.



۲) گزینه ۱ پاسخ صحیح است. مجموعه خط هایی که بر خط مفروض d (در فضا) عمود هستند یا موازیند که در صفحه های مختلف شامل خط d قرار می گیرند. یا متقاطع اند که در صفحات عمود بر خط d قرار می گیرند، یا متنافرند که هر کدام از آنها در صفحات مختلف گذرنده از خط d قرار می گیرند. به نادرستی سایر گزینه ها توجه کنید. مخصوصاً گزینه ی ۴ که آنچه مطرح شده یک سطح مخروطی را ایجاد می کند نه یک مخروط.

۳) گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

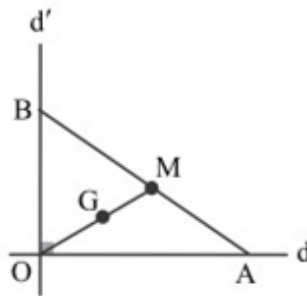
www.akoedu.ir



۴

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. مطابق شکل مثلث AOB قائم الزاویه و $AB = L$ می باشد. می دانیم که اگر G محل

همرسی میانه ها باشد، $OG = \frac{2}{3} OM$ می باشد. از طرفی OM میانه ی وارد بر وتر می باشد. داریم:



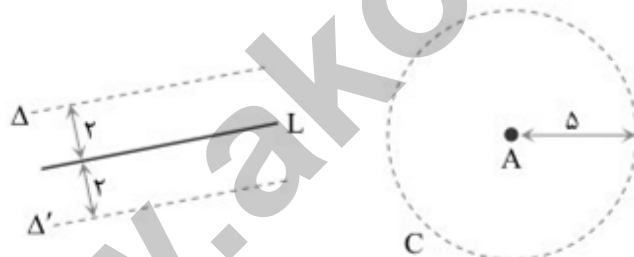
$$OM = \frac{AB}{2} = \frac{L}{2}, \quad OG = \frac{2}{3} \times \frac{L}{2} = \frac{L}{3}$$

پس مکان هندسی G، دایره ای به مرکز O و شعاع $\frac{L}{3}$ می باشد.

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. نقاطی که تا A به فاصله ی ۵ واحد باشند، دایره ای به مرکز A با شعاع ۵ واحد است

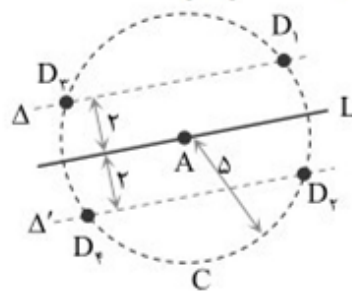
۵

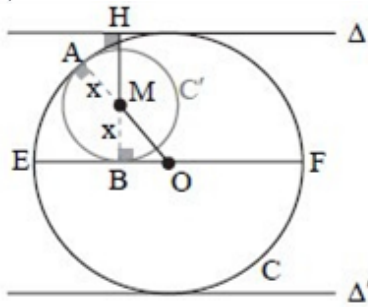
C(A, ۵) و نقاطی که تا L به فاصله ی ۲ واحد باشند دو خط موازی L به فاصله ی ۲ واحد از آن است (Δ و Δ')



اکنون اشتراک یا عدم اشتراک C با Δ و Δ' وضعیت جواب ها را مشخص می کنند، (عدم جواب - یک جواب - دو جواب - سه جواب - چهار جواب).

شکل زیر حالتی که مسئله چهار جواب دارد را مشخص می کند.

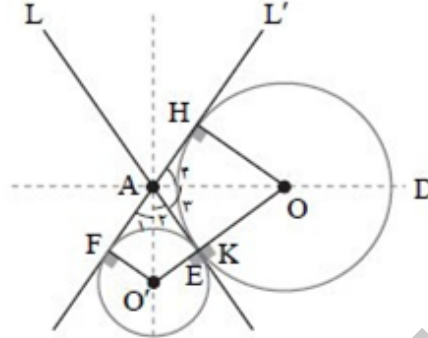




گزینه ۳ پاسخ صحیح است. دایره‌ی C' بر دایره‌ی C و قطر EF از آن مماس است، برای یافتن مکان هندسی مرکز دایره‌ی C' دو مماس به موازات EF بر دایره‌ی C رسم می‌کنیم، Δ و Δ' ;
 $OA = HB \Rightarrow OM + MA = HM + MB \Rightarrow MO = MH$
 این رابطه یعنی نقطه‌ی M از نقطه‌ی O و از خط ثابت Δ به یک فاصله است. پس مکان مطلوب قسمتی از یک سهمی است.

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. اگر دو خط متقاطع L و L' در نقطه‌ی A را رسم کنیم، آن‌گاه با توجه به شکل داریم:

$$\begin{cases} OH = OK \Rightarrow \hat{O}_3 = \hat{O}_4 \\ O'E = O'F \Rightarrow \hat{O}'_1 = \hat{O}'_2 \end{cases} \Rightarrow$$

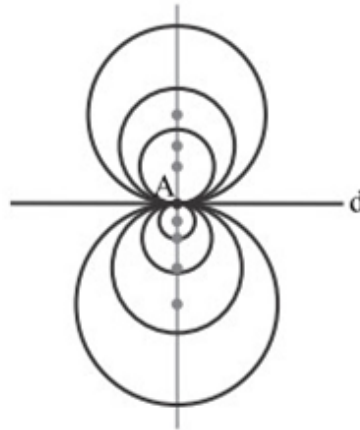


پس نقاط O و O' مرکز این دایره‌ها روی نیمسازهای زاویه‌های بین دو خط L و L' است. پس مکان هندسی مطلوب نیمسازهای زوایای دو خط می‌باشد.

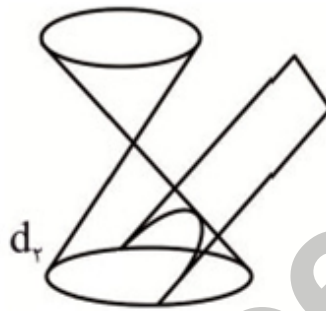
گزینه ۳ پاسخ صحیح است. نقاط C و B ثابت‌اند پس BC ثابت است. نتیجه این‌که وسط BC یعنی نقطه‌ی M ثابت است، با توجه به ثابت بودن اندازه‌ی میانه AM نقطه‌ی A وابسته به M با فاصله‌ی ثابت است. پس مکان هندسی A دایره به مرکز M و شعاع AM است.



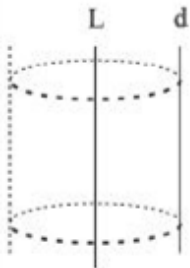
گزینه ۲ پاسخ صحیح است. مرکز دایره‌هایی که در نقطه‌ی A بر خط d مماس هستند روی خطی گذرنده از A عمود بر خط d قرار دارند.



گزینه ۴ پاسخ صحیح است. شکل حاصل از تقاطع صفحه موازی مولد و سطح مخروطی، سهمی می‌شود.



گزینه ۳ پاسخ صحیح است. گزاره «الف» نادرست است زیرا d و L می‌توانند متقاطع نباشند. یک مثال نقض: اگر $L \parallel d$ باشد، سطح حاصل سطح استوانه‌ای است ولی گزاره‌های (ب) و (ج) درست هستند.



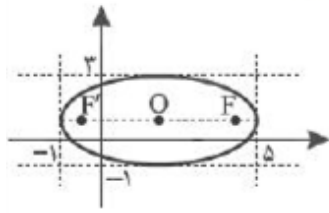
گزینه ۲ پاسخ صحیح است. بنابر خاصیت بازتابندگی بیضی اگر شعاع نوری از یکی از کانون‌ها به بدنه بیضی تابانده شود، انعکاس نور از کانون دیگر خواهد گذشت.

$$a = 5, b = 2 \Rightarrow a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow 25 = 4 + c^2 \Rightarrow c = 4$$

پس $F(4, 0)$ و $F'(-4, 0)$ یعنی اشعه از نقطه $(-4, 0)$ خواهد گذشت.



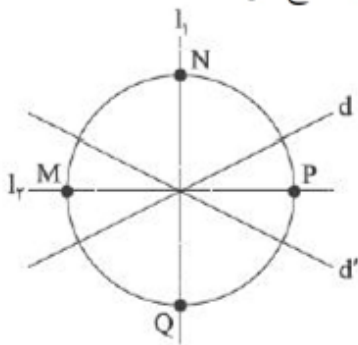
گزینه ۳ پاسخ صحیح است. مختصات مرکز بیضی $O\left(\frac{-1+5}{2}, \frac{-1+3}{2}\right)$ یعنی $O(2, 1)$ به دست می آید. از طرفی طول قطر بزرگ، $2a = 6$ یعنی $a = 3$ و طول قطر کوچک، $2b = 4$ یعنی $b = 2$ خواهد بود.



$$a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow 9 = 4 + c^2 \Rightarrow c = \sqrt{5}$$

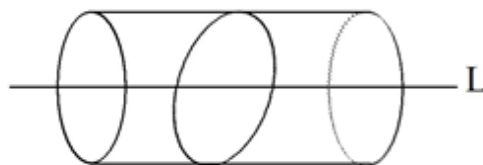
اگر از مرکز بیضی به اندازه $\sqrt{5}$ به چپ و راست برویم، به کانون‌ها می‌رسیم، پس مختصات کانون‌ها به صورت $F'(2 - \sqrt{5}, 1)$ و $F(2 + \sqrt{5}, 1)$ به دست می‌آید.

