گروه مشاوره و برنامه ریزی

WWW.AKOEDU.IR

اولین و باکیفیت ترین

آکادمی کنکور در ایران

کلاس های vip کنکور

جهت دریافت برنامه ی شخصی سازی شده یک هفته ای رایگان کلیک کنید و یا به شماره ی ۰۹۰۲۵۶۴۶۲۳۴ عدد ۱ را ارسال کنید.

تلفن تماس: ۰۲۶۳۳۴۰۸۹۴۴

٤٠٠ سوال تشریحی گسسته دوازدهم نیمسال اول

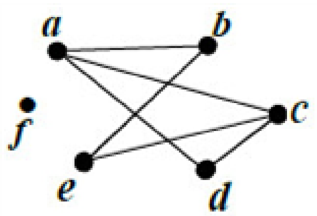
۱) ۵۴ شاخه گل را حداکثر در چند گلدان قرار دهیم تا اطمینان داشته باشیم گلدانی هست که در آن حداقل ۵ شاخه گل قرار گرفته است؟

۲) به چند طریق می‌توان ۴ کلاه متفاوت را بین ۸ نفر توزیع کرد به شرط آن‌که به هر نفر حداقل یک کلاه داده شود؟

۳) به چند طریق می‌توان ۴ کلاه متفاوت را بین ۳ نفر توزیع کرد به شرط آن‌که به هر نفر حداقل یک کلاه داده شود؟

۴) تفاوت بین مجموعه احاطه‌گر مینیمال و مینیمم چیست؟ توضیح دهید.

۵) گراف G که به صورت مقابل است را درنظر بگیرید.



الف) $N_G(C)$ را با اعضا مشخص کنید.

ب) بزرگ‌ترین درجه در گراف $\overline{G}$ مربوط به کدام رأس و چند است؟

پ) دوری به طول ۵ برای رأس a بنویسید.

ت) آیا گراف G همبند است؟

۶) معادله $7x \overset{4}{\equiv} 1$ را حل کنید.

۷) باقی‌مانده تقسیم عدد $A = (1000)^{25} \times 9 + 11$ را بر ۷ بیابید.

۸) ثابت کنید اگر: $p \geq 5$ عددی اول باشد، آن‌گاه به یکی از دو صورت $p = 4k + 1$ یا $p = 4k + 3$ نوشته می‌شود.

۹) به روش بازگشتی ثابت کنید حاصل‌ضرب هر دو عدد حقیقی، کوچک‌تر یا مساوی نصف مجموع مربعات آن‌ها است.

۱۰) درست یا نادرست بودن گزاره‌های زیر را مشخص کنید.

الف) حاصل‌ضرب سه عدد طبیعی متوالی بر ۶ بخش‌پذیر است.

ب) هیچ عدد صحیحی مانند x و y وجود ندارند که رابطه $(x+y)^2 = x^2 + y^2$ برقرار باشد.

۱۱) آیا گراف‌های C_n منتظم هستند؟

۱۲) گراف k- منتظم را تعریف کنید.

۱۳) معادله همنهشتی $8x \overset{12}{\equiv} 20$ را حل کرده و جواب عمومی آن‌را به دست آورید.

۱۴ باقی‌مانده تقسیم $\left(19 + 38^{36}\right)$ را بر ۴ به دست آورید.

۱۵ اگر a عددی طبیعی باشد، حاصل $(5a + 4 , 2a + 3)$ را به دست آورید.

۱۶ اگر باقی‌مانده تقسیم اعداد a و b بر ۱۷ برابر ۵ و ۳ باشد، در این صورت باقی‌مانده تقسیم عدد $(2a - 5b)$ بر ۱۷ را بیابید.

۱۷ اگر α و β دو عدد گنگ باشند ولی $\alpha + \beta$ گویا باشد، با استفاده از برهان خلف ثابت کنید $\alpha - \beta$ گنگ است.

۱۸ گزاره‌های درست را مشخص کرده و برای گزاره‌های نادرست، مثال نقض ارائه کنید.

الف) برای هر عدد طبیعی n بزرگ‌تر از ۱، عدد $2^n - 1$ اول است.

ب) برای دو عدد طبیعی a و b، اگر $a|b$ آن‌گاه $[a , b] = |b|$.

پ) معادله هم‌نهشتی $ax \overset{m}{\equiv} b$ دارای جواب است اگر و تنها اگر $(a , b)|m$.

۱۹ درست یا نادرست بودن عبارت زیر را مشخص کنید.

معادله هم‌نهشتی $ax \overset{m}{\equiv} b$ دارای جواب است اگر و تنها اگر $(a , b)|m$.

۲۰ جای خالی را پر کنید.

مقدار $\gamma(C_n)$ به ازای هر عدد طبیعی $n > 2$ برابر است با: ....

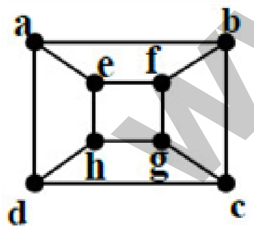
۲۱ جای خالی را پر کنید.

گراف G را .... می‌نامیم هرگاه بین هر دو رأس آن حداقل یک مسیر وجود داشته باشد.

۲۲ آیا گراف ۷ رأسی ۳- منتظم وجود دارد، برای پاسخ خود دلیل ارائه کنید.

۲۳ فرض کنید $a , b \in Z , m \in N$ اگر $a \overset{m}{\equiv} b$ ثابت کنید: $n \in N , a^n \overset{m}{\equiv} b^n$.

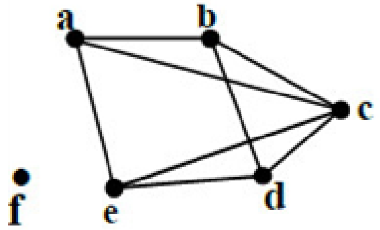
۲۴ عدد احاطه‌گری گراف زیر را مشخص کنید.



۲۵ گراف کامل K_p دارای ۱۰ یال است. ابتدا p را به دست آورید، سپس گراف را رسم کنید.

تلفن تماس: ۰۲٦۳۳٤۰۸۹٤٤

۲۶ گراف G به صورت مقابل رسم شده است. به سؤالات زیر پاسخ دهید.



الف) $\Delta(G)$, $\delta(G)$ را مشخص کنید.

ب) سه دور به طول ۳ بنویسید.

پ) ماکزیمم درجه در مکمل گراف G چند است؟

ت) $N_G(e)$ را با اعضا بنویسید.

ث) آیا گراف G همبند است؟

۲۷ معادله سیاله $۲x + ۵y = ۱۹$ را حل کنید.

۲۸ رقم یکان عدد $(۲^{۱۱} + ۷)$ را به دست آورید.

۲۹ اگر باقی‌مانده تقسیم اعداد m و n بر ۱۷ به‌ترتیب ۵ و ۳ باشد، در این صورت باقی‌مانده تقسیم عدد $(۲m - ۵n)$ بر ۱۷ را محاسبه کنید.

۳۰ ثابت کنید اگر $p > ۳$ عددی اول باشد، آن‌گاه به یکی از دو صورت $p = ۶k + ۱$ یا $p = ۶k + ۵$, $(k \in W)$ نوشته می‌شود.

۳۱ فرض کنیم a و n دو عدد طبیعی باشند به طوری‌که $a|۳n + ۴$ و $a|۲n + ۳$. نشان دهید $a = ۱$.

۳۲ ثابت کنید اگر a و b دو عدد حقیقی نامنفی باشند، داریم: $\frac{a+b}{۲} \geq \sqrt{ab}$.

۳۳ در بین اعداد طبیعی مانند n، به طوری‌که $۱ \leq n \leq ۱۰۰$، چند عدد وجود دارد که بر ۶ یا ۱۰ بخش‌پذیر است؟

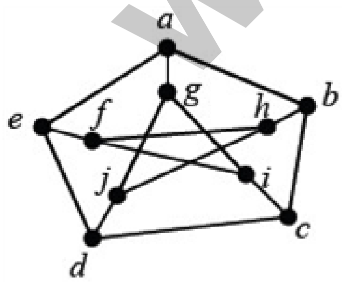
۳۴ ثابت کنید تعداد رأس‌های فرد هر گراف، عددی زوج است.

۳۵ گراف G، ۶ رأسی ۳- منتظم است.

الف) اندازه گراف G را بیابید.
ب) نمودار گراف G را رسم کنید.

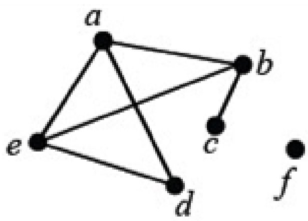
۳۶ اگر x و y دو عدد حقیقی مثبت باشند، ثابت کنید $\frac{x}{y} + \frac{y}{x} \geq ۲$.

۳۷ عدد احاطه‌گری گراف زیر را مشخص و ادعای خود را ثابت کنید.



۳۸ در گراف G، درجه رأس v برابر با ۹ است و درجه رأس v در گراف $\overline{G}$ برابر با ۱۲ است. مرتبه گراف G را مشخص کنید.

۳۹) گراف G را درنظر گرفته و به سوالات زیر پاسخ دهید.



الف) $N_G[a]$ را با اعضا مشخص کنید.

ب) یک دور به طول ۴ در این گراف مشخص کنید.

پ) یک مسیر به طول ۳ و یک مسیر به طول ۴ از a به c بنویسید.

۴۰) معادله همنهشتی $5x \overset{11}{\equiv} 2$ را حل کرده و جواب عمومی آنرا بنویسید.

۴۱) باقی‌مانده تقسیم 7^{30} بر ۱۵ را به دست آورید.

۴۲) اگر $n \in N$، $n|9k+7$ و $n|7k+6$، ثابت کنید $n=1$ یا $n=5$.

۴۳) اگر باقی‌مانده تقسیم عدد a بر ۴ برابر ۳ باشد، در این صورت باقی‌مانده تقسیم عدد $2a+3$ بر ۸ را به دست آورید.

۴۴) گزاره درست را اثبات کنید و برای گزاره نادرست، مثال نقض ارائه دهید.

الف) مجموع هر دو عدد گنگ، عددی گنگ است.

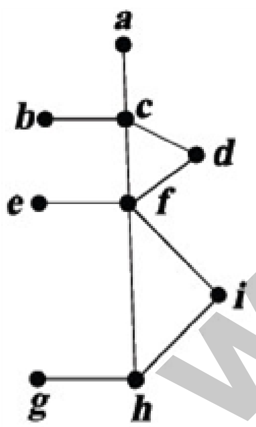
ب) اگر از مربع عددی فرد یک واحد کم کنیم، حاصل همواره بر ۸ بخش‌پذیر است.

۴۵) اگر n تعداد رئوس گراف و Δ ماکزیمم درجه گراف باشد

الف) گرافی رسم کنید که برای آن عدد احاطه‌گر برابر $\left\lceil \frac{n}{\Delta+1} \right\rceil$ است.

ب) گرافی رسم کنید که برای آن عدد احاطه‌گری بزرگ‌تر از $\left\lceil \frac{n}{\Delta+1} \right\rceil$ باشد.

۴۶) برای گراف روبه‌رو:

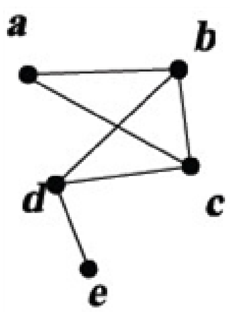


الف) یک مجموعه احاطه‌گر با ۴ عضو مشخص کنید.

ب) مجموعه‌ای از رئوس را مشخص کنید که احاطه‌گر مینیمال باشد.

۴۷) گراف k- منتظم از مرتبه n را تعریف کنید.

۴۸) گراف G به صورت مقابل را درنظر بگیرید و به سؤالات زیر پاسخ دهید.



الف) $\delta(G)$ را مشخص کنید.

ب) اندازه گراف را تعیین کنید.

پ) مجموعه همسایگی بسته رأس b را بنویسید.

ت) اگر $N_G(d)=\{e, x, b\}$ باشد، x کدام رأس است؟

۴۹ جواب‌های عمومی معادله سیاله خطی $۹x + ۱۳y = ۷$ را به دست آورید.

۵۰ ثابت کنید می‌توان دو طرف یک رابطه همنهشتی را در عددی صحیح ضرب کرد، به عبارتی دیگر، برای اعداد صحیح a , b , c و عدد طبیعی m، اگر $a \overset{m}{\equiv} b$ آن‌گاه $ac \overset{m}{\equiv} bc$.

۵۱ باقی‌مانده تقسیم $۱۳^{۲۲}$ را بر ۱۷ به دست آورید.

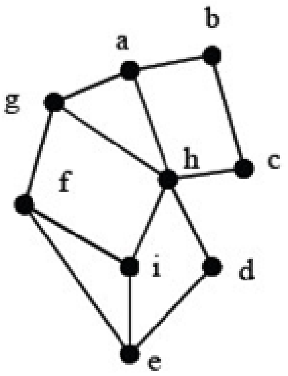
۵۲ فرض کنید a عددی طبیعی باشد، حاصل $[۲۱a^۲ , ۳۵a^۳]$ را به دست آورید.

۵۳ اگر عدد طبیعی $a > ۱$، در دو شرط $a|۴k + ۹$ و $a|۶k + ۱۴$ صدق کند، مقدار a را بیابید.

۵۴ به روش بازگشتی ثابت کنید، اگر $a > ۰$ آن‌گاه $a + \frac{۱}{a} \geq ۲$.

۵۵ چند عدد طبیعی مانند n به طوری‌که $۱ \leq n \leq ۳۵۰$ وجود دارد که بر هیچ‌یک از اعداد ۴ و ۶ بخش‌پذیر نباشد.

۵۶ در گراف شکل مقابل یک مجموعه احاطه‌گر غیرمینیمال انتخاب کنید. سپس با حذف برخی از رأس‌ها، آن‌را به یک مجموعه احاطه‌گر مینیمال تبدیل نمایید.



۵۷ یک گراف ۵ رأسی غیرتهی k- منتظم رسم کنید به طوری‌که:

الف) k بیش‌ترین مقدار ممکن را داشته باشد. ب) k کم‌ترین مقدار ممکن را داشته باشد.

۵۸ گراف G با مجموعه رأس‌های $V = \{a , b , c , d , e , f\}$ و مجموعه یال‌های زیر درنظر بگیرید:

$E = \{ab , bc , cd , ed , ae , cf , ef\}$

الف) نمودار گراف را رسم کنید.

ب) $N_G[b]$ را مشخص کنید.

ج) یک مسیر به طول ۵ از b به d بنویسید.

۵۹ با تبدیل معادله سیاله خطی $۲۰۰۰x + ۵۰۰۰y = ۲۹۰۰۰$ به معادله همنهشتی و حل آن، جواب‌های عمومی این معادله را بیابید.

۶۰ باقی‌مانده تقسیم $۱۹ + (۲۷)^۷$ را بر ۱۳ بیابید.

۶۱ برای هر سه عدد حقیقی x , y , z ثابت کنید:

$x^۲ + y^۲ + z^۲ \geq xy + yz + xz$

تلفن تماس: ۰۲۶۳۳۴۰۸۹۴۴

۶۲ جای خالی را پر کنید.

$[a , b] = c$ اگر و تنها اگر دو شرط زیر برقرار باشند:

۱) $a|c , b|c$ ۲) $\forall m > ۰ , \dots$

۶۳ در بین اعداد طبیعی ۱ تا ۲۰۰ $(۱ \leq n \leq ۲۰۰)$ چند عدد وجود دارد که بر ۴ بخش‌پذیر باشند ولی بر ۷ بخش‌پذیر نباشند؟

۶۴ در بین اعداد طبیعی ۱ تا ۹۰ $(۱ \leq n \leq ۹۰)$ چند عدد وجود دارد که بر ۲ یا ۳ بخش‌پذیر باشند؟

۶۵ گراف $P_{۱۲}$ را رسم کنید.

الف) یک γ - مجموعه از آن‌را مشخص نمایید.

ب) یک مجموعه‌ی احاطه‌گر مینیمال ۶ عضوی از آن‌را مشخص نمایید.

۶۶ برای هر $n \in N$ $(n \geq ۴)$ دلخواه توضیح دهید که:

الف) چگونه می‌توانید یک گراف n رأسی با عدد احاطه‌گری ۲ رسم کنید که یک مجموعه احاطه‌گر یکتا با اندازه‌ی ۲ داشته باشد.

ب) چگونه می‌توانید یک گراف n رأسی با عدد احاطه‌گری ۲ رسم کنید که بیش از یک مجموعه‌ی احاطه‌گر با اندازه‌ی ۲ داشته باشد.

۶۷ الف) یک گراف ۶ رأسی با عدد احاطه‌گری ۲ رسم کنید که یک مجموعه‌ی احاطه‌گر یکتا با اندازه‌ی ۲ داشته باشد.

ب) یک گراف ۶ رأسی با عدد احاطه‌گری ۲ رسم کنید که بیش از یک مجموعه‌ی احاطه‌گر با اندازه‌ی ۲ داشته باشد.

۶۸ الف) یک گراف ۶ رأسی که γ- مجموعه‌ی آن با اندازه یک باشد رسم کنید.

ب) یک گراف ۶ رأسی که γ- مجموعه‌ی آن با اندازه دو باشد رسم کنید.

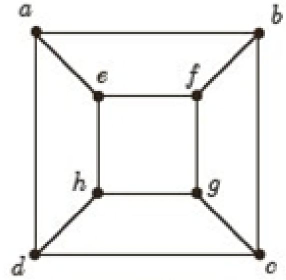
پ) فرض کنید n و k دو عدد طبیعی باشند و $k \leq \frac{n}{۲}$. روشی برای رسم یک گراف n رأسی که عدد احاطه‌گری آن k باشد، ارائه دهید.

۶۹ یک گراف ۲- منتظم ۱۲ رأسی بکشید که عدد احاطه‌گری آن کم‌ترین مقدار ممکن باشد.

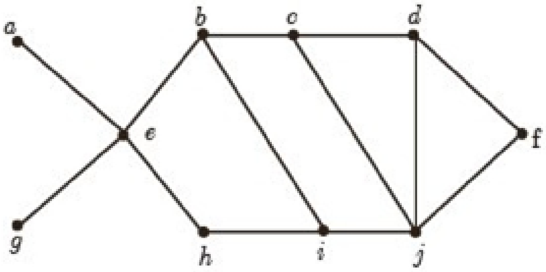
۷۰ $\gamma(P_n)$ و $\gamma(C_n)$ را به ازای هر $n \in N$ مشخص کنید.

۷۱ اگر برای گراف G داشته باشیم $\gamma(G) = ۱$، در این صورت به چه ویژگی‌هایی از گراف G می‌توان پی برد؟ ($\Delta(G)$ و حداقل و حداکثر تعداد یال‌هایی را که گراف G می‌تواند داشته باشد مشخص کنید.)

