

WWW.AKOEDU.IR

اولین و باکیفیت ترین

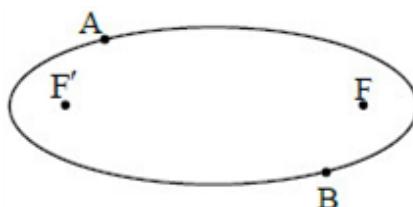
درا
ایران آکادمی کنکور



جهت دریافت برنامه‌ی شخصی سازی شده یک هفته ای
رایگان کلیک کنید و یا به شماره‌ی ۰۹۰۲۵۶۴۶۲۳۴۰ عدد ۱
را ارسال کنید.

۳۰۰ سوال تشریحی هندسه دوازدهم نیمسال اول

۱ معادله سهمی را بنویسید که (۱) A رأس و (۲) F کانون آن باشد، و سپس معادله خط هادی آن را بیابید.



۲ دو نقطه A و B مطابق شکل روی بیضی و نقاط F و F' کانون‌های بیضی‌اند. اگر $AF' = BF$ باشد ثابت کنید دو پاره‌خط AF و BF' موازی‌اند.

۳ نقطه A و خط d در صفحه مفروض‌اند. نقطه‌ای را بیابید که از A به فاصله ۲ سانتی‌متر و از خط d به فاصله ۳ سانتی‌متر باشد. بحث کنید.

۴ اگر $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ -1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ و I_3 ماتریس همانی 3×3 باشد، حاصل عبارت زیر را به دست آورید.

$$|A \times B| + |2I_3|$$

۵ اگر $A = [a_{ij}]$ یک ماتریس 3×3 با درایه‌های a_{12}, a_{31}, a_{33} را باشد، درایه‌های a_{ij} را با شرط $a_{ij} = \begin{cases} i-j & i < j \\ i+j & i = j \\ i > j \end{cases}$ به دست آورید.

۶ اگر معادله دایره به شکل $y^2 + (x+1)^2 = 4$ باشد:

الف) مختصات مرکز دایره و اندازه شعاع دایره را بنویسید.

ب) مختصات تقاطع دایره با محور X‌ها را پیدا کنید.

۷ عبارت مناسب را انتخاب کنید.

اگر خروج از مرکز بیضی به صفر نزدیک شود، شکل بیضی به شکل نزدیک خواهد شد. (پاره‌خط - دایره - نقطه)



عبارت مناسب را انتخاب کنید.

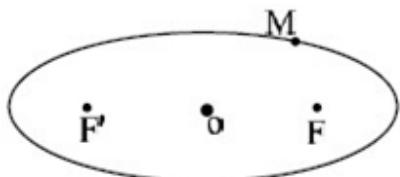
اگر صفحه‌ای بر محور سطح مخروطی عمود نباشد و در هیچ حالتی با مولد سطح مخروطی موازی نشود و از رأس نگذرد، شکل حاصل از تقاطع صفحه با سطح مخروطی خواهد بود. (بیضی - سهمی - هذلولی)

معادله دایره‌ای را بنویسید که مرکز آن $(1, 0)$ باشد و با دایره به معادله $x^2 + y^2 - 8x + 4y + 16 = 0$ مماس داخل باشد.

دستگاه معادلات $\begin{cases} x - 2y = 3 \\ 2x + 6y = -4 \end{cases}$ را با استفاده از A^{-1} حل کنید.

به ازای چه مقداری از m دستگاه معادله $\begin{cases} x - 2y = 3 \\ mx + 6y = -4 \end{cases}$ فاقد جواب است؟

معادله‌ی سهمی را بنویسید که $A(4, 3)$ رأس و $y = 3$ معادله خط‌هادی آن باشد.



در شکل مقابل نقطه M روی بیضی و کانون‌های F و F' مشخص شده‌اند. خط d را به گونه‌ای رسم کنید که در نقطه M بر بیضی مماس باشد و سپس از نقطه‌ی F' خط موازی با MF رسم کنید. تا خط d را در نقطه‌ای مانند N قطع کنند. ثابت کنید: $NF' = MF'$.

معادله‌ی دایره‌ای را بنویسید که مرکز آن بوده و بر خط به معادله $4x + 3y + 5 = 0$ مماس باشد.

اگر $B = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ باشد، حاصل $|B| + |A|$ را بیابید.

معادله‌ی ماتریسی $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix} = 0$ را حل کنید.

جاهای خالی را با کلمات مناسب پر کنید.

الف) در ماتریس قطری $A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ m & 1 \end{bmatrix}$ مقدار m برابر است.

ب) اگر A یک ماتریس 3×3 و $5 = |A|$ باشد آن‌گاه $\begin{vmatrix} 1 \\ 2 \end{vmatrix} = |A|$ برابر است.

پ) اگر طول قطر بزرگ بیضی دو برابر فاصله کانونی آن باشد، خروج از مرکز بیضی برابر است.
ت) سهمی مکان هندسی نقاطی از یک صفحه است که از یک خط ثابت در آن صفحه و از یک ثابت غیرواقع بر آن خط در آن صفحه به یک فاصله باشند.

معادله‌ی دایره‌ای بنویسید که مرکز آن $O(2, 5)$ باشد و بر خط گذرنده از $A(1, 1)$ و $B(-1, 7)$ مماس باشد.

در دایره‌ی $x^2 + y^2 - 2x + 4y - 4 = 0$ مختصات مرکز و شعاع دایره را حساب کنید.



۲۰ در دایره‌ی $x^2 + y^2 + 2x - 6y - 15 = 0$ ، معادله‌ی خط عمود بر دایره و گذرنده از $A(-2, 7)$ را حساب کنید.

۲۰

۲۱ کانون‌های یک بیضی نقاط $(1, 1)$ و $(-5, 1)$ است.

۲۱

الف) فاصله‌ی کانونی و مختصات مرکز بیضی و معادله قطر بزرگ بیضی را بنویسید.

ب) اگر $a = 6$ باشد، اندازه‌ی قطر کوچک و خروج از مرکز بیضی را پیدا کنید.

۲۲ سهمی $4x^2 - 4y^2 = 4$ مفروض است. به مرکز کانون سهمی و به شعاع ۳ دایره‌ای رسم می‌کنیم، مختصات نقاط برخورد دایره و سهمی را بباید.

۲۲

۲۳ الف) حدود m را طوری بباید که دستگاه معادلات $\begin{cases} 2mx + 3y = 1 \\ 2x - y = 3 \end{cases}$ دارای جواب منحصر به فرد باشد.

۲۳

ب) جواب دستگاه مذکور را به ازای $m = 2$ با استفاده از ماتریس وارون محاسبه کنید.

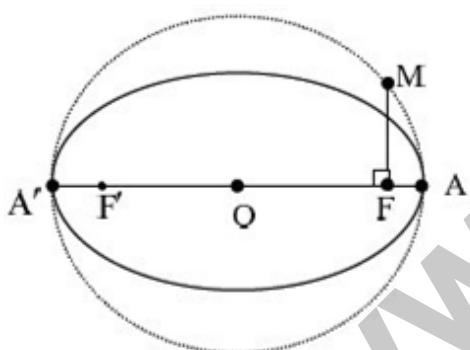
۲۴ الف) مختصات رأس، کانون و معادله خط هادی سهمی $x^2 - 4y + 8x = 0$ را به دست آورید.

۲۴

ب) نمودار سهمی را با استفاده از نقاط کمکی رسم کنید.

۲۵ اگر در یک بیضی طول قطر کوچک ۲۴ و فاصله کانون تا مرکز آن برابر ۵ باشد، خروج از مرکز بیضی را به دست آورید.

۲۵



۲۶ قطر دایره C مانند شکل، قطر بزرگ بیضی است و از کانون F عمودی بر AA' رسم کرده‌ایم تا دایره را در نقطه‌ای مانند M قطع کند. ثابت کنید MF با نصف قطر کوچک بیضی برابر است.

۲۶

۲۷ معادله دایره‌ای را بنویسید که مرکز آن بوده و روی خط $2x + y = -1$ وتری به طول ۴ ایجاد کند.

۲۷

۲۸ نقاط A, B, C و D در صفحه مفروض‌اند، نقطه‌ای در این صفحه بباید که از A و B به یک فاصله واز C و D نیز به یک فاصله باشد (بحث کنید).

۲۸

۲۹ در تساوی ماتریسی $\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix}$ مقدار x را بباید.

۲۹

۳۰ الف) اگر $A = \begin{bmatrix} |A| & 8 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$ در این صورت حاصل $|A|$ را بباید.

۳۰

ب) ماتریس وارون A را حساب کنید.

۳۱

در حالتی که صفحه‌ی P بر محور سطح مخروطی (I) عمود نباشد و با مولد آن (d) نیز موازی نباشد و تنها یکی از دو نیمه مخروط را قطع کند، فصل مشترک حاصل یک بیضی خواهد بود.

جای خالی را با عبارت مناسب پر کنید. ۳۲

مکان هندسی، مجموعه‌ی نقاطی از صفحه (یا فضا) است که همه‌ی آنها یک داشته باشند و همچنین هر نقطه که آن ویژگی را داشته باشد عضو این مجموعه باشد.

جای خالی را با عبارت مناسب پر کنید. ۳۳

$$\text{اگر } \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} = A \text{ باشد، مقدار } |A| \text{ برابر است با}$$

۳۴

درستی و نادرستی عبارت زیر را مشخص کنید.

در حالتی که صفحه‌ی P بر محور سطح مخروطی (I) عمود باشد و از رأس آن عبور نکند، فصل مشترک حاصل یک دایره خواهد بود.

۳۵

معادله دایره‌ای بنویسید که مرکز آن محل برخورد دو خط $3x + y = 6$ و $2x - y = 3$ باشد و بر نیمساز ربع اول و سوم مماس باشد.

۳۶

دو دایره‌ی $x^2 + y^2 - 4x - 8y + 18 = 0$ و $x^2 + y^2 - 2x - 10y + 18 = 0$ نسبت به هم چه وضعیتی دارند؟

۳۷

دو دایره‌ی $x^2 + y^2 + 6x - 2y + 8 = 0$ و $x^2 + y^2 - 2x - 10y + 18 = 0$ نسبت به هم چه وضعیتی دارند؟

۳۸

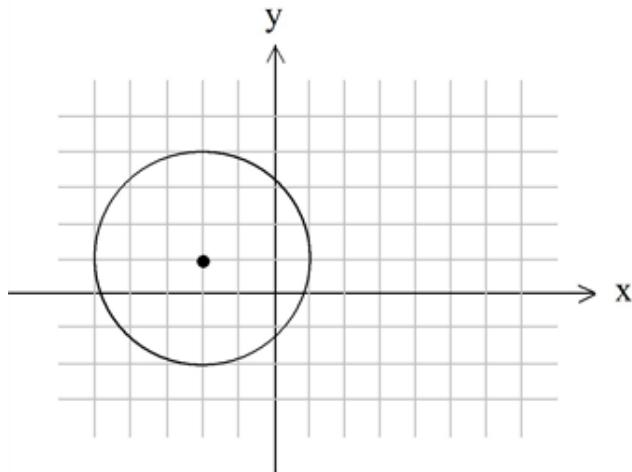
اگر خط $2x + y = 1$ بر دایره به مرکز O(-1, 7) مماس باشد، معادله دایره را بنویسید.

۳۹

اگر خط گذرنده از A(1, 2) و B(2, 1) بر دایره به مرکز O(-1, 2) مماس باشد، معادله دایره را بنویسید.

۴۰

معادله‌ی دایره‌ای بنویسید که مرکز آن O(1, -2) و بر خط $3x - 4y + 9 = 0$ مماس باشد.



اگر خط $y = 2x + a$ بر دایره‌ی $x^2 + y^2 - 4x - 2y = 0$ مماس باشد، مقدار a را حساب کنید.

۴۲

دو دایره‌ی $x^2 + y^2 + 2x - 8y + v = 0$ و $x^2 + y^2 - 2x + 4y - 15 = 0$ نسبت به هم چه وضعیتی دارند؟

۴۳

دو دایره‌ی $x^2 + y^2 - 4x - 1 = 0$ و $x^2 + y^2 - 2x + 4y - 15 = 0$ چه وضعیتی نسبت به یکدیگر دارند؟

۴۴

دو دایره‌ی $x^2 + y^2 + 4x - 2y - 13 = 0$ و $x^2 + y^2 - 10x - 4y + 21 = 0$ چه وضعیتی نسبت به هم دارند؟

۴۵

در دایره‌ی $(a - 3)x^2 + y^2 + 2x - ay + 1 = 0$ مقدار a را حساب کنید.

۴۶

ب) مختصات مرکز دایره را حساب کنید.

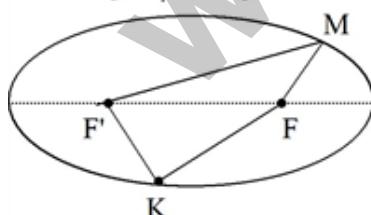
ج) شعاع دایره را حساب کنید.

مرکز یک بیضی $O(-3, 2)$ و این بیضی بر محورهای مختصات مماس است. خروج از مرکز بیضی را حساب کنید.

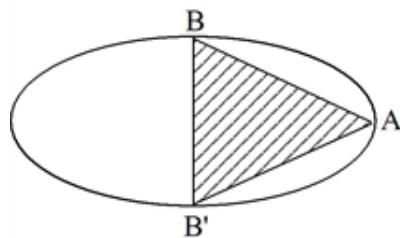
۴۷

در بیضی زیر اگر فاصله کانونی ۶ و طول قطر کوچک آن ۴ باشد، محیط چهارضلعی $FMF'K$ را حساب کنید.

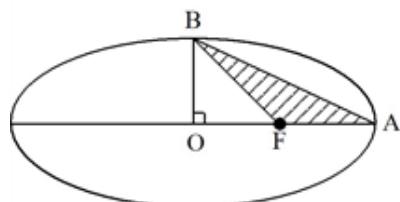
۴۸



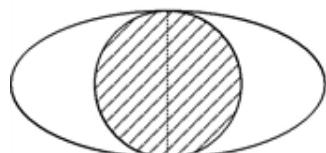
در بیضی زیر اگر خروج از مرکز بیضی $\frac{3}{5}$ و فاصله کانونی ۱۲ باشد، مساحت مثلث هاشور زده شده را حساب کنید.



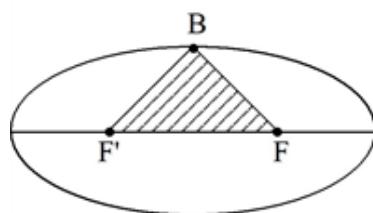
در بیضی زیر اگر طول قطرهای آن 10 و $4\sqrt{2}$ باشد، مساحت مثلث هاشور زده شده را حساب کنید. ۵۰



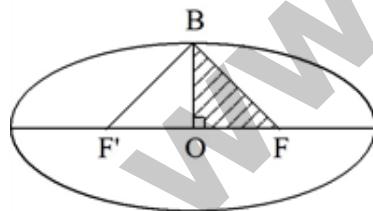
در بیضی زیر اگر خروج از مرکز بیضی $\frac{1}{3}$ و فاصله کانونی ۴ باشد، مساحت دایره هاشور زده شده را حساب کنید. ۵۱



در بیضی زیر اگر طول قطرهای آن 12 و $4\sqrt{2}$ باشد، مساحت مثلث هاشور زده شده را حساب کنید. ۵۲



در بیضی زیر اگر طول قطرهای بیضی 8 و 6 باشد مساحت مثلث هاشور زده شده را حساب کنید. ۵۳

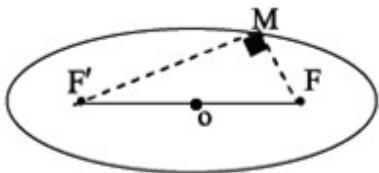


در یک بیضی اگر طول قطر بزرگ برابر 10 و خروج از مرکز بیضی $\frac{3}{5}$ باشد، طول قطر کوچک بیضی را حساب کنید. ۵۴

در بیضی اگر طول قطرها $2\sqrt{3}$ و 4 باشند، فاصله کانونی را حساب کنید. ۵۵

۵۶

سهمی $y^2 = 4x - 4$ مفروض است. به مرکز کانون سهمی و به شعاع ۳ واحد دایره‌ای رسم می‌کنیم، معادله دایره را بنویسید و سپس مختصات نقاط برخورد دایره و سهمی را بیابید.



۵۷

نقطه M روی بیضی به اقطار ۶ و ۱۰ واحد به گونه‌ای قرار دارد که فاصله آن تا مرکز بیضی برابر ۴ واحد است. در صورتی که بدانیم مثلث MFF' قائم‌الزاویه است، طول MF را به دست آورید. (F و F' کانون‌های بیضی هستند).

۵۸

وضعیت خط $x^2 + y^2 - 4x - 4y + 7 = 0$ را نسبت به دایره مشخص کنید.

۵۹

نقاط A، B و C در صفحه مفروض‌اند. نقطه‌ای بیابید که از A و B به یک فاصله و از C به فاصله ۳ سانتی‌متر باشد. (بحث کنید)

۶۰

اگر $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ باشد، ماتریس A^7 را به دست آورید.

۶۱

اگر در یک بیضی داشته باشیم $a = 3$ و $b = 5$ در این صورت اندازه فاصله کانونی این بیضی را محاسبه کنید.

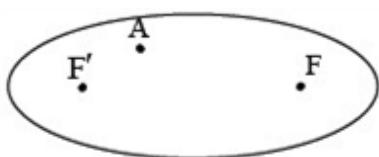
۶۲

اگر نقطه A(2, 3) رأس سهمی و F(7, 0) معادله خط هادی سهمی باشد. (الف) معادله سهمی را بنویسید.

(ب) مختصات کانون سهمی را به دست آورید.

۶۳

بیضی با قطرهای ۶ و ۱۰ مفروض است، خروج از مرکز بیضی را به دست آورید.



۶۴

در شکل مقابل نقطه A داخل بیضی و نقاط F و F' کانون‌های بیضی‌اند. ثابت کنید مجموع فواصل نقطه A از F و F' کوچک‌تر از قطر بزرگ بیضی است.

۶۵

وضعیت خط $x^2 + y^2 - 2x - 2y = 0$ و دایره $x^2 + y^2 = 2$ را نسبت به هم مشخص کنید.

۶۶

معادله‌ی دایره‌ای را بنویسید که نقطه‌ی M(-1, 1) مرکز آن و O(-2, 3) یک نقطه از آن باشد.

۶۷

نقاط A، B و C در صفحه مفروض‌اند. نقطه‌ای بیابید که از A و B به یک فاصله و از نقطه C به فاصله ۳ سانتی‌متر باشد. (بحث کنید).

۶۸

مقدار m را طوری بیابید که ماتریس $A = \begin{bmatrix} m & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ وارون‌پذیر نباشد.

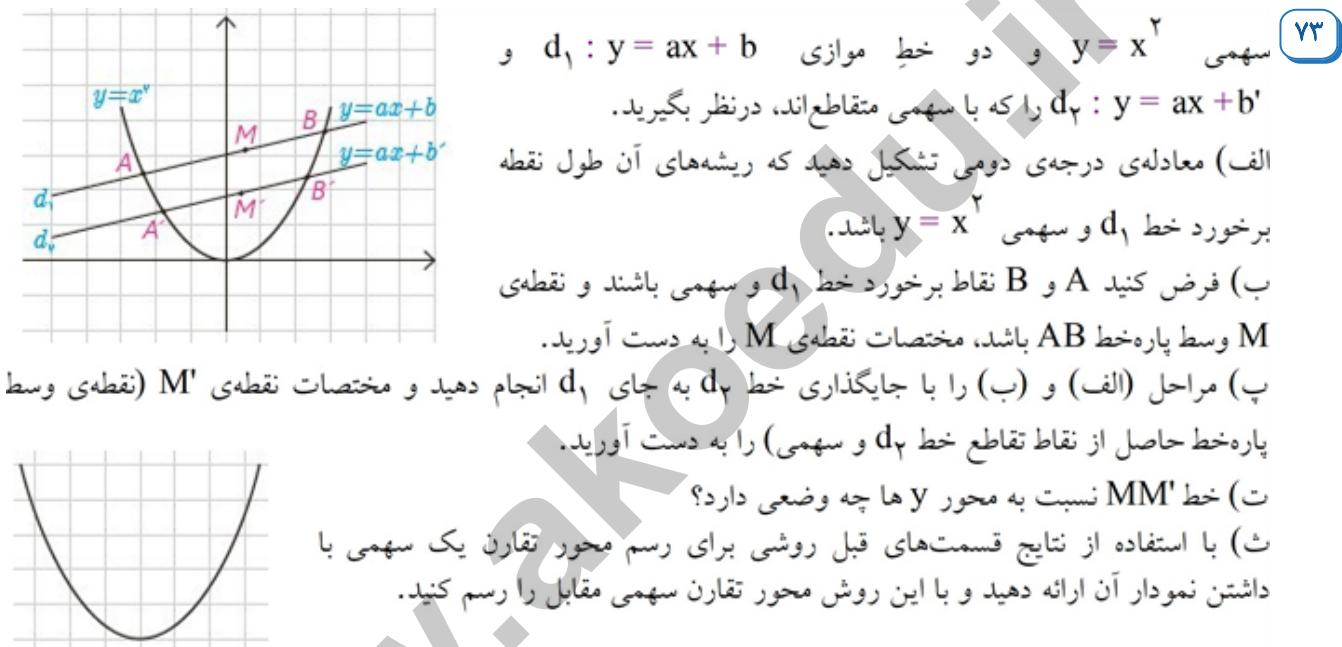
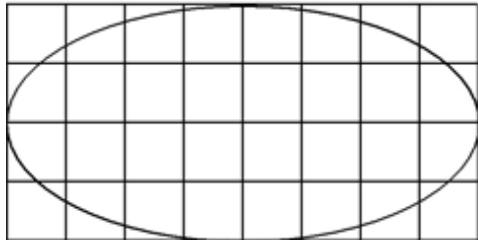
۶۹

اگر $A = \begin{bmatrix} 3 & 2x+y \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} x+y+z \\ 1 \end{bmatrix}$ در این صورت حاصل $(x+y+z) = 0$ را بیابید.