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. مکان هندسی نقاطی که از دو خط متقاطع به یک فاصله هستند، نیمسازهای زوایای بین دو خط است. اگر l_1 و l_2 نیمسازهای زوایای d و d' باشند، هر کدام از این دو خط حداکثر در دو نقطه دایره C را قطع می‌کند.



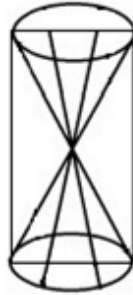
چهار نقطه M, N, P, Q همان نقاطی هستند که به دنبال آن‌ها بودیم.

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. نقاطی که به فاصله واحد از خط L می‌باشد، سطح استوانه‌ای را تشکیل می‌دهد که محل برخورد آن با صفحه‌ای قاطع با خط L و غیر عمود بر L یک بیضی می‌شود.

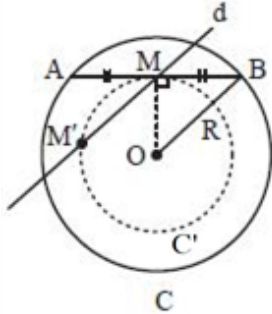


گزینه ۴ پاسخ صحیح است. نقاط A و B در دو طرف صفحه P را در نظر بگیرید. محل برخورد دو صفحه P_1 و P_2 به موازات P و فاصله واحد از آن و صفحه‌ی عمودمنصف پاره‌خط AB، دو خط می‌شود که مکان مورد نظر این سؤال است.

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. بنا بر شکل زیر دو خط می‌شود که در رأس مخروطی متقاطع هستند.



گزینه ۲ پاسخ صحیح است. وسط وتر AB از دایره C را M نامیده، مکان هندسی آن به صورت زیر است:



$$\begin{cases} MB = \frac{a}{2} \Rightarrow OM^2 = R^2 - \frac{a^2}{4} \\ OB = R \end{cases}$$

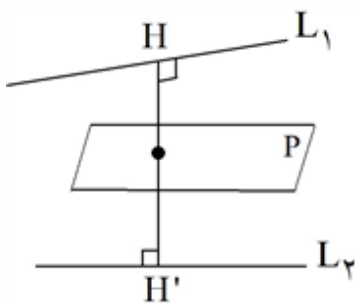
$$\Rightarrow OM = \sqrt{R^2 - \frac{a^2}{4}} \Rightarrow \begin{cases} \text{O ثابت} \\ \text{M متحرک} \end{cases}$$

بنابراین مکان هندسی نقطه M محیط دایره C' به مرکز O و شعاع $\sqrt{R^2 - \frac{a^2}{4}}$ است.

$$\Rightarrow C' \left(O, \sqrt{R^2 - \frac{a^2}{4}} \right) \Rightarrow M \in C'$$

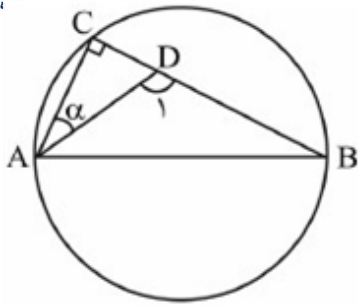
اشتراک C' با خط d می‌تواند باشد.

گزینه ۳ پاسخ صحیح است.



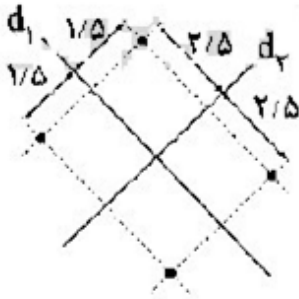
این مکان هندسی صفحه‌ای بین دو خط متناظر و موازی با آن‌هاست. در شکل صفحه P که از وسط عمود HH' گذشته و بر HH' عمود است مکان مورد نظر است.





۲۴

گزینه ۴ پاسخ صحیح است.
می‌دانیم نقاط روی محیط دایره، مکان هندسی برای رأس قائمه و ساختن مثلث قائم‌الزاویه است. بنابراین هر نقطه داخل دایره با پاره‌خط AB، زاویه‌ای منفرجه به ما می‌دهد که برابر $\hat{D}_1 = \alpha + \hat{C}$ است و $\hat{C} = 90^\circ$ است. \hat{D} زاویه خارجی برای مثلث ACD است.



۲۵

گزینه ۴ پاسخ صحیح است.
مکان هندسی نقاطی که از d_1 به فاصله‌ی $1/5$ سانتی‌متر باشد، دو خط موازی d_1 که به فاصله‌ی $1/5$ از آن قرار دارند و مکان هندسی نقاطی که از خط d_2 به فاصله‌ی $2/5$ باشد، دو خط موازی d_2 است. نقاط تلاقی این خطوط جواب مسئله می‌باشند که ۴ نقطه می‌باشند.

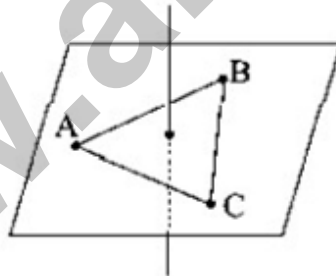
گزینه ۳ پاسخ صحیح است. هرگاه دو خط d و l موازی باشند، از دوران d حول l یک سطح استوانه‌ای ایجاد می‌شود. حال اگر صفحه‌ی P سطح استوانه را طوری قطع کند که با l موازی شود آن‌گاه شکل حاصل دو خط موازی خواهد بود.

۲۶

گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

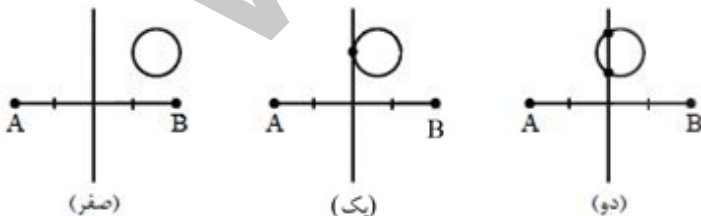
۲۷

نکته: مکان هندسی نقاطی از فضا که از دو نقطه‌ی A و B به یک فاصله باشند، صفحه‌ی عمودمنصف پاره‌خط AB است.
صفحه‌ی عمودمنصف AB و صفحه‌ی عمودمنصف AC را قطع می‌دهیم، فصل مشترک این دو صفحه که یک خط است جواب سؤال است که بر صفحه‌ی مثلث ABC عمود است.



گزینه ۴ پاسخ صحیح است. مکان هندسی نقطه‌ای که از A و B به فاصله‌ی برابر باشند، خط عمودمنصف AB است که این عمودمنصف حداکثر دایره را در ۲ نقطه قطع می‌کند.

۲۸

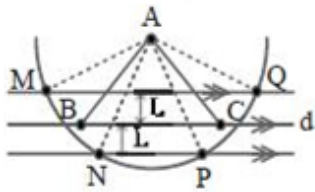


گزینه ۳ پاسخ صحیح است. مکان هندسی نقاطی که از رأس A به فاصله‌ی r هستند، دایره‌ای به مرکز A و شعاع r است و مکان هندسی نقاطی که از ضلع BC به فاصله‌ی L هستند، دو خط موازی BC است. نقطه‌ی تلاقی این دو مکان جواب سؤال است که می‌تواند حداکثر چهار نقطه باشد.

۲۹



گزینه ۳ پاسخ صحیح است. می‌دانیم مکان هندسی نقاطی که از خط d به فاصله L می‌باشد، دو خط موازی با BC و فاصله L می‌باشد. مکان هندسی نقاطی که از رأس A به فاصله r باشند، دایره‌ای به مرکز A و شعاع r می‌باشد. محل تلاقی دایره و خط موازی پاسخ مسأله می‌باشد. مسئله حداکثر چهار پاسخ دارد (Q و P, N, M).