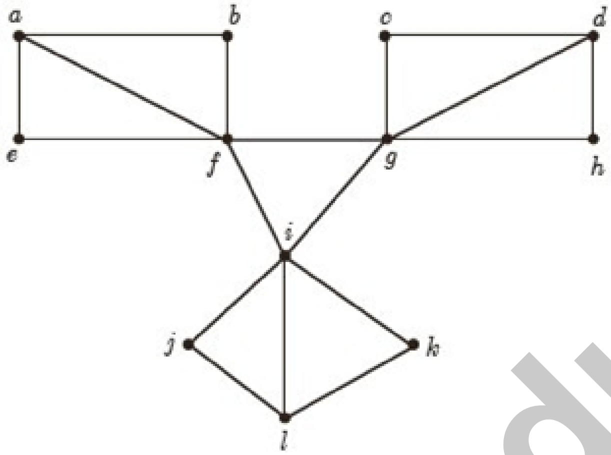
۷۲ عدد احاطه‌گری را برای هریک از گراف‌های زیر مشخص نمایید.



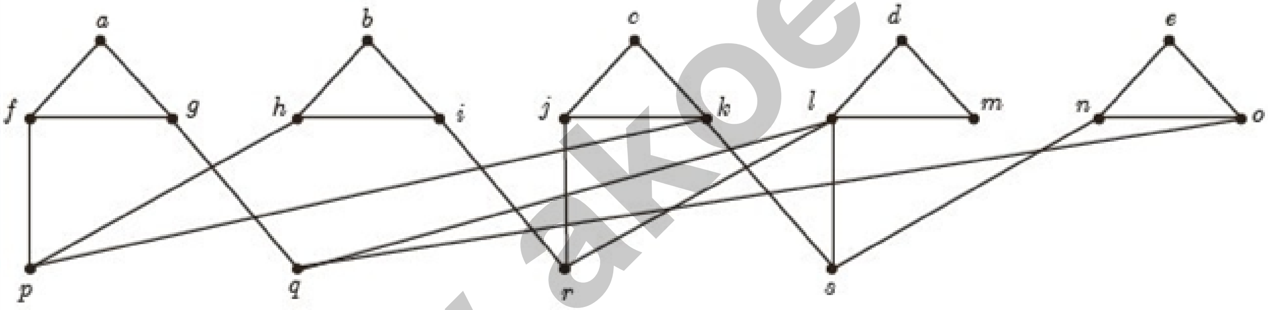
(الف)



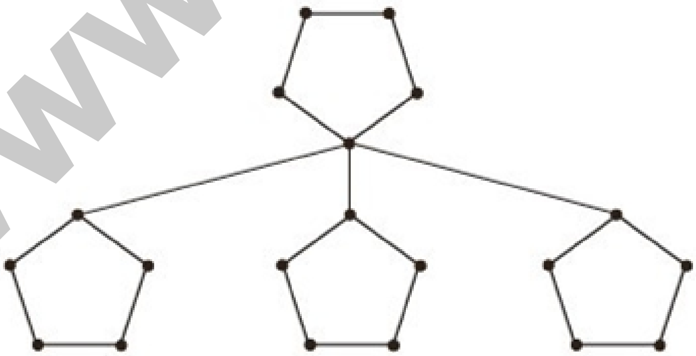
(ب)



(پ)

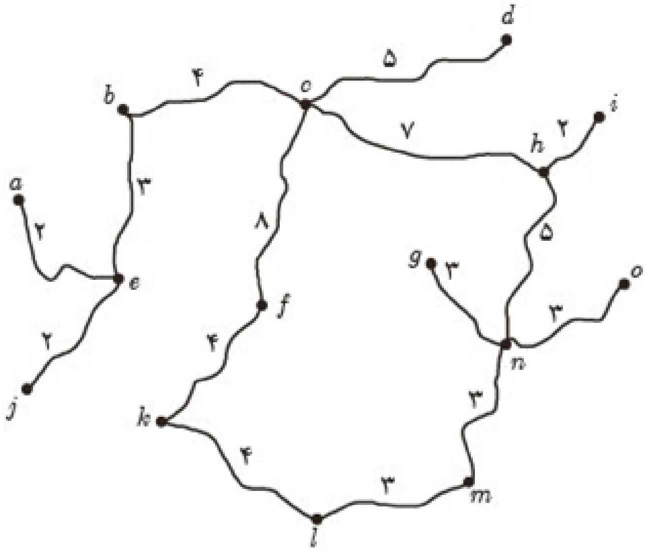


(ت)



(ث)

۷۳ نقشه‌ی مقابل نقشه‌ی یک منطقه شامل چند روستا و جاده‌های بین آن روستاها است و مسافت جاده‌ها بین روستاها در آن مشخص شده است. قصد داریم چند بیمارستان مجهز در برخی روستاها احداث کنیم به گونه‌ای که فاصله‌ی هر روستا تا نزدیک‌ترین بیمارستان به آن روستا از ۱۰ کیلومتر بیش‌تر نباشد و از طرفی کم‌ترین تعداد ممکن بیمارستان را احداث کنیم. ابتدا با توجه به نقشه‌ی فوق، مسئله‌ی موردنظر را با یک گراف مناسب مدل‌سازی کنید و سپس تعداد و محل احداث بیمارستان‌ها را مشخص کنید.



۷۴ در مثال ایستگاه‌های رادیویی (دومین مثال این درس)

الف) تعداد و محل نصب ایستگاه‌ها را مشخص نمایید.

ب) اگر مجبور باشیم یکی از ایستگاه‌ها را در شهر b احداث کنیم حداکثر چند ایستگاه دیگر و در چه شهرهایی باید احداث کنیم؟

۷۵ یک گراف ۴ رأسی غیرتهی K- منتظم بکشید که:

الف) K بیش‌ترین مقدار ممکن را داشته باشد. ب) K کم‌ترین مقدار ممکن را داشته باشد.

۷۶ فرض کنید G یک گراف باشد و $\delta(G) \geq K$. درستی یا نادرستی هریک از موارد زیر را ثابت کنید.

الف) G لزوماً شامل یک مسیر به طول K است.

ب) G لزوماً شامل یک مسیر به طول $K+1$ است.

۷۷ یک گراف ۹ رأسی رسم کنید به طوری‌که:

الف) دورهایی به طول ۵ و ۶ و ۷ و ۹ داشته باشد و هیچ دوری به طول غیر از اعداد مذکور نداشته باشد.

ب) دورهایی به طول ۵ و ۶ و ۸ و ۹ داشته باشد و دوری به طول غیر از اعداد مذکور نداشته باشد.

۷۸ علی، سامان، محمد، ناصر و مهرداد، در یک شبکه‌ی اجتماعی عضو هستند و هر کدام از آن‌ها ممکن است در فهرست دوستان هر کدام از ۴ نفرِ دیگر باشد یا نباشد.

الف) چند حالت مختلف می‌تواند وجود داشته باشد؟

ب) اگر بودن در فهرست دوستان به این صورت باشد که هر دو نفر، یا هر دو در فهرست دوستان هم هستند و یا هیچ‌کدام در فهرست دوستان دیگری نیست، در این صورت چند حالت مختلف می‌تواند وجود داشته باشد؟

۷۹ هفت نفر در یک اتاق هستند و برخی از آن‌ها با یک‌دیگر دست می‌دهند. ۶ نفر از آن‌ها هر کدام دقیقاً با ۲ نفر دست داده‌اند. نشان دهید نفر هفتم نمی‌تواند دقیقاً با ۵ نفر دست داده باشد.

۸۰ برای هریک از حالت‌های زیر در صورت امکان یک گراف ۵ رأسی رسم کنید به طوری‌که:

الف) یک رأس تنها داشته باشد. ب) دو رأس تنها داشته باشد.

پ) سه رأس تنها داشته باشد. ت) چهار رأس تنها داشته باشد.

ث) پنج رأس تنها داشته باشد.

تلفن تماس: ۰۲۶۳۳۴۰۸۹۴۴

۸۱) در هریک از حالات زیر در صورت امکان یک گراف r- منتظم از مرتبه‌ی n رسم کنید.

الف) $n = 4$ $\quad r = 1$ | ب) $n = 4$ $\quad r = 2$

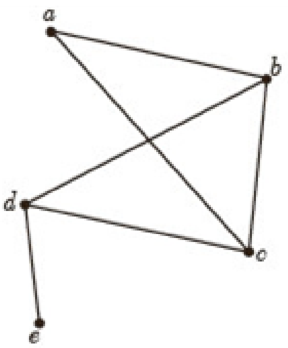
پ) $n = 5$ $\quad r = 2$ | ت) $n = 5$ $\quad r = 3$

ث) $n = 6$ $\quad r = 4$ | ج) $n = 7$ $\quad r = 3$

۸۲) گراف‌های کامل از مرتبه‌ی ۱ تا ۵ را رسم کنید.

۸۳) گراف کامل K_p دارای ۳۶ یال است. در این گراف $\Delta(G)$ و $\delta(G)$ را مشخص کنید.

۸۴) گراف G (شکل روبه‌رو) رسم شده است. مجموع درجه‌های رأس‌های گراف $\overline{G}$ را مشخص کنید و همچنین درجات رئوس a و c در گراف $\overline{G}$ را تعیین نمایید.



۸۵) گراف G با مجموعه‌ی رأس‌های $V(G) = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6\}$ مفروض است. اگر $N_G(v_1)$ دارای ۵ عضو باشد و مجموعه‌های $N_G(v_i)$ برای $2 \leq i \leq 6$ تک‌عضوی باشند، گراف G را رسم کنید.

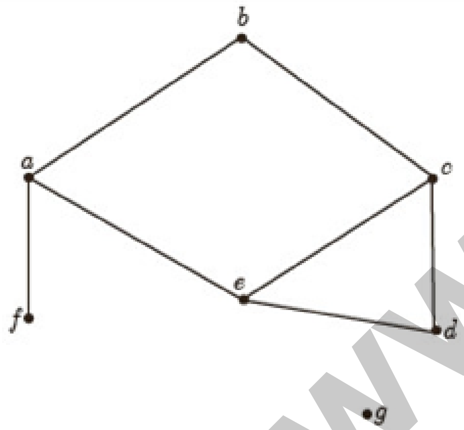
۸۶) گراف G (شکل روبه‌رو) را درنظر بگیرید.

الف) مجموعه‌های $V(G)$ و $E(G)$ را بنویسید.

ب) $\Delta(G)$ و $\delta(G)$ را مشخص نمایید.

پ) مجموعه‌ی همسایه‌های رأس‌های f و g و e را بنویسید.

ت) اگر $N_G(x) = \{a, c\}$، آن‌گاه x کدام رأس است؟



۸۷) گراف G با مجموعه‌ی رأس‌های $V(G) = \{a, b, c, d, e, f\}$ و مجموعه‌ی یال‌های $E(G) = \{ab, ac, cd, ef, db, cf, be\}$ مفروض است. نمودار آنرا رسم کنید و به موارد زیر جواب دهید.

الف) مرتبه و اندازه گراف G را بنویسید.

ب) درجه‌ی رأس‌های G را مشخص نمایید.

پ) مجموع درجات رئوس این گراف برابر چند است؟

ت) کدام رأس‌های گراف G با رأس f مجاورند؟

ث) گراف H با مجموعه رأس‌های $V(H) = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ و مجموعه‌ی یال‌های $E(H) = \{v_1v_2, v_1v_3, v_2v_3, v_2v_4, v_3v_4, v_4v_1\}$ مفروض است. بدون کشیدن نمودار آن به قسمت‌های (الف) تا (پ) در مورد گراف H پاسخ دهید.

تلفن تماس: ۰۲۶۳۳۴۰۸۹۴۴

۸۸ شخصی در یک مسابقه‌ی علمی شرکت کرده است. او به سؤالات ۷ امتیازی و ۹ امتیازی پاسخ داده و مجموعاً ۷۳ امتیاز کسب کرده است. این شخص به چه صورت‌هایی توانسته این امتیاز را به دست آورد؟ (پاسخ به هر سؤال یا امتیاز کامل دارد و یا امتیازی ندارد)

۸۹ به چند طریق می‌توان یک کیسه‌ی ۲۳ کیلویی را با وزنه‌های ۳ و ۵ کیلویی وزن کرد؟

۹۰ همه‌ی اعداد صحیح چون a را بیابید که ۵ برابر آن‌ها به علاوه‌ی ۹ بر ۱۱ بخش‌پذیر باشد.

۹۱ اگر ۱۲ بهمن در یک سال جمعه باشد، ۳۱ مرداد ماه در همان سال چه روزی از هفته است؟

۹۲ اگر اول مهر ماه در یک سال روز یکشنبه باشد، ۷ اسفندماه در همان سال چه روزی از هفته است؟

۹۳ معادله‌های همنهشتی زیر را در صورت امکان حل کرده و جواب‌های عمومی آن‌ها را به دست آورید.

الف) $۴۲۳x \overset{۱۱}{\equiv} ۷۹$

ب) $۸x \overset{۱۲}{\equiv} ۲۰$

ج) $۵۱x \overset{۶}{\equiv} ۱۱$

۹۴ به چند طریق می‌توان ۲۹۰۰۰ تومان را به اسکناس‌های ۲۰۰۰ و ۵۰۰۰ تومانی تبدیل کرد؟

۹۵ جواب‌های عمومی معادله‌ی سیاله‌ی خطی $۷x + ۵y = ۱۱$ را به دست آورید.

۹۶ باقی‌مانده تقسیم عدد $A = ۱! + ۲! + ۳! + \dots + ۵۰۰!$ را بر ۱۰ به دست آورید (رقم یکان A را بیابید)

۹۷ اگر دو عدد $(۳a - ۵)$ و $(۴a - ۷)$ رقم یکان برابر داشته باشند رقم یکانِ عدد $(۹a + ۶)$ را به دست آورید.

۹۸ باقی‌مانده تقسیم عدد $A = (۲^{۱۱} + ۷) \times ۹$ را بر ۲۳ بیابید.

۹۹ با استفاده از بسط دو جمله‌ای خیام یعنی،

$$(a+b)^n = \binom{n}{۰} \times a^n + \binom{n}{۱} \times a^{n-۱}b + \binom{n}{۲} \times a^{n-۲}b^۲ + \binom{n}{۳} \times a^{n-۳}b^۳ + \dots + \binom{n}{n} \times b^n$$

ثابت کنید عدد $۱۲^{۵۱} - ۱۱^{۵۱} - ۲۳^{۵۱}$ بر عدد ۱۳۲ بخش‌پذیر است.

۱۰۰ با استفاده از بسط دو جمله‌ای خیام یعنی،

$$(a+b)^n = \binom{n}{۰} \times a^n + \binom{n}{۱} \times a^{n-۱}b + \binom{n}{۲} \times a^{n-۲}b^۲ + \binom{n}{۳} \times a^{n-۳}b^۳ + \dots + \binom{n}{n} \times b^n$$

ثابت کنید که برای هر $n \in N$ و $a , b \in Z$ همواره $(a+b)^n \overset{ab}{\equiv} a^n + b^n$.

۱۰۱ عکس تمرین ۵ را بیان و اثبات کنید.

تلفن تماس: ۰۲۶۳۳۴۰۸۹۴۴

۱۰۲ ثابت کنید: اگر باقی‌مانده‌های تقسیم دو عدد a و b بر m مساوی باشند آن‌گاه $a \overset{m}{\equiv} b$.

۱۰۳ فرض کنیم، $a \overset{m}{\equiv} b$ و $b \overset{n}{\equiv} c$ و $(m\,,\,n)=d$ در این صورت ثابت کنید $a \overset{d}{\equiv} c$.

۱۰۴ اگر $a \overset{m}{\equiv} b$ و $n|m$ ثابت کنید $a \overset{n}{\equiv} b$.

۱۰۵ عدد ۱۳۹۸ به کدام دسته‌ی هم‌نهشتی به پیمانه‌ی ۹ تعلق دارد؟

۱۰۶ حاصل هریک را به دست آورید: $(m \in Z)$

الف) $([m^۲\,,\,m]\,,\,m^۵)$

ب) $(۲m\,,\,۶m^۳)$

پ) $(۳m+۱\,,\,۳m+۲)$

ت) $[m^۷\,,\,(m^۲\,,\,m^۳)]$

ث) $[(۷۲\,,\,۴۸)\,,\,۱۲۰]$

۱۰۷ ثابت کنید حاصل‌ضرب سه عدد صحیح متوالی همواره بر !۳ بخش‌پذیر است.

۱۰۸ ثابت کنید تفاضل مکعب‌های دو عدد صحیح متوالی عددی فرد است.

۱۰۹ اگر a عددی صحیح و دلخواه باشد ثابت کنید همواره یکی از اعداد صحیح a یا $a+۲$ یا $a+۴$ بر ۳ بخش‌پذیر است.

۱۱۰ اگر در یک تقسیم، مقسوم و مقسوم‌علیه، هر دو بر عدد صحیح n بخش‌پذیر باشند، ثابت کنید باقی‌مانده‌ی تقسیم نیز همواره بر n بخش‌پذیر است.

۱۱۱ اگر n عددی صحیح باشد ثابت کنید $۳|n^۳-n$

(راهنمایی: برای n سه حالت $n=۳k$ و $n=۳k+۱$ و ... درنظر بگیرید و در هر حالت ثابت کنید $۳|n^۳-n$).

۱۱۲ اگر a عددی صحیح و فرد باشد و $b|a+۲$ در این صورت باقی‌مانده‌ی تقسیم عدد $(a^۲+b^۲+۳)$ بر ۸ را بیابید.

۱۱۳ اگر باقی‌مانده‌ی تقسیم عدد a بر دو عدد ۷ و ۸ به‌ترتیب ۵ و ۷ باشد، باقی‌مانده‌ی تقسیم عدد a را بر ۵۶ بیابید.

۱۱۴ اگر $m\,,\,n \in N$ و $a\,,\,b \in Z$ ثابت کنید: $m \le n\,,\,a|b \Rightarrow a^m|b^n$

۱۱۵ اگر $p \neq q$ و p و q هر دو عدد اول باشند ثابت کنید $(p\,,\,q)=۱$.

تلفن تماس: ۰۲۶۳۳۴۰۸۹۴۴

۱۱۶ ثابت کنید:

الف) هر دو عدد صحیح و متوالی نسبت به هم اول‌اند.

ب) هر دو عدد صحیح و فرد متوالی نسبت به هم اول‌اند.

(راهنمایی: فرض کنید $(m , m+1) = d$ و ثابت کنید $d|1$ و نتیجه بگیرید $d = 1$).

۱۱۷ آیا از این‌که $a|b$ و $c|d$، همواره می‌توان نتیجه گرفت که $a + c|b + d$؟

۱۱۸ اگر عددی مانند k در Z باشد به طوری‌که $5|4k+1$، ثابت کنید: $25|16k^2 + 28k + 6$

۱۱۹ اگر $a > 1$ و $a|9k+4$ و $a|5k+3$، ثابت کنید a عددی اول است.