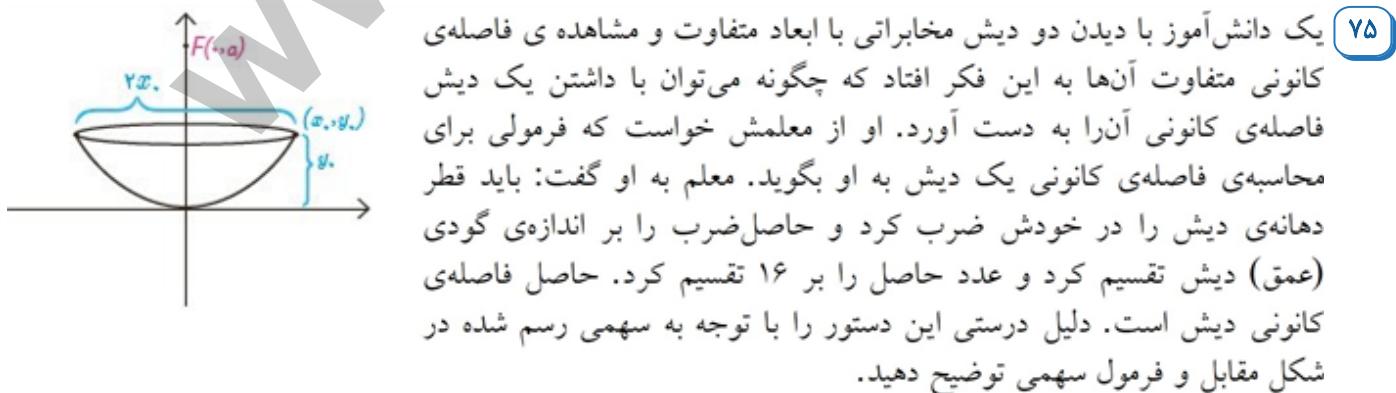
در یک بیضی (۱, ۰), (۰, ۱), (۱, -۲) و (۰, -۱) F' است. مختصات مرکز، کانون و رئوس دیگر بیضی را حساب کنید و سپس بیضی را رسم کنید.

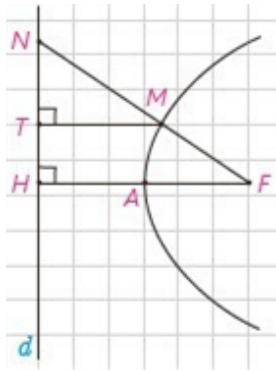
در یک بیضی (۷, ۰), (۰, ۷), (۲, ۰) و (۰, -۲) F' می باشد، مختصات مرکز، کانون و رئوس دیگر بیضی را حساب کنید و سپس بیضی را رسم کنید.

خروج از مرکز بیضی زیر را حساب کنید. ۷۲



فرض کنید از مثلث ABC، اندازه ضلع BC و ارتفاع AH و محیط مثلث، داده شده باشد، با استفاده از خواص بیضی شیوهی رسم این مثلث را توضیح دهید. ۷۴

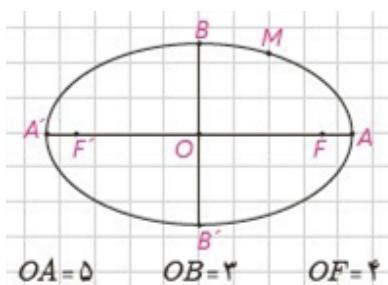
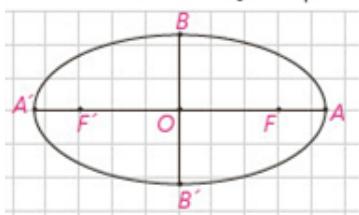




در شکل سهمی با رأس A و کانون F و خط هادی d رسم شده است. از F به نقطه‌ی D لخواه M روی سهمی وصل کرده و امتداد داده‌ایم تا d را در N قطع کند و از نقطه‌ی M را برابر d عمود کردہ‌ایم. ثابت کنید: $\frac{FN}{FA} = \frac{2NT}{TH}$

سهمی $y^2 = 4x$ مفروض است. به مرکز کانون سهمی و به شعاع ۳ واحد دایره‌ای رسم می‌کنیم، مختصات نقاط برخورد دایره و سهمی را بیابید.

در بیضی مقابله طول قطر بزرگ دو برابر طول قطر کوچک است. اندازه‌ی زاویه‌ی $\angle FBF'$ چند درجه است؟

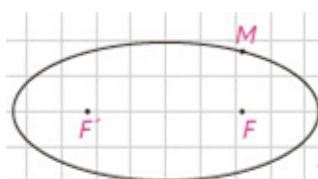


نقطه‌ی M روی بیضی به اقطار ۶ و ۱۰ واحد به گونه‌ای قرار دارد که فاصله‌ی آن تا مرکز بیضی برابر ۴ واحد است.

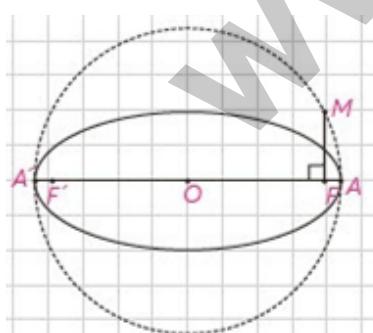
(الف) نشان دهید $OM = OF = OF'$

(ب) نشان دهید مثلث $MF'F$ قائم‌الزاویه است.

(ج) طول‌های MF و MF' را به دست آورید.



در شکل مقابله نقطه‌ی M روی بیضی و کانون‌های F و F' مشخص شده‌اند. خط d را به گونه‌ای رسم کنید که در نقطه‌ی M بر بیضی مماس باشد و سپس از نقطه‌ی F' خطی موازی با MF رسم کنید تا خط d را در نقطه‌ای مانند N قطع کند. ثابت کنید $NF' = MF$



قطر دایره C، مانند شکل، قطر بزرگ بیضی e است و از کانون F عمودی بر AA' رسم کرده‌ایم تا دایره را در نقطه‌ای مانند M قطع کند. ثابت کنید MF با نصف قطر کوچک بیضی برابر است.

دو نقطه‌ی A و B روی یک بیضی و F و F' کانون‌های بیضی‌اند. A به کانون F نزدیک‌تر و B به کانون F' نزدیک‌تر است. اگر $AF' = BF$ باشد، نشان دهید:

(الف) در حالتی که دو پاره خط AF و BF' یک‌دیگر را درون بیضی قطع نکنند، با هم موازی‌اند.

(ب) در حالتی که AF و F' یک‌دیگر را درون بیضی و در نقطه‌ای مانند M قطع کنند، مثلث FMF' متساوی‌الساقین است و M روی قطر کوچک بیضی است.

وضعیت هریک از خطوط و دایره‌های زیر را نسبت به هم مشخص کنید: ۸۳

(الف) $x^2 + y^2 - 4x + 4y + 7 = 0$, $x^2 + y^2 - 4x + 4y + 7 = 0$

(ب) $x + y = 2$, $x^2 + y^2 = 2$

(ج) $x + y = 1$, $x^2 + y^2 - 2x - 2y = 2$

نقاط A(-1, 1), B(1, -1) و C(1, 3) رئوس مثلث ABC هستند. معادله‌ی دایره محیطی مثلث ABC را بنویسید. سپس معادله‌ی مماس بر این دایره را در رأس B به دست آورید. ۸۴

وضعیت هریک از جفت دایره‌های زیر را نسبت به هم مشخص کنید: ۸۵

(الف) $x^2 + y^2 = 4$, $x^2 + y^2 - 2x = 4$

(ب) $x^2 + (y-1)^2 = 1$, $(x-1)^2 + y^2 = 1$

(ج) $x^2 + y^2 = 1$, $x^2 + y^2 - 3\sqrt{2}x - 3\sqrt{2}y + 5 = 0$

(د) $x^2 + y^2 = 1$, $x^2 + y^2 - 6x - 2y + 9 = 0$

وضعیت هریک از نقاط A(-1, -1), B(1, -2) و C(2, 3) را نسبت به دایره D(4, -1) و $x^2 + y^2 - 2x + 4y - 5 = 0$ تعیین کنید. ۸۶

حدود a را طوری به دست آورید که $x^2 + y^2 - 3x + 5y + a = 0$ بتواند معادله‌ی یک دایره باشد. ۸۷

معادله دایره‌ای را بنویسید که:

(الف) O(1, 1) مرکز آن و A(3, 2) نقطه‌ای از آن باشد.

(ب) O(2, 1) مرکز آن بوده و بر خط $x + 4y = 0$ مماس باشد.

(پ) O(-1, 0) مرکز آن بوده و روی خط $x + y = 1$ وتری به طول 2 ایجاد کند.

(ت) خطوط $x + y = 3$ و $x - y = 3$ شامل قطرهایی از آن بوده و خط $2x + 3y = 6$ بر آن مماس باشد.

(ج) از نقاط A(1, 2) و B(3, 0) بگذرد و $x - 2y = 1$ شامل قطربی از آن باشد.

هرگاه دو خط d و l موازی باشند، از دوران d حول l سطحی ایجاد می‌شود که آنرا یک سطح استوانه‌ای می‌نامیم. حال فرض کنید صفحه‌ی P، یک سطح استوانه‌ای را قطع کند. در حالت‌های مختلف درباره‌ی سطح قطع حاصل بحث کنید (چهار حالت). ۸۹

هرگاه صفحه‌ای شامل محور یک سطح مخروطی، آنرا برش دهد، فصل مشترک (قطع) حاصل چه شکل است؟ ۹۰

نقطه‌ی A و خط d در صفحه مفروض‌اند. نقطه‌ای باید که از A به فاصله‌ی ۲ سانتی‌متر و از d به فاصله‌ی ۳ سانتی‌متر باشد (بحث کنید). ۹۱

نقاط A, B, C در صفحه مفروض‌اند. نقطه‌ای باید که از A و B به یک فاصله و از C به فاصله‌ی ۳ سانتی‌متر باشد (بحث کنید). ۹۲

نقاط A, B, C, D در صفحه مفروض‌اند. نقطه‌ای در این صفحه باید که از A و B به یک فاصله و از C و D نیز به یک فاصله باشد (بحث کنید). ۹۳

مکان هندسی هریک از مجموعه نقاط زیر را مشخص کنید: ۹۴

(الف) نقاطی از صفحه که از دو خط متقطع d و d' به یک فاصله‌اند.

(ب) مرکزهای همه‌ی دایره‌هایی در صفحه که بر خط d در نقطه‌ی ثابت A مماس‌اند.

(پ) مرکزهای همه‌ی دایره‌هایی با شعاع ثابت r که بر خط d در صفحه مماس‌اند.

(ت) مرکزهای همه‌ی دایره‌هایی با شعاع ثابت r که بر دایره‌ی C(O, r) در صفحه‌ی این دایره مماس خارجی‌اند.

روی وجود و عدم وجود و تعداد جواب‌های هریک از دستگاه‌های زیر بحث کنید و در صورت وجود، جواب را با استفاده از A^{-1} باید. ۹۵

$$\text{(الف)} \begin{cases} 3x - 5y = -1 \\ 2x + y = 8 \end{cases}$$

$$\text{(ب)} \begin{cases} x + 3y = 5 \\ -2x - 6y = 1 \end{cases}$$

$$\text{(پ)} \begin{cases} -2x + 3y = 2 \\ 4x - 6y = -4 \end{cases}$$

اگر A ماتریسی 3×3 باشد و $|A| = 5$ در این صورت حاصل $|A|A^{-1}$ را باید. ۹۶

الف) ماتریس‌های $(k \in \mathbb{R}) B = \begin{bmatrix} ka & kb & kc \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$ و $A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$ را در نظر بگیرید و $|A|$ و $|B|$ را

از دستور ساروس محاسبه کرده و با هم مقایسه کنید. چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟

ب) قسمت الف را برای دو ماتریس $(k \in \mathbb{R}) B = \begin{bmatrix} ka & kb \\ c & d \end{bmatrix}$ و $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ بررسی کنید.

اگر $\begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$ و $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ ماتریسی 3×3 چون $A^{-1} = \begin{bmatrix} -2 & -3 \\ 5 & -1 \end{bmatrix}$ حاصل عبارت $(2A^{-1} - 3B^{-1})^{-1}$ را باید. ۹۸

ماتریسی 3×3 چون A باید که $|A| = 3$. ۹۹

دترمینان ماتریس $A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ a & b & c \\ d & e & f \end{bmatrix}$ را برحسب سطر دوم باید. چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟ ۱۰۰

اگر $A = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & -3 \\ 3 & -3 & 1 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$ در این صورت $|AB|$ و $|BA|$ را به دست آورید.

۱۰۱

اگر $A = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$ مفروض باشد، حاصل A^3 را به دست آورید. چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟

۱۰۲

اگر A و B ماتریس‌های 3×3 و تعویض پذیر باشند ($A \times B = B \times A$) ثابت کنید.

(الف) $(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$

(ب) $(A - B)(A + B) = A^2 - B^2$

اگر A ماتریسی 3×3 و اسکالر باشد و B ماتریس هم مرتبه‌ی A در این صورت

(الف) برای $A \times B$ و $A \times A$ قوانینی تعریف کنید.

(ب) آیا تساوی $A \times B = B \times A$ برقرار است؟

۱۰۴

اگر $A = \begin{bmatrix} r_1 & \cdot & \cdot \\ \cdot & r_2 & \cdot \\ \cdot & \cdot & r_3 \end{bmatrix}$ ماتریسی قطری باشد و B ماتریسی 3×3 و دلخواه باشد در این صورت ماتریس

۱۰۵

$(A \times B)$ را تشکیل دهید. چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟

اگر $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} 4 & a \\ b & -1 \end{bmatrix}$ ماتریسی $A \times B$ حاصل ضرب مقادیر a و b را طوری به دست آورید که حاصل ضرب A ماتریسی قطری باشد.

۱۰۶

اگر $A^n = AA^{n-1} = AA^2 = AA^3 = \dots = AA^2 = AA^3 = \dots$ و ... و $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ در این صورت با فرض $(n \in N, n > 1)$ حاصل $A^n = A^2 = A^3 = \dots = A^7$ را باید.

۱۰۷

با یک مثال نقض نشان دهید که قانون حذف در ضرب ماتریس‌ها برقرار نمی‌باشد به عبارت دیگر نشان دهید که در حالت کلی از تساوی $AB = AC$ نمی‌توان نتیجه گرفت $C = B$.

۱۰۸

در جای خالی گزینه مناسب داخل پرانتز را انتخاب کنید.
هرچه خروج از مرکز بیضی (کوچکتر، بزرگتر) شود شکل بیضی به دایره نزدیکتر خواهد شد.

۱۰۹

وضعیت دو دایره به معادلات $x^2 + (y+1)^2 = 1$ و $x^2 + (y-2)^2 = 1$ را نسبت به هم مشخص کنید.

۱۱۰

۱۱۱

سهمی $2y + 8x + 9 = 0$ مفروض است.

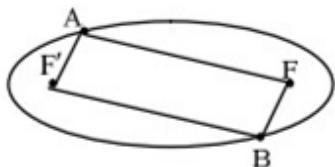
الف) مختصات رأس، کانون و خط هادی سهمی را به دست آورید.

ب) نمودار آن را رسم کنید.

۱۱۲

دو نقطه A و B مطابق شکل روی بیضی و نقاط F و F' کانونهای بیضی اند.

اگر $AF' = BF$ باشد ثابت کنید دو پاره خط AF و BF موازی اند.



۱۱۳

در نقطه A(۲,۳) روی دایره $x^2 + y^2 - 2x - 2y = 3$ مماسی رسم کرده ایم، معادله این خط مماس را به دست آورید.

۱۱۴

معادله دایره ای را بنویسید که خطوط $x + y = 1$ و $x + y = 3$ شامل قطراهایی از آن بوده و خط $5x + 3y = 0$ بر آن مماس باشد.

۱۱۵

مقدار m را چنان بیابید که دستگاه $\begin{cases} mx + 3y = -3 \\ 4x + (m + 4)y = 0 \end{cases}$ جواب نداشته باشد.

۱۱۶

درستی و نادرستی عبارت زیر را مشخص کنید.

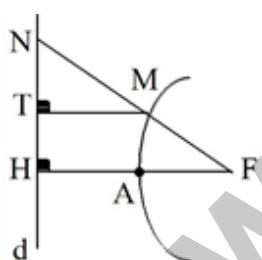
اگر برای ماتریس های متمایز A، B و C داشته باشیم، آنگاه لزوماً $B = C$ است.

۱۱۷

شرط لازم و کافی برای اینکه ماتریس مربعی A وارون پذیر باشد آن است که دترمینان ماتریس A باشد.

۱۱۸

پرتوی نوری به معادله $y = 8x - 2$ به سهمی با معادله $y = 2x$ می تابد. معادله شعاع بازتابش را بنویسید.



۱۱۹

در شکل سهمی با رأس A و کانون F و خط هادی d رسم شده است. از F به نقطه M

دلخواه M روی سهمی وصل کرده و امتداد می دهیم تا d را در N قطع کند و از نقطه M

$$\frac{FN}{FA} = \frac{NT}{TH} \cdot \text{خط MT را بر } d \text{ عمود کرده ایم. ثابت کنید}$$

۱۲۰

سهمی $4x - 2y = 0$ مفروض است. به مرکز کانون سهمی و به شعاع ۳ واحد دایره ای رسم می کنیم. مختصات نقاط برخورد دایره و سهمی را بیابید.

۱۲۱

سهمی $4y - 2x = 0$ مفروض است. مختصات رأس و کانون سهمی را یافته و آن را رسم کنید. همچنین مختصات نقاط برخورد سهمی و محورهای مختصات را بیابید.

۱۲۲

ویژگی بازتابندگی سهمی را بیان کنید.

۱۲۳ نمودار مقطع مخروطی $y^2 + 8x - 2y + 9 = 0$ را رسم کنید.

۱۲۴ در سهمی به صورت $y = x^2 + 3x + 5$ مختصات کانون و معادله خط هادی و محور آن را بنویسید.

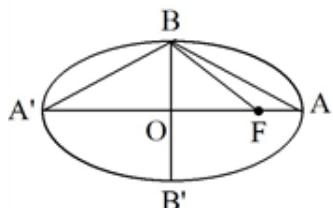
۱۲۵ مختصات کانون و همچنین معادله سهمی به رأس (۶, ۴) و خط هادی $x = 9$ را بنویسید.

۱۲۶ سهمی را تعریف کنید.

۱۲۷ نقطه M روی بیضی با کانون‌های F و F' قرار دارد. اگر طول قطر بزرگ این بیضی برابر ۱۲ و طول قطر کوچک آن برابر ۸ باشد، آنگاه محيط مثلث MF'F را به دست آورید.

۱۲۸ کمترین و بیشترین فاصله‌ی یکی از کانون‌های بیضی از نقاط بیضی به ترتیب ۴ و ۹ است. قطر کوچک را بیابید.

۱۲۹ در بیضی شکل مقابل مساحت مثلث BAF سه برابر مساحت مثلث BA'F است. نسبت $\frac{c}{a}$ را به دست آورید.



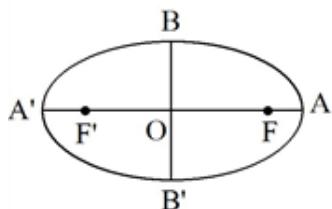
۱۳۰ در بیضی مقابل AA' و BB' دو قطراند. خط d در نقطه‌ی B بر بیضی BF مماس است. پاره خط BF را رسم می‌کنیم و در نقطه‌ی F عمودی بر BF رسم می‌کنیم تا خط d را در نقطه‌ی C قطع کند و از C عمودی بر امتداد قطر بزرگ بیضی رسم می‌کنیم تا آنرا در نقطه‌ای مانند D قطع کند. اگر آنگاه مقدار $\frac{AD}{AF} \hat{=} \angle BCF = 45^\circ$ را به دست آورید.