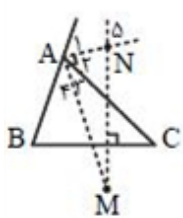


$$AM = AN = AP = AQ = r$$

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. برای این که مقطع مخروطی تبدیل به دو خط موازی شود باید ضرایب جملات شامل y با ضرایب جملات شامل y^2 صفر شود.

$$\left. \begin{aligned} m - 2 &= 0 \Rightarrow m = 2 \\ n + 1 &= 0 \Rightarrow n = -1 \end{aligned} \right\} \Rightarrow m + n = 2 - 1 = 1$$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. مکان هندسی نقاطی که از دو سر ضلع BC به یک فاصله می‌باشد، عمودمنصف BC است. مکان هندسی نقاطی که از AB و AC یا امتداد آن‌ها به یک فاصله باشد، نیمسازهای داخلی و خارجی رأس A می‌باشد. مطابق شکل، M و N محل برخورد این مکان هندسی‌ها می‌باشند. داریم:



$$\hat{A}_1 = \hat{A}_2 \text{ و } \hat{A}_3 = \hat{A}_4 \Rightarrow \hat{A}_2 + \hat{A}_4 = 90^\circ$$

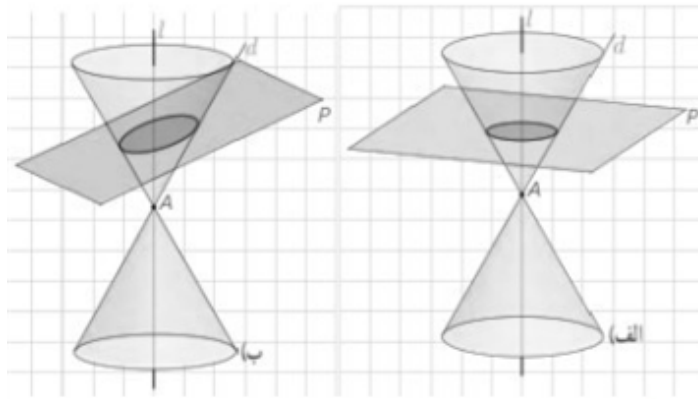
$$\triangle MAN: \hat{MAN} = 90^\circ \text{ و } MA = 4 \text{ و } NA = 2$$

$$\Rightarrow MN^2 = 4^2 + 2^2 = 20 \Rightarrow MN = 2\sqrt{5}$$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. مکان هندسی نقاطی که از دو نقطه A و A' به یک فاصله باشند عمودمنصف پاره‌خط AA' است. همچنین مکان هندسی نقاطی که از دو خط موازی d و d' به یک فاصله باشد خط بین دو خط d و d' و موازات آن‌هاست. اگر این خط را d'' بنامیم جواب نهایی مسئله محل برخورد عمودمنصف AA' و خط d'' است که در واقع اوضاع نسبی دو خط است که تعداد نقاط مشترک آن‌ها صفر، یا بی‌شمار یا یک نقطه می‌باشد.



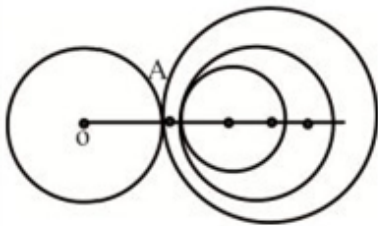
گزینه ۴ پاسخ صحیح است.



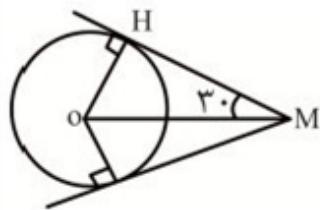
اگر این صفحه از مرکز نقطه A بگذرد محل برخورد یک نقطه است.

گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

در گزینه ۲، اگر نقطه مفروض را A بنامیم، مرکز دایره‌ها OA و امتداد آن است.

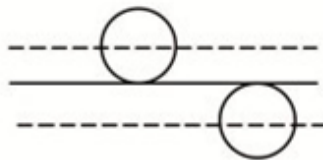
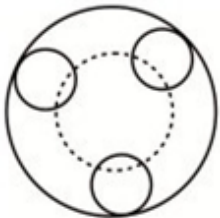


مکان نقطه M در گزینه ۱ دایره‌ای به مرکز O و شعاع OM است.

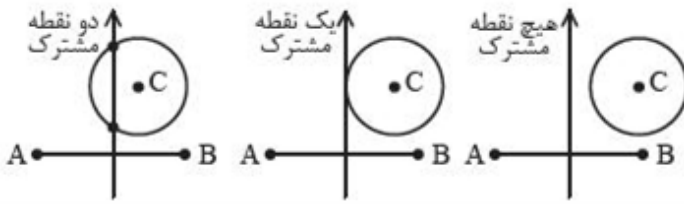


$$OM = \frac{OH}{\sin 30} = 6$$

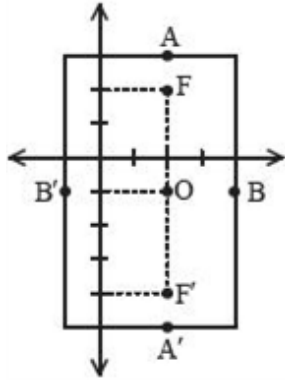
گزینه ۳ و ۴ به شکل زیر هستند:



گزینه ۳ پاسخ صحیح است. مکان هندسی نقاطی که به فاصله ثابت m از نقطه O قرار دارند، یک دایره به مرکز O و به شعاع r است. از طرفی مکان هندسی نقاط با فاصله یکسان از دو سر پاره خط AB ، عمود منصف پاره خط AB است که دایره فوق با خط عمود منصف AB سه وضعیت دارد.



گزینه ۱ پاسخ صحیح است. مکان هندسی مطلوب یک بیضی می باشد که برای آن داریم:



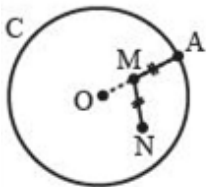
$$2c = \sqrt{(2-2)^2 + (-4-2)^2} \Rightarrow c = 3$$

$$2a = 8 \Rightarrow a = 4$$

$$b^2 = 16 - 9 \Rightarrow b = \sqrt{7}$$

$$\text{طول وتر کانونی: } 2 \frac{b^2}{a} = 2 \times \frac{7}{4} = 3.5$$

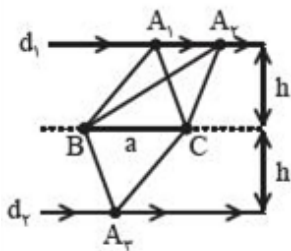
گزینه ۴ پاسخ صحیح است. دایره C و نقطه ثابت N را درون آن رسم می کنیم، با رسم شعاع گذرنده از نقطه M متعلق به این مکان داریم:



$$OA = R \Rightarrow \begin{cases} OM + MA = R \\ MA = MN \end{cases} \Rightarrow MO + MN = R \quad \begin{cases} M \text{ متغیر} \\ O \text{ ثابت} \\ N \text{ ثابت} \end{cases}$$

M وابسته به دو نقطه ثابت مکان هندسی بیضی با کانون های O و N با مقدار ثابت R می باشد.

گزینه ۳ پاسخ صحیح است.



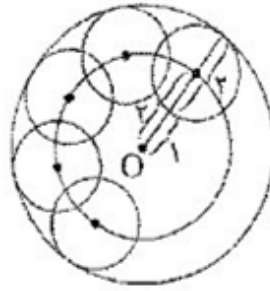
$$2S = a \cdot h \Rightarrow h = \frac{2S}{a} \Rightarrow h \text{ ثابت}$$

$$A_1, A_2, \dots, A_n \in h$$

مکان مطلوب d_1 و d_2 موازی قاعده و به فاصله h از آن.



۴۰ گزینه ۲ پاسخ صحیح است. با توجه به شکل زیر مراکز همه‌ی این دایره‌ها، روی دایره‌ای به مرکز O و شعاع ۲ (قطر ۴) قرار دارند.



۴۱ گزینه ۴ پاسخ صحیح است. نقطه تلاقی هر سه نیمساز داخلی - نقطه تلاقی یک نیمساز داخلی و دو نیمساز زاویه خارجی دیگر که در خارج در ضلع مثلث است. در نتیجه $۱ + ۳ = ۴$ نقطه موجود است.

۴۲ گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

$$DC \parallel OA \Rightarrow \widehat{CDA} = \widehat{DAO}, \widehat{CAD} = \widehat{DAO} \Rightarrow \widehat{CDA} = \widehat{CAD} \Rightarrow CD = AC$$

با جابه‌جا شدن رأس B ، از آن‌جا که همواره $CD = CA$ می‌باشد، پس طبق تعریف سهمی، مکان هندسی نقطه C ، سهمی می‌باشد که محور y ها خط‌های آن و A کانون آن است. برای یافتن معادله سهمی داریم:

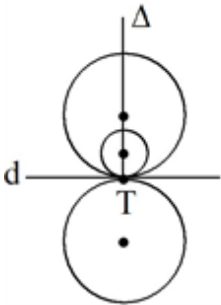
$$OA = ۶ = ۲a \Rightarrow a = ۳$$

رأس سهمی $S(۳, ۰)$

$$\text{معادله سهمی } y^2 = ۴ \times ۳(x - ۳) \Rightarrow y^2 = ۱۲(x - ۳) \Rightarrow y^2 = ۱۲x - ۳۶ \Rightarrow y^2 - ۱۲x + ۳۶ = ۰$$

۴۳ گزینه ۳ پاسخ صحیح است. طبق تعریف بیضی، مکان هندسی نقاطی که مجموعه فواصلشان از دو نقطه ثابت، مقداری ثابت باشد بیضی می‌باشد.

۴۴ گزینه ۴ پاسخ صحیح است. مکان هندسی مرکز دایره‌هایی که بر خط d در نقطه‌ای مانند T مماس هستند، خطی عمود بر خط d در نقطه T است.



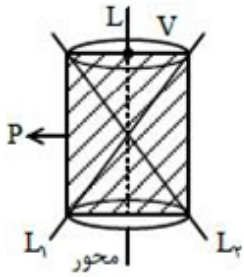
۴۵ گزینه ۴ پاسخ صحیح است. نقاطی که از دو خط متقاطع به یک فاصله باشند، نیمسازهای زوایای بین دو خط است که دو خط عمود بر هم هستند، بنابراین محل تلاقی این دو خط عمود بر هم با دایره C ، نقاط مورد نظر هستند که حداکثر ۴ نقطه است.