۱۲۰ ثابت کنید: اگر $a|b$ آن‌گاه $a|-b$ و $-a|b$ و $-a|-b$.

۱۲۱ فرض می‌کنیم $ab = cd$ (a , b , c و d اعداد صحیح و ناصفرند) در این صورت پنج رابطه‌ی عاد کردن از این تساوی نتیجه بگیرید.

۱۲۲ گزاره‌های زیر را اثبات و یا با ارائه مثال نقض آن‌ها را رد کنید.

الف) مربع و مکعب هر عدد فرد عددی فرد است.

ب) میانگین پنج عدد طبیعی متوالی همان عدد وسطی است.

۱۲۳ آیا مقادیر حقیقی و ناصفر a و b چنان وجود دارند که: $\frac{1}{a+b} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} \quad (a + b \neq 0)$

۱۲۴ آیا اعدادی صحیح مانند x و y وجود دارند که: $x^2 + y^2 = (x + y)^2$

۱۲۵ اگر α و β دو عدد گنگ باشند ولی $\alpha + \beta$ گویا باشد، ثابت کنید $\alpha - \beta$ و $\alpha + 2\beta$ گنگ هستند.

۱۲۶ عددی حقیقی مانند x ارائه کنید به طوری‌که $x^3 < x^2$.

۱۲۷ گزاره‌های زیر را به روش بازگشتی (گزاره‌های هم‌ارز) ثابت کنید:

الف) اگر x و y دو عدد حقیقی هم‌علامت باشند داریم: $\frac{x}{y} + \frac{y}{x} \geq 2$

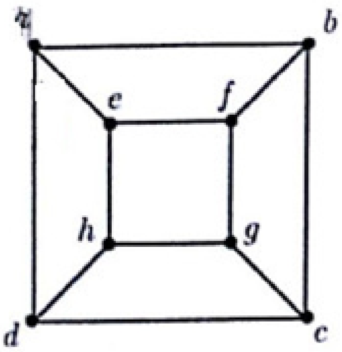
ب) برای هر سه عدد حقیقی x و y و z داریم: $x^2 + y^2 + z^2 \geq xy + yz + zx$

پ) برای هر دو عدد حقیقی x و y داریم: $x^2 + y^2 + 1 \geq xy + x + y$

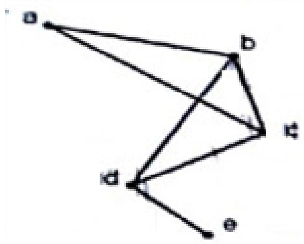
۱۲۸ اگر عدد احاطه‌گری در یک گراف ۵ رأسی برابر یک باشد در این صورت $\Delta(G)$ و حداقل و حداکثر تعداد یال‌هایی را که گراف G می‌تواند داشته باشد مشخص کنید.

۱۲۹) در هر قسمت، گراف خواسته شده را رسم کنید.
الف) یک گراف ۲ منظم از مرتبه ۸ که عدد احاطه‌گری آن کمترین مقدار ممکن است را داشته باشد.
ب) یک گراف ۵ راسی که ۷- مجموعه‌ی آن با اندازه یک باشد.
ج) یک گراف ۶ راسی با عدد احاطه‌گری ۲ رسم کنید که یک مجموعه‌ی احاطه‌گر یکتا با اندازه‌ی ۲ داشته باشد.

۱۳۰) در گراف شکل مقابل:
الف) یک مجموعه‌ی احاطه‌گر مینیمم مشخص کنید.
ب) یک مجموعه احاطه‌گر مینیمال مشخص کنید که مینیمم نباشد.



۱۳۱) گراف G را (مطابق شکل مقابل) در نظر بگیرید.
الف) مجموعه رئوس و مجموعه یال‌ها را بنویسید.
ب) در گراف G، یک دور به طول ۳ بنویسید.
ج) درجه راس e را در گراف $\overline{G}$ مشخص کنید.



۱۳۲) جواب عمومی معادله $۴x \overset{۵}{\equiv} ۱۷$ را به دست آورید.

۱۳۳) اگر عددی مانند k در Z باشد، به طوری‌که $۵|۴k + ۱$، ثابت کنید: $۲۵|۱۶k^۲ + ۲۸k + ۶$.

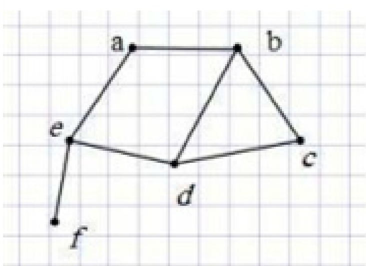
۱۳۴) گزاره زیر را به روش بازگشتی (گزاره‌های هم‌ارز) ثابت کنید.
(برای هر عدد حقیقی $a > ۰$ داریم: $a + \frac{۱}{a} \geq ۲$)

۱۳۵) ثابت کنید حاصل جمع یک عدد گویا و یک عدد گنگ عددی گنگ است.

۱۳۶) در جای خالی عبارت ریاضی مناسب قرار دهید.
حاصل عبارت $[(۸ , ۶) , ۱۲]$ برابر .... خواهد شد.

۱۳۷) الف) یک گراف ۶ رأسی با عدد احاطه‌گری ۲ رسم کنید که یک مجموعه احاطه‌گر یکتا با اندازه ۲ داشته باشد.
ب) یک گراف ۶ رأسی احاطه‌گری ۲ رسم کنید که بیش از یک مجموعه احاطه‌گر با اندازه ۲ داشته باشد.

۱۳۸) شکل مقابل نمودار گراف G می‌باشد.
الف) مرتبه و اندازه گراف G را بنویسید.
ب) مجموعه $N_G(b)$ را بنویسید.
ج) مجموع درجه‌های رأس‌های گراف $\overline{G}$ را مشخص کنید.



تلفن تماس: ۰۲۶۳۳۴۰۸۹۴۴

۱۳۹) با تبدیل معادله سیاله خطی $۵x + ۲y = ۱۸$ به معادله هم نهشتی و حل آن، جوابهای عمومی این معادله را بیابید.

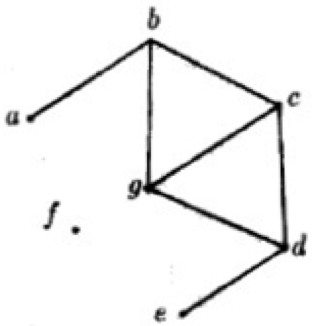
۱۴۰) اگر در یک سال، شنبه روز اول مهر باشد، در این صورت با استفاده از هم نهشتی تعیین کنید ۱۲ بهمن، در همان سال چه روزی از هفته است؟

۱۴۱) در جاهای خالی عبارت ریاضی مناسب قرار دهید.
الف) یک گراف کامل ۸ رأسی، .... یال دارد.
ب) در یک گراف از مرتبه ۱۰ با $\Delta = ۳$ حداقل .... رأس برای احاطه همه رئوس لازم است.
ج) اگر در گراف G از مرتبه P داشته باشیم $\gamma(G) = ۱$ در این صورت $\Delta(G)$ برابر .... است.

۱۴۲) گراف کامل k_p دارای ۳۶ یال است در این گراف، مرتبه گراف و $\Delta(G)$ را مشخص کنید.

۱۴۳) گراف G با مجموعه رأس‌های $V(G) = \{a , b , c , d , e\}$ و
مجموعه‌ی یال‌های $E(G) = \{ae , bc , bd , be , ec , ed\}$ مفروض است.
بدون کشیدن نمودار آن به قسمت‌های الف تا ج پاسخ دهید.
الف) مجموعه همسایگی باز رأس d را بنویسید.
ب) اندازه گراف را مشخص کنید.
ج) مجموع درجات رئوس این گراف برابر چند است؟

۱۴۴) با توجه به گراف G (شکل مقابل) به سؤالات زیر پاسخ دهید.
الف) یک $a - c$ مسیر به ۳ بنویسید.
ب) یک دور به طول ۴ مشخص کنید.
ج) درجه رأس a در گراف $\overline{G}$ را تعیین کنید.
د) آیا گراف G همبند است؟ چرا؟
هـ) یک زیرگراف تهی ۵ رأسی، از گراف G رسم کنید.



۱۴۵) معادله همنهشتی $۳x \overset{۷}{\equiv} ۱۳$ را حل و جواب عمومی آنرا به دست آورید.

۱۴۶) پاسخ سوال زیر را به دست آورده و دلیل پاسخ خود را به طور کامل بنویسید.
مطلوبست باقی‌ماندهی تقسیم عدد $A = (۱۰۰۰)^{۱۳} \times ۱۲ + ۱۰$ بر عدد ۷.

۱۴۷) پاسخ سوال زیر را به دست آورده و دلیل پاسخ خود را به طور کامل بنویسید.
اگر a عددی صحیح و فرد باشد و $b \mid a + ۲$ در این صورت باقی‌مانده تقسیم عدد $a^۲ + b^۲ + ۳$ را بر ۸ بیابید.

۱۴۸) اگر $a > ۱$ و $a \mid ۹k + ۴$ و $a \mid ۵k + ۳$ ثابت کنید a عددی اول است.

۱۴۹) گزاره زیر را به روش بازگشتی (گزاره‌های هم‌ارز) ثابت کنید:
(برای هر دو عدد حقیقی x و y داریم: $x^۲ + y^۲ + ۱ \geq xy + x + y$)

۱۵۰) اگر α و β دو عدد گنگ باشند ولی $\alpha + \beta$ گویا باشد، ثابت کنید $\alpha + ۲\beta$ گنگ است.

تلفن تماس: ۰۲۶۳۳۴۰۸۹۴۴

۱۵۱ درستی یا نادرستی گزاره‌های زیر را مشخص کنید.
الف) اگر k حاصل‌ضرب دو عدد طبیعی متوالی باشد آن‌گاه $۴k + ۱$ مربع کامل است.
ب) هر دو عدد صحیح و متوالی نسبت به هم اول‌اند.
ج) گراف حاصل از مدل‌سازی پل کونیگسبرگ یک گراف ساده است.
د) گراف ۳- منتظم از مرتبه ۵ قابل رسم نیست.

۱۵۲ با استفاده از برهان خلف ثابت کنید اگر $\sqrt{۵}$ گنگ باشد $\sqrt{۵} + ۳$ هم گنگ است.

۱۵۳ با استفاده از استدلال استنتاجی ثابت کنید حاصل ضرب سه عدد زوج متوالی مضرب ۸ است.

۱۵۴ حکم زیر را به روش خواسته شده اثبات کنید.
اگر n عدد طبیعی و $n^۲$ فرد باشد، n نیز فرد است. (برهان خلف)

۱۵۵ حکم زیر را به روش خواسته شده اثبات کنید.
برای هر دو عدد حقیقی مثبت x , y نشان دهید: $x + y \geq ۲\sqrt{xy}$ (اثبات بازگشتی)

۱۵۶ نشان دهید هر زیرمجموعه‌ای از مجموعه $S = \{۱ , ۲ , ۳ , ۴ , ۶ , ۷ , ۸ , ۹\}$ که دارای ۵ عضو باشد، حداقل ۲ عضو دارد که مجموع آن‌ها برابر ۱۰ است.

۱۵۷ با استفاده از روش استدلالی برهان خلف ثابت کنید "$\sqrt{۳}$ عددی گنگ است."

۱۵۸ کدام‌یک از احکام زیر درست و کدام‌یک نادرست است؟ برای احکام نادرست مثال نقض ارائه دهید.
الف) هر دو زاویه متقابل به راس با هم برابرند.
ب) برای هر عدد طبیعی n ، $۲^n + ۱$ عددی اول است.

۱۵۹ حکم درست را اثبات کرده و برای رد حکم نادرست مثال نقض ارائه دهید.
الف) حاصل‌ضرب هر دو عدد حقیقی، کوچک‌تر یا مساوی نصف مجموع مربع‌های آن‌هاست.
ب) حاصل جمع دو عدد گنگ، عددی گنگ است.

۱۶۰ در هر مورد نوع استدلال ریاضی را مشخص کنید.
الف) روش نتیجه‌گیری با استفاده از حقایقی که درستی آن‌ها را پذیرفته‌ایم.
ب) روش نتیجه‌گیری کلی بر مبنای مجموعه محدودی از مشاهدات است.
ج) روش اثباتی که در آن با استفاده از درستی حکم به یک رابطه بدیهی یا فرض مساله می‌رسیم.

۱۶۱ در یک کلاس ۳۰ نفر دانش‌آموز حضور دارند. حداقل چند نفر از دانش‌آموزان این کلاس در یک فصل از سال متولد شده‌اند؟ چرا؟

۱۶۲ با استفاده از برهان خلف، ثابت کنید اگر x گویا و y گنگ باشد، آن‌گاه $(x + y)$ گنگ است.

۱۶۳ اگر b و a دو عدد حقیقی باشند، با استفاده از استدلال بازگشتی درستی رابطه زیر را بررسی کنید:

$$a^۲ + ۱ \geqslant b\,(۲ - b)$$

۱۶۴ با استفاده از استدلال استنتاجی ثابت کنید، اگر به سه برابر عددی فرد یک واحد اضافه شود، عددی زوج بدست می‌آید.

۱۶۵ با استفاده از برهان خلف ثابت کنید اگر x و y دو عدد حقیقی، $x \neq ۳$ و $x + ۴y^۲ = ۷$ آنگاه $y \neq -۱$ است.

۱۶۶ اگر a و b دو عدد حقیقی باشند، با استفاده از استدلال بازگشتی ثابت کنید:

$$a^۲ + b^۲ \geq ۲(b - ۱)$$

۱۶۷ درستی یا نادرستی حکم زیر را اثبات کنید و برای رد ا اثبات آن یک مثال نقض بیاورید.
حاصل‌ضرب دو عدد صحیح زوج متوالی مضرب ۸ است.

۱۶۸ درستی یا نادرستی حکم زیر را اثبات کنید و برای رد اثبات آن یک مثال نقض بیاورید.
توان دوم یک عدد همیشه از آن عدد بزرگ‌تر است.

۱۶۹ درستی یا نادرستی حکم زیر را تعیین کنید و در صورت نادرستی مثال نقض بیاورید.
اگر $n^۲$ مضرب ۳ باشد آنگاه n نیز مضرب ۳ است.

۱۷۰ اگر a , b دو عدد حقیقی مثبت باشند، با استفاده از اثبات بازگشتی ثابت کنید:

$$ab \leqslant \left(\frac{a+b}{۲}\right)^۲$$

۱۷۱ اگر $\sqrt{۵}$ و $\sqrt{۷}$ دو عدد گنگ باشند، ثابت کنید $\left(۲\sqrt{۵} + ۳\sqrt{۷}\right)$ نیز عددی گنگ است. (برهان خلف)

۱۷۲ با استفاده از استدلال ثابت کنید ۳ برابر مربع یک عدد فرد منهای ۳ ، مضرب ۱۲ است.

۱۷۳ ثابت کنید مجموعه تهی زیرمجموعه تمامی مجموعه‌ها است.

۱۷۴ اگر x و y دو عدد حقیقی و مثبت باشند، ثابت کنید رابطه زیر برقرار است.

$$xy \leq \left(\frac{x+y}{۲}\right)^۲$$

۱۷۵ با استدلال برهان خلف ثابت کنید اگر $\sqrt{۷}$ عدد گنگ و x عدد گویا است آنگاه $x+\sqrt{۷}$ عددی گنگ است.

۱۷۶ با ذکر دلیل، درستی یا نادرستی عبارت زیر را بررسی کنید.
اگر $xy = ۰$ آنگاه $x = ۰$ و $y = ۰$.

تلفن تماس: ۰۲۶۳۳۴۰۸۹۴۴

۱۷۷ با ذکر دلیل، درستی یا نادرستی عبارت زیر را بررسی کنید.
حاصلضرب هر دو عدد گویا همیشه عددی گویا است.

۱۷۸ با ذکر دلیل، درستی یا نادرستی عبارت زیر را بررسی کنید.
توان سوم هر عدد حقیقی از توان دوم همان عدد بزرگتر است.

۱۷۹ اگر a و b دو عدد حقیقی مثبت باشند، ثابت کنید که رابطه زیر برقرار است:

$$\frac{a}{b^۲}+\frac{b}{a^۲}\geq\frac{۱}{a}+\frac{۱}{b}$$

۱۸۰ با استفاده از برهان خلف، ثابت کنید که $\sqrt{۳}$ گنگ است.

۱۸۱ مثال نقض، مثالی است که نشان می‌دهد نتیجه کلّی .... است.

۱۸۲ پست‌خانه‌ای فقط تمبرهای ۶۰ ریالی و ۹۰ ریالی برای فروش دارد. شخصی برای فرستادن یک بسته که نیاز به ۸۷۰ ریال تمبر دارد از هر نوع تمبر چه تعداد باید بخرد. (تمام حالات ممکن برای خرید تمبر نوشته شود.)

۱۸۳ نشان دهید اگر $(a, b) = ۱$، آنگاه $(a, a - b) = ۱$.

۱۸۴ ثابت کنید بی‌نهایت عدد اول وجود دارند.

۱۸۵ ثابت کنید حاصل‌ضرب دو عدد زوج متوالی بر عدد ۸ تقسیم‌پذیر است.

۱۸۶ ثابت کنید حاصل‌ضرب سه عدد طبیعی متوالی بر ۶ تقسیم‌پذیر است.

۱۸۷ گراف کامل را تعریف کنید.

۱۸۸ «دنباله‌ی درجه‌های رأس‌های» این گراف را به‌صورت یک دنباله نزولی بنویسید.

۱۸۹ دو دور به طول ۵ در این گراف بنویسید.

۱۹۰ مجموعه‌ی رئوس و مجموعه‌ی یال‌های گراف را مشخص کنید.

۱۹۱ معادله‌ی سیاله‌ی $۳۸x + ۳۴y = ۱۲۰$ را در Z حل کنید.

۱۹۲ ثابت کنید اگر $a|bc$ و $(a, b) = ۱$، آنگاه $a|c$.

۱۹۳ ثابت کنید اگر $b|c$، آنگاه $(a, b) = (a + c, b)$.

۱۹۴ ثابت کنید مربع هر عدد فرد به‌صورت $۸q + ۱$ است.

۱۹۵ ثابت کنید تعداد رأس‌های فرد هر گراف، زوج است.

تلفن تماس: ۰۲۶۳۳۴۰۸۹۴۴

۱۹۶ مسیر از V_1 به V_3 بنویسید.

۱۹۷ نمودار این گراف را رسم کنید.

۱۹۸ معادله‌ی سیاله‌ی $51x + 39y = 300$ را در Z حل کنید.

۱۹۹ ثابت کنید $8^{23} - 2$ بر ۳۱ بخش‌پذیر است.

۲۰۰ ثابت کنید از رابطه‌ی همنهشتی $ac \equiv bc$ (پیمانه‌ی m) نتیجه می‌شود. $a \equiv b$ (پیمانه $\frac{m}{d}$) که در آن $d = (m , c)$.