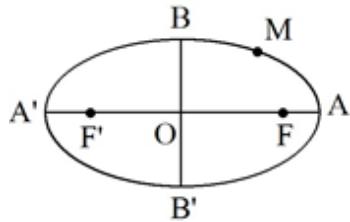
۱۳۱ دو نقطه‌ی A و B روی یک بیضی و F و F' کانون‌های بیضی‌اند. A به کانون F' نزدیک‌تر و B به کانون F نزدیک‌تر است. اگر $AF' = BF$ باشد، نشان دهید:

(۱) در حالتی که دو پاره خط AF و BF یکدیگر را درون بیضی قطع نکنند، با هم موازی‌اند.

(۲) در حالتی که AF و BF درون بیضی در M هم‌دیگر را قطع کنند آنگاه $\angle FMF'$ متساوی الساقین است و قطر کوچک بیضی است.

۱۳۲ در بیضی مقابل طول قطر بزرگ دو برابر طول قطر کوچک است. اندازه‌ی زاویه‌ی FBF' چند درجه است؟





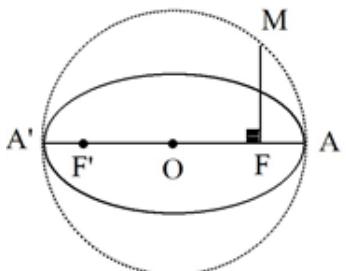
نقطه‌ی M روی بیضی به اقطار ۶ و ۱۰ واحد به گونه‌ای قرار دارد که فاصله‌ی آن تا مرکز بیضی برابر ۴ واحد است.

الف) نشان دهید $OM = OF = OF'$

ب) نشان دهید مثلث MFF' قائم‌الزاویه است.

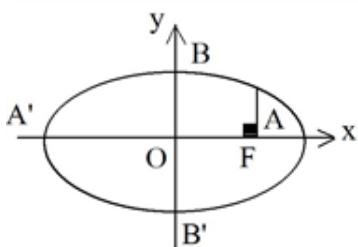
ج) طول‌های MF و MF' را به دست آورید.

قطر دایره‌ی C مانند شکل قطر بزرگ بیضی است و از کانون F عمودی بر AA' رسم کردہ‌ایم تا دایره را در M قطع کند. ثابت کنید MF با نصف قطر کوچک بیضی برابر است.



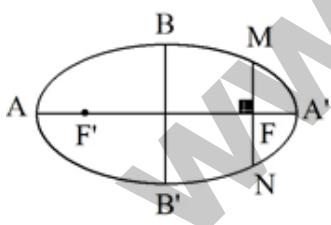
در چه صورتی بیضی تبدیل به یک پاره خط می‌شود.

نشان دهید اگر $\frac{c}{a} = 0$ در بیضی باشد، آن‌گاه بیضی تبدیل به دایره می‌شود.



در بیضی شکل مقابل مبدأ مختصات مرکز و قطرهای آن بر محورهای مختصات منطبق هستند. اگر فاصله‌ی کانون F از O و A برابر ۴ باشد و خطی که در F بر AA' عمود است. را در نقطه‌ی D قطع کند آن‌گاه مختصات نقطه‌ی D را به دست آورید.

در بیضی شکل مقابل با قطر بزرگ $2a$ و قطر کوچک $2b$ ثابت کنید طول وتر MN برابر $\frac{2b^2}{a}$ است.



دو دایره‌ی $x^2 + y^2 - 2x + 4y + m = 0$ و $x^2 + y^2 + 4x = 0$ مماس برون هستند. m را به دست آورید.

طول قطعه مماسی که از نقطه‌ی $A(4, 1)$ بر دایره‌ای به معادله $x^2 + y^2 - 2x + 4y + 3 = 0$ رسم می‌شود را به دست آورید.

مرکز دایره‌ی گذرا از نقاط $A(1, -4)$ و $B(1, 2)$ و $C(3, 2)$ را به دست آورید.

نقطه (۱، ۱) و (۱، -۳) رئوس مثلث ABC هستند. معادلهی دایرهی محیطی مثلث ABC را بنویسید. سپس معادلهی مماس بر این دایره را در رأس B بنویسید.

وضعیت نسبی دو دایرهی $x^2 + y^2 + 2x + 3y + 5 = 0$ را بررسی کنید.

وضعیت نقطهی (۱، -۱) و نقطهی (۴، -۱) را نسبت به دایره با معادلهی $x^2 + y^2 - 2x + 4y - 5 = 0$ مشخص کنید.

معادلهی دایرهای را بنویسید که خطوط $x + y = 1$ و $3x - y = 3$ شامل قطراهایی از آن بوده و خط $6x + 3y = 6$ بر آن مماس باشد.

وضعیت نسبی خط به معادلهی $x^2 + y^2 - 2y - 3 = 0$ و دایرهی $x + y = 4$ را تعیین کنید.

وضعیت نسبی دو دایرهی $x^2 + y^2 - 4x - 6y = 3$ و $x^2 + y^2 - 10x - 14y + 73 = 0$ را مشخص کنید.

معادلهی دایرهای را بنویسید که مرکز آن $(1, 0)$ بوده و با دایرهی $x^2 + y^2 + 4x - 6y = 3$ مماس داخل باشد.

معادلهی دایرهای را بنویسید که مرکز آن نقطهی $(1, 1)$ بوده و بر دایرهی $x^2 + y^2 - 2x + 2y = 0$ مماس بیرونی باشد.

معادلهی دایرهای را بنویسید که مرکز آن بوده و بر خط به معادلهی $3x - 4y + 3 = 0$ مماس باشد.

معادلهی دایرهای بنویسید که $O(-1, 1)$ مرکز آن و $M(1, -2)$ یک نقطه از آن باشد. سپس مختصات نقاط برخود آن را با محور X ها به دست آورید.

کدامیک از روابط زیر معادله یک دایره است؟ در صورت مثبت بودن جواب مختصات مرکز و شعاع دایره را به دست آورده، آنرا رسم کنید.

$$x^2 + y^2 + 2x + 3y + 4 = 0 \quad \text{(ب)}$$

$$x^2 + y^2 - 2x - 6y - 1 = 0 \quad \text{(الف)}$$

$$(x - 1)^2 + \left(y + \frac{1}{2}\right)^2 = 3 \quad \text{(د)}$$

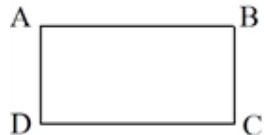
$$2x^2 + 2y^2 - 3x + 4y - 2 = 0 \quad \text{(ج)}$$

$$(x + 1)^2 + (y - 1)^2 = 0 \quad \text{(ذ)}$$

$$(2x + 1)^2 + (1 - 2y)^2 = 1 \quad \text{(ه)}$$

۱۵۳

مکان هندسی نقاطی از صفحه که از چهارضلع مستطیل ABCD به یک فاصله باشند را به دست آورید.



۱۵۴

خط d و پاره خط AB در صفحه مفروض‌اند. روی خط d نقطه‌ای مثل C را پیدا کنید، به‌طوری‌که مثلث ABC در رأس C متساوی‌الساقین باشد. در تعداد جواب‌ها بحث کنید.

۱۵۵

نقطه‌ی O درون مثلث ABC قرار دارد اگر $\frac{S_{AOB}}{S_{AOC}} = \frac{AB}{AC}$ آن‌گاه مکان هندسی نقطه‌ی O را به دست آورید.

۱۵۶

هرگاه دو خط d و L موازی باشند، از دوران d حول L سطحی ایجاد می‌شود که آنرا یک سطح استوانه‌ای می‌نامیم. حال فرض کنید صفحه‌ی P یک سطح استوانه‌ای را قطع کند. در حالت‌های مختلف درباره‌ی سطح مقطع حاصل بحث کنید. (چهار حالت)

۱۵۷

مکان هندسی مرکزهای همه‌ی دایره‌هایی در صفحه که بر خط d در نقطه‌ی ثابت A مماسند را مشخص کنید.

۱۵۸

مکان هندسی نقاطی از صفحه که از دو خط متقاطع d و d' به یک فاصله‌اند را مشخص کنید.

۱۵۹

دو نقطه‌ی A و B و خط d که شامل هیچ‌یک نیست در صفحه مفروض‌اند. نقطه‌ای بیابید که از A و B به یک فاصله بوده و از خط d به فاصله‌ی 2 سانتی‌متر باشد. (بحث کنید.)

۱۶۰

رویه‌ی مخروطی را تعریف کنید.

۱۶۱

هر جمله را طوری کامل کنید تا یک گزاره‌ی درست حاصل شود.

الف) نیمساز هر زاویه مکان هندسی نقاطی از صفحه است که

ب) عمودمنصف یک پاره خط مکان هندسی نقاطی از صفحه است که

ج) دایره‌ی C(0, r) مکان هندسی نقاطی از صفحه است که

د) اگر صفحه‌ی P بر محور سطح مخروطی باشد و از رأس آن عبور نکند شکل حاصل دایره است.

ه) اگر صفحه‌ی P با مولد سطح مخروطی باشد و از رأس آن عبور نکند شکل حاصل سه‌می است.

۱۶۲

مکان هندسی را تعریف کنید.

۱۶۳

مجموع درایه‌های یک ماتریس اسکالر 2 × 2 برابر 3 است. وارون این ماتریس را بیابید.

۱۶۴

$$\text{در تساوی ماتریسی } \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} A \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} \text{ ماتریس } A \text{ را به دست آورید.}$$

۱۶۵

$$\text{اگر } A^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \text{ و } B = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 8 & -5 \end{bmatrix} \text{ آن‌گاه ماتریس } A^{-1} B \text{ را به دست آورید.}$$

اگر حاصل ضرب دو ماتریس $A^{-1} \cdot B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$ یک ماتریس قطری باشد آنگاه ماتریس A^{-1} را باید.

ماتریس $A^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ در تساوی $A^{-1} = mA + nI_2$ صدق می‌کند. $m + n$ را باید.

در مورد وجود و عدم وجود و تعداد جواب‌های زیر بحث کنید و در صورت وجود جواب، جواب را با استفاده از A^{-1} باید.

$$\text{(الف) } \begin{cases} -2x + 3y = 2 \\ 4x - 6y = -4 \end{cases} \quad \text{(ج) } \begin{cases} x + 3y = 5 \\ -2x - 6y = 1 \end{cases} \quad \text{(ب) } \begin{cases} 2x - 5y = -1 \\ 2x + y = 8 \end{cases}$$

به ازای چه مقادیری از k دستگاه $\begin{cases} kx + 3y = 4 \\ x - 2y = 3 \end{cases}$ یک دسته جواب منحصر به فرد دارد؟

دستگاه معادلات خطی تشکیل دهید که $A = \begin{bmatrix} 3 & -5 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$ ماتریس ضرایب دستگاه بوده و $B = \begin{bmatrix} 1 \\ 10 \end{bmatrix}$ ماتریس معلومات آن باشد و سپس جواب دستگاه را با A^{-1} باید.

اگر A ماتریسی 3×3 و $|A| = 5$ در این صورت حاصل $\|A\|A$ را باید.

اگر A ماتریسی 3×3 باشد و k عدد حقیقی آنگاه نشان دهید: $|kA| = k^3 |A|$

ماتریسی 3×3 غیرقطری چون A باید که $|A| = 3$ باشد.

. $|AB| = |A||B|$ مفروض‌اند. نشان دهید $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$ ماتریس‌های

$|A|^2 - 5|A| + 6 = 0$ در این صورت اعداد حقیقی a و b و c و d را چنان باید که تساوی $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ برقرار باشد.

به ازای کدام مقدار m ماتریس $A = \begin{bmatrix} m+1 & 1 \\ 4 & m-2 \end{bmatrix}$ وارون پذیر نیست؟

نشان دهید ماتریس‌های $B = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ و $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ وارون یکدیگرند.

اگر $AB = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$ آنگاه درایه‌های ماتریس $BA + BA$ را باید.

اگر $b_{ij} = \begin{cases} i+j & i < j \\ i-j & i \geq j \end{cases}$ دو ماتریس باشند. آن‌گاه مجموع درایه‌های ماتریس $B - A$ را پیدا کنید.

اگر $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$ ماتریس در تساوی $A^2 + mA + nI_2 = \bar{0}$ صدق می‌کند حاصل $m+n$ را بیابید.

اگر $B = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$ دو ماتریس باشند و x درایه‌ی سطر اول، ستون دوم AB بوده و y درایه‌ی سطر دوم، ستون اول BA باشد آن‌گاه $y+x$ را بیابید.

اگر $A^2 = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ و $A = \begin{bmatrix} x & y \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ آن‌گاه مقادیر x و y را به دست آورید.

اگر $B = A^2$ و $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \\ -1 & 2 & -1 \end{bmatrix}$ آن‌گاه حاصل $b_{12} + 2b_{31} - b_{21}$ برابر چیست؟

اگر $B = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$ و $A = \begin{bmatrix} 4 & a \\ b & -1 \end{bmatrix}$ آن‌گاه مقادیر a و b را طوری به دست آورید که AB قطری باشد.

اگر $B = [b_{ij}]_{2 \times 2}$ و $A = [a_{ij}]_{2 \times 2}$ به صورت زیر معرفی شده باشند. آن‌گاه $B \times A$ و $A \times B$ را به دست آورید.

$$a_{ij} = \begin{cases} i-1 & i=j \\ i-j & i>j \\ j-i & i<j \end{cases}, \quad b_{ij} = \begin{cases} i+1 & i=j \\ i+j & i>j \\ i-j+2 & i<j \end{cases}$$

اگر $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ آن‌گاه ماتریس $A^{13} - A^6$ را به دست آورید.

۱۸۷

؟

الف) حاصل ضرب دو ماتریس قطری یک ماتریس قطری است.

ب) حاصل ضرب دو ماتریس قطری خاصیت جابه جایی دارد.

$$A^n = \begin{bmatrix} r_1^n & & \\ & \ddots & \\ & & r_n^n \end{bmatrix} \quad A = \begin{bmatrix} r_1 & & \\ & \ddots & \\ & & r_n \end{bmatrix}$$

ج) اگر آنگاه

د) اگر حاصل ضرب دو ماتریس مرتبه قطری باشد آنگاه هریک از آن دو ماتریس هم قطری هستند.

۱۸۸

جاهای خالی را به درستی پر کنید.

الف) اگر $A = [a_{ij}]_{n \times p}$ و $B = [b_{ij}]_{p \times m}$ آنگاه مرتبه ماتریس AB برابر است.ب) اگر C_{ij} آنگاه درایهی $(A_{m \times s})(B_{s \times p}) = C = [C_{ij}]$ برابر سطر i ام ماتریس ضرب در ستون ماتریس B است.

ج) ماتریس همانی ضرب ماتریس های مربعی است.

د) در حالت کلی ضرب ماتریس ها خاصیت جابه جایی

ه) ضرب ماتریس ها خاصیت شرکت پذیری دارد یعنی \times

$$(r \pm S)A = rA \pm SA \quad \text{اگر } r \text{ و } S \text{ دو عدد حقیقی باشند، ثابت کنید.}$$
۱۸۹

$$r(A \pm B) = rA \pm rB \quad \text{ماتریس های } A \text{ و } B \text{ و عدد حقیقی } r \text{ مفروضند. ثابت کنید.}$$
۱۹۰

با یک مثال نقض نشان دهید که قانون حذف در ضرب ماتریس ها برقرار نمی باشد.

دو ماتریس 3×3 مانند A و B مثال بزنید که $\bar{o} \neq A \neq \bar{o}$ و $\bar{o} \neq B \neq \bar{o}$ ولی $AB \neq \bar{o}$ باشد.

$$A = [a_{ij}]_{m \times n}, B = [b_{ij}]_{n \times m} \Rightarrow A + B = [a_{ij} + \square]_{m \times n} \quad \text{اگر } x + y + z = 0 \text{ را بیابید.}$$
۱۹۳

در هر مورد به جای \square عبارت مناسب بنویسید تا گزاره هی درست حاصل شود.

$$A = [a_{ij}]_{m \times n}, B = [b_{ij}]_{n \times m} \Rightarrow A + B = [a_{ij} + b_{ij}]_{m \times n}$$
الف)

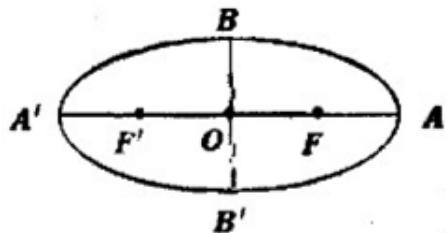
$$A = [a_{ij}]_{m \times n}, r \in R \Rightarrow rA = [\square]_{m \times n}$$
(ب)

$$A = [a_{ij}]_{m \times n}, B = [b_{ij}]_{n \times m} \Rightarrow 2A + 3B = \square$$
(ج)

$$A = [a_{ij}]_{m \times n}, B = [b_{ij}]_{n \times m} \Rightarrow -A + (-B) = \bar{o}$$
(د)

۱۹۵

اگر در بیضی طول قطر بزرگ دو برابر طول قطر کوچک باشد، اندازه زاویه $\hat{FBF'}$ چند درجه است؟



۱۹۶

دایره‌های $x^2 + y^2 = 4$ و $x^2 + y^2 - 2x = 4$ نسبت به هم چه وضعی دارند؟

۱۹۷

معادله دایره‌ای را بنویسید که نقاط $B(-2, 1)$, $A(4, 1)$, $(-2, 1)$ دو سر قطعی از آن باشد.

۱۹۸

دستگاه $\begin{cases} (m-3)x+4y=m \\ 4x+(m+1)y=2 \end{cases}$ به ازای چه مقادیر m دارای جواب منحصر به فرد می‌باشد.

۱۹۹

اگر A ماتریسی 3×3 باشد و $-2|A| \cdot A$ حاصل $|A| \cdot A$ را بیابید.

۲۰۰

درستی یا نادرستی عبارت‌های زیر را مشخص کنید.

الف) مکان هندسی نقاطی که از دو خط متقاطع d , d' به یک فاصله‌اند. نیمساز زاویه بین آن دو خط می‌باشد.

ب) صفحه‌ای با مولد سطح مخروط دورانی، موازی است و از رأس آن عبور نمی‌کند، فصل مشترک صفحه و سطح مخروطی، یک بیضی است.

پ) اگر ماتریس $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ باشد، مجموع درایه‌های سطر دوم A^2 برابر ۵ می‌باشد.

ت) اگر $A = A$ باشد در این صورت داریم: $(A + I)^2 = I + 2A$

۲۰۱

جاهای خالی را با عبارات مناسب پر کنید.

الف) ماتریس قطری که درایه‌های روی قطر اصلی آن با هم برابر باشند، ماتریس می‌نامیم.

ب) حاصل ضرب ماتریس‌ها خاصیت جابه‌جایی

۲۰۲

عبارت زیر را با کلمه‌ی مناسب کامل کنید:

مکان هندسی نقطه‌ای در صفحه‌ی یک زاویه که فاصله‌ی آن از دو ضلع زاویه برابر باشد، آن زاویه است/

۲۰۳

دستگاه $\begin{cases} 2x - 4y - 13 = 0 \\ y + 2x - 5 = 0 \end{cases}$ را با استفاده از ماتریس معکوس حل کنید.

۲۰۴

اگر $A = \begin{bmatrix} -3 & 4 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}$, آنگاه حاصل عبارت $(A^{-1} + I)^{-1}$ را به دست آورید.

۲۰۵ فرض کنید $|A|$ نشان‌دهندهٔ دترمینان ماتریس A باشد.
معادلهٔ زیر را حل کنید.

$$\begin{vmatrix} 3y - 1 & \frac{3+3y}{2} \\ 4y & y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -y & -1 \\ 1 & 3y \end{vmatrix}$$

۲۰۶ معادلهٔ خطی را بنویسید که در نقطهٔ (۳، ۴) بر دایرهٔ $x^2 + y^2 = 25$ مماس باشد.

۲۰۷ معادلهٔ یک سهمی را بنویسید که رأس آن مبدأ مختصات بوده و محور x، محور تقارن آن باشد و از نقطهٔ (۴، -۲)، (۳، -۲) عبور کند. سپس مختصات کانون را به دست آورید.

۲۰۸ فرض کنید A و B دو ماتریس مربعی و متقارن از مرتبهٔ ۳ باشند و داشته باشیم $AB = BA$. ثابت کنید ماتریس AB متقارن است.

۲۰۹ اگر $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 3 & 3 & 1 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \end{bmatrix}$ باشند، حاصل $AB + A^2$ را به دست آورید.

۲۱۰ اگر A و B دو ماتریس متقارن از مرتبهٔ ۳ باشند و AB نیز متقارن باشد، ثابت کنید:

۲۱۱ مکان هندسی نقاطی از صفحه که فاصلهٔ آنها از نقطهٔ (۱، ۲)، (۲، ۴)، (۳، ۲) برابر فاصلهٔ آنها از نقطهٔ (۱، ۰) باشد را مشخص کنید.