۴۶ گزینه ۳ پاسخ صحیح است. نقاطی که از A و B به یک فاصله باشند، عمودمنصف پاره‌خط AB و نقاطی که از C و D به یک فاصله باشند، عمودمنصف پاره‌خط CD است، بنابراین نقاط مورد نظر محل برخورد این دو عمودمنصف است که نمی‌تواند ۲ نقطه باشد.



۴۷

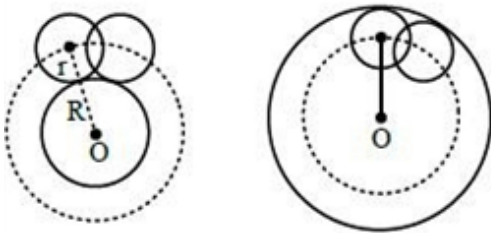
گزینه ۲ پاسخ صحیح است. در حالتی که محور مخروط دوار منطبق بر صفحه گذرنده باشد، سطح مقطع دو خط متقاطع است:



$$p \cap V ; L \subseteq p \Rightarrow p \cap V = \{L_1, L_2\}$$

۴۸

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. اگر دایره‌های به شعاع r مماس بیرونی بر دایره به شعاع R باشند، مکان هندسی موردنظر دایره‌ای به مرکز (دایره به شعاع R) به شعاع $R + r$ است و اگر دایره‌های به شعاع r مماس درونی بر دایره به شعاع R باشند، مکان هندسی موردنظر دایره‌ای به مرکز (دایره به شعاع R) به شعاع $R - r$ است، بنابراین مکان هندسی موردنظر دو دایره می‌باشد.



۴۹

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. اگر صفحه P از مولد سطح استوانه‌ای عبور کند (صفحه بر سطح استوانه‌ای مماس باشد)، سطح مقطع، یک خط است. اگر صفحه P از محور سطح استوانه‌ای عبور کند، سطح مقطع، دو خط موازی است. اگر صفحه P بر محور استوانه‌ای عمود باشد، سطح مقطع، یک دایره است و اگر صفحه P بر سطح استوانه‌ای عمود نباشد و با هیچ یک از مولد و محور موازی نباشد، سطح مقطع یک بیضی است.

۵۰

گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

$$\begin{cases} x = 1 + \operatorname{tg}^2 \alpha \\ y = \frac{1}{\cos \alpha} - 1 \Rightarrow \frac{1}{\cos \alpha} = y + 1 \Rightarrow \frac{1}{\cos^2 \alpha} = (y + 1)^2 \end{cases}$$

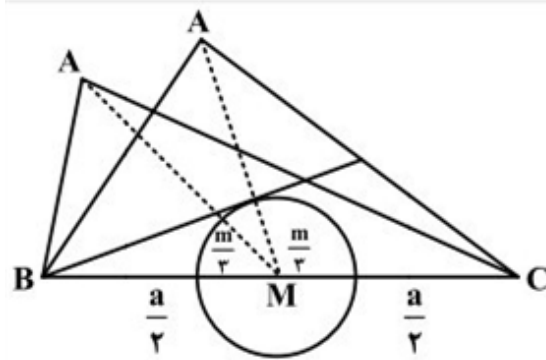
$$x = (y + 1)^2 \Rightarrow \begin{cases} h = 0 \\ k = -1 \\ 2a = 1 \Rightarrow a = \frac{1}{4} \end{cases} \quad \text{می‌دانیم } 1 + \operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \text{ پس:}$$

معادله‌ی موردنظر، یک سهمی افقی است که کانون آن $F(h + a, k)$ خواهد بود:

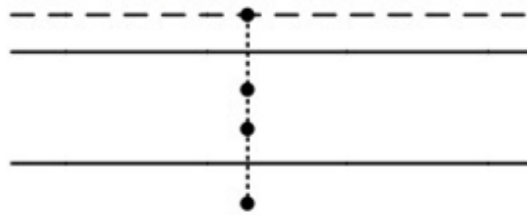
$$F\left(\frac{1}{4}, -1\right)$$



گزینه ۳ پاسخ صحیح است. ۵۱



گزینه ۱ پاسخ صحیح است. دو خط مجانس مستقیم یا معکوس می‌توانند باشند اولی مجانس دومی یا برعکس، در هر حالت مکان خط موازی آن دو خط است. پس ۴ خط متمایز موازی هم. ۵۲



گزینه ۳ پاسخ صحیح است. تساوی داده شده را تا حد امکان ساده می‌کنیم: ۵۳

$$\frac{2MA - MB}{MA - 3} = 3 \Rightarrow 2MA - MB = 3MA - 9 \Rightarrow MA + MB = 9$$

چون $MA + MB = 9 < AB = 10$ ، یعنی فاصله‌ی دو نقطه از مقدار ثابت بیش‌تر است ($2a < 2c$) پس مکان هندسی تهی است یعنی شکل حقیقی ندارد.

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. بنابر فرض سؤال اگر $A(3, 0)$ و $B(-1, 2)$ آن‌گاه داریم: ۵۴

$$MA = \sqrt{2} MB \Rightarrow \sqrt{(x-3)^2 + y^2} = \sqrt{2} \sqrt{(x+1)^2 + (y-2)^2}$$

$$\Rightarrow x^2 + 9 - 6x + y^2 = 2(x^2 + 1 + 2x + y^2 + 4 - 4y) \Rightarrow x^2 + y^2 + 10x - 8y + 1 = 0$$

پس مکان هندسی نقطه‌ی M یک دایره‌است و بیش‌ترین فاصله بین نقاط دایره، قطر دایره است.

$$2R = \sqrt{a^2 + b^2 - 4c} = \sqrt{10^2 + 8^2 - 4} = \sqrt{100 + 64 - 4} = \sqrt{160} = 4\sqrt{10}$$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. اگر مبدأ مختصات را به نقطه‌ی (α, β) منتقل کنیم آن‌گاه بین مختصات قدیم و جدید رابطه‌ی زیر برقرار است. ۵۵

$$\begin{cases} x = x' + \alpha \\ y = y' + \beta \end{cases} \xrightarrow[\text{می دهیم}]{\text{در خط قرار}} y' + \beta = 3(x' + \alpha) - 5 \Rightarrow y' + \beta = 3x' + 3\alpha - 5$$

$$\Rightarrow y' = 3x' + 3\alpha - 5 - \beta$$

بنابر فرض سؤال خط به دست آمده باید همان خط $y = 3x - 5$ باشد پس داریم:

$$3\alpha - 5 - \beta = -5 \Rightarrow 3\alpha - \beta = 0 \Rightarrow 3\alpha = \beta$$

پس بین مختصات مبدأ جدید رابطه‌ی $3\alpha = \beta$ باید برقرار باشد و تنها در بین گزینه‌ها نقطه $(1, 3)$ دارای این ویژگی می‌باشد.



۵۶

گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

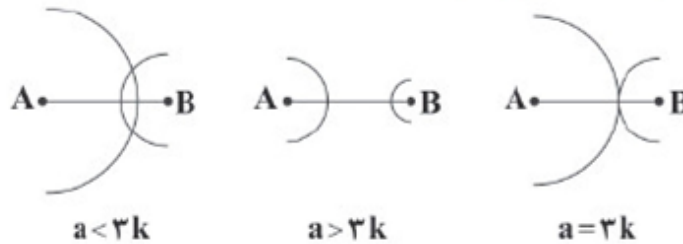
$$x^2 + 2x + 1 + z^2 - 2z + 1 = 0 \Rightarrow (x+1)^2 + (z-1)^2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ z = 1 \end{cases}$$

چون نقطه‌ی A روی خط $\begin{cases} x = -1 \\ z = 1 \end{cases}$ قرار دارد، پس:

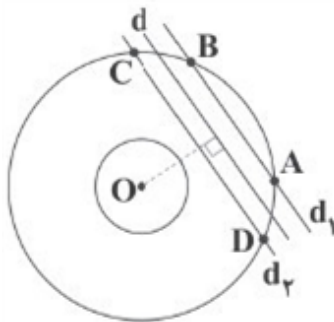
$$\begin{cases} m - 1 = -1 \Rightarrow m = 0 \\ n + 2 = 1 \Rightarrow n = -1 \end{cases} \Rightarrow m + n = -1 \Rightarrow A(-1, -1, 1)$$

۵۷

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. فاصله‌ی دو نقطه‌ی A و B را برابر a در نظر می‌گیریم، دهانه‌ی پرگار را یک بار به اندازه‌ی k و یک بار به اندازه‌ی ۲k باز می‌کنیم و به ترتیب دوایری به مراکز B و A می‌زنیم. تعداد نقاط برخورد این دو دایره جواب مسئله است که یک خط نمی‌تواند باشد.