۲۰۱ ثابت کنید بی‌نهایت عدد اول وجود دارند.

۲۰۲ اولاً: ثابت کنید اگر $a|b$، آنگاه $a|bc$ $(a, b, c \in Z)$. ثانیاً: برای مقادیر صحیح c, b, a مثالی بیاورید که $a|bc$ برقرار باشد ولی هر دو حکم $a|b$ و $a|c$ برقرار نباشد.

۲۰۳ کلیه‌ی دورهای به طول ۴ در این گراف را بنویسید.

۲۰۴ طولانی‌ترین مسیر از V_1 به V_3 را بنویسید.

۲۰۵ آیا G یک گراف بازه‌ها است؟ چرا؟

۲۰۶ اندازه‌ی گراف کامل مرتبه‌ی ۵ را محاسبه کنید.

۲۰۷ مرتبه و اندازه‌ی گراف را تعریف کنید.

۲۰۸ گراف ساده را تعریف کنید.

۲۰۹ رقم یکان $3^{25} + 7^{73}$ را محاسبه کنید.

۲۱۰ اگر $a \mid b$ و $c \mid b$ و $(a,c) = 1$ باشد، ثابت کنید: $ac \mid b$

۲۱۱ a و b دو عدد صحیح که حداقل یکی از این دو ناصفر است. اگر برای هر m و n صحیح، $ma + nb = 1$ باشد. ثابت کنید: $(a,b) = 1$

۲۱۲ در یک گراف کامل تعداد رأس‌ها، $\frac{1}{3}$ تعداد یال‌هاست. مرتبه و اندازه‌ی این گراف را محاسبه کنید.

۲۱۳ گراف همبند را تعریف کنید.

۲۱۴ معادله‌ی سیاله‌ی $2x - 9y = 5$ را حل کنید.

۲۱۵ اگر باقیمانده‌ی تقسیم عدد صحیح a بر ۷ و ۶ به‌ترتیب ۲ و ۳ باشد، باقیمانده‌ی تقسیم a بر ۴۲ را محاسبه کنید.

تلفن تماس: ۰۲۶۳۳۴۰۸۹۴۴

۲۱۶ باقی‌مانده‌ی تقسیم $۵^{۱۱۲} + ۳^{۷۱}$ بر ۱۳ را محاسبه کنید.

۲۱۷ ثابت کنید اگر $(a,b) = ۱$ و $(a,c) = ۱$ باشند، آن‌گاه $(a\ ,\ bc) = ۱$

۲۱۸ برای این‌که این گراف بازه‌ای باشد، حداقل یال ممکن را رسم کنید.

۲۱۹ ثابت کنید گراف مقابل یک گراف بازه‌ای نیست.

۲۲۰ گراف همیلتنی را تعریف کنید و یک گراف همیلتنی مرتبه‌ی ۴ رسم کنید.

۲۲۱ اگر $d = (a - ۵\ ,\ a^۲ - ۶a + ۳)$ و $a \in Z$، آن‌گاه d را محاسبه کنید.

۲۲۲ معادله‌ی سیاله‌ی $۳x + ۲y = ۷$ را حل کنید.

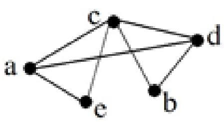
۲۲۳ رقم یکان $۷^{۳۲۷}$ را محاسبه کنید.

۲۲۴ اگر $a \mid bc$ و $(a,b) = ۱$ ، آن‌گاه ثابت کنید: $a \mid c$

۲۲۵ نمودار این گراف را رسم کنید.

۲۲۶ p و q را محاسبه کنید.

۲۲۷ در گراف مقابل تمام مسیرهای به طول ۳ از a به b را بنویسید.



۲۲۸ مسیر در گراف را تعریف کنید.

۲۲۹ با استدلال برهان خلف ثابت کنید که اگر $\sqrt{۳}$ عددی گنگ است، $\sqrt{\sqrt{۳} + ۲}$ نیز عددی گنگ است.

۲۳۰ اگر c,b,a سه عدد حقیقی باشند، ثابت کنید که: $a^۲ + b^۲ \geq -۴(a + b + ۲)$

۲۳۱ عبارت زیر را در نظر بگیرید و دلیل درستی یا نادرستی آن را بنویسید.
مکعب هر عدد فرد منهای یک، عددی زوج است.

۲۳۲ معادله‌ی سیاله $۱۸x + ۳۰y = ۴۲$ را در Z حل کنید.

۲۳۳ باقیمانده‌ی تقسیم $۲^{۲۵}$ را بر ۱۷ به‌دست آورید.

۲۳۴ اگر a و b نسبت به هم اول باشند و $c \mid a + b$ ثابت کنید c نیز نسبت به a اول خواهد بود.

تلفن تماس: ۰۲۶۳۳۴۰۸۹۴۴

۲۳۵ در گراف ۵- منتظم از مرتبه‌ی p و اندازه‌ی q رابطه $۲q - ۳p = ۱۲$ برقرار می‌باشد، مقادیر p و q را به‌دست آورید.

۲۳۶ معادله‌ی سیاله $۱۳x + ۱۷y = ۱۰۰$ را در Z حل کنید.

۲۳۷ آخرین رقم سمت راست عدد $۲۷^{۱۳۸۶}$ را به‌دست آورید.

۲۳۸ اگر مجموع دو عدد ۱۰۲ و کوچک‌ترین مضرب مشترک آن‌ها ۴۳۲ باشد، بزرگ‌ترین مقسوم علیه مشترک این دو عدد را بیابید.

۲۳۹ ثابت کنید حاصل ضرب سه عدد زوج طبیعی متوالی بر ۲۴ بخش‌پذیر است.

۲۴۰

۲۴۱ می‌خواهیم رئوس G را طوری رنگ‌آمیزی کنیم که هیچ دو رأس مجاوری همرنگ نباشند. کم‌ترین تعداد رنگ را بیابید.

۲۴۲ آیا این گراف همیلتنی است؟ چرا؟

۲۴۳ دو مسیر از a به b بنویسید.

۲۴۴ با استفاده از برهان خلف، نشان دهید $\sqrt{۲}$ عدد گنگ است.

۲۴۵ اگر x و y دو عدد حقیقی باشند، با استفاده از اثبات بازگشتی ثابت کنید: $x^۲ + y^۲ + ۱ \geqslant xy + x + y$

۲۴۶ با استفاده از برهان خلف، ثابت کنید اگر $\sqrt{۳}$ گنگ باشد، آن‌گاه $\sqrt{۳} + \sqrt{۲}$ نیز عددی گنگ است.

۲۴۷ اگر a و b دو عدد حقیقی با شند، با استفاده از اثبات بازگشتی ثابت کنید:

$$۲a^۲ + b^۲ + ۱ \geqslant ۲(a - ba)$$

۲۴۸ عبارت زیر درست است یا نادرست ؟ برای عبارت نادرست مثال نقض بیاورید.
برای هر عدد طبیعی n آن‌گاه $۲^n + ۳$ عددی اول است.

۲۴۹ عبارت زیر درست است یا نادرست ؟ برای عبارت نادرست مثال نقض بیاورید.
مربع هر عدد فرد به اضافه یک، عددی زوج است.

۲۵۰ عبارت زیر درست است یا نادرست ؟ برای عبارت نادرست مثال نقض بیاورید.
حاصل ضرب هر دو عدد گنگ، عددی گویاست.

۲۵۱ جای خالی را با یکی از کلمات (شهودی - تمثیلی - استقرایی - استنتاجی) کامل کنید:
استدلال .... روش نتیجه‌گیری کلی با استفاده از حقایقی است که درستی آن‌ها را پذیرفته‌ایم.

۲۵۲ اگر a و b اعداد حقیقی باشند به طوری که $(ab<0)$، ثابت کنید: $\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\leq -2$

۲۵۳ می‌دانیم که $\sqrt{2}$ گنگ است، با استفاده از برهان خلف ثابت کنید $\sqrt[3]{1+\sqrt{2}}$ نیز گنگ می‌باشد.

۲۵۴ با استدلال استنتاجی ثابت کنید که اگر x یک عدد صحیح و مضرب ۳ باشد، آن‌گاه $x(x+3)$ مضرب ۱۸ است.

۲۵۵ با استفاده از برهان خلف، ثابت کنید اگر n یک عدد طبیعی و $(5n+3)$ زوج باشد آن‌گاه n یک عدد فرد است.

۲۵۶ اگر a و b و c سه عدد حقیقی باشند، ثابت کنید:

$$a^2+b^2+c^2+3\geq 2(a+b+c)$$

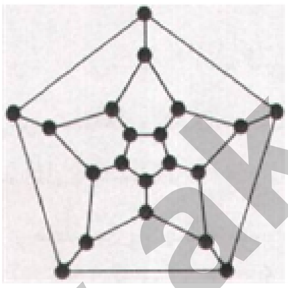
۲۵۷ عبارت زیر درست است یا نادرست؟ (با ذکر دلیل)

اگر a یک عدد حقیقی و $a^2>0$ آن‌گاه $a>0$ است.

۲۵۸ عبارت زیر درست است یا نادرست؟ (با ذکر دلیل)

اگر a و b دو عدد صحیح و فرد به طوری که هر دو مضربی از ۵ باشند آن‌گاه مجموع آن‌ها مضرب ۱۰ است.

۲۵۹ آیا گراف زیر گراف همیلتنی است و چرا؟



۲۶۰ ثابت کنید اگر G همیلتنی باشد آنگاه به‌ازای هر $v\in V(G)$ داریم $\deg_G v\geq 2$.

۲۶۱ نشان دهید هر گراف همیلتنی همبند است.

۰ گراف زیر موسوم به گراف پِترسِن را در نظر بگیرید.
و به دو سؤال بعدی پاسخ دهید.

۲۶۲

۲۶۳

۲۶۴ آیا این گراف هَمیلِتنی است؟ چرا؟

۲۶۵ آیا این گراف هَمیلِتنی است؟ چرا؟

۲۶۶ درستی یا نادرستی عبارت زیر را تعیین کنید.
مثال نقض، برای اثبات درستی یک قضیه‌ی کلی به کار می‌رود.

تلفن تماس: ۰۲۶۳۳۴۰۸۹۴۴

۲۶۷ اگر n عدد طبیعی و $(3n+2)$ عددی فرد باشد، با استدلال برهان خلف، نشان دهید که n نیز عددی فرد است.

۲۶۸ با استدلال استنتاجی، نشان دهید حاصل‌ضرب دو عدد صحیح زوج متوالی، مضرب ۸ است.

۲۶۹ ثابت کنید اگر a و b دو عدد حقیقی باشند که $a+b>0$، آنگاه رابطه‌ی زیر برقرار می‌باشد.

$$\frac{a^3+b^3}{a+b} \geq ab$$

۲۷۰ درستی یا نادرستی گزاره‌ی زیر را با ذکر دلیل بررسی کنید.
اگر x فرد باشد، آنگاه $x(x+2)$ هم فرد می‌باشد.

۲۷۱ درستی یا نادرستی گزاره‌ی زیر را با ذکر دلیل بررسی کنید.
به ازای هیچ دو عدد اول a و b، عدد $a+b$ اول نیست.

۲۷۲ آیا حکم مقابل برقرار است؟ چرا؟ اگر $(a-1)(b-1)=0$ آن‌گاه، $a=1$ و $b=1$ می‌باشد.

۲۷۳ با استدلال استنتاجی ثابت کنید اگر ۳ واحد به سه برابر عددی فرد اضافه کنیم، عدد حاصل‌ضرب ۶ می‌باشد.

۲۷۴ می‌دانیم $\sqrt{2}$ عدد گنگ است. ثابت کنید عدد $x=\sqrt{1+\sqrt{2}}$ گنگ است. (برهان خلف)

۲۷۵ برای هر عدد حقیقی و مثبت a، ثابت کنید:

$$a+\frac{1}{a} \geq 2$$

۲۷۶ برای هر دو عدد حقیقی و مثبت x و y، ثابت کنید:

$$xy \leq \left(\frac{x+y}{2}\right)^2$$

۲۷۷ عبارت زیر درست است یا نادرست؟ درصورت نادرست‌بودن دلیل بیاورید.
اگر x گنگ باشد، آن‌گاه x^2 گویا است.

۲۷۸ با استفاده از استدلال استنتاجی نشان دهید حاصل‌ضرب سه عدد صحیح زوج متوالی مضرب ۲۴ است.

۲۷۹ با استفاده از استدلال استنتاجی نشان دهید اگر به مربع یک عدد فرد یک واحد اضافه کنیم یک عدد زوج حاصل می‌شود.

۲۸۰ برای هر دو عدد حقیقی و مثبت a و b ثابت کنید:

$$\frac{a}{b}+\frac{b}{a} \geq 2$$

۲۸۱ می‌دانیم $\sqrt{3}$ عددی گنگ و a^2 یک عدد گویا است. ثابت کنید $\sqrt{3}+a^2$ عدد گنگ است. (برهان خلف)

۲۸۲ برای هر سه عدد حقیقی و مثبت a و b و c، ثابت کنید:

$$a^2+b^2+c^2+3 \geq 2(a+b+c)$$

۲۸۳ با استفاده از استدلال استنتاجی نشان دهید، مجموع مربعات دو عدد فرد، یک عدد زوج است.

۲۸۴ با استفاده از برهان خلف ثابت کنید: اگر $x \neq ۴$ و $x^۳ + y^۳ = ۶۵$، آن‌گاه $y \neq ۱$ است.

۲۸۵ برای هر دو عدد حقیقی و مثبت a و b ثابت کنید: $\frac{a}{b^۲} + \frac{b}{a^۲} \geq \frac{۱}{a} + \frac{۱}{b}$

۲۸۶ با استفاده از استدلال استنتاجی نشان دهید، اگر به مربع یک عدد فرد ۳ واحد اضافه کنیم، عددی مضرب ۴ به‌دست می‌آید.

۲۸۷ با استفاده از برهان خلف ثابت کنید اگر $n^۲$ مضربی از ۵ باشد، n نیز مضربی از ۵ است.

۲۸۸ کدام‌یک از عبارت زیر درست و کدام‌یک نادرست است؟ در صورت درست‌بودن آن را ثابت کنید و در صورت نادرست بودن یک مثال نقض پیدا کنید.
الف) مربع هر عدد حقیقی از مکعب آن کوچک‌تر است.
ب) حاصل ضرب هر دو عدد زوج، عددی زوج است.

۲۸۹ به روش استدلال استنتاجی نشان دهید که حاصل جمع سه برابر هر عدد زوج با یک عدد فرد همواره فرد است.

۲۹۰

۲۹۱ می‌دانیم $\sqrt{۵}$ گنگ است. با استفاده از برهان خلف ثابت کنید عدد $\sqrt[۳]{۲+\sqrt{۵}}$ نیز گنگ است.

۲۹۲ با استفاده از استدلال استنتاجی نشان دهید که حاصل ضرب سه عدد زوج متوالی مضرب ۸ است.

۲۹۳ اگر n عددی صحیح و $n^۲$ فرد باشد، نشان دهید n نیز فرد است. (برهان خلف)

۲۹۴ با استفاده از استدلال استنتاجی نشان دهید مجموع سه عدد صحیح زوج متوالی مضربی از ۶ است.

۲۹۵ اگر a و b و c سه عدد گنگ باشند، آیا $abc^۲$ یک عدد گنگ است؟ چرا؟

۲۹۶ اگر n عدد طبیعی و $n^۲$ مضرب ۳ باشد، آنگاه نشان دهید که n مضرب ۳ است. (برهان خلف)

۲۹۷ برای هر دو عدد حقیقی و مثبت x و y ثابت کنید: $\frac{x}{y} + \frac{y}{x} \geq ۲$

۲۹۸ اگر a و b دو عدد حقیقی مثبت باشند، ثابت کنید. $\frac{۱}{\sqrt{a}} + \frac{۱}{\sqrt{b}} \geq \frac{۴}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$

۲۹۹ نشان دهید $\sqrt{۲}$ گنگ است. (برهان خلف)

۳۰۰

۳۰۱

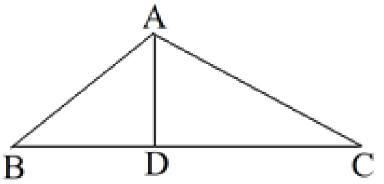
۳۰۲

۳۰۳ هرگاه $x \in R^+$ و y گویا باشند ثابت کنید: $\frac{x}{y}+\frac{y}{x} \geqslant ۲$

۳۰۴ با استفاده از استدلال استنتاجی نشان دهید اگر از مکعب یک عدد فرد، یک واحد کم کنیم عددی زوج بدست می‌آید.

۳۰۵

۳۰۶ فرض کنید AD نیمساز زاویه A در مثلث ABC باشد. اگر $DB \neq CD$ ثابت کنید: $AB \neq AC$ (برهان خلف).



۳۰۷ هرگاه $x , y \in R^+$ ثابت کنید: $\frac{x}{y}+\frac{y}{x} \geqslant ۲$

۳۰۸ می‌دانیم $\sqrt{۳}$ گنگ است، با استفاده از برهان خلف ثابت کنید $۷\sqrt{۳}$ گنگ است.

۳۰۹ با استفاده از استدلال استنتاجی نشان دهید: اگر به حاصل‌ضرب دو عدد فرد، ۱ واحد اضافه کنیم عددی زوج به‌دست می‌آید.

۳۱۰

۳۱۱

۳۱۲

۳۱۳

۳۱۴

۳۱۵

تلفن تماس: ٠٢٦٣٣٤٠٨٩٤٤

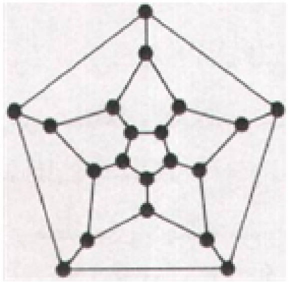
۳۱۶ با استفاده از استدلال استنتاجی نشان دهید اگر از حاصلضرب دو عدد فرد، یک واحد کم کنیم عدد حاصل بر ۲ بخش پذیر است.

۳۱۷ با استفاده از استدلال استنتاجی نشان دهید که اگر ۷ برابر یک عدد زوج را با یک عدد فرد جمع کنیم حاصل همواره عددی فرد است.

۳۱۸

۳۱۹ اگر x و y دو عدد حقیقی باشند، ثابت کنید: $x^{۲} + y^{۲} \geq ۲(x + y - ۱)$

۳۲۰ آیا گراف زیر گراف همیلتنی است و چرا؟



۳۲۱ ثابت کنید اگر G همیلتنی باشد آنگاه به‌ازای هر $v \in V(G)$ داریم $\deg_G v \geq ۲$.

۳۲۲ نشان دهید هر گراف همیلتنی همبند است.