۲۱۲ اگر A ماتریسی وارون‌پذیر و A^{-1} وارون آن باشد، ثابت کنید:

۲۱۳ اگر $\begin{vmatrix} 1 & b & a \\ 2 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 0$ باشد، مقدار $\begin{vmatrix} 1 & b & a+1 \\ 2 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & 0 \end{vmatrix}$ را بیابید.

۲۱۴ معادلهٔ دایره‌ای را بنویسید که مرکز آن (۱، -۲) بوده و بر خط $4x + 3y = 4$ مماس باشد و سپس آن را رسم کنید.

۲۱۵ معادلهٔ یک سهمی را بنویسید که کانون آن نقطهٔ (۲، ۱) F و خط‌هادی آن به معادلهٔ $1 = x$ باشد.

۲۱۶ با استفاده از تعریف سهمی، معادلهٔ یک سهمی را بنویسید که کانون آن، نقطهٔ (۱، ۲) F بوده و خط‌هادی آن به معادلهٔ $4 = x$ باشد.

۲۱۷ اگر $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ ، ماتریس A^5 را به دست آورید.

۲۱۸ m و n را چنان تعیین کنید که نقطهٔ (۱، ۲) S = $y^2 + my + n$ رأس سهمی باشد.

۲۱۹ مختصات مرکز و طول شعاع دایره $x^2 + y^2 - 2x + 2y = 0$ را تعیین کرده و نمودار آن را رسم کنید.

۲۲۰ دو نقطه‌ی A و B و خط d در یک صفحه واقعند. نقطه‌ای روی خط d باید که از دو نقطه‌ی A و B به یک فاصله باشد. مسأله چند جواب دارد؟ (بحث کنید).

۲۲۱ مکان هندسی مرکز دایره‌هایی که در یک نقطه‌ی مشخص بر یک خط داده شده مماس باشد، را به دست آورید و شکل مربوط به آن را رسم کنید.

۲۲۲ خط d و نقطه‌ی A غیر واقع بر آن، داده شده‌اند. نقطه‌ای روی خط d تعیین کنید که از نقطه‌ی A به فاصله‌ی معلوم R باشد. با توجه به اندازه‌ی R روی تعداد جواب مسأله بحث کنید.

۲۲۳ خط d و نقطه‌ی A غیر واقع بر آن داده شده‌اند. نقطه‌ای روی خط d تعیین کنید که از نقطه‌ی A به فاصله‌ی معلوم R باشد. (با توجه به اندازه‌ی R روی تعداد جواب‌ها بحث کنید).

۲۲۴ مکان هندسی نقطه‌ای از صفحه را پیدا کنید که از یک خط داده شده‌ی d به فاصله‌ی معلوم K باشد. (K > 0).

۲۲۵ مکان هندسی نقاطی از صفحه را تعیین کنید که از یک خط داده شده‌ی L به فاصله‌ی معلوم k باشد.

۲۲۶ به کمک استدلال استقرایی، مکان هندسی نقطه‌ای در صفحه به فاصله‌ی ۳ سانتی‌متر از خط d را حدس بزنید.

۲۲۷ مکان هندسی رأس‌های مثلثی را که در قاعده مشترک و مساحت برابر دارند را تعیین کنید.

۲۲۸ سه نقطه‌ی A و B و C غیر واقع بر یک راستا می‌باشند، نقطه‌ای تعیین کنید که از این سه نقطه به یک فاصله باشند.

۲۲۹ قضیه: ثابت کنید، نیمساز یک زاویه مکان هندسی نقطه‌ای در صفحه‌ی آن زاویه است که فاصله‌ی آن از دو ضلع زاویه برابر است.

۲۳۰ وارون ماتریس زیر را در صورت وجود پیدا کنید.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}$$

۲۳۱ اگر $A^{10} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ مطلوب است محاسبه A^{10} .

۲۳۲ حاصلضرب زیر را به دست آورید.

$$C = \begin{bmatrix} 2 & -2 & -4 \\ -1 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & -3 \end{bmatrix} \text{ و } B = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 5 \\ 1 & -3 & -5 \\ -1 & 3 & 5 \end{bmatrix}, A = \begin{bmatrix} 2 & -3 & -5 \\ -1 & 4 & 5 \\ 1 & -3 & -4 \end{bmatrix}$$

CA = C و AC = A، AB = BA = O نشان دهید

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 5 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

حاصلضرب زیر را به دست آورید.

۲۳۳

عبارت زیر را محاسبه کنید.

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 6 \\ 4 & 2 & 7 \\ 0 & 3 & 5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 9 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 3 \\ 4 & 9 & 0 \end{bmatrix}$$

۲۳۴

عبارت زیر را محاسبه کنید.

$$\begin{bmatrix} 3 & 9 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} 6 & 0 \\ -1 & 5 \end{bmatrix} - 3 \begin{bmatrix} 2 & -4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

۲۳۵

عبارت زیر را محاسبه کنید.

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & 4 & 8 \\ 5 & -3 & 4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 & 6 \\ 5 & 6 & 7 \end{bmatrix}$$

۲۳۶

ماتریس زیر را به صورت آرایه مستطیلی بنویسید.

$[ij]_{3 \times 3}$

۲۳۷

نوع مقطع مخروطی زیر را تعیین کرده و نمودار آن را رسم کنید.

$$x^2 + y^2 - 8x - 6y = 0$$

۲۳۸

نوع مقطع مخروطی زیر را تعیین کرده و نمودار آن را رسم کنید.

$$x^2 + y^2 + 12x + 10y + 45 = 0$$

۲۳۹

نوع مقطع مخروطی زیر را تعیین کرده و نمودار آن را رسم کنید.

$$y^2 + 12x + 4y - 32 = 0$$

۲۴۰

نوع مقطع مخروطی زیر را تعیین کرده و نمودار آن را رسم کنید.

$$x^2 + 8x + 8y = 0$$

۲۴۱

مکان هندسی نقاطی مانند (x, y) را پیدا کنید که فاصله آنها از نقطه $(1, -2)$ نصف فاصله آنها از نقطه $(4, -2)$ باشد.

۲۴۲

معادله‌ی دایره‌ای بنویسید که از سه نقطه $(4, 6)$, $(2, 2)$ و $(5, -1)$ بگذرد.

۲۴۳

معادله‌ی دایره‌ای بنویسید که مرکز آن $(-1, 2)$ بوده و از نقطه $(3, 2)$ بگذرد.

۲۴۴

نشان دهید معادله زیر یک معادله دایره است و شعاع و مرکز آن را به دست آورید.

۲۴۵

$$x^2 + y^2 + 8x - 6y = 0$$

۲۴۶

۲۴۷

۲۴۸

معادله سهمی زیر را که محور تقارن آن مشخص شده است و یک نقطه از آن نیز داده شده است پیدا کنید. مختصات کانون و معادله خط هادی را نیز تعیین کنید.
 $(-3, 6)$
 $y = 2x + 8$

معادله سهمی زیر را که محور تقارن آن مشخص شده است و یک نقطه از آن نیز داده شده است پیدا کنید. مختصات کانون و معادله خط هادی را نیز تعیین کنید.
 $(4, 6)$
 $y = 2x - 2$

با استفاده از تعریف سهمی، معادله یک سهمی را پیدا کنید که کانون آن نقطه $(4, 6)$ و خط هادی آن $y = 2x$ باشد.

سهمی زیر رارسم کرده، مختصات کانون و معادله خط هادی آن را نیز تعیین کنید.
 $y^2 = -9x$

سهمی زیر رارسم کرده، مختصات کانون و معادله خط هادی آن را نیز تعیین کنید.
 $x^2 = 58y$

سهمی زیر رارسم کرده، مختصات کانون و معادله خط هادی آن را نیز تعیین کنید.
 $x^2 = -8y$

سهمی زیر رارسم کرده، مختصات کانون و معادله خط هادی آن را نیز تعیین کنید.
 $y^2 = 4x$

از نقطه $(3, 0)$ دو مماس بر دایره $x^2 + y^2 = 3$ رسم می کنیم تا بر دایره در نقاط A و B مماس شوند. مختصات A و B را پیدا کنید.

معادله خطی را بنویسید که در نقطه $(3, 4)$ بر دایره $x^2 + y^2 = 25$ مماس باشند.

معادله دایره‌ای به مرکز مبدأ مختصات بنویسید که بر خط $4x + 3y = 10$ مماس باشند.

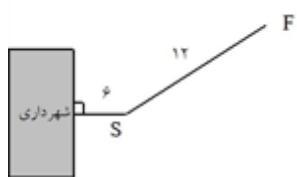
$x^2 + y^2 = 5$
 نمودار دایره زیر رارسم کنید.

$$x^2 + y^2 = 10$$

۲۶۰ دایرهٔ (C) و خط Δ در یک صفحه داده شده‌اند. نقطه‌ای روی دایرهٔ (C) تعیین کنید که از خط Δ به فاصلهٔ معلوم I باشد. مسأله چند جواب دارد؟

۲۶۱ دو نقطهٔ A و B و خط d در یک صفحه واقعند. نقطه‌ای روی خط d بایابد، که از دو نقطهٔ A و B به یک فاصله باشد. آیا مسأله همواره جواب دارد؟

۲۶۲ خط d و نقطهٔ A غیر واقع بر آن، داده شده‌اند. نقطه‌ای روی خط d تعیین کنید که از نقطهٔ A به فاصلهٔ معلوم R باشد. با توجه به اندازهٔ R روی تعداد جوابهای مسأله بحث کنید.



۲۶۳ نماودار مقابله محل قرار گرفتن ساختمان شهرداری، مجسمهٔ S و فوارهٔ F را نشان می‌دهد. می‌خواهیم میله‌ی پرچم را در محلی نصب کنیم که از مجسمه و فواره به یک فاصله باشد و از مقابله ساختمان شهرداری به فاصلهٔ 9 متر باشد. مکان هندسی محل نصب میله‌ی پرچم را تعیین کنید.

۲۶۴ سکه‌ای به شعاع 2 سانتی‌متر را بر روی صفحهٔ مربع شکلی به ضلع 10 سانتی‌متر پرتاب می‌کنیم. مکان هندسی نقطه‌ای درون مربع را تعیین کنید که اگر مرکز سکه در آنجا قرار گیرد، سکه کاملاً داخل مربع واقع می‌شود.

۲۶۵ مکان هندسی را به کمک استدلال استقرایی حدس بزنید.
مکان هندسی مرکز دایره‌هایی که در یک نقطهٔ مشخص بر یک خط داده شده مماس باشد.

۲۶۶ مکان هندسی را به کمک استدلال استقرایی حدس بزنید.
مکان هندسی نقطه‌ای در فضای از دو سر یک پاره‌خط به یک فاصله است.

۲۶۷

۲۶۸ مکان هندسی را به کمک استدلال استقرایی حدس بزنید.
مکان هندسی مرکز توپی که روی یک سطح صاف در امتداد یک خط مستقیم می‌غلتند.

$$A^2 = xA + yI \quad \text{هرگاه داشته باشیم } A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}, x \text{ و } y \text{ را طوری تعیین کنید که داشته باشیم:} \quad 269$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

۲۷۰ x و y را از معادلهٔ مقابله پیدا کنید.

$$271 \quad \text{اگر } \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ k & 1 \end{bmatrix} \text{ و } C = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} \text{ و } D = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ را طوری تعیین کنید که } CD \text{ مساوی ماتریس واحد گردد.}$$

$$\begin{cases} 2x + my = 4 \\ x + y = m \end{cases}$$

۲۷۲ در دستگاه زیر، بر حسب مقادیر m، در جواب دستگاه بحث کنید:

$$\begin{cases} mx + (m - 3)y = -2 \\ 2x + 5y = 2 \end{cases}$$

در دستگاه زیر، بر حسب مقادیر m ، در جواب دستگاه بحث کنید:

۲۷۳

هرگاه داشته باشیم $B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}$ و $A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ دو عبارت الف و ب زیر را محاسبه نموده، نتیجه آنها را با هم مقایسه کنید.

(الف) $(A + B)^2$

(ب) $A^2 + 2AB + B^2$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \xrightarrow{B} \begin{bmatrix} -y \\ x \end{bmatrix}$$

ماتریس B را تعیین کنید.

۲۷۵

ماتریس $A = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$ داده شده است، ماتریس B هم مرتبه با A را طوری پیدا کنید که داشته باشیم:

$$A \times B = \begin{bmatrix} -6 & 0 \\ 0 & -6 \end{bmatrix}$$

برای ماتریس‌های $R = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ و $Q = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}$ و $P = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ درستی تساوی زیر را تحقیق کنید:
 $P \times (Q \pm R) = (P \times Q) \pm (P \times R)$

۲۷۶

برای ماتریس‌های $R = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ و $Q = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}$ و $P = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ درستی تساوی زیر را تحقیق کنید:
 $P + (Q + R) = (P + Q) + R$

۲۷۷

برای ماتریس‌های $A + B = B + A$ نشان دهید که: $B = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$ و $A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$

۲۷۸

برای ماتریس‌های $C = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$ و $A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ نشان دهید که:

۲۷۹

$$(A + B) + C = A + (B + C)$$

اگر داشته باشیم $B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$ و $A = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ ، درستی تساوی زیر را تحقیق کنید:

۲۸۰

$$A \times B \neq B \times A$$

اگر داشته باشیم $C = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$ و $A = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ درستی تساوی زیر را تحقیق کنید:
 $A \times (B \times C) = (A \times B) \times C$

۲۸۱

۲۸۲

۲۸۳

ضرب مقابله را انجام دهید.

$$\begin{bmatrix} p & q \\ r & s \end{bmatrix}$$

۲۸۴

ضرب مقابله را انجام دهید.

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 6 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -3 & 9 \end{bmatrix}$$

۲۸۵

ضرب مقابله را انجام دهید.

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

۲۸۶

علی ۳ کتاب داستان، ۲ کتاب تاریخی و ۵ کتاب مذهبی خرید. قیمت هر کتاب داستان، ۱۵۰ ریال، هر کتاب تاریخ، ۲۰۰ ریال و کتاب دینی، ۱۰۰ ریال است. این اطلاعات را با ماتریس‌های سطری و ستونی A و B نشان دهید. سپس ماتریس AB را حساب کرده، حاصل ضرب را تفسیر کنید.

۲۸۷

در مرکز یک بخش، یک دیبرستان نظام جدید تأسیس شده است که از سه روستا به ترتیب ۱۰، ۷ و ۱۲ کیلومتر فاصله دارد. این فاصله‌ها را با یک ماتریس سطری $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ مثل A نشان دهید. از روستای اول ۱۲ نفر دانش‌آموز، از روستای دوم ۳۶ و از سومی ۶ نفر به این دیبرستان می‌روند و برای پیمودن هر کیلومتر راه، هر دانش‌آموز یک تومان کرایه می‌پردازد. عده‌ی دانش‌آموزان را با یک ماتریس ستونی $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ مثل B نشان دهید. حاصل ضرب AB را حساب کنید. این حاصل ضرب چه چیزی را به دست می‌دهد؟

۲۸۸

ضرب مقابله را انجام دهید.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix}$$

۲۸۹

ضرب مقابله را انجام دهید.

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 5 & -1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

۲۹۰

ضرب مقابله را انجام دهید.

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

۲۹۱

ضرب رویه‌رو را انجام دهید.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

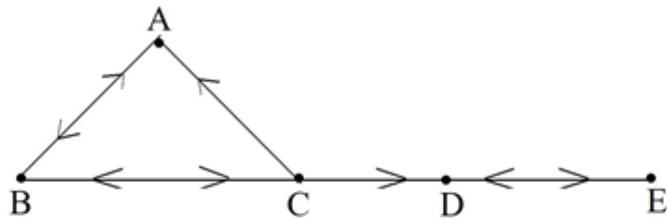
۲۹۲

آیا دو ماتریس $\begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ و $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ مساویند؟ چرا؟ دو ماتریس $\begin{bmatrix} a & d \\ b & e \\ c & f \end{bmatrix}$ و $\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{bmatrix}$ چطور؟

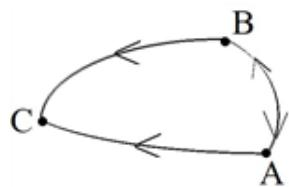
۲۹۳

شبکه ماتریس را با سه نقطه A, B و C رسم کنید.

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$



ماتریس شبکه‌ی زیر را بنویسید.



ماتریس شبکه‌ی زیر را بنویسید.

۲۹۶ مرتبه ماتریسی 4×5 است. این ماتریس چند ستون دارد؟ اگر جای سطراها و ستونهای آن را با هم عوض کنیم ماتریس جدید چند سطر دارد؟

۲۹۷ یک ماتریس مربعی مرتبه‌ی ۳ بنویسید.

۲۹۸ یک ماتریس سطراًی بنویسید که ۵ ستون داشته باشد.

۲۹۹ یک ماتریس ستونی بنویسید که ۴ سطر داشته باشد.

۳۰۰ در ماتریس 4×4 اولاً درایه‌های روی سطرسوم ماتریس را بنویسید. ثانیاً درایه‌های روی ستون سوم آن. ثالثاً درایه‌های روی قطر اصلی آن را بنویسید. رابعاً درایه‌های روی قطر فرعی آن را بنویسید.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \\ 13 & 14 & 15 & 16 \end{bmatrix}$$

با توجه به جایگاه رأس و کانون این سهیمی در دستگاه مختصات خواهیم داشت:

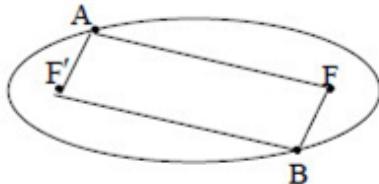
$$a = 4$$

معادله سهیمی:

معادله خط هادی:

$$(x - 1)^2 = -16(y - 2)$$

$$y = 6$$



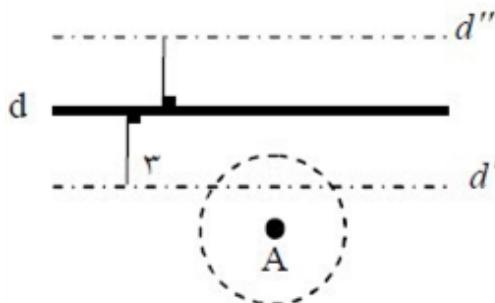
نقطه A و B را به کانون‌های بیضی وصل می‌کنیم. نقطه A روی بیضی قرار دارد. بنابراین $AF + AF' = 2a$ (۱)

$$BF + BF' = 2a \quad (2)$$

از ۱ و ۲ و فرض $AF' = BF'$ نتیجه می‌شود.

نقطه B روی بیضی قرار دارد.

بنابراین چهارضلعی AFBF' یک متوازی‌الاضلاع است در متوازی‌الاضلاع، ضلع‌های روبرو موازی‌اند.



مکان هندسی نقاطی که از A به فاصله ۲ سانتی‌متر باشد یک دایره به مرکز A و شعاع ۲ سانتی‌متر است این دایره را رسم می‌کنیم. نقاطی که از خط d به فاصله ۳ سانتی‌متر باشد دو خط d', d'' در طرفین خط d و به موازات d است این دو خط را رسم می‌کنیم محل برخورد دو خط d', d'' با دایره مطابق شکل جواب مسئله است.

اگر یکی از دو خط d' یا d'' دایره را قطع کند مسئله ۲ جواب دارد.

اگر یکی از دو خط d' یا d'' بر دایره مماس باشد مسئله ۱ جواب دارد.