۵۸



گزینه ۱ پاسخ صحیح است. چون کوتاه‌ترین فاصله‌ی d از دایره، ۲ است، پس فاصله‌ی O از d برابر ۴ است. مکان هندسی نقاطی که فاصله‌یشان از نقطه‌ی O ۶ واحد باشد، دایره‌ای به مرکز O و به شعاع ۶ واحد است. اگر دایره‌ی $C(O, 6)$ را رسم کنیم، خط d در دو نقطه قطع می‌شود، اما مکان هندسی نقاطی که از خط d به فاصله‌ی ۱ واحد باشند، دو خط موازی با d می‌باشند که در شکل با d_1 و d_2 نمایش داده‌ایم. نقاط مشترک دو مکان به دست آمده، ۴ نقطه‌ی A, B, C, D می‌باشند.

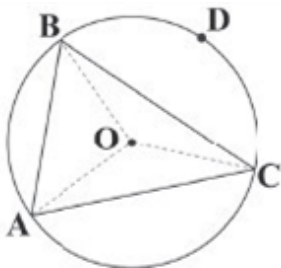
۵۹

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. می‌دانیم که از هر سه نقطه‌ی غیر واقع بر یک خط راست، دایره‌ای می‌گذرد که مرکز آن محل برخورد عمودمنصف‌های اضلاع مثلثی است که با این سه نقطه ساخته می‌شود. نقطه‌ی G در فضای دوبعدی تنها نقطه‌ای است که از سه رأس مثلث به یک فاصله است، اما چون سؤال در فضای سه‌بعدی مطرح شده است، پس خط عمود بر صفحه‌ی مثلث و دایره در نقطه‌ی G، جواب مسئله است.

۶۰

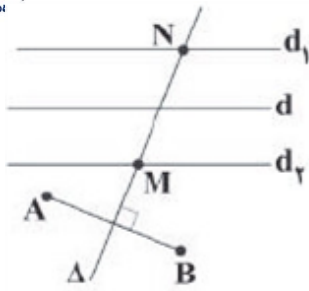
گزینه ۱ پاسخ صحیح است. اگر رویه‌ی مخروطی را با صفحه‌ی P تقاطع دهیم، آن‌گاه همه‌ی اشکال گفته شده پدید می‌آید.

۶۱

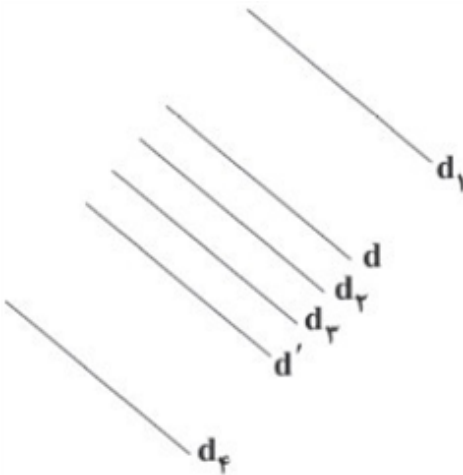


گزینه ۱ پاسخ صحیح است. می‌دانیم از هر سه نقطه‌ی غیر واقع بر یک خط راست، دایره‌ای می‌گذرد. طبق شکل، مرکز دایره نقطه‌ای است که از A, B و C فاصله‌ی یکسانی دارد. حال اگر نقطه‌ی چهارم (D) روی دایره باشد. آن‌گاه جواب مسئله نقطه‌ی O یعنی مرکز دایره است، اما اگر نقطه‌ی چهارم روی دایره نباشد (داخل یا بیرون دایره باشد) آن‌گاه جواب مسئله تهی است. ضمناً اگر چهار نقطه روی یک خط راست یا سه نقطه از آن‌ها روی یک خط راست باشد، باز هم جواب مسئله تهی است.



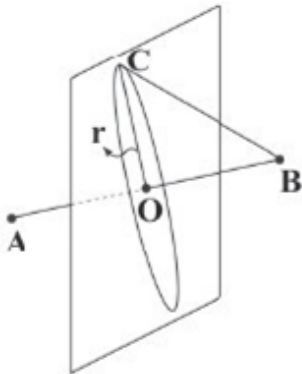


گزینه ۱ پاسخ صحیح است. چون AB و d متقاطع غیرعمودند، پس امتداد AB خط d را قطع می کند و با آن زاویه‌ی حاده می‌سازد. دو خط d_1 و d_2 را موازی با d به فاصله‌ی دو سانتی‌متر از آن رسم می‌کنیم. محل برخورد خط عمودمنصف AB یعنی Δ با d_1 و d_2 نقاط N و M هستند و جواب مسئله می‌باشند، چون فاصله‌شان از خط d برابر ۲ سانتی‌متر و فاصله‌ی هر کدام از دو سر پاره‌خط AB یکسان است.



گزینه ۴ پاسخ صحیح است. دو خط d و d' به فاصله‌ی ۴ سانتی‌متر را رسم می‌کنیم. خط d_1 به فاصله‌ی ۴ واحد از خط d و موازی با آن، یکی از جواب‌ها است. چون فاصله‌اش تا d' برابر ۸ خواهد بود. به طور مشابه خط d_4 هم یکی از جواب‌هاست. خط d_2 به فاصله‌ی $\frac{4}{3}$ از d و $\frac{8}{3}$ از d' ، سومین خط موردنظر است و به طور مشابه خط d_3 چهارمین خط است که جواب مسئله است.

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. پاره‌خط AB به طول ۸ سانتی‌متر را رسم می‌کنیم، وسط آن را O می‌نامیم. مکان هندسی نقاطی از فضا که از O به فاصله‌ی ۳ سانتی‌متر باشند، کره‌ای است به مرکز O به شعاع ۳ سانتی‌متر. حال مکان هندسی نقاطی از فضا که از دو سر پاره‌خط AB به فاصله‌ی ۶ سانتی‌متر باشند، می‌یابیم و با کره قطع می‌دهیم. مکان هندسی نقاطی از فضا که از دو سر یک پاره‌خط به یک فاصله باشند، صفحه‌ی عمودمنصف پاره‌خط است، اما اگر این فاصله معین باشد، دایره‌ی به مرکز O و منطبق بر این صفحه می‌باشد. شعاع دایره را حساب می‌کنیم:

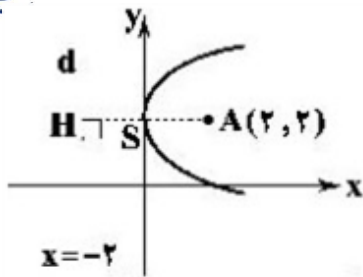


$$r^2 = 6^2 - 4^2 = 20 \Rightarrow r = 2\sqrt{5}$$

پاسخ سؤال، محل برخورد دایره و کره است که تهی می‌باشد.



۶۵



گزینه ۲ پاسخ صحیح است. اگر خط d و نقطه A خارج d ثابت باشد، مکان هندسی مراکز دایره‌ای که از A عبور می‌کنند و بر d مماس‌اند، یک سهمی است که خط d خط هادی آن و نقطه A کانون آن می‌باشد، پس در این مسئله $x = -2$ خط هادی و $A(2, 2)$ کانون سهمی می‌باشد. وسط A و H رأس سهمی است: $S(0, 2)$ فاصله A از S برابر a خواهد بود که $a = 2$ است. حال معادله سهمی را می‌نویسیم:

$$(y - k)^2 = 4a(x - h)$$

$$(y - 2)^2 = 8(x - 0) \Rightarrow y^2 - 4y - 8x + 4 = 0$$

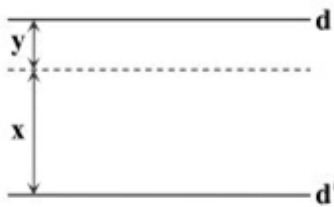
۶۶

گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

نکته: مکان هندسی نقاطی از صفحه که از خط d به فاصله r هستند، دو خط موازی d در دو طرف آن و به فاصله r از آن است.

با توجه به اطلاعات مسئله، شکل روبه‌رو قابل رسم است:

با توجه به شکل داریم:



$$\begin{cases} x + y = 7 \\ x - y = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 5 \\ y = 2 \end{cases}$$

پس این نقاط روی خطهایی قرار دارند که به فاصله‌های ۵ و ۲ از d و d' هستند. یعنی مکان هندسی موردنظر دو خط موازی d و d' است.



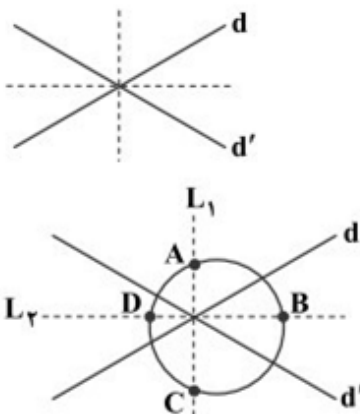
دقت کنید که اگر خطوط موردنظر بین d و d' نباشد، قدر مطلق تفاضل فاصله‌ها برابر ۳ نمی‌شود. به همین دلیل آن‌ها را بین دو خط در نظر گرفتیم.

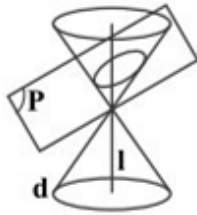
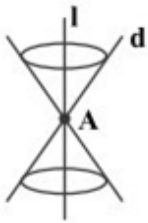
۶۷

گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

نکته: مکان هندسی نقاطی از صفحه که از دو خط متقاطع d و d' به یک فاصله‌اند، نیمسازهای زوایای بین d و d' هستند. این نیمسازها دو خط عمود بر هم هستند.