۳۲۳ پست‌خانه‌ای فقط تمبرهای ۱۴۰ و ۲۱۰ ریالی برای فروش دارد. برای چسباندن تمبر به بسته‌هایی که مقدار تمبر لازم برای آن‌ها هر یک از مقادیر زیر است، در صورت امکان ترکیبی از این دو نوع تمبر تعیین کنید.
الف) ۳۵۰۰ ریال ب) ۴۰۰۰ ریال

۳۲۴

۳۲۵ برای معادله‌ی سیاله‌ی زیر یا تمام جواب‌ها را به دست آورید و یا ثابت کنید جواب ندارد.
$۲۱x + ۱۴y = ۱۴۷$

۳۲۶ برای معادله‌ی سیاله‌ی زیر یا تمام جواب‌ها را به دست آورید و یا ثابت کنید جواب ندارد.
$۱۷x + ۱۳y = ۱۰۰$

۳۲۷

۳۲۸ آخرین رقم سمت راست هر یک از اعداد $۳^{۴۲۴}$ و $۷^{۱۰۱}$ را به‌دست آورید.

۳۲۹ ثابت کنید $۲^{۱۱} - ۱$ بر ۲۳ تقسیم‌پذیر است.

تلفن تماس: ۰۲۶۳۳۴۰۸۹۴۴

۳۳۰

۳۳۱ هر گاه $a \equiv b \pmod{m}$ و d یک مقسوم‌علیه m باشد، نشان دهید $a \equiv b \pmod{d}$.

۳۳۲ دو عدد a و b به صورت‌های مقابل نوشته شده‌اند: $a = 7k + 5 \,,\, b = 7k' - 2$
دسته‌ی همنهشتی $a + 2b$ را به پیمانه‌ی ۷ مشخص کنید.

۳۳۳ اگر a و b نسبت به هم اول باشند، نشان دهید که برای اعداد طبیعی m و n، a^n و b^m هم نسبت به هم اول‌اند.

۳۳۴ نشان دهید اگر a نسبت به b_1، b_2، ... و b_n اول باشد، نسبت به $b_1 b_2 \ldots b_n$ هم اول خواهد بود.

۳۳۵

۳۳۶

۳۳۷

۳۳۸ عدد ۹۵۵۵ را به عوامل اول تجزیه کنید.

۳۳۹ ثابت کنید بینهایت عدد اول به‌صورت $4q + 3$ یافت می‌شوند.

۳۴۰

۳۴۱ ثابت کنید حاصل‌ضرب ۳ عدد طبیعی متوالی بر ۶ تقسیم‌پذیر است.

۳۴۲ ثابت کنید حاصل‌ضرب دو عدد فرد، فرد است.

۳۴۳ ثابت کنید حاصل جمع دو عدد صحیح زوج و همچنین حاصل جمع دو عدد صحیح فرد، زوج است.

۳۴۴

۳۴۵ ثابت کنید اگر برای هر $i = 1, 2, \ldots, n$، $a|b_i$، آن‌گاه برای اعداد صحیح دلخواه m_1، m_2، ... و m_n داریم:

$$a|m_1 b_1 + m_2 b_2 + \ldots + m_n b_n$$

۳۴۶ نشان دهید اگر a، b و $c \neq 0$ اعدا صحیح باشند، آن‌گاه $a|b$ اگر و تنها اگر $ac|bc$.

۳۴۷ اگر a، b، c و d اعداد صحیح باشند و $a \neq 0$، $c \neq 0$، $a|b$، و $c|d$، ثابت کنید $ac|bd$.

۳۴۸ آیا عدد ۳۲۵۱۶- بر ۲۲ بخش‌پذیر است؟

تلفن تماس: ۰۲۶۳۳۴۰۸۹۴۴

۳۴۹

۳۵۰

۳۵۱

۳۵۲ در این گراف دوری مشخص کنید که طول آن هریک از اعداد ۵، ۶، ۸، ۹ باشد.

۳۵۳ به ازای هر $u, v, w \in V(G)$، داریم: $d(v,w) \le d(v,u) + d(u,w)$.

۳۵۴

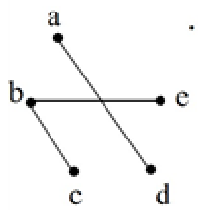
۳۵۵ $d(u, \upsilon) = 0$ اگر تنها و تنها اگر $u = \upsilon$.

۳۵۶ گرافی از مرتبه‌ی ۶ و اندازه‌ی ۶ معرفی کنید که ۲- منتظم باشد.

۳۵۷ گراف همبندی معرفی کنید که مجموع مرتبه و اندازه‌ی آن ۸ باشد.

۳۵۸

۳۵۹ اگر G گراف شکل زیر باشد، افرازهای حاصل از رابطه‌ی هم‌ارزی مذکور در سوال قبل را بیابید.



۳۶۰ گراف G داده شده است. فرض کنید $u, \upsilon \in V(G)$.
نشان دهید «وجود یک مسیر از u, υ» یک رابطه‌ی هم‌ارزی بر مجموعه‌ی $V(G)$ است.

۳۶۱ هفده نفر به سفر می‌روند و قبل از سفر قرار می‌گذارند هر کس به پنج نفر دیگر نامه بفرستد. آیا امکان دارد هر کس به آن پنج نفری نامه بفرستد که از آن‌ها نامه دریافت می‌کند؟ چرا؟

۳۶۲ در گراف کامل K_p، $2 \le p \le 40$، تعداد مسیرهای «متفاوت» از یک رأس u به یک رأس v و $u \ne v$، را بیابید.

۳۶۳ آیا با آغاز از یکی از منطقه‌های پنج‌گانه می‌توان از هر پل دقیقاً یک‌بار گذشت؟ در این حالت لازم نیست منطقه‌ی آغاز گشت با منطقه‌ی پایان آن یکی باشد.

تلفن تماس: ۰۲۶۳۳۴۰۸۹۴۴

۳۶۴ آیا با آغاز از یکی از منطقه‌های پنج‌گانه و عبور از پل‌ها
می‌توان از هر پل دقیقاً یک‌بار گذشت و به منطقه‌ی آغاز بازگشت؟

۳۶۵

۳۶۶ گرافی همبند و ۳- منتظم مثال بزنید که ۸ رأس و ۱۲ یال داشته باشد.

۳۶۷ گرافی ناهمبند و ۳- منتظم مثال بزنید که ۸ راس و ۱۲ یال داشته باشد.

۳۶۸ با استقراء بر q، قضیه‌ی ۱ را اثبات کنید.

۳۶۹ گرافی ارائه کنید که دنباله‌ی درجه‌هایش $s: ۳, ۳, ۳, ۳, ۲, ۲, ۲, ۰, ۰, ۰$ باشد. آیا پاسخ یکتاست؟ چرا؟

۳۷۰ درجه‌های تمام رأس‌های این گراف را به‌صورت دنباله‌ای چون $s: d_۱ , d_۲ ,\dots, d_۹$ بنویسید که به ازای هر $۱ \le i \le ۸$ داشته باشیم $d_{i+۱} \le d_i$. (دنباله‌ی حاصل را دنباله‌ی درجه‌های رأس‌های گراف می‌نامیم.)

۳۷۱

۳۷۲ گرافی رسم کنید که این ویژگی‌ها را داشته باشد.

۳۷۳ ویژگی‌های گراف G را مشخص کنید.

۳۷۴ این گراف از چند «بخش جدا از هم» تشکیل شده است؟ (پاسخ ۳ است.)

۳۷۵ اگر این رأس‌ها هفت شهر و این یال‌ها جاده‌های موجود بین این شهرها را نمایش دهند، آیا تنها با عبور از این جاده‌ها می‌توان از هر شهری به شهر دیگر سفر کرد؟

۳۷۶

۳۷۷

۳۷۸

۳۷۹ اگر $۲ , ۳ , ۵ , \dots , P$ تمام اعداد اول کوچکتر یا مساوی P باشند، ثابت کنید که $N = (۲ \times ۳ \times ۵ \times \dots \times P) + ۱$ یا اول است و یا عامل اول بزرگتر از P دارد.

۳۸۰ ثابت کنید اگر x گویا و y گنگ باشد، آن‌گاه $(x + y)$ گنگ است.

۳۸۱ ثابت کنید $\sqrt{۳}$ گنگ است.

۳۸۲ با استفاده از روش استدلالی برهان خلف، حکم زیر را ثابت کنید:
از یک نقطه خارج از یک خط نمی‌توان بیش از یک خط بر آن عمود کرد.

۳۸۳ با استفاده از روش استدلالی برهان خلف، حکم زیر را ثابت کنید:
اگر $n^۲$ مضربی از ۱۰ باشد، نشان دهید که n نیز مضربی از ۱۰ است.

۳۸۴ با استفاده از روش استدلالی برهان خلف، حکم زیر را ثابت کنید:
اگر $n^۲$ مضربی از ۳ باشد، نشان دهید که n نیز مضربی از ۳ است.

۳۸۵ با استفاده از روش استدلالی برهان خلف، حکم زیر را ثابت کنید:
اگر n عددی صحیح و $n^۲$ فرد باشد، نشان دهید n نیز فرد است.

۳۸۶ در صورتی‌که حکم زیر قضیه‌ی کلی باشد، آن را اثبات کنید و در غیر این‌صورت برای نادرستی آن مثال نقض بیاورید:
اگر $ab = ۰$ ، آن‌گاه $a = ۰$ و $b = ۰$

۳۸۷ در صورتی‌که حکم زیر قضیه‌ی کلی باشد، آن را اثبات کنید و در غیر این‌صورت برای نادرستی آن مثال نقض بیاورید:
اگر $(x - ۱)^۲ = ۰$ ، آن‌گاه $x = ۱$

۳۸۸ در صورتی‌که حکم زیر قضیه‌ی کلی باشد، آن را اثبات کنید و در غیر این‌صورت برای نادرستی آن مثال نقض بیاورید:
اگر $x > ۲$ ، آن‌گاه $x > ۱$

۳۸۹ در صورتی‌که حکم زیر قضیه‌ی کلی باشد، آن را اثبات کنید و در غیر این‌صورت برای نادرستی آن مثال نقض بیاورید:
هر دو زاویه‌ی مساوی، متقابل به رأس هستند.

۳۹۰ در صورتی‌که حکم زیر قضیه‌ی کلی باشد، آن را اثبات کنید و در غیر این‌صورت برای نادرستی آن مثال نقض بیاورید:
مربع هیچ عدد صحیح صفر نیست.

۳۹۱ در صورتی‌که حکم زیر قضیه‌ی کلی باشد، آن را اثبات کنید و در غیر این‌صورت برای نادرستی آن مثال نقض بیاورید:
حاصل‌ضرب هر دو عدد حقیقی کوچکتر یا مساوی نصف مجموع مربع‌های آن‌هاست.

۳۹۲ کدام‌یک از احکام زیر درست هستند؟
الف) اگر x گنگ و y گویا باشد، آن‌گاه $(x + y)$ گویا است.
ب) اگر x و y هر دو گویا باشند، آن‌گاه $x + y$ گویا است.
احکام درست را اثبات کنید و برای رد کردن احکام نادرست مثال‌های نقض بیاورید.

۳۹۳ عبارت زیر درست است یا غلط (نادرست) است؟ در صورت غلط بودن یک مثال نقض پیدا کنید.
هر مربعی یک مستطیل است.

۳۹۴ عبارت زیر درست است یا غلط (نادرست) است؟ در صورت غلط بودن یک مثال نقض پیدا کنید.
هر مستطیلی یک مربع است.

تلفن تماس: ۰۲۶۳۳۴۰۸۹۴۴

۳۹۵ عبارت زیر درست است یا غلط (نادرست) است؟ در صورت غلط بودن یک مثال نقض پیدا کنید.
همیشه ارتفاع یک مثلث داخل آن قرار می‌گیرد.

۳۹۶ عبارت زیر درست است یا غلط (نادرست) است؟ در صورت غلط بودن یک مثال نقض پیدا کنید.
توان دوم یک عدد همیشه از آن بزرگتر است.

۳۹۷ علی، احمد، کامران، داوود و ابراهیم عضو تیم بسکتبال مدرسه‌ی خود هستند. با توجه به شرایط زیر، آن‌ها را برحسب افزایش قد مرتب کنید:
الف) حداقل دو نفر از آن‌ها از علی کوتاه‌تر می‌باشند.
ب) داوود از کامران کوتاه‌تر است.
پ) احمد کوتاه‌ترین پسر نیست.
ت) داوود از علی بلندتر است.

۳۹۸ نشان دهید که چرا مجموع دو عدد زوج همیشه زوج است؟

۳۹۹ آیا نتیجه‌ی زیر از عبارت داده شده حاصل می‌شود؟ جواب خود را توضیح دهید.
مثلث متساوی‌الساقین دارای حداقل دوضلع مساوی است.
مثلث متساوی‌الاضلاع دارای سه ضلع مساوی است.
نتیجه: هر مثلث متساوی‌الاضلاع، یک مثلث متساوی‌الساقین است.

۴۰۰ آیا نتیجه‌ی زیر از عبارت داده شده حاصل می‌شود؟ جواب خود را توضیح دهید.
بعضی از دانش‌آموزان با طرز کار کامپیوتر آشنا هستند.
نرگس دانش‌آموز است.
نتیجه: نرگس با طرز کار کامپیوتر آشنا است.

۱) (ص ۸۲) $k+1=5 \Rightarrow k=4\ ,\ kn+1=54 \Rightarrow 4n=53\ ,\ n=\left[\frac{53}{4}\right]=13$

۲) $\underset{\substack{\uparrow \\ \text{انتخاب ۴ نفر}}}{\binom{8}{4}} \times \underset{\substack{\uparrow \\ \text{جایگشت ۴ کلاه}}}{4!} = \frac{8!}{4!}$

۳) کل $\xrightarrow{\text{هر کلاه ۳ حالت}} 3\times3\times3\times3=3^4=81$

غ ق ق ← حداقل یکی نگیرد:

$n(\bar{1}\cup\bar{2}\cup\bar{3})=n(\bar{1})+n(\bar{2})+n(\bar{3})-n(\bar{1}\cap\bar{2})-n(\bar{1}\cap\bar{3})-n(\bar{2}\cap\bar{3})+n(\bar{1}\cap\bar{2}\cap\bar{3})$

$=3\times2^4-3\times1^4+0=45$

$\Rightarrow$ جواب = کل - غ ق ق = ۳۶

۴) مجموعه احاطه‌گر مینیمم مجموعه احاطه‌گری است که کم‌ترین تعداد عضو را دارد ولی مجموعه احاطه‌گر مینیمال مجموعه احاطه‌گری است که با حذف هریک از رئوس آن دیگر احاطه‌گر نیست و می‌تواند از مجموعه احاطه‌گر مینیمم بیش‌تر عضو داشته باشد. (ص ۴۴ و ۴۶)

۵) الف) $N_G(C)=\{a\ ,\ e\ ,\ d\}$ (ص ۳۶) ب) راس f و ۵ (ص ۳۷)

پ) a b e c d a (ص ۳۸) ت) خیر (ص ۳۹)

۶) (ص ۳۰) $7x \overset{4}{\equiv} 1 \Rightarrow 7x \overset{4}{\equiv} 4\times5+1 \Rightarrow 7x \overset{4}{\equiv} 21 \xRightarrow{(7,4)=1} x \overset{4}{\equiv} 3 \Rightarrow x=4k+3$

۷) (ص ۲۱) $1000 \overset{7}{\equiv} -1 \Rightarrow (1000)^{25}\times9+11 \overset{7}{\equiv} (-1)^{25}\times9+11 \overset{7}{\equiv} 2 \Rightarrow r=2$

۸) $p=4k\ (1)\ ,\ p=4k+1\ (2)\ ,\ p=4k+2=2(2k+1)\ (3)\ ,\ p=4k+3\ (4)$

در حالت ۱ و ۳، p عددی زوج است که با اول بودن آن تناقض دارد. بنابراین اعداد اول به فرم ۲ یا ۴ خواهند بود. (ص ۱۵)

۹) $xy \le \frac{x^2+y^2}{2} \Leftrightarrow 2xy \le x^2+y^2 \Leftrightarrow x^2+y^2-2xy \ge 0 \Leftrightarrow (x-y)^2 \ge 0$

گزاره همواره درست (ص ۸)

تلفن تماس: ۰۲۶۳۳۴۰۸۹۴۴

۱۰ الف) درست (ص ۱۷) ب) نادرست ($x=۰ \xleftarrow{\text{مثال نقض}}$) (ص ۸)

۱۱ بله - تمام C_n ها ۲ منتظم هستند. (ص ۳۵)

۱۲ گرافی که درجه تمام رئوس آن با هم مساوی و برابر با عدد k باشد. (ص ۳۵)

۱۳
$$۸x \overset{۱۲}{\equiv} ۲۰ \overset{۱۲}{\equiv} ۳۲ \xrightarrow{(۸\,,\,۱۲)=۴} x \overset{\frac{۱۲}{۴}=۳}{\equiv} ۴ \Rightarrow x=۳k+۴$$
(ص ۳۰)

۱۴
$$۳۸ \overset{۴}{\equiv} ۲ \Rightarrow ۳۸^۲ \overset{۴}{\equiv} ۴ \overset{۴}{\equiv} ۰ \Rightarrow ۳۸^{۳۶} \overset{۴}{\equiv} ۰\,,\; ۱۹ \overset{۴}{\equiv} ۳ \Rightarrow ۳۸^{۳۶}+۱۹ \overset{۴}{\equiv} ۳$$
(ص ۲۹)

۱۵
$$(۵a+۴\,,\,۲a+۳)=d \Rightarrow \begin{matrix} d|۲a+۳ \\ d|۵a+۴ \end{matrix} \Rightarrow d|-۲(۵a+۴)+۵(۲a+۳) \Rightarrow d|۷ \Rightarrow d=۱ \text{ یا } ۷$$
(ص ۱۶)

۱۶
$$a=۱۷q+۵$$
$$b=۱۷q'+۳$$
$$\Rightarrow ۲a-۵b=۱۷\times ۲q+۱۰-۱۷\times ۵q'-۱۵=۱۷(\overbrace{۲q-۵q'-۱}^{k\in Z})+۱۲=۱۷k+۱۲ \Rightarrow r=۱۲$$
(ص ۱۴)

۱۷ فرض خلف: $\alpha-\beta$ گویاست. (ص ۸)

$$\begin{matrix} \alpha-\beta=m\in Q \\ \alpha+\beta=n\in Q \end{matrix} \Rightarrow ۲\alpha=m+n \Rightarrow \alpha=\frac{m+n}{۲} \Rightarrow \alpha\in Q$$
(تناقض با فرض)

۱۸ الف) نادرست $P \not\ni ۱۵ = ۱ - ۲^۴ \Leftarrow n=۴$ (ص ۳)

ب) درست (ص ۱۳)

پ) درست (ص ۲۵)

۱۹ نادرست (ص ۲۵)

$$an \overset{m}{\equiv} b \rightarrow an=mq+b : \underbrace{an-mq}_{\text{ترکیب خطی a و m مضرب ب.م.م a و m است.}}=b \Rightarrow (a\,,\,m)\times k=b \Rightarrow (a\,,\,b)\mid b$$

۲۰ می‌دانیم: $\gamma \ge \left[\frac{n}{\Delta+۱}\right]$ که در گراف C_n، P_n برابر $\left[\frac{n}{\Delta+۱}\right]$ می‌باشد.