اگر هیچ‌یک از دو خط d' یا d'' دایره را قطع نکند مسئله جواب ندارد.

$$|A| = (4 - 9 - 4) - (-4 - 12 + 3) = -9 + 13 = 4, |B| = -6$$

$$|A \times B| + |2I_3| = |A| \times |B| + 8|I| = -24 + 8 = -16$$

$$a_{33} = 2, a_{31} = 3 + 1 = 4, a_{12} = 1 - 2 = -1$$

$$\text{الف } O(-1, 0), R = 2$$

$$\text{ب } (1, 0), (-3, 0)$$

۷ دایره

۸ بیضی

۹

$$(x - r)^2 + (y + r)^2 = r \Rightarrow O'(r, -r), r = r$$

$$OO' = \sqrt{r^2 + r^2} = \sqrt{2r^2} = r\sqrt{2}$$

$$|r - r'| = OO' \Rightarrow |r - r| = \sqrt{2r^2} = r\sqrt{2} \Rightarrow x^2 + (y - 1)^2 = 4r^2$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} = 10 \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{10} \begin{bmatrix} 6 & 2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$$

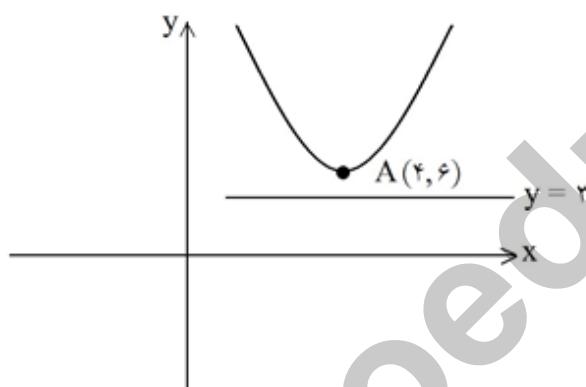
$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \frac{1}{10} \begin{bmatrix} 6 & 2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \Rightarrow x = 1, y = -1$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ m & 6 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 6 + 2m = 0 \Rightarrow m = -3$$

۱۰

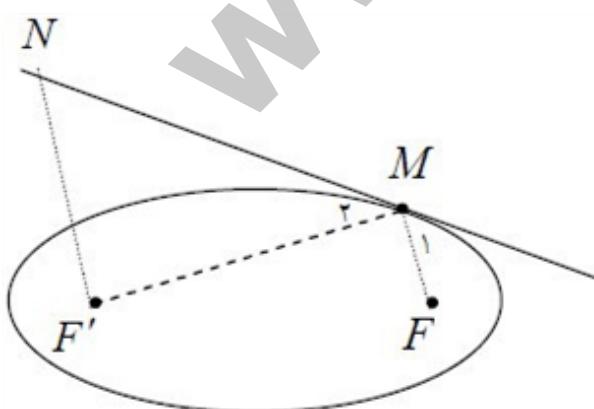
۱۱

۱۲



با توجه به جایگاه رأس و خط هادی، سهمی قائم و دهانه سهمی رو به بالا است و $a = 3$

$(x - h)^2 = 4a(y - k) \Rightarrow (x - 1)^2 = 12(y + 1)$ فرم استاندارد سهمی به صورت:



مجموع $MF + MF'$ کمترین مقدار است بنا به خاصیت

$\widehat{M_1} = \widehat{M_2}$ کوتاه‌ترین مسیر، زاویه‌های

$\widehat{N} = \widehat{M_1}$ و $MF \parallel NF'$ مورب، در نتیجه

$\widehat{N} = \widehat{M_2}$ نتیجه می‌شود.

مثلث MNF' متساوی الساقین است.

$MF' = NF'$ یعنی

$$r = \frac{|ax_1 + by_1 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|12 + 3 + 5|}{\sqrt{16 + 9}} = \frac{20}{5} = 4 \Rightarrow (x - 3)^2 + (y - 1)^2 = 16 \quad 14$$

دترمینان ماتریس A را برحسب ستون اول به دست می‌آوریم.

$$|A| = 2 \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 2 \times 10 = 20, |B| = -6 \Rightarrow |B'| = 36$$

$$|A| + |B'| = 56$$

$$[x - 3] \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix} = [x - 3 \ 12] \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix} = [3x - 21] = 0 \Rightarrow x = 7 \quad 15$$

ت) نقطه

$$\frac{1}{2}(b)$$

$$\frac{5}{8}(b)$$

m = 1 الف)

ابتدا معادله خط گذرنده از A و B را می‌نویسیم:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{-1 - 2}{7 - 1} = \frac{-3}{6} = -\frac{1}{2}$$

$$y - y_1 = m(x - x_1) \Rightarrow y - 2 = -\frac{1}{2}(x - 1) \Rightarrow 2y - 4 = -x + 1 \Rightarrow x + 2y - 5 = 0$$

سپس فاصله نقطه O تا خط گذرنده از A و B را حساب می‌کنیم که برابر شعاع دایره است.

$$d = \frac{|ax_1 + by_1 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} \Rightarrow d = \frac{|2 + 10 - 5|}{\sqrt{1 + 4}} = \frac{7}{\sqrt{5}} \Rightarrow R = \frac{7}{\sqrt{5}}$$

$$\xrightarrow{\text{معادله دایره}} (x - h)^2 + (y - k)^2 = R^2 \Rightarrow (x - 2)^2 + (y - 5)^2 = \frac{49}{5}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 2x + 2 = 0 \Rightarrow x = -1 \\ 2y - 6 = 0 \Rightarrow y = 3 \end{array} \right. \Rightarrow O \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix} \quad (\text{مرکز دایره}) \quad 19$$

20

خطی که بر دایره عمود باشد حتماً از مرکز دایره می‌گذرد و بنابراین باید خط گذرنده از O و A را حساب کنید.

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{7 - 3}{-2 + 1} = \frac{4}{-1} = -4$$

$$y - y_1 = m(x - x_1) \Rightarrow y - 3 = -4(x + 1) \Rightarrow y = -4x - 1$$

۲۱

الف) O $\left| \begin{array}{l} \frac{1+1}{2} = 1 \\ \frac{3-5}{2} = -1 \end{array} \right.$ مرکز $FF' = |3 - (-5)| = 8 = 2C \Rightarrow C = 4$

$x = 1$ و معادله قطر بزرگ: ۱

ب) $b^2 = a^2 - c^2 = 36 - 16 = 20 \Rightarrow b = \sqrt{20} \Rightarrow BB' = 2\sqrt{20}$, $e = \frac{c}{a} = \frac{2}{3}$

۲۲

$y^2 = 4(x-1) \Rightarrow S(1, 0), F(2, 0)$

$(x-2)^2 + y^2 = 4, \left\{ \begin{array}{l} y^2 = 4x-4 \\ y^2 = -x^2 + 4x + 5 \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = 3 \\ x = -3 \end{array} \right.$
 $M(3, 2\sqrt{2}), M'(-3, -2\sqrt{2})$

۲۳

الف) $\frac{ym}{2} \neq \frac{3}{-1} \Rightarrow m \neq -3$

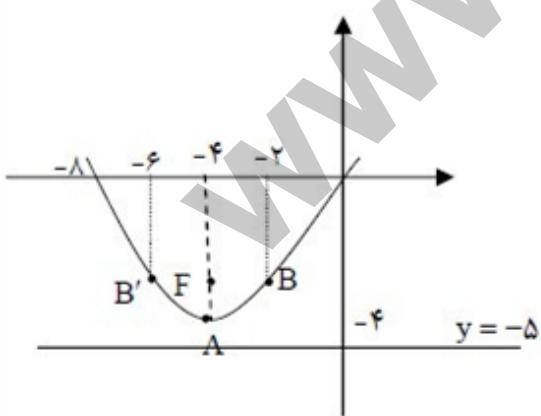
$A = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow |A| = -10 \neq 0, A^{-1} = \frac{1}{-10} \begin{bmatrix} -1 & -3 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}$

ب) $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \frac{1}{-10} \begin{bmatrix} -1 & -3 \\ -2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = -1 \end{cases}$

۲۴

الف) فرم استاندارد سهمی به صورت $(y+4)^2 = 4(x+4)$ است. سهمی قائم و دهانه آن رو به بالا باز می‌شود.
راس سهمی نقطه $A(-4, -4+1) = (-4, -3)$ است و $a = 1$, مختصات کانون آن نقطه $F(-4, -4-1) = (-4, -5)$ است.
معادله خط هادی سهمی به صورت $-5 = -4 - y$ است.

ب) نقاط کمکی $B'(-6, -3)$ و $B(-2, -3)$



رسم سهمی با استفاده از نقاط کمکی

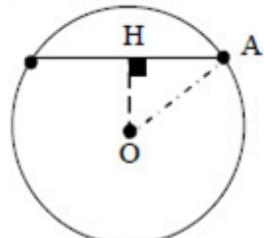
۲۵

در بیضی فاصله کانون تا مرکز آن برابر ۵ است. پس $c = 5$ و داریم:

$2b = 24, b = 12, c = 5 \xrightarrow{a^2 = b^2 + c^2} a^2 = 12^2 + 5^2 \Rightarrow a = 13, \frac{c}{a} = \frac{5}{13}$

$$OM = OA = a$$

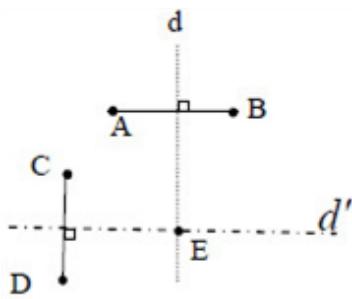
$$\triangle OMF: OF^2 + MF^2 = OM^2 \Rightarrow c^2 + MF^2 = a^2 \Rightarrow MF^2 = a^2 - c^2 = b^2 \Rightarrow MF = b$$



$$OH = \frac{|2(-1) + 1(-1) - 2|}{\sqrt{2^2 + 1^2}} = \frac{5}{\sqrt{5}} = \sqrt{5}$$

$$\triangle OH(A = 90^\circ): OH^2 + AH^2 = OA^2$$

$$\Rightarrow (\sqrt{5})^2 + 2^2 = r^2 \Rightarrow r = 3 \Rightarrow (x+1)^2 + (y+1)^2 = 9$$



مکان هندسی نقاطی که از A و B به یک فاصله‌اند، عمودمنصف پاره خط AB است این خط را d می‌نامیم و مکان هندسی نقاطی که از نقطه C و D به یک فاصله باشد، عمودمنصف پاره خط CD است این خط را d' می‌نامیم. بنابراین نقطه برخورد خطوط d و d' جواب مسئله است. (نقطه E)

اگر خطوط d و d' متقاطع باشند مسئله یک جواب دارد.

اگر خطوط d و d' منطبق باشند مسئله بی‌شمار جواب دارد.

اگر خطوط d و d' موازی باشند مسئله جواب ندارد.

$$\begin{bmatrix} 1 & x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \cdot \Rightarrow [2+x \quad 4+2x] \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = [4+2x \quad 4+2x] = \cdot \Rightarrow x = -2$$

$$(الف) |A| = 5|A| - 24 \Rightarrow |A| = 6$$

$$A^{-1} = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 5 & -8 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$$

(ب) ماتریس A وارون پذیر است و وارون آن برابر است با:

درست (۰/۲۵) ۳۱

ویژگی مشترک (۰/۲۵) ۳۲

۳۳

درست ۳۴

ابتدا نقطه برخورد دو خط را حساب می‌کنیم که مرکز دایره است.

$$\begin{cases} x + y = 3 \\ 2x - y = 6 \end{cases} \Rightarrow 3x = 9 \Rightarrow x = 3 \Rightarrow y = 0 \Rightarrow O \left| \begin{array}{l} h = 3 \\ k = 0 \end{array} \right.$$

فاصله نقطه O تا خط $x - y = 0$ (نیمساز ربع اول و سوم) شعاع دایره است.

$$R = d = \frac{|ax_1 + by_1 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|3 - 0|}{\sqrt{1 + 1}} = \frac{3}{\sqrt{2}}$$

$$(x - 3)^2 + y^2 = \frac{9}{2}$$

$$x^2 + y^2 - 2x - 1 \cdot y - 6 = 0 \Rightarrow \begin{cases} 2x - 2 = 0 \Rightarrow x = 1 \\ 2y - 1 = 0 \Rightarrow y = 0.5 \end{cases} \Rightarrow O \left| \begin{array}{l} h = 1 \\ k = 0.5 \end{array} \right.$$

$$R = \sqrt{h^2 + k^2 - F} = \sqrt{1 + 0.25 + 6} = \sqrt{32} = 4\sqrt{2}$$

$$x^2 + y^2 - 4x - 8y + 18 = 0 \Rightarrow \begin{cases} 4x - 4 = 0 \Rightarrow x = 1 \\ 8y - 8 = 0 \Rightarrow y = 1 \end{cases} \Rightarrow O' \left| \begin{array}{l} h' = 1 \\ k' = 1 \end{array} \right.$$

$$R' = \sqrt{h'^2 + k'^2 - F'} = \sqrt{1 + 1 - 18} = \sqrt{2}$$

$$OO' = \sqrt{(1 - 2)^2 + (0.5 - 1)^2} = \sqrt{1 + 1} = \sqrt{2}$$

دو دایره متداخل هستند.

$$x^2 + y^2 - 2x - 1 \cdot y + 18 = 0 \Rightarrow \begin{cases} 2x - 2 = 0 \Rightarrow x = 1 \\ 2y - 1 = 0 \Rightarrow y = 0.5 \end{cases} \Rightarrow O \left| \begin{array}{l} h = 1 \\ k = 0.5 \end{array} \right.$$

$$R = \sqrt{h^2 + k^2 - F} = \sqrt{1 + 0.25 - 18} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$$

$$x^2 + y^2 + 6x - 2y + 1 = 0 \Rightarrow \begin{cases} 6x + 6 = 0 \Rightarrow x = -3 \\ 2y - 2 = 0 \Rightarrow y = 1 \end{cases} \Rightarrow O' \left| \begin{array}{l} h' = -3 \\ k' = 1 \end{array} \right.$$

$$R' = \sqrt{h'^2 + k'^2 - F'} = \sqrt{9 + 1 - 1} = \sqrt{2}$$

$$OO' = \sqrt{(1 + 3)^2 + (0.5 - 1)^2} = \sqrt{16 + 16} = \sqrt{32} = 4\sqrt{2}$$

دو دایره متخارج هستند

فاصله‌ی خط $O(-1, 7)$ تا $2x - y + 1 = 0$ برابر شعاع دایره است.

$$R = d = \frac{|ax_1 + by_1 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} \Rightarrow R = \frac{|2(-1) - 7 + 1|}{\sqrt{4 + 1}} = \frac{8}{\sqrt{5}}$$

$$\text{معادله دایره: } (x + 1)^2 + (y - 7)^2 = \frac{64}{5}$$

ابتدا معادله خط گذرنده از A و B را حساب می‌کنند. ۳۹

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{1 - (-2)}{-1 - 1} = \frac{3}{-2} = -\frac{3}{2}$$

$$y - y_1 = m(x - x_1) \Rightarrow y + 2 = -\frac{3}{2}(x + 1) \Rightarrow y = -\frac{3}{2}x - \frac{5}{2} \Rightarrow 3x + y + 5 = 0$$

فاصله نقطه O(2, -1) تا خط $3x + y + 5 = 0$ برابر شعاع است.

$$(شعاع) R = d = \frac{|ax_1 + by_1 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} \Rightarrow R = \frac{|3(2) - (-1) + 5|}{\sqrt{9 + 1}} = \frac{10}{\sqrt{10}}$$

$$\text{معادله دایره: } (x - 2)^2 + (y + 1)^2 = 10$$

فاصله مرکز دایره تا خط برابر شعاع دایره است. ۴۰

$$R = d = \frac{|ax_1 + by_1 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} \Rightarrow R = \frac{|3(1) - 4(-2) + 9|}{\sqrt{9 + 16}} \Rightarrow R = \frac{|3 + 8 + 9|}{\sqrt{25}} = 4$$

$$\Rightarrow R = \frac{20}{5} = 4$$

$$(x - 1)^2 + (y + 2)^2 = 16 \Rightarrow x^2 + y^2 - 2x + 4y + 11 = 0$$

۴۲

$$x^2 + y^2 - 2x - 2y = 0 \Rightarrow \begin{cases} 2x - 2 = 0 \Rightarrow x = 1 \\ 2y - 2 = 0 \Rightarrow y = 1 \end{cases} \Rightarrow O \left| \begin{array}{l} h = 1 \\ k = 1 \end{array} \right.$$

$$R = \sqrt{h^2 + k^2 - F} = \sqrt{1+1-0} = \sqrt{2}$$

$$y - 2x - a = 0 \Rightarrow d = R \Rightarrow \frac{|1 - 2(2) - a|}{\sqrt{1+4}} = \sqrt{2} \Rightarrow |3+a| = 2 \Rightarrow a + 3 = \pm 2$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a + 3 = 2 \Rightarrow a = -1 \\ a + 3 = -2 \Rightarrow a = -5 \end{cases}$$

$$x^2 + y^2 - 2x + 2y - 10 = 0 \Rightarrow \begin{cases} 2x - 2 = 0 \Rightarrow x = 1 \\ 2y + 2 = 0 \Rightarrow y = -1 \end{cases} \Rightarrow O \left| \begin{array}{l} h = 1 \\ k = -1 \end{array} \right.$$

$$R = \sqrt{h^2 + k^2 - F} = \sqrt{1+1+10} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$$

$$x^2 + y^2 + 2x - 2y + 5 = 0 \Rightarrow \begin{cases} 2x + 2 = 0 \Rightarrow x = -1 \\ 2y - 2 = 0 \Rightarrow y = 1 \end{cases} \Rightarrow O' \left| \begin{array}{l} h' = -1 \\ k' = 1 \end{array} \right.$$

$$R' = \sqrt{h'^2 + k'^2 - F'} = \sqrt{1+1+5} = \sqrt{7}$$

$$OO' = \sqrt{(1+1)^2 + (-2-1)^2} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$$

دو دایره مماس داخل هستند

$$x^2 + y^2 - 2x + 2y - 10 = 0 \Rightarrow \begin{cases} 2x - 2 = 0 \Rightarrow x = 1 \\ 2y + 2 = 0 \Rightarrow y = -1 \end{cases} \Rightarrow O \left| \begin{array}{l} h = 1 \\ k = -1 \end{array} \right.$$

$$R = \sqrt{h^2 + k^2 - f} = \sqrt{1+1+10} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$$

$$x^2 + y^2 - 2x - 1 = 0 \Rightarrow \begin{cases} 2x - 2 = 0 \Rightarrow x = 1 \\ 2y = 0 \Rightarrow y = 0 \end{cases} \Rightarrow O' \left| \begin{array}{l} h' = 1 \\ k' = 0 \end{array} \right.$$

$$R' = \sqrt{h'^2 + k'^2 - f'} = \sqrt{1+0+1} = \sqrt{2}$$

$$OO' = \sqrt{(1-1)^2 + (0+1)^2} = \sqrt{2}$$

دو دایره مماس داخل هستند

۴۵

$$x^2 + y^2 - 10x - 4y + 21 = 0 \Rightarrow \begin{cases} 2x - 10 = 0 \Rightarrow x = 5 \\ 2y - 4 = 0 \Rightarrow y = 2 \end{cases} \Rightarrow O(5, 2)$$

$$x^2 + y^2 + 4x - 2y - 13 = 0 \Rightarrow \begin{cases} 2x + 4 = 0 \Rightarrow x = -2 \\ 2y - 2 = 0 \Rightarrow y = 1 \end{cases} \Rightarrow O'(-2, 1)$$

$$O(5, 2) \Rightarrow R = \sqrt{h^2 + k^2 - F} = \sqrt{25 + 4 - 21} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

$$O'(-2, 1) \Rightarrow R' = \sqrt{h'^2 + k'^2 - F'} = \sqrt{4 + 1 - 13} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$$

$$OO' = \sqrt{(5 - (-2))^2 + (2 - 1)^2} = \sqrt{49 + 1} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$$

دو دایره مماس خارج هستند

۴۶

(الف) برای آنکه دایره باشد باید ضریب x^2 و y^2 برابر باشند بنابراین:

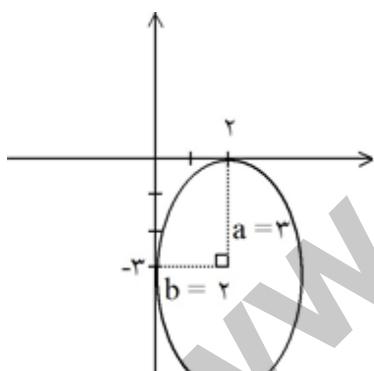
$$a - 3 = 1 \Rightarrow a = 4$$

$$\text{ب) } \frac{a = 4}{x^2 + y^2 + 2x - 4y + 1 = 0} \Rightarrow \begin{cases} 2x + 2 = 0 \Rightarrow x = -1 \\ 2y - 4 = 0 \Rightarrow y = 2 \end{cases}$$

$$O(-1, 2)$$

$$\text{ج) } R = \sqrt{h^2 + k^2 - F} = \sqrt{(-1)^2 + (2)^2 - 1} = \sqrt{4} = 2$$

۴۷



$$\begin{cases} a = 3 \\ b = 2 \end{cases} \Rightarrow a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow 9 = 4 + c^2 \Rightarrow c = \sqrt{5}$$

$$e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{5}}{3}$$

۴۸

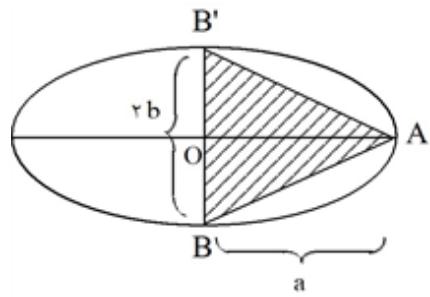
می‌دانیم مجموع فواصل هر نقطه روی بیضی از F' و F برابر $2a$ است. بنابراین:

$$F'M + FM = 2a \Rightarrow 4a = \text{محیط چهارضلعی}$$

$$FK' + FK = 2a$$

$$\begin{cases} c = 5 \\ b = 4 \end{cases} \Rightarrow c = \sqrt{5} \quad \Rightarrow a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow a^2 = 16 + 25 = a = \sqrt{41}$$

$$4a = 4\sqrt{41}$$



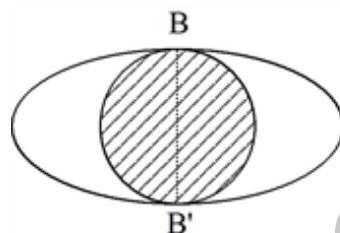
$$S_{\triangle BB'A} = \frac{2b \times a}{2} = ab$$