ابتدا نیمسازهای زوایای بین دو خط متقاطع d و d' (خطوط L_1 و L_2) را رسم می‌کنیم، حداکثر تعداد نقاط برخورد خطوط L_1 و L_2 با دایره C جواب مسئله است. حداکثر تعداد جواب‌ها زمانی ایجاد می‌شود که دایره C هر دو خط L_1 و L_2 را قطع کند، در این صورت ۴ نقطه با ویژگی‌های موردنظر وجود دارد.





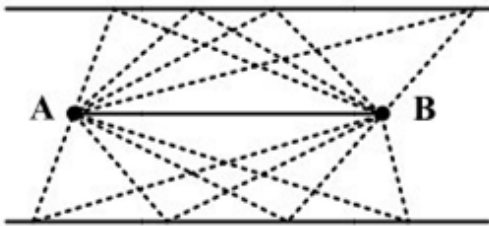
۶۸

گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

نکته: دو خط l و d در نقطه‌ی A متقاطع‌اند (l و d بر هم عمود نیستند).
 سطح حاصل از دوران خط d حول خط l را یک سطح مخروطی می‌نامیم.
 خط d را مولد، خط l را محور و نقطه‌ی A را رأس مخروطی می‌نامند.
 با توجه به شکل مقابل، فصل مشترک صفحه‌ی P با سطح مخروطی در
 حالتی که صفحه‌ی P بر محور l عمود نباشد و بامولد d نیز موازی نباشد و
 تنها یکی از دو نیمه‌ی مخروط را قطع کند، یک بیضی است.

۶۹

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. مکان هندسی این نقاط دو خط موازی با پاره‌خط AB ، با فاصله h از AB است.



۷۰

گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

اگر $M(x, y)$ مرکز این دایره باشد $\frac{|3y - 2x - 36|}{\sqrt{9 + 4}} = 2\sqrt{13}$

$$3y - 2x - 36 = \pm 26 \Rightarrow 3y - 2x = 62, 10$$

پس مکان مطلوب $3y - 2x = 10$ می‌باشد.

۷۱

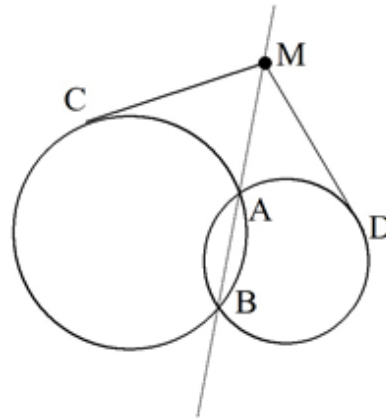
گزینه ۳ پاسخ صحیح است. مکان هندسی اول دو صفحه موازی که در دو طرف صفحه P هستند. مکان دوم یک کره به شعاع ۵ واحد است. فصل مشترک آن‌ها دو دایره مساوی و متمایزند.

۷۲

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. مجموعه نقاطی که همه آن‌ها یک ویژگی مشترک دارند و هر نقطه که این ویژگی را داشته باشد. عضو این جامعه است.



گزینه ۲ پاسخ صحیح است. ۷۳

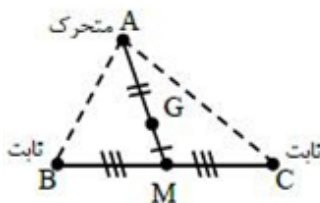


نقطه M در امتداد وتر مشترک دو دایره متقاطع باشد، داریم:

$$MC^2 = MA \cdot MB, \quad MD^2 = MA \cdot MB$$

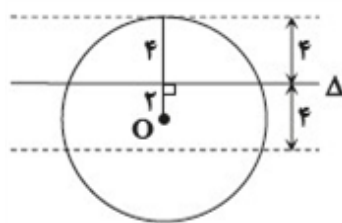
در نتیجه $MC = MD$ است، پس مکان دو نیم خط در بیرون دایره ها است.

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. ۷۴



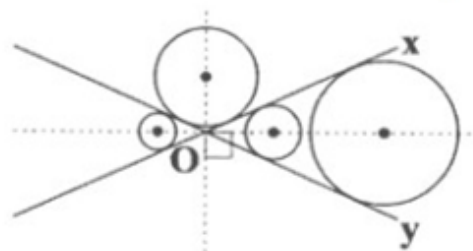
$$\begin{cases} GM = \frac{1}{3}AM \rightarrow \text{ثابت } GM \\ A \rightarrow \text{متغیر} \end{cases} \Rightarrow \frac{1}{3}AM \text{ فاصله } G \text{ به } M$$

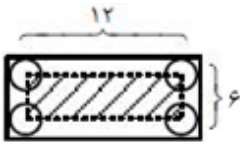
مکان G دایره $(M, \frac{1}{3}AM)$



گزینه ۲ پاسخ صحیح است. مکان هندسی نقاطی که از خط Δ به فاصله ی ۴ باشند، دو خط موازی Δ و به فاصله ی ۴ از آن است. مطابق شکل یکی از این دو خط بر دایره مماس است و دیگری دایره را در دو نقطه قطع می کند، پس سه نقطه با این ویژگی وجود دارد. ۷۵

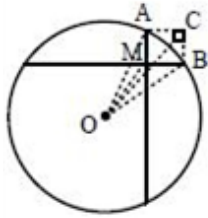
گزینه ی ۲ پاسخ صحیح است. در شکل زیر، دایره ها بر دو خط Ox و Oy یا امتداد آن ها مماس هستند و مرکز این دایره ها روی دو خط نیم سازه زاویه قرار دارند. ۷۶





گزینه ۱ پاسخ صحیح است. مطابق فرض شکل مقابل ایجاد می شود.
سطح مورد نظر مستطیلی به ابعاد 11×5 است که
قطر آن $\sqrt{121 + 25}$ یا $\sqrt{146}$ خواهد بود.

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. اگر نقطه ای در صفحه ی مستطیل باشد، آن گاه مجموع مربعات فواصل آن نقطه تا رئوس
مقابل مستطیل برابر است. اکنون با رسم شکل به شرح زیر داریم:

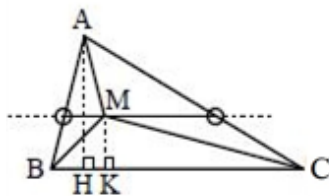


$$OM^2 + OC^2 = OA^2 + OB^2$$

$$\Rightarrow OC^2 = 2R^2 - OM^2 \Rightarrow OC = \sqrt{2R^2 - OM^2}$$

مکان هندسی نقطه ی C وابسته به نقطه ی ثابت O، دایره ای به مرکز O با شعاع $\sqrt{2R^2 - OM^2}$ است.

گزینه ۴ پاسخ صحیح است.



$$\begin{cases} S_{\triangle MBC} = S_{\triangle MAB} + S_{\triangle MAC} \\ S_{\triangle ABC} = S_{\triangle MBC} + S_{\triangle MAC} + S_{\triangle MAB} \end{cases} \Rightarrow 2S_{\triangle MBC} = S_{\triangle ABC}$$

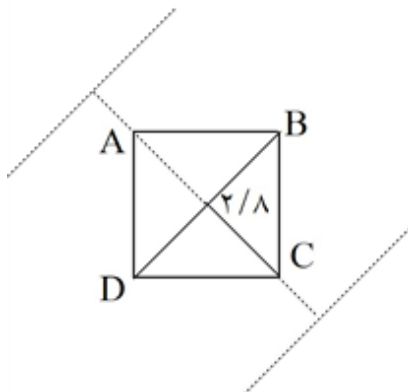
$$\Rightarrow 2\left(\frac{1}{2}BC \times MK\right) = \frac{1}{2}BC \times AH \Rightarrow MK = \frac{1}{2}AH$$

نتیجه، قسمتی از خطی که از M به موازات BC و به فاصله ی $\frac{1}{2}AH$ از آن رسم می شود، مکان هندسی مطلوب است.

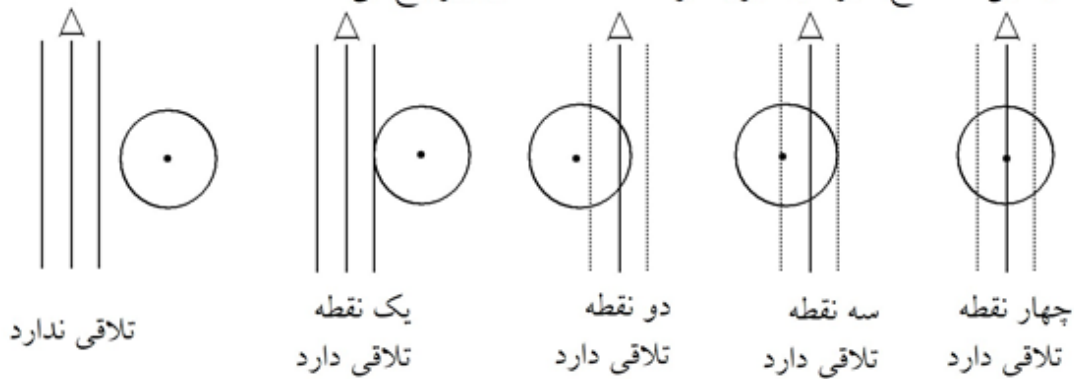
گزینه ۴ پاسخ صحیح است. مکان هندسی نقاطی از صفحه، که به فاصله $\frac{3}{14}\pi$ از قطر (خط) BD هستند، برابر دو خط موازی BD و به فاصله $\frac{3}{14}\pi$ از آن می باشند. اما از طرفی قطر مربع به ضلع ۴ برابر $4\sqrt{2}$ است که نصف آن

$$\frac{4\sqrt{2}}{2} \approx \frac{2}{8}$$

بنابراین این دو خط محیط مربع داده شده را قطع نمی کند.