۲۱ در گراف همبند بین هر دو رأس آن حداقل یک مسیر داریم.

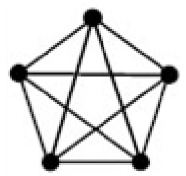
۲۲ وجود ندارد. زیرا: $\sum_{i=۱}^{۷} degv_i=۲q \Rightarrow ۳\times۷=۲q \Rightarrow$ فرد $۲۱=۲q$ زوج

تلفن تماس: ۰۲۶۳۳۴۰۸۹۴۴

۲۳
$$a \overset{m}{\equiv} b \Rightarrow m|a-b \Rightarrow m|(a-b)(a^{n-۱}+a^{n-۲}b+\dots+b^{n-۱}) \Rightarrow m|a^n-b^n$$
$$\Rightarrow a^n \overset{m}{\equiv} b^n$$ (ص ۲۹)

۲۴

۲۵
$$\frac{p(p-۱)}{۲}=۱۰ \Rightarrow p^۲-p-۲۰=۰ \Rightarrow p=۵$$ (ص ۴۲)



۲۶
الف) $\delta(G)=۰\,,\ \Delta(G)=۴$ (ص ۳۲ تا ۳۹)

ب) $c, a, b, c, c, a, e, c, c, e, d, c$

پ) ۵

ت) $N_G(e)=\{a, c, d\}$

ث) خیر

۲۷

۲۸
$$۲^۵ \overset{۱۰}{\equiv} ۲ \Rightarrow ۲^{۱۰} \overset{۱۰}{\equiv} ۲^۲ \Rightarrow ۲^{۱۱} \overset{۱۰}{\equiv} ۸ \Rightarrow ۲^{۱۱}+۷ \overset{۱۰}{\equiv} ۱۵ \overset{۱۰}{\equiv} ۱۵$$
رقم یکان برابر ۵ است. (ص ۲۹)

۲۹
$$\begin{matrix} m=۱۷q+۵\ (q\in Z) \\ n=۱۷q'+۳\ (q'\in Z)\end{matrix} \Rightarrow (۲m-۵n)=۱۷(۲q-۵q')-۵$$ (ص ۱۴)
$$\Rightarrow (۲m-۵n)=۱۷(۲q-۵q'-۱)+۱۲ \Rightarrow r=۱۲$$

۳۰
هرگاه p را بر ۶ تقسیم کنیم، خواهیم داشت:
$$p=۶k\ (۱)\,,\ p=۶k+۱\ (۲)\,,\ p=۶k+۲=۲(۳k+۱)\ (۳)$$
$$p=۶k+۳=۳(۲k+۱)\ (۴)\,,\ p=۶k+۴=۲(۳k+۲)\ (۵)\,,\ p=۶k+۵\ (۶)$$
p در حالات ۱، ۳ و ۵ زوج و در ۴ بر ۳ بخش‌پذیر است که با اول بودن p تناقض دارد. بنابراین فقط در حالات ۲ یا ۶، p می‌تواند عددی اول باشد که حکم اثبات می‌شود. (ص ۱۵)

۳۱
$$\begin{matrix} a|۳n+۴ \\ a|۲n+۳\end{matrix} \Rightarrow a|-۲(۳n+۴)+۳(۲n+۳) \Rightarrow a|۱ \Rightarrow a=\pm۱ \xrightarrow{a\in N} a=۱$$ (ص ۱۱)

۳۲

تلفن تماس: ۰۲۶۳۳۴۰۸۹۴۴

۳۳ (مشابه کار در کلاس ص ۷۶)

$$A = \{n \in N | ۱ \le n \le ۱۰۰ \, , \, n = ۶k\} \Rightarrow |A| = \left[\frac{۱۰۰}{۶}\right] = ۱۶$$

$$B = \{n \in N | ۱ \le n \le ۱۰۰ \, , \, n = ۱۰k\} \Rightarrow |B| = \left[\frac{۱۰۰}{۱۰}\right] = ۱۰$$

$$A \cap B = \{n | ۱ \le n \le ۱۰۰ \, , \, n = ۳۰k\} \Rightarrow |A \cap B| = \left[\frac{۱۰۰}{۳۰}\right] = ۳$$

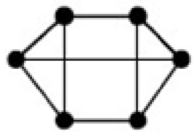
$$\Rightarrow |A \cup B| = ۱۶ + ۱۰ - ۳ = ۲۳$$

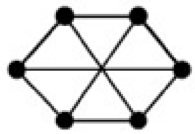
۳۴ فرض کنیم G یک گراف و A مجموعه همه رئوس فرد گراف و B مجموعه همه رئوس زوج گراف G باشد، در این صورت داریم: $\sum\limits_{v \in V(G)} \deg(v) = \sum\limits_{v \in A} \deg(v) + \sum\limits_{v \in B} \deg(v)$

از طرفی $\sum\limits_{v \in V(G)} \deg(v) = ۲q$ و $\sum\limits_{v \in B} \deg(v) = ۲k$ زوج‌اند. لذا $\sum\limits_{v \in A} \deg(v) = ۲q - ۲k$ باید زوج باشد. می‌دانیم تعداد زوج عدد فرد، حاصل زوج را تولید می‌کنند بنابراین تعداد اعضای A باید زوج باشد. (ص ۴۰)

۳۵ الف) (تعریف گراف k- منتظم ص ۳۵) $۳ \times ۶ = ۲q \Rightarrow q = ۹$

ب) رسم یکی از گراف‌های مقابل کافی است.





۳۶

۳۷ برای گراف مورد سوال داریم $\left[\frac{n}{\Delta + ۱}\right] \le \gamma(G) \Rightarrow \left[\frac{۱۰}{۳ + ۱}\right] = ۳ \le \gamma(G)$. از طرفی مجموعه $\{g \, , h \, , d\}$ یک مجموعه احاطه‌گر برای گراف است. لذا $\gamma(G) \le ۳$. بنابراین $\gamma(G) = ۳$. (قسمت دوم کار در کلاس ص ۵۰)

۳۸ (مسأله ۱ ص ۳۸) $\deg_G(v) + \deg_{\overline{G}}(v) = p - ۱ \Rightarrow ۹ + ۱۲ = p - ۱ \Rightarrow p = ۲۲$

۳۹

۴۰ $$۲ \overset{۱۱}{\equiv} ۳۵ \Rightarrow ۵x \overset{۱۱}{\equiv} ۳۵ \xrightarrow[(\div ۵)]{(۵ \, , \, ۱۱) = ۱} x \overset{۱۱}{\equiv} ۷ \Rightarrow x = ۱۱k + ۷$$

(مشابه سؤال ۱۴ ص ۳۰)

۴۱) $7^2 = 49 \overset{15}{\equiv} 4 \Rightarrow 7^4 \overset{15}{\equiv} 16 \overset{15}{\equiv} 1 \Rightarrow 7^{28} \overset{15}{\equiv} 1 \xrightarrow{\times 7^2 \overset{15}{\equiv} 4} 7^{30} \overset{15}{\equiv} 4$

(مشابه سوال ۸ و ۹ ص ۲۹)

۴۲) (مثال ص ۱۲)
$$\begin{matrix} n|9k+7\times(-7) \\ n|7k+6 \end{matrix} \Rightarrow n|-63k-49+63k+54 \Rightarrow n|5 \xrightarrow{n\in N} n=1 \text{ یا } 5$$

۴۳) (مشابه مثال ص ۱۴) $a=4q+3 \Rightarrow 2a+3 = 8q+9 = 8(q+1)+1 = 8q'+1 \Rightarrow r=1$

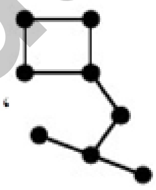
۴۴) الف) نادرست (مشابه قسمت ت کار در کلاس ص ۳)

$$\sqrt{2}, -\sqrt{2} \in Q^c, \sqrt{2}+(-\sqrt{2}) = 0 \notin Q^c$$

ب) درست (مسأله ۳ ص ۱۵)

$$(2k+1)^2-1 = 4k^2+4k+1-1 = 4k(k+1) = 4\times 2q = 8q$$

۴۵) الف) برای مثال اگر $n=10$، رسم C_{10} یا P_{10}. در این گراف‌ها: $\gamma(G) = \left\lceil \frac{n}{\Delta+1} \right\rceil$. (ص ۴۹)

ب) در گرافی مشابه  ، $\left\lceil\frac{n}{\Delta+1}\right\rceil$ ولی $\gamma(G)=3$. (ص ۵۰)

۴۶) الف) مجموعه احاطه‌گر با ۴ عضو مانند: $\{c, f, h, g\}$ (ص ۴۷)

ب) احاطه‌گر مینیمال مانند: $\{c, f, g\}$

۴۷) گرافی از مرتبه n که درجه تمام رئوس آن با هم مساوی و برابر با عدد k, $(0 \le k < n)$ باشد. (ص ۳۵)

۴۸) الف) $\delta(G)=1$ ب) $q=6$

پ) $N_G[b] = \{b, a, c, d\}$ ت) $x=c$ (ص ۴۱)

۴۹) $13y \overset{9}{\equiv} 7, \left(13 \overset{9}{\equiv} 4, 7 \overset{9}{\equiv} 16\right) \to 4y \overset{9}{\equiv} 16 \xrightarrow{(4,9)=1} y \overset{9}{\equiv} 4$

$y = 9k+4, x = -13k-5$ (ص ۲۹)

۵۰) (ص ۱۹) $a \overset{m}{\equiv} b \Rightarrow m|a-b \Rightarrow m|c(a-b) \Rightarrow m|ac-bc \Rightarrow ac \overset{m}{\equiv} bc$

۵۱) (ص ۲۹) $13 \overset{17}{\equiv} -4 \to 13^2 \overset{17}{\equiv} 16 \overset{17}{\equiv} -1 \to 13^{22} \overset{17}{\equiv} -1 \xrightarrow{-1 \overset{17}{\equiv} 16} r=16$

۵۲) (ص ۱۷) $A = 21a^2 = 3\times7\times a^2, B = 35a^3 = 5\times7\times a^3 \Rightarrow [A, B] = 105a^3$

۵۳) (ص ۱۱)
$$\begin{matrix} a|4k+9 \\ a|6k+14 \end{matrix} \Rightarrow a|-6(4k+9)+4(6k+14) \Rightarrow a|2 \xrightarrow{a>1} a=2$$

تلفن تماس: ۰۲۶۳۳۴۰۸۹۴۴

۵۴
$$a+\frac{۱}{a}\geq ۲ \Leftrightarrow a^{۲}+۱\geq ۲a \Leftrightarrow a^{۲}-۲a+۱\geq ۰ \Leftrightarrow (a-۱)^{۲}\geq ۰$$

همواره برقرار است، پس با برگشت روابط حکم برقرار می‌باشد. (ص ۷)

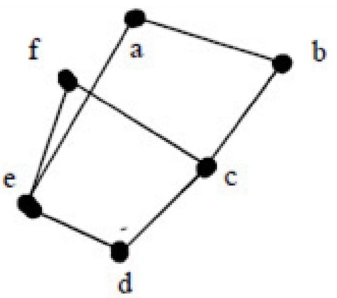
۵۵

۵۶

۵۷

۵۸

الف)



ب) $N_G[b]=\{a\,,\,b\,,\,c\}$

ج) $b\,,\,a\,,\,e\,,\,f\,,\,c\,,\,d$

(ص ۳۶ و ۳۹)

۵۹
$$۲x+۵y=۲۹ \Rightarrow ۲x \overset{۵}{\equiv} ۲۹ \Rightarrow ۲x \overset{۵}{\equiv} ۴ \Rightarrow x=۵k+۲$$
$$y=-۲k+۵$$ (ص ۲۷)

۶۰

۶۱

$$x^2 + y^2 + z^2 \geq xy + yz + xz \Leftrightarrow 2x^2 + 2y^2 + 2z^2 \geq 2xy + 2yz + 2xz$$
$$\Leftrightarrow (x^2 + y^2 - 2xy) + (y^2 + z^2 - 2yz) + (x^2 + z^2 - 2xz) \geq 0$$
$$\Leftrightarrow (x - y)^2 + (y - z)^2 + (x - z)^2 \geq 0$$

چون نابرابری آخری همواره درست است پس با بازگشت روابط حکم برقرار است. (ص ۱۱)

۶۲ $\forall m > 0 \, , \, a|m \, , \, b|m \Rightarrow c \leq m$

۶۳ مجموعه اعدادی که بر ۴ بخش‌پذیرند را با A و مجموعه اعدادی که بر ۷ بخش‌پذیرند را با B نمایش می‌دهیم. بنابراین:

$$|A| = \left[\frac{200}{4}\right] = 50 \text{ و } |A \cap B| = \left[\frac{200}{28}\right] = 7 \Rightarrow |A \cap B'| = |A - B|$$
$$= |A| - |A \cap B| = 50 - 7 = 43$$

۶۴ مجموعه اعدادی که بر ۲ بخش‌پذیرند را با A و مجموعه اعدادی که بر ۳ بخش‌پذیرند را با B نمایش می‌دهیم.

بنابراین:

$$|A| = \left[\frac{90}{2}\right] = 45 \qquad |B| = \left[\frac{90}{3}\right] = 30 \qquad |A \cap B| = \left[\frac{90}{6}\right] = 15$$
$$\Rightarrow |A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B| = 45 + 30 - 15 = 60$$

۶۵

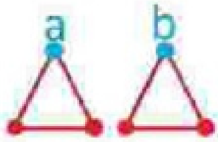
۶۶

۶۷

۶۸

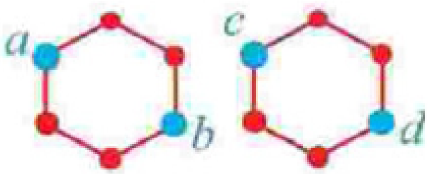
الف)  مجموعه احاطه‌گری آن $\{a\}$ است.

ب) در گراف مقابل مجموعه احاطه‌گری $\{a , b\}$ است.



پ) کافیست گراف را به صورت k بخشی رسم کنیم و در هر بخش راسی که همه‌ی رئوس آن بخش را احاطه می‌کند درنظر بگیریم.

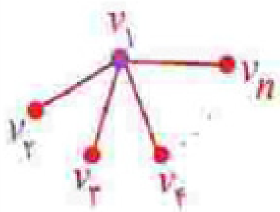
۶۹ $۴ = \left\lceil \frac{۱۲}{۲+۱} \right\rceil \leq \gamma(G)$، مجموعه‌ی $\{a , b , c , d\}$ یک مجموعه‌ی احاطه‌گری است. بنابراین عدد احاطه‌گری آن ۴ می‌باشد.



۷۰

۷۱ حداقل یک راس با ماکزیمم درجه (راس فول) وجود دارد.

با فرض این‌که گراف دارای n راس باشد، حداقل باید $n - ۱$ یال داشته باشد که می‌توان شکل مقابل را برای آن پیشنهاد کرد:



حداکثر میزان تعداد یال $\frac{n(n-۱)}{۲}$ می‌باشد (حالتی که گراف کامل باشد). در هر صورت $\Delta(G) = n - ۱$ است.

تلفن تماس: ۰۲۶۳۳۴۰۸۹۴۴

۷۲

الف) $\gamma(G) \geq \left\lceil \frac{۸}{۳+۱} \right\rceil = ۲$

مجموعه $\{a\,,\,g\}$ یک مجموعه‌ی احاطه‌گری برای آن است. پس $\gamma(G) = ۲$

ب) $\gamma(G) \geq \left\lceil \frac{۱۰}{۴+۱} \right\rceil = ۲$

مجموعه $\{e\,,\,j\}$ یک مجموعه‌ی احاطه‌گری برای آن است. پس $\gamma(G) = ۲$

پ) $\gamma(G) \geq \left\lceil \frac{۱۲}{۵+۱} \right\rceil = ۲$

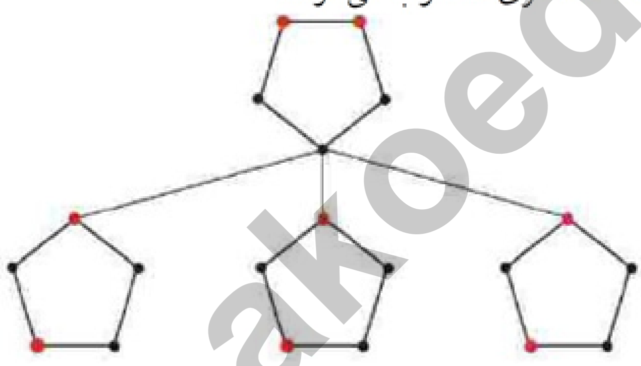
مجموعه $\{f\,,\,d\,,\,l\}$ یک مجموعه‌ی احاطه‌گری برای آن است. پس $\gamma(G) = ۳$

ت) $\gamma(G) \geq \left\lceil \frac{۱۹}{۵+۱} \right\rceil = ۴$

از طرفی از هر مثلث حداقل یک راس باید انتخاب کنیم، به عنوان نمونه مجموعه $\{f\,,\,i\,,\,k\,,\,l\,,\,e\}$ یک مجموعه احاطه‌گری آن است. بنابراین: $\gamma(G) = ۵$

ث) $\gamma(G) \geq \left\lceil \frac{۲۰}{۵+۱} \right\rceil = ۴$

از طرفی از هر پنج ضلعی حداقل دو راست باید انتخاب کنیم، لذا $۸ = ۲ \times ۴$ یعنی $\gamma(G) = ۸$ به عنوان نمونه رئوس قرمز رنگ به عنوان یک مجموعه احاطه‌گری محسوب می‌شوند.