فاصله کانونی: $2c = 12 \Rightarrow c = 6$

$$e = \frac{c}{a} = \frac{6}{5} \rightarrow \frac{c}{a} = \frac{6}{5} \Rightarrow a = 10$$

$$a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow 100 = b^2 + 36 \Rightarrow b^2 = 64 \Rightarrow b = 8$$

$$S_{\triangle BB'A} = ab = 10 \times 8 = 80$$

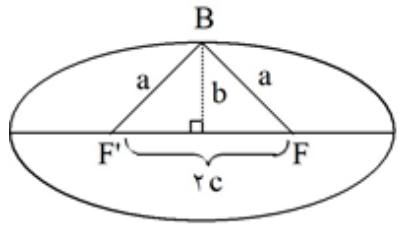


فاصله کانونی: $2c = 4 \Rightarrow c = 2$

$$e = \frac{c}{a} = \frac{2}{3} \rightarrow \frac{c}{a} = \frac{2}{3} \Rightarrow \frac{c}{a} = \frac{1}{3} \Rightarrow a = 6$$

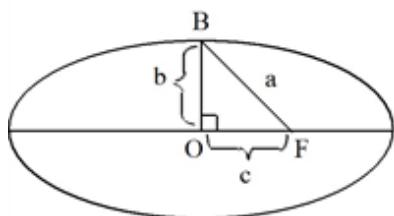
$$a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow 36 = b^2 + 4 \Rightarrow b^2 = 32 \Rightarrow b = \sqrt{32} \Rightarrow b = 4\sqrt{2}$$

$$S = \pi r^2 \text{ مساحت دایره} \rightarrow S = \pi (4\sqrt{2})^2 \Rightarrow S = 32\pi$$



۵۲

$$\begin{aligned} r a &= ۱۲ \Rightarrow a = ۶ \\ r b &= ۴\sqrt{۲} \Rightarrow b = ۲\sqrt{۲} \\ r^2 &= b^2 + c^2 \Rightarrow ۱۶ = ۸ + c^2 \Rightarrow c^2 = ۸ \Rightarrow c = ۲\sqrt{۲} \\ S_{\Delta BFF'} &= \frac{b \times c}{۲} = \frac{۲\sqrt{۲} \times ۲\sqrt{۲}}{۲} = ۸ \end{aligned}$$



۵۳

$$\begin{aligned} r a &= ۸ \Rightarrow a = ۴ \\ r b &= ۶ \Rightarrow b = ۳ \\ r^2 &= b^2 + c^2 \Rightarrow ۱۶ = ۹ + c^2 \Rightarrow c^2 = ۷ \Rightarrow c = \sqrt{۷} \\ S_{\Delta OFB} &= \frac{b \times c}{۲} = \frac{۳\sqrt{۷}}{۲} \end{aligned}$$

۵۴

$$\begin{aligned} r a &= ۱۰ \Rightarrow a = ۵ \\ e &= \frac{c}{a} = \frac{۳}{۵} \Rightarrow \frac{c}{۵} = \frac{۳}{۵} \Rightarrow c = ۳ \\ r^2 &= b^2 + c^2 \Rightarrow ۲۵ = b^2 + ۹ \Rightarrow b = ۴ \\ \text{قطر کوچک} &= ۲b = ۸ \end{aligned}$$

۵۵

$$\begin{aligned} r a &= ۴ \Rightarrow a = ۲ \\ r b &= ۲\sqrt{۳} \Rightarrow b = \sqrt{۳} \Rightarrow a^2 &= b^2 + c^2 \Rightarrow ۴ = ۳ + c^2 \Rightarrow c = ۱ \\ \text{فاصله کانونی} &= ۲c \Rightarrow ۲c = ۲ \end{aligned}$$

۵۶

$$y^2 = ۴(x - ۱) \rightarrow S(1, \cdot), a = ۱, F(2, \cdot)$$

$$(x - ۲)^2 + y^2 = ۹, \begin{cases} y^2 = ۴x - ۴ \\ y^2 = -x^2 + ۴x + ۵ \end{cases} \rightarrow x = \pm ۳$$

$$M(3, 2\sqrt{3}), M'(3, -2\sqrt{3})$$

۵۷

$$c^2 = a^2 - b^2 = ۲۵ - ۹ = ۱۶ \rightarrow c = ۴$$

$$MF + MF' = ۲a = ۱۰ \rightarrow MF' = ۱۰ - MF$$

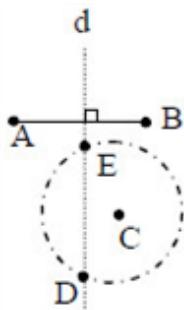
$$(MF)^2 + (MF')^2 = (FF')^2 \rightarrow (MF)^2 + (10 - MF)^2 = ۱۶ \rightarrow MF = ۵ \pm \sqrt{۷}$$

۵۸

$$(x - ۲)^2 + (y - ۲)^2 = ۱ \rightarrow O(2, 2), r = 1$$

$$d = \frac{|3(2) + 2|}{\sqrt{10}} = \frac{8}{\sqrt{10}} \rightarrow d > r$$

خط و دایره نقطه برخورد ندارند.



مکان هندسی نقاطی که از A و B به یک فاصله‌اند، عمودمنصف پاره خط AB و مکان هندسی نقاطی که از نقطه C به فاصله ۳ واحد باشد، دایره‌ای به مرکز C و شعاع ۳ است، بنابراین نقطه برخورد خط عمودمنصف (d) و دایره جواب مسئله است. (نقاط D و E) اگر خط عمودمنصف (d) و دایره یکدیگر را در نقطه قطع کنند مسئله دو جواب دارد و اگر مماس شوند مسئله یک جواب دارد و در صورتی که یکدیگر را قطع کنند مسئله جواب ندارد.

۵۹

$$A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} = -I$$

۶۰

$$A^4 = (A^2)^2 \cdot A = (-2I)^2 \cdot A = -4 \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

۶۱

$$c^2 = a^2 - b^2 = 25 - 9 = 16 \Rightarrow c = 4 \Rightarrow 2c = 8$$

۶۲

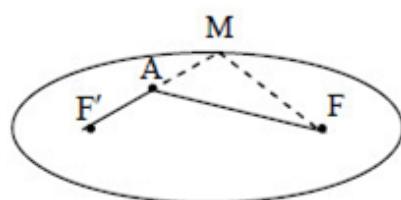
(الف) با توجه به جایگاه رأس و خط هادی، دهانه سهمی رو به پایین است و $a = 4$ پس معادله سهمی به صورت:
 $(x - 2)^2 = -16(y - 3)$

(ب) مختصات کانون سهمی برابر $(2, -1)$ است

$$\begin{cases} 2a = 10 \Rightarrow a = 5, \\ 2b = 6 \Rightarrow b = 3, \end{cases} a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow c = 4, \frac{c}{a} = \frac{4}{5}$$

۶۳

پاره خط $F'A$ را ادامه می‌دهیم تا بیضی را در نقطه M قطع کند M را به F وصل می‌کنیم نقطه M روی بیضی قرار دارد بنا به تعریف بیضی داریم:



$$MF' + MF = 2a$$

$$AF < MA + MF$$

در مثلث $\triangle MAF$ بنا به قضیه نامساوی مثلثی داریم:
 به طرفین نامساوی مقدار AF' را اضافه می‌کنیم.

$$AF + AF' < (MA + AF') + MF = MF' + MF = 2a$$

$$x^2 + y^2 = 25 \Rightarrow O(x, y), r = \sqrt{x^2 + y^2} \rightarrow d = \frac{|1(0) + 1(0) - 2|}{\sqrt{1+1}} = \sqrt{2} = r$$

۶۵

خط بر دایره مماس است.

$$r = OM = \sqrt{(1+2)^2 + (-1-3)^2} = 5 \Rightarrow (x+2)^2 + (y-3)^2 = 25$$

۶۶

مکان هندسی نقاطی که از A و B به یک فاصله باشند عمودمنصف پاره خط AB است این خط را رسم می‌کنیم و خط d می‌نامیم. مکان هندسی نقاطی که از نقطه C به فاصله ۳ سانتی‌متر باشند یک دایره به مرکز C و شعاع ۳ سانتی‌متر است، این دایره را رسم می‌کنیم محل برخورد دایره و خط d جواب مساله است.

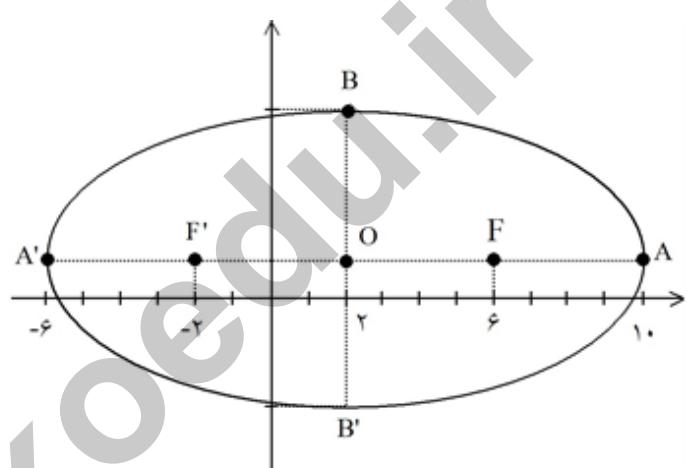
بحث: اگر خط d دایره را قطع کند مسئله ۲ جواب دارد.

اگر خط d بر دایره مماس باشد مسئله ۱ جواب دارد.

اگر خط d دایره را قطع نکند مسئله جواب ندارد.

$$|A| = 0 \Rightarrow 2m - 4 = 0 \Rightarrow m = 2 \quad 68$$

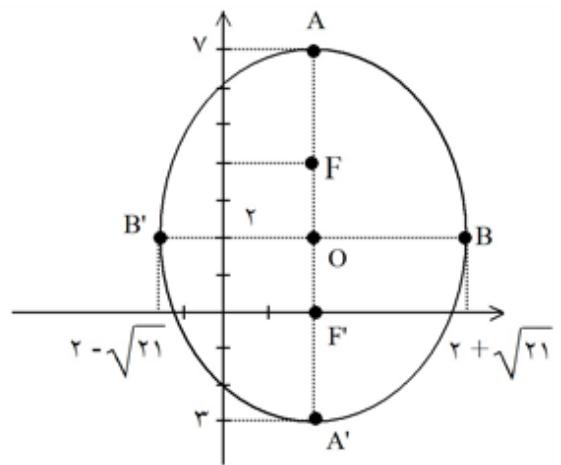
$$A = B \Rightarrow \begin{cases} 2x = 3 \rightarrow x = \frac{3}{2} \\ 2x + y = 5 \\ z = -2 \end{cases} \rightarrow y = 2 \rightarrow x + y + z = \frac{3}{2}$$



$$O \left| \frac{-6+10}{2} = 2 \right. \quad OF' = 4 \Rightarrow c = 4 \\ OA = 6 \Rightarrow a = 6$$

$$a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow 36 = b^2 + 16 \Rightarrow b^2 = 20 \Rightarrow b = \sqrt{20}$$

$$B \left| 0 + \sqrt{20} \right. , \quad B' \left| 0 - \sqrt{20} \right. , \quad F \left| 4 \right.$$



$$O \left| \frac{r+r}{r} = 2 \right. \quad OF' = r \Rightarrow c = r \\ OA = a \Rightarrow a = r$$

$$a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow 2r = b^2 + r \Rightarrow b = \sqrt{21}$$

$$B \left| \frac{r+\sqrt{21}}{r} \right. \quad \text{و} \quad B' \left| \frac{r-\sqrt{21}}{r} \right. \quad \text{و} \quad F \left| \frac{r}{r} \right.$$

قطر کوچک : $2b = 4 \Rightarrow b = 2$

قطر بزرگ : $2a = 8 \Rightarrow a = 4$

$$a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow 16 = 4 + c^2 \Rightarrow c^2 = 12 \Rightarrow c = \sqrt{12}$$

$$e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{12}}{4} = \frac{2\sqrt{3}}{4} \Rightarrow e = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

الف) $\begin{cases} y = x^2 \\ y = ax + b \end{cases} \Rightarrow x^2 + b \Rightarrow x^2 - ax - b = 0$

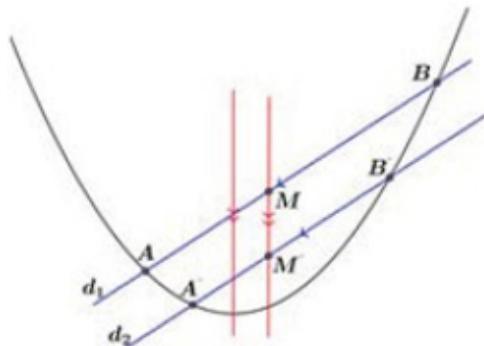
ب) $x_1 + x_2 = S = a \Rightarrow M \begin{vmatrix} a \\ a(\frac{a}{2}) + b \end{vmatrix} \Rightarrow M \begin{vmatrix} a \\ \frac{a^2 + 2b}{2} \end{vmatrix}$

ب) $x_1 + x_2 = S = a \Rightarrow M' \begin{vmatrix} a \\ a(\frac{a}{2}) + b' \end{vmatrix} \Rightarrow M' \begin{vmatrix} a \\ \frac{a^2 + 2b'}{2} \end{vmatrix}$

$\begin{cases} y = x^2 \\ y = ax + b' \end{cases} \Rightarrow x^2 = ax + b' \Rightarrow x^2 - ax - b' = 0$

ت) $m_{MM'} = \text{تعريف نشده} \Rightarrow MM' \parallel oy$

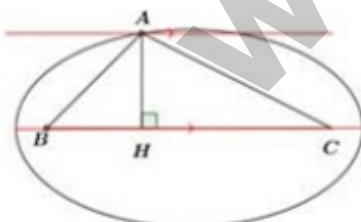
ث) ابتدا دو خط d_1 و d_2 را رسم می‌کنیم به طوری که سهمی را قطع کند اوساط را M و M' می‌نامیم MM' موازی محور تقارن است. از رأس S موازی MM' رسم می‌کنیم که محور تقارن است.



طبق رسم بیضی با داشتن BC (کانون‌ها به فاصله BC از هم قرار دارند) وسط آنها را O مرکز بیضی درنظر گرفته. از دو طرف به اندازه c (p. c) یعنی نصف محیط منهای نصف BC روی امتداد BC انتخاب کرده تا دور آن بیضی پدید آید. با داشتن a , c می‌توان b را محاسبه کرد و بیضی را رسم کرد.

$$c^2 = a^2 - b^2 \Rightarrow b^2 = c^2 - a^2 = (p - c)^2 - c^2 \Rightarrow b = \sqrt{p^2 - pc}$$

$$AB + AC + BC = 2p \Rightarrow AB + AC = 2p - BC \Rightarrow 2a = 2p - BC$$



اگر $AH < h$ باشد مسئله ۴ تا جواب دارد.

اگر $AH = h$ باشد مسئله ۲ تا جواب دارد.

اگر $AH > h$ باشد مسئله جواب ندارد.

بیضی با کانون‌های C , B و رأس A , نقطه‌ایی از بیضی که قطر بزرگ بیضی $2a$ است رسم می‌کنیم خط موازی BC به فاصله AH از آن رسم می‌کنیم.

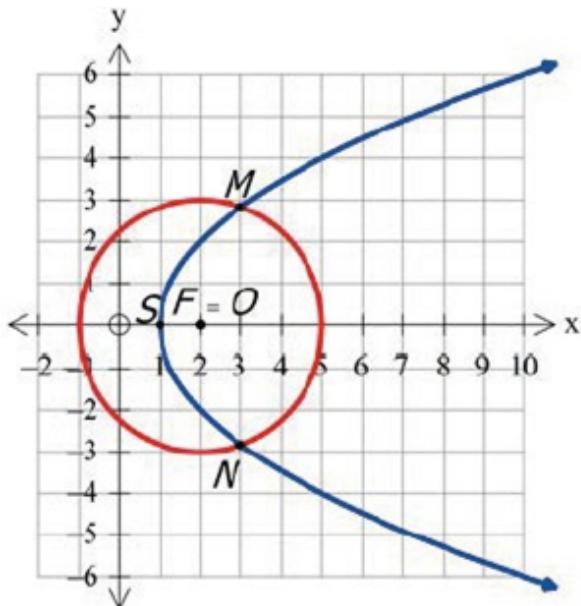
با توجه به شکل معادله سهمی قائم به صورت زیر است: ۷۵

$$(X - \cdot)^\top = \nabla a(y - \cdot) \Rightarrow x^\top = \nabla a y$$

$$\xrightarrow{(x, y)} x^\top = \nabla a y, \Rightarrow a = \frac{x}{\nabla y}$$

۷۶

www.akoedu.ir



$$y^2 = 4(x - 1) \quad S \Big|_{\beta}$$

$$\alpha = 4 \Rightarrow a = 1 \Rightarrow F = O \Big|_{\beta} \quad \alpha + a = 1 + 1 = 2$$

$$(x - 2)^2 + (y - 0)^2 = 4 \Rightarrow x^2 - 4x + 4 + y^2 - 4x + 4 = 4$$

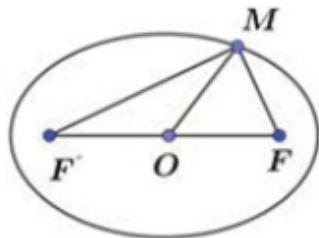
$$\begin{cases} y^2 = 4x - 4 \\ y^2 = -x^2 + 4x + 4 \end{cases}$$

$$\Rightarrow y^2 - 4 = -x^2 + 4x + 4 \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x = \pm 2$$

$$x = 2 \Rightarrow y^2 = 4 \Rightarrow y = \pm 2\sqrt{2}$$

$$x = -2 \Rightarrow y^2 = -16$$

$$M \Big|_{2\sqrt{2}} \quad N \Big|_{-2\sqrt{2}}$$



الف) $OM = OF = OF'$

$$c^2 = a^2 - b^2 = 25 - 9 = 16 \Rightarrow c = 4 = OF = OF'$$

ب) در مثلثی که میانه نظیر یک ضلع آن نصف آن ضلع باشد قائم الزاویه است در رأس رویه رو به ضلع نصف شده است.