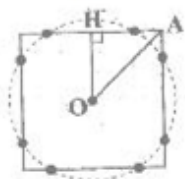
گزینه ۱ پاسخ صحیح است. مکان هندسی نقاطی که از خط Δ به فاصله ۲ باشد، دو خط به موازات Δ در طرفین آن است با توجه به این که شعاع دایره از ۲ بزرگتر است حالت‌های زیر رخ می‌دهد.



گزینه ۴ پاسخ صحیح است. مکان هندسی نقاطی که از مرکز مربع (O) به فاصله ۵ هستند، دایره‌ای به مرکز O و شعاع ۵ است. با توجه به این که:

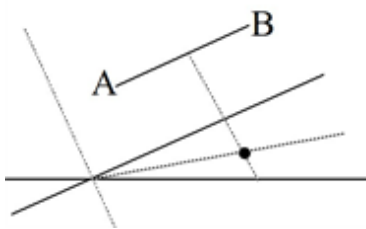
$$OH = 4 \quad (\text{نصف ضلع مربع}) \quad OA = 4\sqrt{2} \quad (\text{نصف قطر مربع}) \quad R = 5 \quad (\text{شعاع دایره})$$

$$\text{داریم: } 4 < R < 4\sqrt{2}$$



بنابراین مطابق شکل، دایره هر ضلع مربع را در دو نقطه و محیط آن را در ۸ نقطه قطع می‌کند.

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. نقطه‌ی مطلوب محل تلاقی نیم‌سازهای داخلی و خارجی مثلث است که از سه خط مفروض حاصل شود این نیم‌سازها در ۴ نقطه متمایز متقاطع هستند پس ۴ نقطه وجود دارد.



گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

نقطه‌ی مورد نظر در محل تلاقی نیم‌ساز زاویه‌ی بین دو خط، و عمود منصف پاره‌خط خط AB است اگر AB عمود بر یکی از نیم‌سازهای d و d' باشد جواب منحصر به فرد است.

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. پاسخ محل برخورد عمود منصف PQ و دایره است که حداکثر ۲ نقطه می‌باشد. (دقت کنید قطر دایره نیست پاره‌خطی است که از مرکز دایره عبور کرده است.)

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. مرکز دایره‌های گذرنده از دو رأس، از دو رأس به یک فاصله‌اند پس روی عمود منصف ضلع آن دو رأس قرار دارند.



گزینه ۳ پاسخ صحیح است. فرض کنید $OA = \frac{1}{3}$ ، می دانیم:

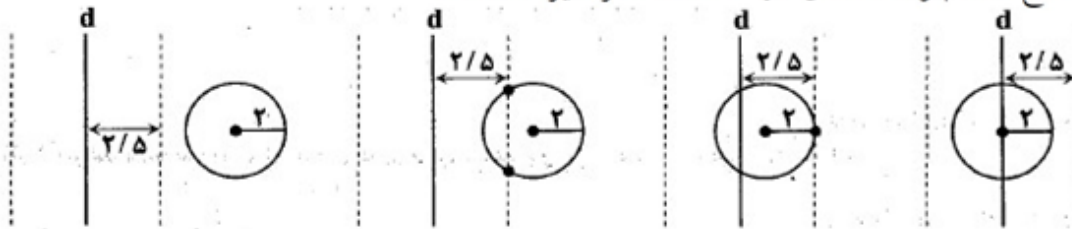
$$\triangle OAC : AC^2 = \frac{1}{9} + QC^2 - \frac{2}{3} \times OC \times \cos \hat{O}_1$$

$$\triangle OBC : BC^2 = \frac{4}{9} + OC^2 - \frac{2}{3} \times OC \times \cos \hat{O}_2$$

$\Rightarrow 2AC^2 + BC^2 = \frac{6}{9} + 2OC^2 \Rightarrow 9 = \frac{2}{3} + 2OC^2 \Rightarrow OC^2 = \frac{25}{9}, OC = \frac{5}{3}$

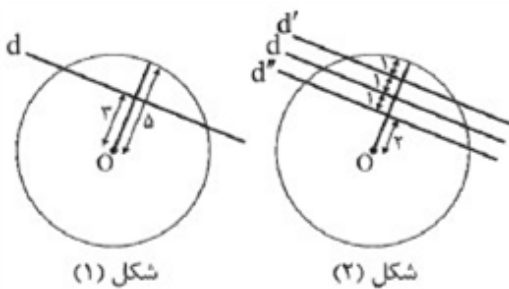
در نتیجه مکان هندسی مورد نظر دایره‌ای به مرکز O با شعاع $\frac{5}{3}$ می‌باشد.

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. نقاطی که از O به فاصله ۲ هستند، دایره‌ای به مرکز O و شعاع ۲ می‌باشند و نقاطی که از خط d به فاصله $\frac{2}{5}$ هستند، دو خط موازی با d و به فاصله $\frac{2}{5}$ از آن می‌باشند. نقاط برخورد این دایره با دو خط موازی جواب مسئله هستند که تعداد آن‌ها حداکثر ۲ نقطه می‌باشد. توجه داشته باشید که این دایره نمی‌تواند هر دو خط موازی را قطع کند، چون فاصله‌ی دو خط $\frac{5}{3}$ اما قطر دایره ۴ است.

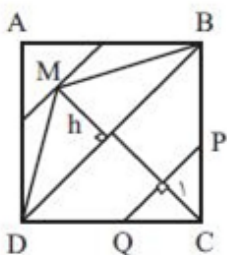


گزینه ۳ پاسخ صحیح است. وضعیت خط d و دایره به صورت شکل (۱) است.

مکان هندسی نقاطی که از خط d به فاصله ۱ باشند، دو خط موازی با d هستند. چون شعاع دایره برابر ۵ است این دو خط (d', d'') دایره را مطابق شکل (۲) قطع می‌کنند، پس ۴ نقطه روی دایره وجود دارند که از خط d به فاصله ۱ باشند.



گزینه ۱ پاسخ صحیح است.



$$S_{MBD} = 20 \Rightarrow \frac{1}{2} h \cdot BD = 20$$

اگر فاصله‌ی M از BD کم‌تر یا مساوی ۴ باشد، شرایط مسأله تحقق پیدا می‌کند. پس سطح خواسته شده، سطح مربع منهای دو مثلث کناری است که ارتفاع این مثلث ۱ واحد است.

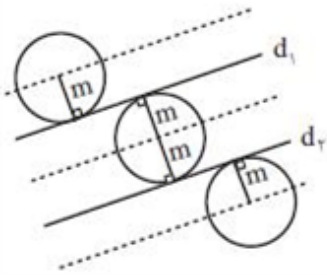
$$S_{CPQ} = \frac{1 \times 2}{2} = 1$$

$$\text{مساحت مربع} - 2 (\text{مساحت } CQP) = 50 - 2 = 48$$

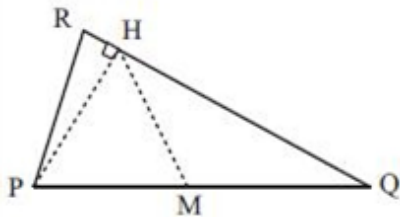
$$\text{نسبت مساحت ها} = \frac{48}{50} = \frac{24}{25}$$



گزینه‌ی ۳ پاسخ صحیح است. سه خط نشان داده شده که موازی d_1 و d_2 هستند، جواب خواهند بود. ۹۱



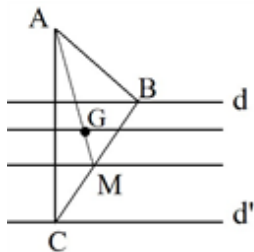
گزینه‌ی ۲ پاسخ صحیح است. نیمساز مکان هندسی نقاطی است که از دو ضلع زاویه به یک فاصله‌اند. البته پاسخ کامل، چهار نیمساز زاویه‌های بین دو خط است که تشکیل دو خط عمود بر هم می‌دهند. ۹۲



گزینه‌ی ۴ پاسخ صحیح است. در مثلث قائم‌الزاویه‌ی PHQ، نقطه‌ی H ۹۳

همواره از وسط PQ به فاصله‌ی معین $MH = \frac{1}{2}PQ$ قرار دارد. پس مکان

هندسی H دایره‌ای به مرکز M و شعاع $\frac{1}{2}PQ$ است.

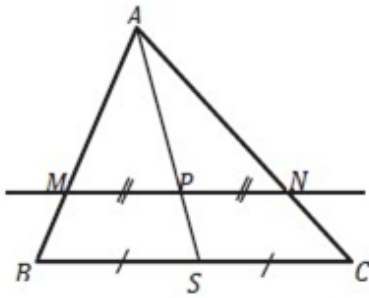


گزینه‌ی ۳ پاسخ صحیح است. ۹۴

مکان هندسی M (وسط BC) خطی است موازی d و «ب».