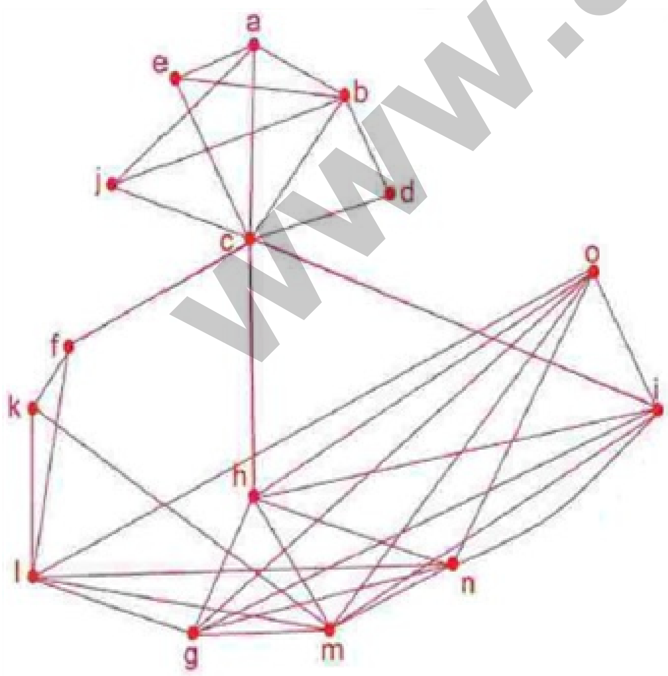


۷۳ ابتدا هر روستا را به عنوان یک راس گراف (با حرف کوچک انگلیسی) مشخص می‌کنیم، سپس بین دو راس (دو روستا) به شرطی یال رسم می‌کنیم که فاصله‌ی بین آن دو بیش‌تر از ۱۰ کیلومتر نباشد.

$\gamma(G) \geq \left\lceil \frac{۱۵}{۸+۱} \right\rceil = ۲$

یک مجموعه‌ی احاطه‌گری می‌تواند $\{c\,,\,m\}$ باشد.

بنابراین کافیست دو بیمارستان در روستاهای $c\,,\,m$ احداث کرد.



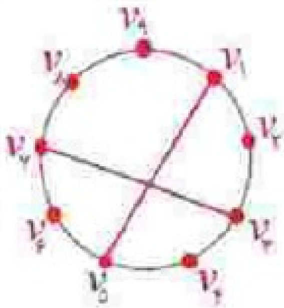
تلفن تماس: ۰۲۶۳۳۴۰۸۹۴۴

۷۴

۷۵

۷۶

۷۷

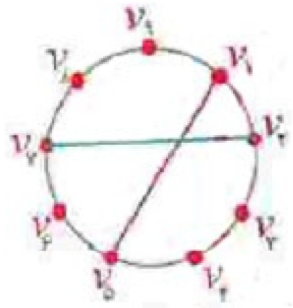


الف) دور به طول ۵ : $V_1V_2V_3V_4V_5V_1$

دور به طول ۶ : $V_1V_5V_6V_7V_8V_9V_1$

دور به طول ۷ : $V_1V_5V_4V_3V_7V_8V_9V_1$

دور به طول ۹ : $V_1V_2V_3V_4V_5V_6V_7V_8V_9V_1$



ب) ابتدا همچون قسمت الف گرافی با دوری به طول ۹ رسم می‌کنیم و از V_1 به V_5 یالی رسم کرده تا دورهایی به طول ۵ و ۶ ساخته شود.

حال برای ساختن دورهایی به طول‌های ۷ و ۸ باید یال دیگری رسم کنیم. به طور مثال راس V_2 را انتخاب می‌کنیم که فقط می‌توان آن‌را به راس V_7 رسم کرد زیرا در غیر این صورت دورهایی به طول ۳ یا ۴ ایجاد می‌شود که خواست مسئله نیست.

اگر مطابق شکل (یال آبی رنگ) V_2 را به V_7 وصل کنیم دور به طول ۸ ایجاد می‌شود $(V_2V_3V_4V_5V_1V_9V_8V_7V_2)$ ولی دور به طول ۷ ایجاد نمی‌شود.

همچنین در قسمت قبل مشاهده شد که اگر راس V_3 انتخاب شود، دور به طول ۷ ایجاد شده ولی به طول ۸ ایجاد نمی‌شود.

به همین ترتیب با انتخاب رئوس دیگر متوجه می‌شویم که این کار با رسم دو قطر امکان‌پذیر نیست.

اما در صورتی‌که سه قطر رسم کنیم، یکی برای ایجاد دورهایی به طول ۵ و ۶ و دیگری برای دور به طول ۷ و سومی برای ایجاد دور به طول ۸، باز هم قابل قبول نبوده زیرا دورهایی به طول ۳ یا ۴ نیز ساخته شده که خواسته مسئله نیست. بنابراین چنین گرافی وجود ندارد.

۷۸ الف) ۵ نفر را به عنوان ۵ راس یک گراف جهت‌دار درنظر می‌گیریم.

به طور مثال اگر نام علی در فهرست دوستان سامان وجود دارد، یک یال جهت‌دار از علی به سمت سامان رسم می‌کنیم. و برعکس اگر نام سامان در فهرست دوستان علی باشد یک یال جهت‌دار از سامان به علی رسم می‌کنیم. به همین ترتیب الی آخر پیش می‌رویم.

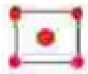
حداکثر تعداد یال‌ها در گراف جهت‌دار ۵ راسی $p(p-۱) = ۵ \times ۴ = ۲۰$ می‌باشد.

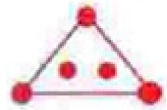
از طرفی برای هر یال دو حالت داریم (وجود داشتن یا وجود نداشتن آن یال) پس تعداد کل حالات برای آن $۲^{۲۰}$ می‌باشد.

ب) این قسمت همچون قسمت الف است. با این تفاوت که گراف جهت‌دار نیست. پس حداکثر تعداد یال‌ها $\frac{p(p-۱)}{۲} = \frac{۵ \times ۴}{۲} = ۱۰$ می‌باشد. بنابراین تعداد کل حالات $۲^{۱۰}$ است.

تلفن تماس: ۰۲۶۳۳۴۰۸۹۴۴

۷۹ اگر هفت نفر را به عنوان ۷ رأس یک گراف درنظر بگیریم و در صورتی‌که دو نفر با هم دست دهند، بین دو رأس منسوب به آن‌ها یال رسم کنیم، در نتیجه ۶ رأس گراف درجه ۲ خواهد بود و اگر رأس هفتم درجه ۵ باشد. یعنی گراف دارای یک رأس درجه فرد است که با نتیجه‌ی قضیه تناقض دارد زیرا باید تعداد رئوس درجه فدر، زوج تا باشد. پس نفر هفتم نمی‌تواند با ۵ نفر دست داده باشد.

۸۰ الف) 

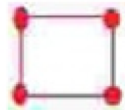
ب) 

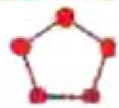
پ) 

ت) امکان‌پذیر نیست، زیرا اگر بخواهیم چهار راس تنها باشند، رأس پنجم نمی‌تواند به هیچ‌کدام از آن‌ها متصل شود پس رأس پنجم نیز تنها خواهد ماند.

ث) 

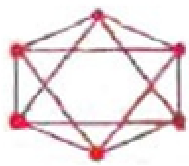
۸۱ الف) 

ب) 

پ) 

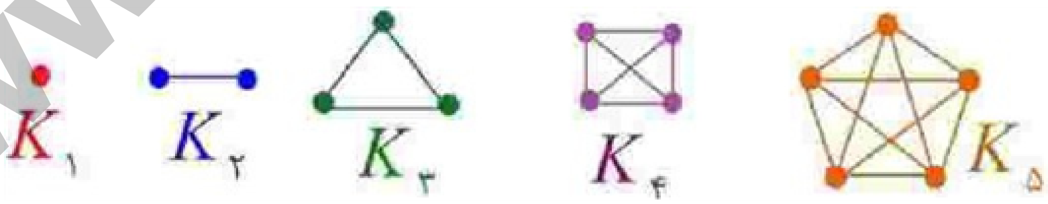
ت) امکان‌پذیر نیست زیرا مجموع درجات عدد فرد بوده و طبق قضیه باید زوج باشد.

منتظم $r: \sum d_i = 2q = r.p$ زوج $\Rightarrow 3 \times 5 = 15$

ث) 

ج) امکان‌پذیر نیست زیرا مجموع درجات عدد فرد بوده و طبق قضیه باید زوج باشد. $3 \times 7 = 21$

۸۲



۸۳ در گراف کامل p راسی تعداد یال‌ها برابر است با $\frac{p(p-1)}{2}$ در نتیجه:

$$\frac{p(p-1)}{2} = 36 \Rightarrow p(p-1) = 72 \Rightarrow p = 9$$

از طرفی گراف کامل K_9 یک گراف ۸- منتظم است. بنابراین درجه تمام رئوس یکسان بوده و $\Delta = \delta = 8$ است.

تلفن تماس: ۰۲۶۳۳۴۰۸۹۴۴

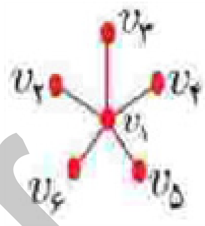
۸۴ تعداد یال‌های گراف G - تعداد کل یال‌های ممکن در گراف ۵ راسی (K_5) = تعداد یال‌های گراف $\overline{G}$

$\Rightarrow$ تعداد یال های گراف $\overline{G}$ = $\frac{5\times 4}{2} - 6 = 4 \xrightarrow{\times 2}$ مجموع درجات گراف $\overline{G}$ = ۸

درجه هر راس در گراف کامل ۴ است $\Rightarrow \begin{cases} deg_G(a) = 2 \Rightarrow deg_{\overline{G}}(a) = 4 - 2 = 2 \\ deg_G(a) = 3 \Rightarrow deg_{\overline{G}}(c) = 4 - 3 = 1 \end{cases}$

توجه: $d_i + \overline{d_i} = p - 1 \quad , \quad q + \overline{q} = q_{\text{کامل}}$

۸۵



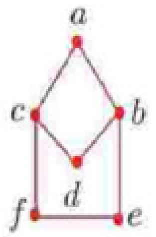
۸۶ الف) $V(G) = \{a, b, c, d, e, f, g\}$, $E(G) = \{ab, ae, af, bc, cd, ce, de\}$

ب) $\Delta(G) = 3$, $\delta(G) = 0$

پ) $N_G(f) = \{a\}$, $N_G(g) = \varnothing$, $N_G(e) = \{a, c, d\}$

ت) x راسی هست که هم با a و هم با c همسایه باشد، با توجه به شکل، $x = b$ است.

۸۷



الف) $p = 6$, $q = 7$

ب) $deg(a) = deg(d) = deg(e) = deg(f) = 2$ و $deg(b) = deg(c) = 3$

پ) c , e

ت) $2 + 3 + 2 + 2 + 3 + 2 = 14$

ث)

الف) $p = 4$, $q = 6$

ب) $deg(v_1) = deg(v_2) = deg(v_3) = deg(v_4) = 3$

پ) راس f در این گراف تعریف نشده است.

ت) $4 \times 3 = 12$

۸۸ تعداد سؤالات ۷ امتیازی که امتیاز کامل گرفته را با x و تعداد سؤالات ۹ امتیازی که امتیاز کامل گرفته را با y نمایش می‌دهیم، بنابراین:

$$7x + 9y = 73 \Rightarrow 9y \overset{7}{\equiv} 73 \xrightarrow{73 \overset{7}{\equiv} 3} 9y \overset{7}{\equiv} 3 \xrightarrow{\div 3} 3y \overset{7}{\equiv} 1 \Rightarrow 3y \overset{7}{\equiv} 1 - 7 = -6$$

$$\xrightarrow{\div 3} y \overset{7}{\equiv} -2 \Rightarrow y = 7k - 2 \xrightarrow{7x + 9y = 73} 7x + 9(7k - 2) = 73 \Rightarrow x = -9k + 13$$

$k = 1 \Rightarrow x = 4 , y = 5 \Rightarrow$ فقط به یک صورت می‌توانسته این امتیاز را کسب کند.

۸۹ تعداد وزنه‌های ۳ کیلویی را با x و تعداد وزنه‌های ۵ کیلویی را با y نمایش می‌دهیم، بنابراین:

$$3x+5y=23 \Rightarrow 5y \overset{3}{\equiv} 23 \Rightarrow 5y \overset{3}{\equiv} 23-3=20 \xrightarrow{\div 5} y \overset{3}{\equiv} 4 \Rightarrow y=3k+4$$

$$\xrightarrow{3x+5y=23} 3x+5(3k+4)=23 \Rightarrow x=-5k+1$$

k	۰	۱-
	۴	۱
	۱	۶

⇐ به دو طریق می‌توان وزن کرد

۹۰

$$5a+9 \overset{11}{\equiv} 0 \Rightarrow 5a \overset{11}{\equiv} -9 \Rightarrow 5a \overset{11}{\equiv} -9+4\times 11=35 \xrightarrow{\div 5} a \overset{11}{\equiv} 7$$

$$\Rightarrow a=11k+7,\ k\in Z$$

۹۱

شهریور + مهر + آبان + آذر + دی + بهمن $= 31+4\times 30+12 \overset{7}{\equiv} 2$

در جدول برای روز جمعه عدد ۲ را می‌نویسیم، سپس اعداد قبل و بعد آن‌را تعیین می‌کنیم، عدد صفر مربوط به ۳۱ مرداد است.

چ	پ	ج	ش	ی	د	س
۰	۱	۲	۳	۴	۵	۶

۳۱ مرداد چهارشنبه بوده است

روش دوم:

جمعه   شروع(چهارشنبه)

۱۲ بهمن ⟵ ۳۱ مرداد

پس ۲ روز جلو می‌رویم. $31+4\times 30+12 \overset{7}{\equiv} 2$ روز

شهریور

۴ تا ۳۰ روز

۹۲

مهر + آبان + آذر + دی + بهمن + اسفند $= (30-1)+4\times 30+7 \overset{7}{\equiv} 2$

ی	د	س	چ	پ	ج	ش
۰	۱	۲	۳	۴	۵	۶

سه شنبه است

تلفن تماس: ۰۲۶۳۳۴۰۸۹۴۴

۹۳ الف) می‌دانیم:

$$423 \overset{11}{\equiv} 5 \,,\ 79 \overset{11}{\equiv} 2 \Rightarrow \text{معادله هم نهشتی}: 5x \overset{11}{\equiv} 2 \Rightarrow 5x \overset{11}{\equiv} 2 + 3 \times 11 = 35$$

$$\xrightarrow{\div 5} x \overset{11}{\equiv} 7 \Rightarrow x = 11k + 7 \,,\ k \in Z$$

ب) $8x \overset{12}{\equiv} 20 - 12 = 8 \xrightarrow[(8\,,\,12) = 4]{\div 8} x \overset{3}{\equiv} 1 \Rightarrow x = 3k + 1 \,,\ k \in Z$

ج) $(51\,,\,6) = 3 \,,\ 3 \nmid 11 \Rightarrow$ معادله جواب ندارد

توجه: $ax \overset{m}{\equiv} b \xrightarrow{\text{شرط وجود جواب}} (a\,,\,m) | b$

۹۴ تعداد اسکناس‌های ۲۰۰۰ تومانی را x و تعداد اسکناس‌های ۵۰۰۰ تومانی را y درنظر می‌گیریم. بنابراین:

$$2000x + 5000y = 29000 \xrightarrow{\div 1000} 2x + 5y = 29$$

$$5y \overset{2}{\equiv} 29 \Rightarrow 5y \overset{2}{\equiv} 29 - 12 \times 2 = 5 \xrightarrow{\div 5} y \overset{2}{\equiv} 1 \Rightarrow y = 2k + 1 \xrightarrow{2x + 5y = 29}$$

$$2x + 5(2k + 1) = 29 \Rightarrow x = -5k + 12$$

k	۰	۱	۲
تعداد اسکناس‌های ۵۰۰۰ تومانی : $y = 2k + 1$	۱	۳	۵
تعداد اسکناس‌های ۲۰۰۰ تومانی : $x = -5k + 12$	۱۲	۷	۲

$\Rightarrow$ به ۳ طریق می‌توان خرد کرد

۹۵

$$7x \overset{5}{\equiv} 11 \Rightarrow 7x \overset{5}{\equiv} 11 + 2 \times 5 = 21 \xrightarrow{\div 7} x \overset{5}{\equiv} 3 \Rightarrow x = 5k + 3 \,,\ k \in Z$$

$$\xrightarrow{7x + 5y = 11} 7(5k + 3) + 5y = 11 \Rightarrow y = -7k - 2 \,,\ k \in Z$$

تلفن تماس: ۰۲۶۳۳۴۰۸۹۴۴

۹۶

$$\left.\begin{array}{l} ۱! \overset{۱۰}{\equiv} ۱ \\ ۲! \overset{۱۰}{\equiv} ۲ \\ ۳! \overset{۱۰}{\equiv} ۶ \\ ۴! = ۲۴ \overset{۱۰}{\equiv} ۴ \\ ۵! = ۱۲۰ \overset{۱۰}{\equiv} ۰ \\ ۶! \overset{۱۰}{\equiv} ۰ \\ \vdots \\ ۵۰۰! \overset{۱۰}{\equiv} ۰ \end{array}\right\} \xrightarrow{+} A \overset{۱۰}{\equiv} ۱ + ۲ + ۶ + ۴ + ۰ + \ldots + ۰ = ۱۳$$

$$\xrightarrow{۱۳ \overset{۱۰}{\equiv} ۳} A \overset{۱۰}{\equiv} ۳$$

رقم یکان عدد A ، ۳ است.