ج) $x + y = 2a = 10 \Rightarrow y = 10 - x$

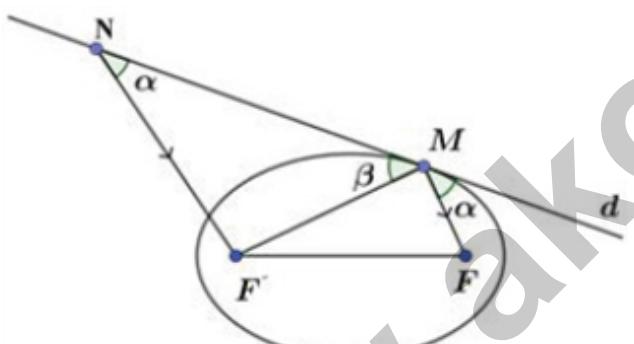
$$x^2 + y^2 = FF'^2 = 8^2 \Rightarrow x^2 + (10 - x)^2 = 64 \Rightarrow 2x^2 - 20x + 36 = 0$$

$$\Rightarrow x^2 - 10x + 18 = 0$$

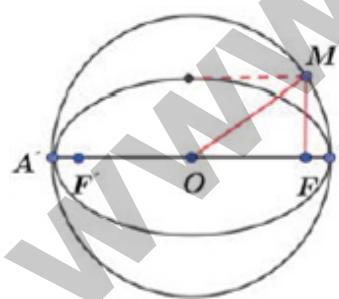
$$x_1, x_2 = 5 \pm \sqrt{v}$$

$$x = 5 + \sqrt{v} \Rightarrow y = 5 - \sqrt{v}$$

$$x = 5 - \sqrt{v} \Rightarrow y = 5 + \sqrt{v} \Rightarrow MF' = 5 + \sqrt{v}, MF = 5 - \sqrt{v}$$



$$\begin{aligned} & \angle \alpha = \angle \beta \quad \text{در بینی و خط مماس} \\ & MF \parallel NF', d \text{ مورب} \Rightarrow \angle N = \angle \alpha \\ & \Rightarrow \angle N = \angle \beta \\ & \triangle F'MN : \angle N = \angle \beta \Rightarrow F'M = F'N \end{aligned}$$

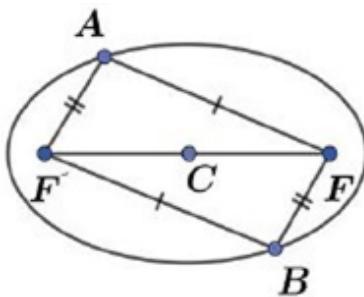


$$OA = a, OF = c, OM = R = a$$

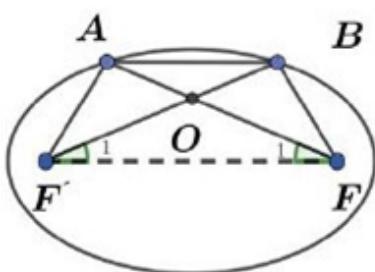
$$\triangle OMF : OM^2 = OF^2 + FM^2 \Rightarrow a^2 = c^2 + FM^2$$

$$c^2 = a^2 - FM^2 \quad \left. \right\}$$

$$c^2 = a^2 - b^2 \quad \left. \right\} \Rightarrow FM = b$$



الف) $\left. \begin{array}{l} AF' + AF = 2a \\ BF' + BF = 2a \\ BF = AF' \end{array} \right\} \Rightarrow AF = BF'$



چهارضلعی که اضلاع آن دو به دو مساوی باشند متوازی‌الاضلاع است پس

ب) $\left. \begin{array}{l} AF' + AF = 2a \\ BF' + BF = 2a \\ BF = AF' \end{array} \right\} \Rightarrow \triangle AFF' \cong \triangle BFF'$
 $\Rightarrow AF = BF', \angle F_1 = \angle F'_1$
 $\Rightarrow \triangle OFF' \text{ متساوی الساقین است}$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ x^2 + y^2 - 4x + 4y + v = 1 \end{cases} \quad O(0,0) \quad r = \frac{1}{2}\sqrt{16 + 16 - 28} = 1$$

$$d = \frac{|1(0) + 1(0) - 1|}{\sqrt{1+1}} = \frac{1}{\sqrt{2}} > 1 \quad d > r \quad \text{غیرمتقطع}$$

روش دوم: $x^2 + y^2 = 1 \Rightarrow x = -\frac{1}{\sqrt{2}}y$

$$\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}y\right)^2 + y^2 - 4\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}y\right) - 4y + v = 1 \rightarrow 16y^2 + 4y^2 + 48y - 36y + 63 = 1$$

$$25y^2 + 12y + 63 = 1 \Rightarrow \Delta = 144 - 4 \times 25 \times 63 < 0$$

جواب ندارد پس خط دور دایره هم دیگر را قطع نمی کند
ب) روش اول:

$$\begin{cases} x + y = 2 \\ x^2 + y^2 = 2 \end{cases} \quad O(0,0) \quad r = \sqrt{2}$$

$$d = \frac{|1(0) + 1(0) - 2|}{\sqrt{1+1}} = \sqrt{2} \quad d = r \quad \text{خط بر دایره مماس است}$$

روش دوم: $x + y = 2 \Rightarrow x = 2 - y$

$$(2-y)^2 + y^2 = 2 \Rightarrow y^2 + y^2 - 4y + 4 = 2 \Rightarrow 2y^2 - 4y + 2 = 0$$

$$\Rightarrow y^2 - 2y + 1 = 0 \Rightarrow (y-1)^2 = 0 \Rightarrow y = 1$$

معادله ریشه مضاعف دارد پس خط بر دایره مماس است
ج) روش اول:

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ x^2 + y^2 - 2x - 2y = 1 \end{cases} \quad O(1,1) \quad r = \frac{1}{2}\sqrt{4 + 4 + 8} = 2$$

$$d = \frac{|1(1) + 1(1) - 1|}{\sqrt{1+1}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad d < r \quad \text{خط و دایره متقطع اند}$$

روش دوم: $x + y = 1 \Rightarrow y = 1 - x$

$$x^2 + (1-x)^2 - 2x - 2(1-x) = 1 \Rightarrow 2x^2 - 2x - 3 = 0$$

چون a, b مختلف العلامه هستند پس معادله دو ریشه متمایز دارد یعنی خط و دایره دو نقطه مشترک دارند.

$$x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$$

$$\begin{cases} 1 + 1 - a - b + c = 0 \\ 1 + 1 + a + b + c = 0 \\ 1 + 4 + a - 2b + c = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -a - b + c = -2 \quad (1) \\ a + b + c = -2 \quad (2) \\ a - 2b + c = -10 \quad (3) \end{cases} \xrightarrow{(1)+(2)} c = -2$$

$$\xrightarrow{(2), (3)} \begin{cases} a + b - 2 = -2 \\ a - 2b - 2 = -10 \end{cases} \Rightarrow a = -2, b = 2$$

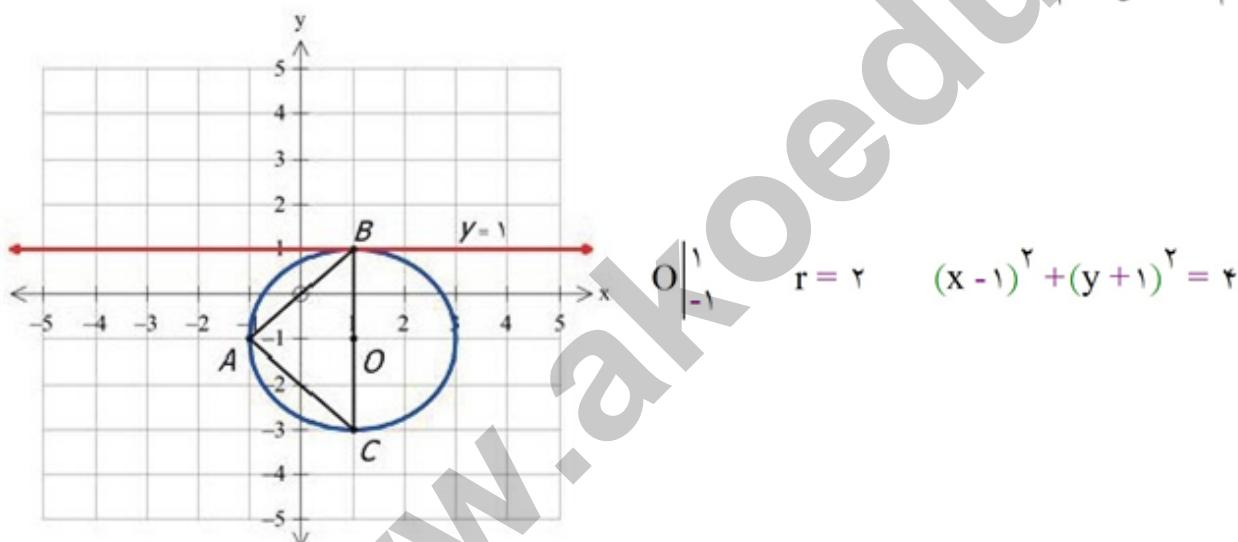
$$x^2 + y^2 - 2x + 2y - 2 = 0 \quad O \left| \begin{array}{l} \\ -1 \end{array} \right. \quad r = \frac{1}{2} \sqrt{4 + 4 + 8} = 2$$

$$O \left| \begin{array}{l} \\ -1 \end{array} \right. \quad B \left| \begin{array}{l} \\ 1 \end{array} \right. \quad m_{OB} = \text{تعريف نشده} \Rightarrow m = 0 \quad \text{مماس}$$

$$\frac{m = 0}{y = y_B} \quad \text{معادله مماس در } B$$

معادله خط گذرانده از B

روش دوم به روش رسم:



روش سوم به روش عمودمنصف:

$$A \left| \begin{array}{l} -1 \\ -1 \end{array} \right. , B \left| \begin{array}{l} 1 \\ 0 \end{array} \right. \quad M \left| \begin{array}{l} -1+1 \\ -1+0 \end{array} \right| = \left| \begin{array}{l} 0 \\ -1 \end{array} \right| = \left| \begin{array}{l} 0 \\ 1 \end{array} \right| \quad m_{AB} = \frac{1+1}{1+0} = 1 \Rightarrow m' = -1 \Rightarrow y - 0 = -1(x - 0)$$

$$\Rightarrow y = -x \quad (1)$$

$$A \left| \begin{array}{l} -1 \\ -1 \end{array} \right. , C \left| \begin{array}{l} 1 \\ -1 \end{array} \right. \quad N \left| \begin{array}{l} -1+1 \\ -1+(-1) \end{array} \right| = \left| \begin{array}{l} 0 \\ -2 \end{array} \right| = \left| \begin{array}{l} 0 \\ 2 \end{array} \right| \quad m_{AC} = \frac{-1+1}{-1-1} = -1 \Rightarrow m' = 1 \Rightarrow y + 1 = 1(x - 0)$$

$$\Rightarrow y = x - 1 \quad (2)$$

۱ و ۲ عمودمنصف‌های وترهای AB, AC هستند (اقطاع دایره)

$$\begin{cases} y = -x \\ y = x - 1 \end{cases} \Rightarrow O \left| \begin{array}{l} 1 \\ -1 \end{array} \right. \quad OA = r = \sqrt{(1+1)^2 + (-1+1)^2} = 2$$

$$(x - 1)^2 + (y + 1)^2 = 4 \Rightarrow x^2 + y^2 - 2x + 2y - 2 = 0$$

الف) $x^2 + y^2 = 4$ $O \left| \begin{array}{l} \\ \end{array} \right. r = 2$

$$x^2 + y^2 - 2x = 4 \quad O' \left| \begin{array}{l} \\ \end{array} \right. r' = \frac{1}{2} \sqrt{(-2)^2 + 0^2 - 4(-4)} = \frac{1}{2} \times 2\sqrt{5} = \sqrt{5}$$

دو دایره متقاطع هستند

ب) $x^2 + (y-1)^2 = 1$ $O \left| \begin{array}{l} \\ \end{array} \right. r = 1$

$$(x-1)^2 + y^2 = 1 \quad O' \left| \begin{array}{l} \\ \end{array} \right. r' = 1$$

دو دایره متقاطع هستند

ج) $x^2 + y^2 = 1$ $O \left| \begin{array}{l} \\ \end{array} \right. r = 1$

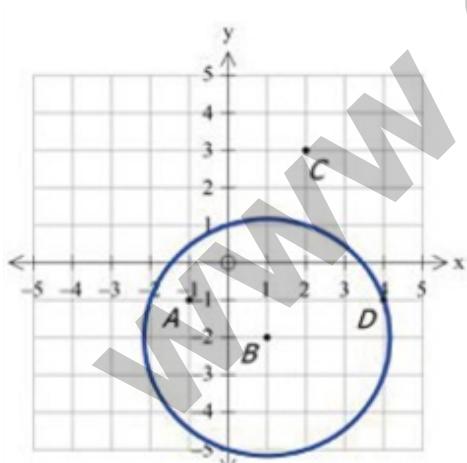
$$x^2 + y^2 - 2\sqrt{2}x - 2\sqrt{2}y + 5 = 0 \quad O' \left| \begin{array}{l} \\ \end{array} \right. r' = \frac{1}{2} \sqrt{18 + 18 - 20} = 2$$

دو دایره مماس خارج هستند

د) $x^2 + y^2 = 1$ $O \left| \begin{array}{l} \\ \end{array} \right. r = 1$

$$x^2 + y^2 - 2x - 2y + 9 = 0 \quad O' \left| \begin{array}{l} \\ \end{array} \right. r' = \frac{1}{2} \sqrt{36 + 4 - 36} = 1$$

دو دایره متخارج هستند



$$x^2 + y^2 - 2x + 4y - 5 = 0 \Rightarrow O \left| \begin{array}{l} \\ \end{array} \right. r = \sqrt{1+16+20} = \sqrt{10}$$

$$r = \frac{\sqrt{4+16+20}}{2} = \sqrt{10}$$

نقطه درون دایره است

$$OA = \sqrt{4+1} = \sqrt{5} < r \Rightarrow$$

نقطه روی مرکز دایره است

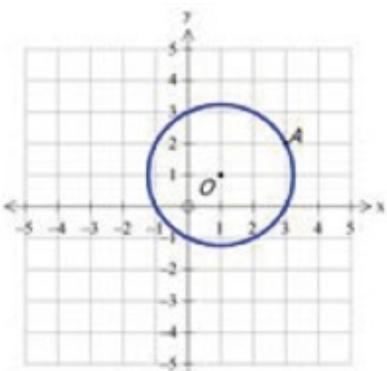
$$OC = \sqrt{1+25} = \sqrt{26} > r \Rightarrow$$

نقطه بیرون دایره است

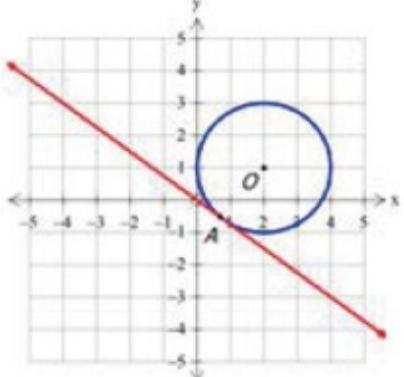
$$OD = \sqrt{9+1} = \sqrt{10} = r \Rightarrow$$

نقطه روی محیط دایره است

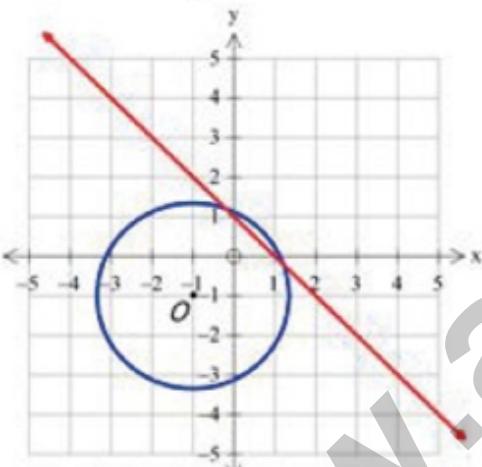
$$a^2 + b^2 - 4c > 0 \Rightarrow 9 + 25 - 4a > 0 \Rightarrow 34 - 4a > 0 \Rightarrow a < \frac{17}{2}$$



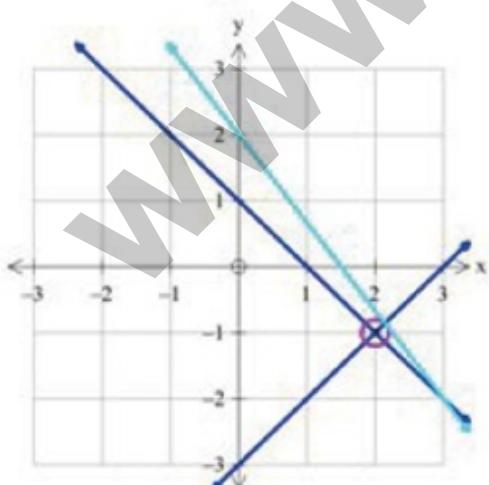
الف) $r = OA = \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5}$
 $(x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 5$



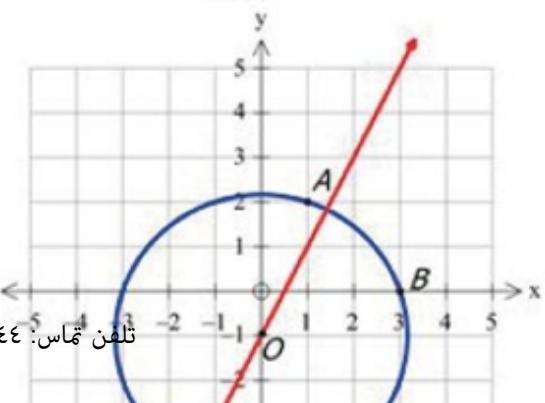
ب) $r = \frac{|3(2) + 4(1) + 1|}{\sqrt{9+16}} = \frac{10}{5} = 2$
 $(x - 2)^2 + (y - 1)^2 = 4$



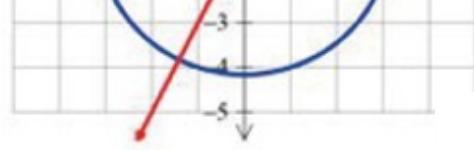
ج) $OH = \frac{|-1 - 1 - 1|}{\sqrt{1+1}} = \frac{3}{\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$
 $r = 1 + \left(\frac{3\sqrt{2}}{2}\right)^2 = 1 + \frac{9}{2} = \frac{11}{2}$
 $(x + 1)^2 + (y + 1)^2 = \frac{11}{2}$



د) $\begin{cases} x + y = 1 \\ x - y = 1 \end{cases} \Rightarrow 2x = 2 \Rightarrow x = 1, y = -1$
 $O(1, -1)$
 $r = \frac{|4(1) + 3(-1) - 6|}{\sqrt{16+9}} = \frac{1}{5}$
 $(x - 1)^2 + (y + 1)^2 = \frac{1}{25}$

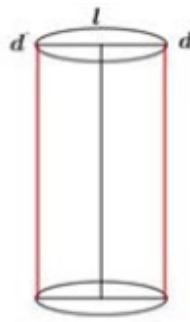
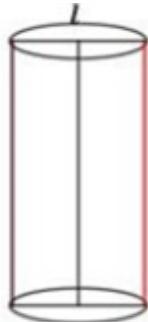


$O|\alpha$
 $OA = OB = r = \sqrt{(\alpha - 1)^2 + (2\alpha - 1 - 2)^2}$
 $\bar{r} = \sqrt{(\alpha - 3)^2 + (2\alpha - 1 - 1)^2}$
 $\alpha^2 - 2\alpha + 1 + 4\alpha^2 - 12\alpha + 9$



$$\Rightarrow -14\alpha + \sqrt{10} = -10\alpha + \sqrt{10} \Rightarrow \alpha \\ O(\cdot, -1) \Rightarrow OA = OB = r = \sqrt{10} \\ X^2 + (y+1)^2 = 10.$$

$$= \alpha^2 - 8\alpha + 9 + \sqrt{\alpha^2 - 4\alpha + 1} \quad www.akoedu.ir$$

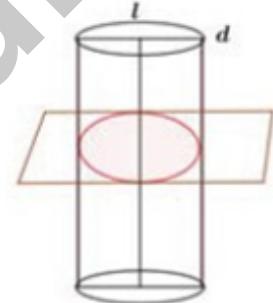
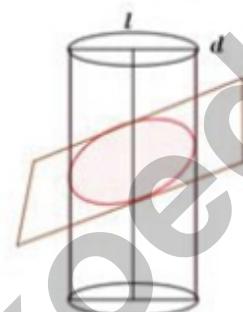


۸۹

صخمه **p** از آنکه (دو خط موازی با صفحه **p** بر سطح استوانه ماس

باشد (یک خط به فاصله شعاع استوانه از **p**)

(استوانه از **p**)