چون همواره $\frac{AG}{GM} = \frac{2}{1}$ ، پس مکان G نیز خطی موازی d است.





می توان ثابت کرد که مکان هندسی نقطه‌ی P، میله‌ی ضلع BC از مثلث ABC مفروض است:

$$\left. \begin{aligned} \frac{MP}{BS} &= \frac{AP}{AS} \\ \frac{PN}{SC} &= \frac{AP}{AS} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{MP}{BS} = \frac{PN}{SC} \left. \begin{aligned} BS &= SC \end{aligned} \right\} \Rightarrow MP = PN$$

توجه: اگر امتداد اضلاع مثلث هم جزو سؤال بود، امتداد میانه‌ی AS هم قابل قبول بود و در آن صورت گزینه‌ی ۱ می توانست صحیح باشد.

گزینه‌ی ۱ پاسخ صحیح است. نقطه‌ی A روی عمود منصف FS و همین‌طور روی خط L' موازی L به فاصله‌ی ۱۰ قرار دارد: **۹۶**

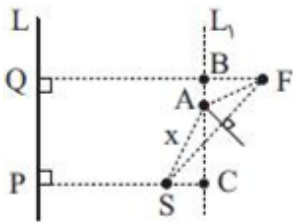
$$(AB = y, AS = x)$$

$$x^2 = AC^2 + SC^2 = (6 - y)^2 + 4 \quad (\triangle ASC)$$

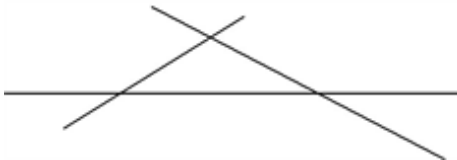
$$x^2 = AB^2 + BF^2 = y^2 + 36 \quad (\triangle ABF)$$

$$\Rightarrow (6 - y)^2 + 4 = y^2 + 36 \Rightarrow y = \frac{1}{3}$$

$$x^2 = y^2 + 36 \Rightarrow x = \sqrt{\frac{1}{9} + 36} \Rightarrow x = \frac{5\sqrt{13}}{3}$$

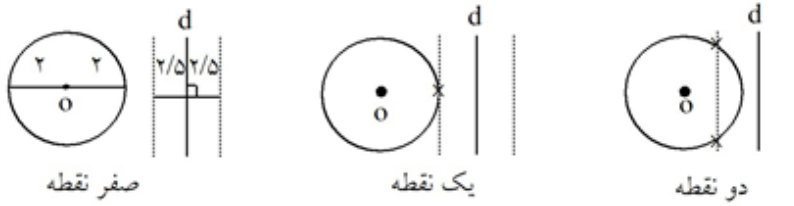


گزینه‌ی ۴ پاسخ صحیح است. سه خط مفروض مثلثی تشکیل می دهند محل تلاقی نیمساز داخلی و دو نیمساز خارجی از هر سه خط به یک فاصله است (خاصیت اصلی نیمساز زاویه است). پس ۴ نقطه. **۹۷**



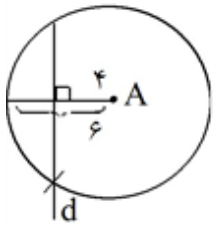
۹۸

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. نقاطی که از یک نقطه (o) به یک فاصله باشند (۲ سانتی متر) دایره‌ای به مرکز O و شعاع ۲ سانتی متر است. نقاطی که از خط d به فاصله ۲/۵ سانتی متر باشد دو خط موازی با d و به فاصله ۲/۵ سانتی متر از آن باشند. محل برخورد این دایره و دو خط موازی به صورت زیر است:
پس حداکثر دو نقطه می‌شود.



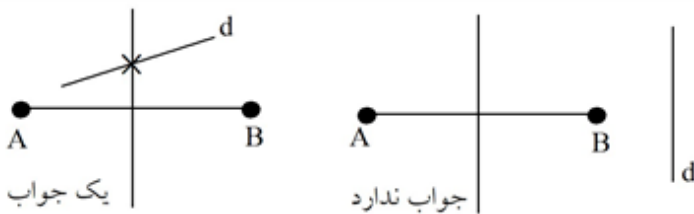
۹۹

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. نقاطی که از نقطه‌ی A به فاصله‌ی ۶ هستند روی یک دایره به مرکز A و شعاع ۶ قرار دارند. یعنی تست از ما می‌خواهد که ببینیم چند نقطه روی خط d وجود دارد که از نقطه‌ی A به فاصله‌ی ۶cm باشد یعنی محل برخورد دایره و خط d. این دایره خط d را قطع می‌کند، چون فاصله‌ی نقطه A از خط d کم‌تر از شعاع دایره است پس در دو نقطه قطع می‌کند.



۱۰۰

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. مکان هندسی نقاطی که از دو نقطه‌ی A و B به یک فاصله هستند عمود منصف AB است. حالت‌های زیر می‌تواند جواب این تست باشد.



۱	۱	۲	۳	۴
۲	۱	۲	۳	۴
۳	۱	۲	۳	۴
۴	۱	۲	۳	۴
۵	۱	۲	۳	۴
۶	۱	۲	۳	۴
۷	۱	۲	۳	۴
۸	۱	۲	۳	۴
۹	۱	۲	۳	۴
۱۰	۱	۲	۳	۴
۱۱	۱	۲	۳	۴
۱۲	۱	۲	۳	۴
۱۳	۱	۲	۳	۴
۱۴	۱	۲	۳	۴
۱۵	۱	۲	۳	۴
۱۶	۱	۲	۳	۴
۱۷	۱	۲	۳	۴
۱۸	۱	۲	۳	۴
۱۹	۱	۲	۳	۴
۲۰	۱	۲	۳	۴
۲۱	۱	۲	۳	۴
۲۲	۱	۲	۳	۴
۲۳	۱	۲	۳	۴
۲۴	۱	۲	۳	۴
۲۵	۱	۲	۳	۴
۲۶	۱	۲	۳	۴
۲۷	۱	۲	۳	۴
۲۸	۱	۲	۳	۴
۲۹	۱	۲	۳	۴
۳۰	۱	۲	۳	۴
۳۱	۱	۲	۳	۴
۳۲	۱	۲	۳	۴

۳۳	۱	۲	۳	۴
۳۴	۱	۲	۳	۴
۳۵	۱	۲	۳	۴
۳۶	۱	۲	۳	۴
۳۷	۱	۲	۳	۴
۳۸	۱	۲	۳	۴
۳۹	۱	۲	۳	۴
۴۰	۱	۲	۳	۴
۴۱	۱	۲	۳	۴
۴۲	۱	۲	۳	۴
۴۳	۱	۲	۳	۴
۴۴	۱	۲	۳	۴
۴۵	۱	۲	۳	۴
۴۶	۱	۲	۳	۴
۴۷	۱	۲	۳	۴
۴۸	۱	۲	۳	۴
۴۹	۱	۲	۳	۴
۵۰	۱	۲	۳	۴
۵۱	۱	۲	۳	۴
۵۲	۱	۲	۳	۴
۵۳	۱	۲	۳	۴
۵۴	۱	۲	۳	۴
۵۵	۱	۲	۳	۴
۵۶	۱	۲	۳	۴
۵۷	۱	۲	۳	۴
۵۸	۱	۲	۳	۴
۵۹	۱	۲	۳	۴
۶۰	۱	۲	۳	۴
۶۱	۱	۲	۳	۴
۶۲	۱	۲	۳	۴
۶۳	۱	۲	۳	۴
۶۴	۱	۲	۳	۴

۶۵	۱	۲	۳	۴
۶۶	۱	۲	۳	۴
۶۷	۱	۲	۳	۴
۶۸	۱	۲	۳	۴
۶۹	۱	۲	۳	۴
۷۰	۱	۲	۳	۴
۷۱	۱	۲	۳	۴
۷۲	۱	۲	۳	۴
۷۳	۱	۲	۳	۴
۷۴	۱	۲	۳	۴
۷۵	۱	۲	۳	۴
۷۶	۱	۲	۳	۴
۷۷	۱	۲	۳	۴
۷۸	۱	۲	۳	۴
۷۹	۱	۲	۳	۴
۸۰	۱	۲	۳	۴
۸۱	۱	۲	۳	۴
۸۲	۱	۲	۳	۴
۸۳	۱	۲	۳	۴
۸۴	۱	۲	۳	۴
۸۵	۱	۲	۳	۴
۸۶	۱	۲	۳	۴
۸۷	۱	۲	۳	۴
۸۸	۱	۲	۳	۴
۸۹	۱	۲	۳	۴
۹۰	۱	۲	۳	۴
۹۱	۱	۲	۳	۴
۹۲	۱	۲	۳	۴
۹۳	۱	۲	۳	۴
۹۴	۱	۲	۳	۴
۹۵	۱	۲	۳	۴
۹۶	۱	۲	۳	۴

۹۷	۱	۲	۳	۴
۹۸	۱	۲	۳	۴
۹۹	۱	۲	۳	۴
۱۰۰	۱	۲	۳	۴