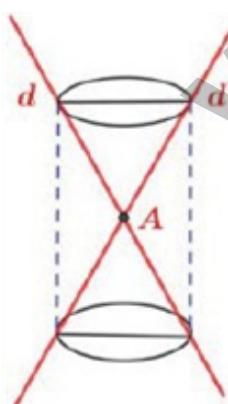


صخمه **p** عمود بر محور استوانه مقطع باشد و براکن عمود نباشد که

سطح مقطع **p** می شود

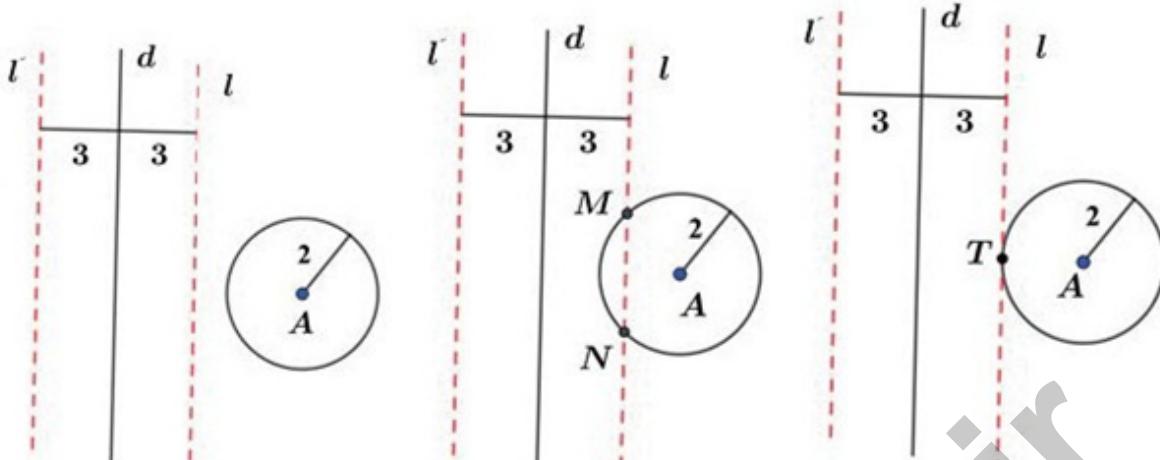
مقطع دایره می شود

۹۰

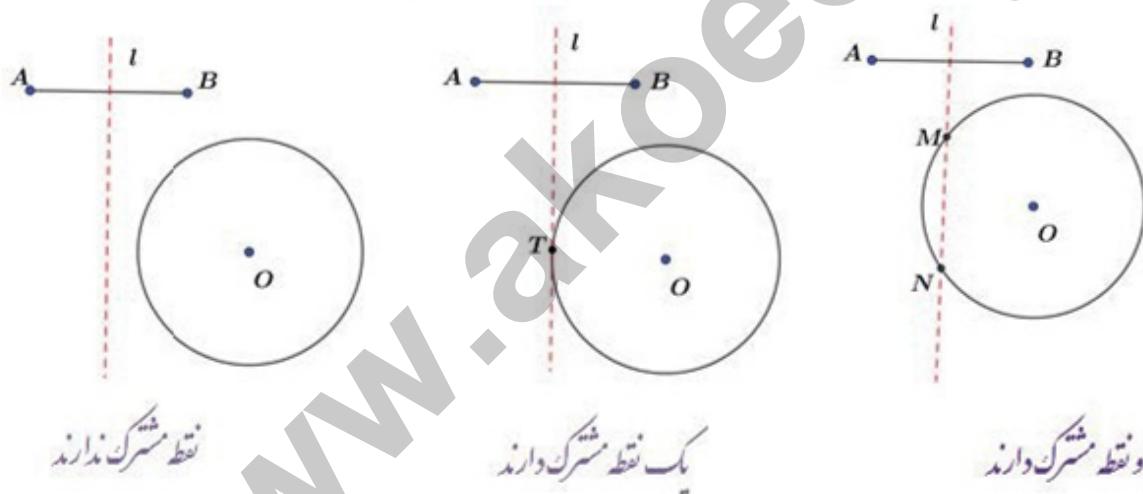


دو خط متقاطع

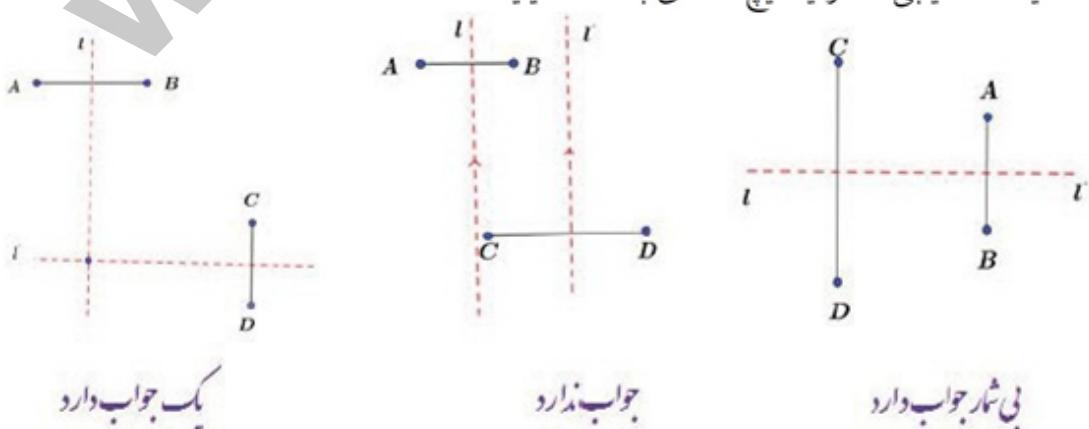
دایره‌ای به مرکز A و به شعاع ۲ سانتی‌متر را رسم می‌کنیم و دو خط موازی l به فاصله ۳ سانتی‌متر در دو طرف آن رسم می‌کنیم محل تقاطع (در صورت وجود) جواب مسئله است که ممکن است دو نقطه، یا یک نقطه و یا نقطه‌ای نباشد.

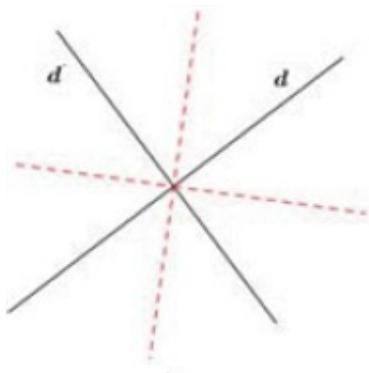


عمودمنصف AB و دایره‌ای به مرکز O و به شعاع ۳ سانتی‌متر را رسم می‌کنیم محل تقاطع (در صورت وجود) جواب مسئله است که ممکن است دو نقطه، یا یک نقطه و یا نقطه‌ای به دست نیاید.

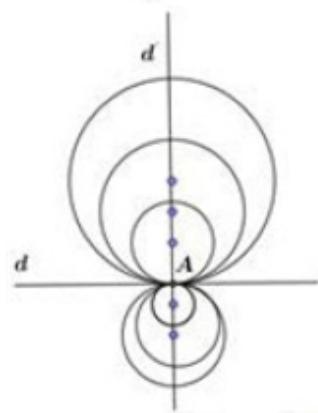
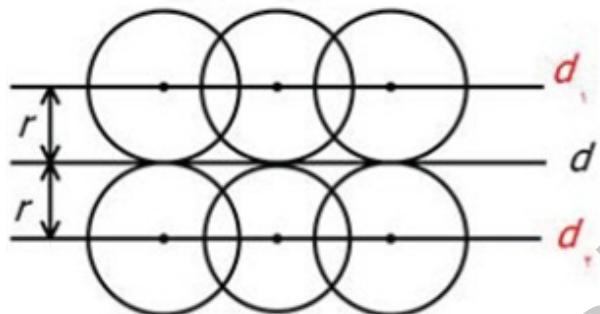
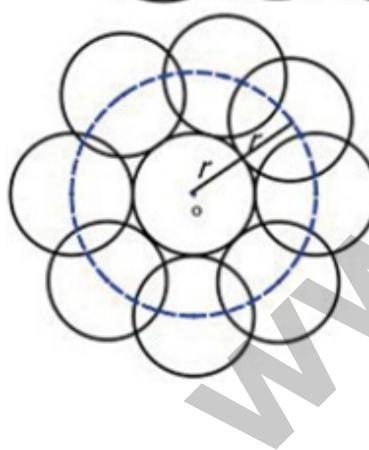


عمودمنصف A, B و عمودمنصف C, D را رسم می‌کنیم و آنها را i, i' (در صورت وجود) جواب مسئله است که ممکن است یک نقطه‌یابی شمار یا هیچ نقطه‌ای به دست نیاید.





الف) دو تا نیمساز بین دو خط

ب) روی خط عمود بر d در نقطه A (خود A جواب نیست)ج) دو خط موازی با خط d به فاصله r د) دایره‌ای به مرکز O و به شعاع $2r$

$$\text{الف) } A = \begin{bmatrix} 3 & -5 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow |A| = 3 + 10 = 13 \neq 0$$

$\frac{3}{2} \neq \frac{-5}{1} \Rightarrow$ دستگاه یک جواب منحصر به فرد دارد.

$$A^{-1} = \frac{1}{13} \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{13} & \frac{5}{13} \\ \frac{-2}{13} & \frac{3}{13} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{13} & \frac{5}{13} \\ \frac{-2}{13} & \frac{3}{13} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-1+40}{13} \\ \frac{2+24}{13} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} \Rightarrow x = 3, y = 2$$

دو خط بر هم منطبقند پس دستگاه بی شمار جواب دارد.

دو خط با هم موازیند پس دستگاه جواب ندارد.

$$|A|A = |A|^3 |A| = |A|^4 = 5^4 = 625$$

$$\text{الف) } A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} \Rightarrow |A| = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} a \ b$$

$$\Rightarrow |A| = (aei + bfg + cdh) - (ceg + afh + bdi)$$

$$B = \begin{bmatrix} ka & kb & kc \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} \Rightarrow |B| = \begin{bmatrix} ka & kb & kc \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} ka \ kb$$

$$\Rightarrow |B| = (kaei + kbfg + kcdh) - (kceg + kafh + kbdi)$$

$$= k(aei + bfg + cdh) - (ceg + afh + bdi) = k|A| \Rightarrow |B| = k|A|$$

$$\therefore A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \Rightarrow |A| = ad - bc$$

$$B = \begin{bmatrix} ka & kb \\ c & d \end{bmatrix} \Rightarrow |B| = kad - kbc = k(ad - bc) = k|A|$$

$$2 \times \frac{1}{14} \begin{bmatrix} 0 & -3 \\ -2 & 4 \end{bmatrix} - 3 \times \frac{1}{14} \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ -5 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{0}{14} & \frac{-3}{14} \\ \frac{-2}{14} & \frac{4}{14} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{3}{14} & \frac{-9}{14} \\ \frac{15}{14} & \frac{6}{14} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{80+21}{119} & \frac{-01-63}{119} \\ \frac{-34+10}{119} & \frac{68+42}{119} \end{bmatrix} = \frac{1}{119} \begin{bmatrix} 106 & -114 \\ 71 & 110 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & * & * \\ * & 3 & * \\ * & * & 1 \end{bmatrix}$$
۹۹

$$A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ a & b & c \\ d & e & f \end{bmatrix}$$
۱۰۰

$$|A| = d \times \begin{vmatrix} b & c \\ b & c \end{vmatrix} - e \times \begin{vmatrix} a & c \\ a & c \end{vmatrix} + f \times \begin{vmatrix} a & b \\ a & b \end{vmatrix} = d(bc - cb) - e(ac - ac) + f(ab - ab) = 0$$

$$AB = [1 \ 2 \ -3] \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} = [-1 + (-2) + (-4)] = [-12] = -12 \Rightarrow |AB| = -12$$
۱۰۱

$$BA = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} [1 \ 2 \ -3] = \begin{bmatrix} -1 & -2 & 6 \\ -1 & -2 & 3 \\ 1 & 2 & -4 \end{bmatrix}$$

$$|BA| = \begin{bmatrix} -1 & -2 & 6 \\ -1 & -2 & 3 \\ 1 & 2 & -4 \end{bmatrix} \begin{matrix} -1 & -2 \\ -1 & -2 \\ 1 & 2 \end{matrix} \Rightarrow |BA| = (-1 \cdot -1 \cdot 1) - (1 \cdot -1 \cdot -1) = 0$$

$$A^T = A \times A^T = \begin{bmatrix} r_1 & * & * \\ * & r_2 & * \\ * & * & r_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_1 & * & * \\ * & r_2 & * \\ * & * & r_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_1^2 & * & * \\ * & r_2^2 & * \\ * & * & r_3^2 \end{bmatrix}$$
۱۰۲

$$A = \begin{bmatrix} * & * & * \\ * & 3 & * \\ * & * & 4 \end{bmatrix} \Rightarrow A^T = \begin{bmatrix} * & * & * \\ * & 3 & * \\ * & * & 4 \end{bmatrix}$$

۱۰۳

۱۰۴

$$A = \begin{bmatrix} r & \cdot & \cdot \\ \cdot & r & \cdot \\ \cdot & \cdot & r \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{bmatrix}$$

$$A \times B = \begin{bmatrix} r & \cdot & \cdot \\ \cdot & r & \cdot \\ \cdot & \cdot & r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} rb_{11} & rb_{12} & rb_{13} \\ rb_{21} & rb_{22} & rb_{23} \\ rb_{31} & rb_{32} & rb_{33} \end{bmatrix} = rB$$

$$B \times A = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r & \cdot & \cdot \\ \cdot & r & \cdot \\ \cdot & \cdot & r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} rb_{11} & rb_{12} & rb_{13} \\ rb_{21} & rb_{22} & rb_{23} \\ rb_{31} & rb_{32} & rb_{33} \end{bmatrix} = rB$$

$$\Rightarrow A \times B = B \times A = rB$$

$$A = \begin{bmatrix} r_1 & \cdot & \cdot \\ \cdot & r_2 & \cdot \\ \cdot & \cdot & r_3 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{bmatrix}$$

$$A \times B = \begin{bmatrix} r_1 b_{11} & r_1 b_{12} & r_1 b_{13} \\ r_2 b_{21} & r_2 b_{22} & r_2 b_{23} \\ r_3 b_{31} & r_3 b_{32} & r_3 b_{33} \end{bmatrix}$$

سطر اول B در r_1 ضرب می شود
سطر دوم B در r_2 ضرب می شود
سطر سوم B در r_3 ضرب می شود

$$B \times A = \begin{bmatrix} r_1 b_{11} & r_2 b_{12} & r_3 b_{13} \\ r_1 b_{21} & r_2 b_{22} & r_3 b_{23} \\ r_1 b_{31} & r_2 b_{32} & r_3 b_{33} \end{bmatrix}$$

سطر اول B در r_1 ضرب می شود
سطر دوم B در r_2 ضرب می شود
سطر سوم B در r_3 ضرب می شود

$$\begin{bmatrix} 4 & a \\ b & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4+3a & -8+2a \\ b-3 & -2b-2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} -8+2a=0 \Rightarrow a=4 \\ b-3=0 \Rightarrow b=3 \end{cases}$$

$$A^T = \begin{bmatrix} 1 & \cdot \\ \cdot & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \cdot \\ \cdot & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \cdot \\ \cdot & 1 \end{bmatrix} = I$$

$$A^T = A^T \times A = \begin{bmatrix} 1 & \cdot \\ \cdot & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \cdot \\ \cdot & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \cdot \\ \cdot & -1 \end{bmatrix} = A$$

$$A^T = I \quad A^T = A \quad A^V = A$$

۱۰۸

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 6 & 9 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 4 & -7 \\ 1 & 10 \end{bmatrix}$$

$$AB = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 6 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 & 16 \\ 33 & 48 \end{bmatrix}$$

$$AC = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 6 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & -7 \\ 1 & 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 & 16 \\ 33 & 48 \end{bmatrix} \Rightarrow AB = AC \neq B = C$$

$$A = \begin{bmatrix} \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \end{bmatrix} \quad B = [b_{ij}]_{2 \times 2} \quad C = [c_{ij}]_{2 \times 2}$$

$$AB = AC = \bar{O} \neq B = C$$

$$AB - AC = \bar{O} \Rightarrow A(B - C) = \bar{O} \neq \begin{cases} A = \bar{O} \\ B = C \end{cases}$$

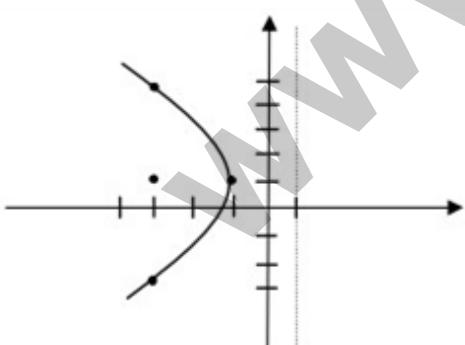
کوچکتر ۰/۲۵ ۱۰۹

دو دایره متخارج هستند. ۰/۲۵ ۱۱۰

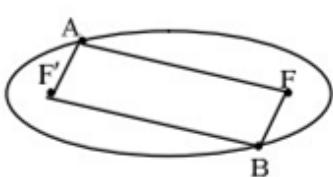
$$O_1 = (-1, 2), r_1 = 1, O_2 \underbrace{\left| \begin{array}{l} -\frac{a}{2} = 1 \\ \frac{b}{2} = -2 \end{array} \right.}_{0/5}, r_2 = \frac{1}{2} \sqrt{a^2 + b^2 - 4c} = 2$$

$$d = \underbrace{\sqrt{(-1 - 1)^2 + (2 + 2)^2}}_{0/5} = \sqrt{20} \Rightarrow \sqrt{20} > 1 + 2 = 3$$

الف) ۱۱۱



$(y - 1)^2 = -8(x + 1)$ (۰/۲۵) $\rightarrow A(-1, 1)$ (۰/۲۵)
 دهانه سهمی به چپ و $a = 2$, خط هادی $x = 1$ و
 کانون سهمی $F(-3, 1)$ (۰/۲۵)
 ب) نقاط کمکی: $B' = (-3, -3)$, $B = (-3, 5)$ (۰/۵)
 رسم شکل (۰/۵)



نقاط A و B را به کانون‌های بیضی وصل می‌کنیم

نقاط A روی بیضی قرار دارد بنا به تعریف بیضی (۱) (۰/۲۵)
 نقاط B روی بیضی قرار دارد (۲) (۰/۲۵)
 از (۱) و (۲) و فرض $AF = BF'$ (تیجه می‌شود) (۰/۲۵)

$$O(1,1) \xrightarrow{+/25} m_{oa} = \frac{3-1}{2-1} = 2 \xrightarrow{+/25} m' = -\frac{1}{2} \xrightarrow{+/25} y - 3 = \frac{-1}{2} (x - 2) \quad (+/25)$$
۱۱۳

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ x - y = 3 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 2 \quad (+/25) \\ y = -1 \quad (+/25) \end{cases}, r = \underbrace{\sqrt{2^2 + 3^2}}_{(+/5)} = \frac{|4(2) + 3(-1) + 5|}{5} = \frac{10}{5} = 2 \quad (+/25)$$
۱۱۴

مرکز دایره $(2, -1)$ و شعاع آن برابر $2 = r$ است. معادله دایره برابر با:

$$(x - 2)^2 + (y + 1)^2 = 4 \quad (+/25)$$

۱۱۵

۱۱۶

۱۱۷

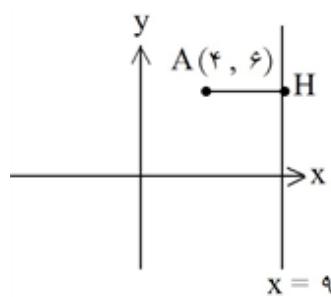
۱۱۸

www.akoedu.ir



www.akoedu.ir

۱۲۴



با توجه به جایگاه رأس و خط هادی این سهمی در دستگاه مختصات معلوم می‌شود
دهانه‌ی سهمی رو به چپ است. اگر عمود AH را بر خط هادی سهمی وارد کنیم
آنگاه طول عمود AH برابر ۵ و مساوی a در سهمی است. و معادله‌ی این نوع
سهمی به صورت زیر است.

$$(y - \beta)^2 = -4a(x - \alpha) \Rightarrow (y - 6)^2 = -20(x - 4)$$

و کانون این نوع سهمی، به صورت زیر است.

۱۲۵

۱۲۶

۱۲۷

۱۲۸

www.akoedu.ir

www.akoedu.ir



www.akoedu.ir

www.akoedu.ir



www.akoedu.ir

www.akoedu.ir

www.akoedu.ir

www.akoedu.ir

www.akoedu.ir

۱۵۳
۱۵۴
۱۵۵
۱۵۶
۱۵۷
۱۵۸

www.akoedu.ir

۱۵۹
۱۶۰
۱۶۱
۱۶۲
۱۶۳

www.akoedu.ir

۱۶۴
۱۶۵
۱۶۶
۱۶۷

www.akoedu.ir

۱۶۸

۱۶۹

۱۷۰

۱۷۱

۱۷۲

www.akoedu.ir

۱۷۳
۱۷۴
۱۷۵
۱۷۶
۱۷۷

www.akoedu.ir



www.akoedu.ir

۱۸۲

۱۸۳

۱۸۴

۱۸۵

www.akoedu.ir

۱۸۶
۱۸۷
۱۸۸
۱۸۹
۱۹۰
۱۹۱

www.akoedu.ir

۱۹۲
۱۹۳
۱۹۴
۱۹۵
۱۹۶
۱۹۷

www.akoedu.ir

۱۹۸
۱۹۹
۲۰۰
۲۰۱
۲۰۲
۲۰۳
۲۰۴
۲۰۵
۲۰۶
۲۰۷
۲۰۸

www.akoedu.ir

۲۰۹
۲۱۰
۲۱۱
۲۱۲
۲۱۳
۲۱۴
۲۱۵
۲۱۶

www.akoedu.ir

۲۱۷
۲۱۸
۲۱۹
۲۲۰
۲۲۱

www.akoedu.ir



www.akoedu.ir



www.akoedu.ir

۲۳۰
۲۳۱
۲۳۲
۲۳۳
۲۳۴
۲۳۵
۲۳۶
۲۳۷

www.akoedu.ir

۲۳۸

۲۳۹

۲۴۰

www.akoedu.ir



www.akoedu.ir

۲۴۷
۲۴۸
۲۴۹
۲۵۰
۲۵۱

www.akoedu.ir



www.akoedu.ir



www.akoedu.ir



www.akoedu.ir



www.akoedu.ir

۲۶۵
۲۶۶
۲۶۷
۲۶۸
۲۶۹

www.akoedu.ir



www.akoedu.ir

۲۸۰
۲۸۱
۲۸۲
۲۸۳
۲۸۴
۲۸۵
۲۸۶
۲۸۷
۲۸۸
۲۸۹

www.akoedu.ir

$$[+ \ -1] \times [+ x \ -1 + 1x \ + \ -x \ + 1x \ -1] = [+ \ -1]$$

۲۹۰

۲۹۱

۲۹۲

۲۹۳

۲۹۴

۲۹۵

۲۹۶

۲۹۷

۲۹۸

۲۹۹

۳۰۰

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 0 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$$

www.akoedu.ir