۹۷ دو عدد ۵ - ۳a و ۷ - ۴a به پیمانه‌ی ۱۰، با یک‌دیگر هم‌نهشت‌اند:

$$۴a - ۷ \overset{۱۰}{\equiv} ۳a - ۵ \Rightarrow ۴a - ۳a \overset{۱۰}{\equiv} ۷ - ۵ \Rightarrow a \overset{۱۰}{\equiv} ۲ \xrightarrow{\times ۹} ۹a \overset{۱۰}{\equiv} ۱۸ \xrightarrow{+۶} ۹a + ۶ \overset{۱۰}{\equiv} ۲۴$$

$$\xrightarrow{۲۴ \overset{۱۰}{\equiv} ۴} ۹a + ۶ \overset{۱۰}{\equiv} ۴ \Rightarrow$$ رقم یکان ۴ است

۹۸

$$۲^۵ \overset{۲۳}{\equiv} ۹ \xrightarrow{\text{توان ۲}} ۲^{۱۰} \overset{۲۳}{\equiv} ۸۱ \xrightarrow{۸۱ \overset{۲۳}{\equiv} ۱۲} ۲^{۱۰} \overset{۲۳}{\equiv} ۱۲ \xrightarrow{\times ۲} ۲^{۱۱} \overset{۲۳}{\equiv} ۲۴$$

$$\xrightarrow{۲۴ \overset{۲۳}{\equiv} ۱} ۲^{۱۱} \overset{۲۳}{\equiv} ۱ \xrightarrow{+۷} ۲^{۱۱} + ۷ \overset{۲۳}{\equiv} ۸ \xrightarrow{\times ۹} (۲^{۱۱} + ۱) \times ۹ \overset{۲۳}{\equiv} ۷۲$$

$$\xrightarrow{۷۲ \overset{۲۳}{\equiv} ۳} A \overset{۲۳}{\equiv} ۳ \Rightarrow r = ۳$$

۹۹

$$(۲۳)^{۵۱} = (۱۱+۱۲)^{۵۱} \overset{۱۱\times ۱۲}{\equiv} ۱۱^{۵۱}+۱۲^{۵۱} \xrightarrow{-۱۱^{۵۱}-۱۲^{۵۱}} ۲۳^{۵۱}-۱۱^{۵۱}-۱۲^{۵۱} \overset{۱۳۲}{\equiv} ۰$$

$\Rightarrow$ عدد $۲۳^{۵۱}-۱۱^{۵۱}-۱۲^{۵۱}$ بر ۱۳۲ بخش پذیر است

۱۰۰

$$\left.\begin{array}{l}
\binom{n}{۰}a^n = a^n \overset{ab}{\equiv} a^n \\
\binom{n}{۱}a^{n-۱}b \overset{ab}{\equiv} ۰ \\
\binom{n}{۰}a^{n-۲}b^۲ \overset{ab}{\equiv} ۰ \\
\binom{n}{۳}a^{n-۳}b^۳ \overset{ab}{\equiv} ۰ \\
\vdots \\
\binom{n}{n-۱}ab^{n-۱} \overset{ab}{\equiv} ۰ \\
\binom{n}{n}b^n = b^n \overset{ab}{\equiv} b^n
\end{array}\right\} \xrightarrow{+} (a+b)^n \overset{ab}{\equiv} a^n + b^n$$

۱۰۱

۱۰۲ روش اول: گیریم باقیمانده‌ی تقسیم دو عدد a و b بر m برابر r باشد، در نتیجه:

$$a \overset{m}{\equiv} r \wedge b \overset{m}{\equiv} r \Rightarrow a \overset{m}{\equiv} b$$

روش دوم:

$$\begin{array}{l} a = mq + r \\ b = mq' + r \end{array} \Rightarrow a - b = m(q-q') \Rightarrow m \mid a - b \xrightarrow{\text{تعریف هم نهشتی}} a \overset{m}{\equiv} b$$

تلفن تماس: ۰۲۶۳۳۴۰۸۹۴۴

۱۰۳

$$\left.\begin{array}{l} a \overset{m}{\equiv} b \xrightarrow[\text{تمرین ۳}]{d|m} a \overset{d}{\equiv} b \\ b \overset{n}{\equiv} c \xrightarrow[\text{تمرین ۳}]{d|n} b \overset{d}{\equiv} c \end{array}\right\} \Rightarrow a \overset{d}{\equiv} c$$

۱۰۴

$$a \overset{m}{\equiv} b \Rightarrow m|a-b \xrightarrow[\text{تعدی}]{n|m} n|a-b \Rightarrow a \overset{n}{\equiv} b$$

۱۰۵

۱۰۶

الف) $\left(\underbrace{[m^۲ , m]}_{m^۲} , m^۵\right) = (m^۲ , m^۵) = m^۲ , m \neq ۰$

ب) $(۲m , ۶m^۳) = ۲|m| , m \neq ۰$ (توجه داشته باشیم که $۲m|۶m^۳$)

پ) $(۳m+۱ , ۳m+۲) = ۱$ (توجه داشته باشیم که $۳m+۱$ و $۳m+۲$ دو عدد صحیح متوالیند.)

ت) $\left[m^۷ , \underbrace{(m^۲ , m^۳)}_{m^۲}\right] = [m^۷ , m^۲] = |m^۷| , m \neq ۰$

ث) $[\underbrace{(۷۲ , ۴۸)}_{۲۴} , ۱۲۰] = [۲۴ , ۱۲۰] = ۱۲۰$

توجه: $b|a \Rightarrow \begin{cases} (a , b) = |b| \\ [a , b] = |a| \end{cases}$

۱۰۷

$$A = \underbrace{(n+۱)(n+۲)(n+۳)}_{\text{ضرب ۳ عدد متوالی}} = \frac{(n+۳)!}{n!}$$

از طرفی می‌دانیم: $\binom{n+۳}{۳} = q \in N \Rightarrow \frac{(n+۳)!}{۳! \times n!} = q \Rightarrow \frac{(n+۳)!}{n!} = ۶q \Rightarrow A = ۶q \Rightarrow ۶|A$

۱۰۸ با فرض $n \in Z$، دو عدد صحیح متوالی را به صورت n و $n+۱$ درنظر می‌گیریم:

$$(n+۱)^۳ - n^۳ = \cancel{n^۳} + ۳n^۲ + ۳n + ۱ - \cancel{n^۳} = ۳\underbrace{n(n+۱)}_{۲k} + ۱ = ۲\underbrace{(۳k)}_{q} + ۱ \Rightarrow \text{عدد فرد است}$$

۱۰۹ برای هر عدد صحیح دلخواه a یکی از سه حالت زیر وجود دارد:

حالت اول : $a=3k \Rightarrow 3|a$

حالت دوم : $a=3k+1 \Rightarrow a+2=3k+3 \Rightarrow a+2=3(k+1) \Rightarrow 3|a+2$

حالت سوم : $a=3k+2 \Rightarrow a+4=3k+6 \Rightarrow a+4=3(k+2) \Rightarrow 3|a+4$

بنابراین همواره یکی از اعداد صحیح a یا $a+2$ یا $a+4$ بر ۳ بخش‌پذیرند.

۱۱۰
$$n|a \Rightarrow a=nk \quad , \quad n|b \Rightarrow b=nk'$$
$$\Rightarrow a=bq+r \Rightarrow nk=nk'+r \Rightarrow r=nk-nk'=n(k-k') \Rightarrow n|r$$

۱۱۱
$$n^3-n=n(n^2-1)=n(n-1)(n+1)$$

اگر: $n=3k \Rightarrow n^3-n=3\underbrace{k(3k-1)(3k+1)}_{q} \Rightarrow 3|n^3-n$

اگر: $n=3k+1 \Rightarrow n^3-n=(3k+1)(3k)(3k+2)=3\underbrace{k(3k+1)(3k+2)}_{q'} \Rightarrow 3|n^3-n$

اگر:
$$n=3k+2 \Rightarrow n^3-n=(3k+2)(3k+1)\underbrace{(3k+3)}_{3(k+1)}=3\underbrace{(k+1)(3k+2)(3k+1)}_{q''} \Rightarrow 3|n^3-n$$

بنابراین در هر حالت نشان دادیم $3|n^3-n$.

روش دوم:
$$n^3-n=(n-1)n(n+1)=\frac{(n+1)!}{(n-2)!}=A$$

از طرفی : $\binom{n+1}{3}=\frac{(n+1)!}{3!\times((n+1)-3)!}=q\in N$

$$\Rightarrow \frac{(n+1)!}{3!\times(n-2)!}=q \Rightarrow \frac{(n+1)!}{(n-2)!}=3!\times q \Rightarrow A=6q \Rightarrow 6|A$$

۱۱۲ گیریم:

$$n\in Z\,,\ a=2n+1 \xrightarrow{b|a+2} b|2n+3 \Rightarrow \text{عددی فرد است } b \Rightarrow b=2m+1\,,\ m\in Z$$

$$a^2+b^2+3=(2n+1)^2+(2m+1)^2+3=4n^2+4n+1+4m^2+4m+1+3$$
$$=4\underbrace{n(n+1)}_{2k}+4\underbrace{m(m+1)}_{2k'}+5=8k+8k'+5=8\underbrace{(k+k')}_{q}+5 \Rightarrow r=5$$

روش دوم:

توجه : $x=\text{فرد} \Rightarrow x^2=8q+1 \Rightarrow \begin{cases} a^2+b^2+3=(8q+1)+(8q'+1)+3=8(q+q')+5 \Rightarrow r=5 \\ a\ ,\ b=\text{فرد} \end{cases}$

تلفن تماس: ۰۲۶۳۳۴۰۸۹۴۴

۱۱۳

$$\left.\begin{array}{l} a=۷k+۵ \xrightarrow{\times ۸} ۸a=۵۶k+۴۰ \\ a=۸k'+۷ \xrightarrow{\times ۷} ۷a=۵۶k'+۴۹ \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{تفریق}} a=۵۶k-۵۶k'-۹$$

$$\xrightarrow{-۹=-۵۶+۴۷} a=۵۶k-۵۶k'-۵۶+۴۷ \Rightarrow a=۵۶\underbrace{(k-k'-۱)}_{q}+۴۷$$

$\Rightarrow$ باقیمانده $r=۴۷$

۱۱۴

$$a|b \xrightarrow{\text{توان } m} a^m|b^m \xrightarrow{\text{راست} \times b^{n-m}} a^m|b^m\times b^{n-m} \Rightarrow a^m|b^n$$

توجه: $x|y \Rightarrow x|ky$

۱۱۵ برهان خلف: گیریم $(p\,,\,q)=d$ و $d\neq ۱$ باشد. بنابراین:

$$\begin{cases} d|p \wedge d|q \\ p\,,\,q=\text{عدد اول} \end{cases} \xrightarrow{d\neq ۱} d=p \wedge d=q \Rightarrow p=q \quad \text{تناقض}$$

۱۱۶ الف) گیریم:

$$m\in Z\,,\,(m\,,\,m+۱)=d \Rightarrow d|m \wedge d|m+۱ \xrightarrow{\text{تفریق}} d|(m+۱)-m \Rightarrow d|۱ \xrightarrow{d>۰} d=۱$$

ب) گیریم:

$$k\in Z\,,\,(۲k+۱\,,\,۲k+۳)=d \Rightarrow d|۲k+۱ \wedge d|۲k+۳ \xrightarrow{\text{تفریق}} d|(۲k+۳)-(۲k+۱)$$

$$\Rightarrow d|۲ \xrightarrow{d \text{ زوج نیست}} d=۱$$

۱۱۷ خیر به طور مثال $۳|۳$ و $۲|۴$ ولی $۳+۴ \nmid ۳+۲$.

۱۱۸

$$\left.\begin{array}{l} ۵|۴k+۱ \xrightarrow{\text{توان ۲}} ۲۵|۱۶k^۲+۸k+۱ \\ ۵|۴k+۱ \xrightarrow{\times ۵} ۲۵|۲۰k+۵ \end{array}\right\} \xrightarrow{+} ۲۵|۱۶k^۲+۲۸k+۶$$

توجه: $\left.\begin{array}{l} a|b \\ a|c \end{array}\right\} \Rightarrow a|bx+۲y$

۱۱۹

$$\left.\begin{array}{l} a|۹k+۴ \xrightarrow{\text{راست}\times ۵} a|۴۵k+۲۰ \\ a|۵k+۳ \xrightarrow{\text{راست}\times ۹} a|۴۵k+۲۷ \end{array}\right\} \Rightarrow a|(۴۵k+۲۷)-(۴۵k+۲۰)$$

$$\Rightarrow a|۷ \xrightarrow{a>۱} a=۷ \Rightarrow a \text{ عددی اول است}$$

تلفن تماس: ۰۲٦۳۳٤۰۸۹٤٤

۱۲۰

$$a|b \xrightarrow{\text{ویژگی ۱}} a|(-1)\times b \Rightarrow a|-b$$

$$-a|a\,,\ a|b \xrightarrow{\text{ویژگی ۲ تعدی}} -a|b$$

$$a|b \Rightarrow (-1)a|(-1)b \Rightarrow -a|-b$$

۱۲۱

$$a|cd\,,\ b|cd\,,\ c|ab\,,\ d|ab\,,\ ab|cd$$

۱۲۲ الف) صحیح است زیرا:

$n \in Z$: عدد فرد $2n-1$

$$\xrightarrow{\text{مربع}} (2n-1)^2 = 4n^2 - 4n + 1 = 2\left(2n^2 - 2n\right) + 1 \rightarrow \text{فرد است}$$

$$\xrightarrow{\text{مکعب}} (2n-1)^3 = 8n^3 - 12n^2 + 6n - 1 = 2\left(4n^3 - 6n^2 + 3n\right) - 1 \rightarrow \text{فرد است}$$

ب) صحیح است زیرا:

پنج عدد طبیعی متوالی : $n+1\,,\ n+2\,,\ n+3\,,\ n+4\,,\ n+5\,,\ n \in N \cup \{0\}$

$$\text{میانگین اعداد} = \frac{\text{مجموع اعداد}}{\text{تعداد اعداد}} = \frac{5n+15}{5} = n+3 = \text{عدد وسطی}$$

۱۲۳ خیر - اثبات بُرهان خلف: گیریم چنین اعدادی وجود داشته باشد، بنابراین:

$$\frac{1}{a+b} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} \Rightarrow \frac{1}{a+b} = \frac{a+b}{ab} \Rightarrow (a+b)^2 = ab \Rightarrow a^2 + b^2 + 2ab = ab$$

$$\Rightarrow a^2 + b^2 + ab = 0 \xrightarrow{\times 2} 2a^2 + 2b^2 + 2ab = 0 \Rightarrow a^2 + a^2 + b^2 + b^2 + 2ab = 0$$

$$\Rightarrow (a+b)^2 + a^2 + b^2 = 0 \Rightarrow a = 0 \wedge b = 0 \wedge a + b = 0 \Rightarrow \text{تناقض}$$

۱۲۴

۱۲۵

۱۲۶

تلفن تماس: ۰۲۶۳۳۴۰۸۹۴۴

۱۲۷ الف) x و y هم‌علامتند، بنابراین $xy > ۰$ خواهد بود.

$$\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\geq ۲ \Leftrightarrow xy\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\right)\geq ۲xy \Leftrightarrow x^{۲}+y^{۲}\geq ۲xy \Leftrightarrow x^{۲}+y^{۲}-۲xy\geq ۰$$

$\Leftrightarrow (x-y)^{۲}\geq ۰$ همیشه درست

ب) ابتدا طرفین نامساوی را در ۲ ضرب می‌کنیم:

$$x^{۲}+y^{۲}+z^{۲}\geq xy+yz+zx \Rightarrow ۲x^{۲}+۲y^{۲}+۲z^{۲}\geq ۲xy+۲yz+۲zx$$

$$\Rightarrow x^{۲}+x^{۲}+y^{۲}+y^{۲}+z^{۲}+z^{۲}-۲xy-۲yz-۲zx\geq ۰$$

$\Rightarrow (x-y)^{۲}+(x-z)^{۲}+(y-z)^{۲}\geq ۰$ همیشه درست

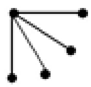
پ) ابتدا طرفین نامساوی را در ۲ ضرب می‌کنیم:

$$x^{۲}+y^{۲}+۱\geq xy+x+y \Rightarrow ۲x^{۲}+۲y^{۲}+۲\geq ۲xy+۲x+۲y$$

$$\Rightarrow x^{۲}+x^{۲}+y^{۲}+y^{۲}+۱+۱-۲xy-۲x-۲y\geq ۰ \Rightarrow (x-y)^{۲}+(x-۱)+(y-۱)^{۲}\geq ۰$$

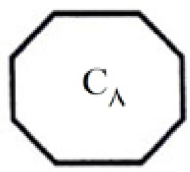
همیشه درست

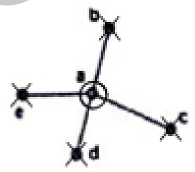
۱۲۸ زمانی که $\gamma = ۱$ باشد یعنی حداقل یک رأس از درجه ۱ - p داریم پس چون $p = ۵ \Leftarrow \Delta = ۴$

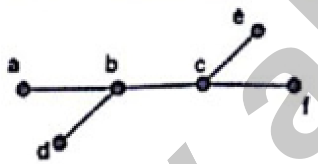
$\Delta = ۴ \xrightarrow{\text{حداقل یال}}$  $q = ۴$

$\Delta = ۴ \xrightarrow{\text{حداکثر یال}} k_{۵} \rightarrow q = \binom{۵}{۲} = ۱۰$

۱۲۹

الف) 

ب) 

ج) 

هر کدام (۰/۵) (صفحه: ۵۳)

۱۳۰ الف) $\{f, d\}$ (۰/۵) ب) $\{e, f, g, h\}$ (۰/۵) (صفحه: ۴۷)

۱۳۱ الف) $V(G) = \{a, b, c, d\}$ (۰/۵) و $E(G) = \{ab, ac, bc, bd, cd, de\}$ (۰/۵)

ب) abca یا bcdb (۰/۲۵)

ج) درجه e در گراف مکمل ۳ خواهد بود (۰/۲۵) (صفحات: ۳۹ و ۴۱)

۱۳۲

تلفن تماس: ۰۲۶۳۳۴۰۸۹۴۴

۱۳۳ (صفحه: ۱۶)

$$\begin{cases} ۵|۴k+۱ \xrightarrow{(\,)^۲} ۲۵|\,۱۶k^۲+۸k+۱ \quad (۰/۵) \xrightarrow{+} ۲۵|۱۶k^۲+۲۸k+۶ \quad (۰/۲۵) \\ ۵|۴k+۱ \xrightarrow{\times ۵} ۲۵|\,۲۰k+۵ \quad (۰/۵) \end{cases}$$

۱۳۴ (صفحه: ۷)

$$a+\frac{۱}{a} \geq ۲ \Leftrightarrow a^۲+۱ \geq ۲a \quad (۰/۲۵) \Leftrightarrow a^۲+۱-۲a \geq ۰ \quad (۰/۲۵) \Leftrightarrow (a-۱)^۲ \geq ۰$$

۱۳۵ فرض کنیم که r یک عدد گویا و x یک عدد گنگ باشد نشان می‌دهیم که $r+x$ یک عدد گنگ است (۰/۲۵)
فرض خلف اگر $r+x$ گنگ نباشد (۰/۲۵) بنابراین عددی گویا است از طرفی میدانیم که تفاضل دو عدد گویا، گویا است (۰/۲۵) پس تفاضل $r+x$ و r باید عددی گویا باشد یعنی $r+x-r \in Q$ و از آنجا (۰/۲۵) $x \in Q$ که با فرض ما در تناقض است در نتیجه فرض خلف باطل است و حکم ثابت می‌گردد (۰/۲۵)

روش دوم:

گویا $= x = \frac{m}{n}$; m و $n \in Z$

گنگ $= y$

فرض خلف : $x+y =$ گنگ نیست

$$\Rightarrow x+y = \text{گویا} = \frac{a}{b}\,, \quad a,b \in Z \Rightarrow \frac{m}{n}+y=\frac{a}{b} \Rightarrow y=\frac{a}{b}-\frac{m}{n}=\frac{\overbrace{an-bm}^{\in Z}}{\underbrace{bn}_{\in Z}}=\text{گویا}$$

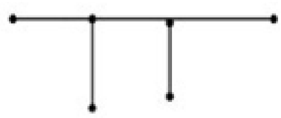
$\Rightarrow y$ تناقض با گنگ بودن

۱۳۶ ۱۲

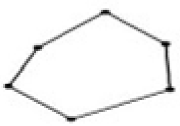
$$[۱۲\,,\,\cancel{(۶,۸)}] = \underbrace{[۱۲\,,\,۲]}_{\text{ک.م.م}} = \frac{۱۲\times ۲}{\cancel{(۱۲\,,\,۲)}} = ۱۲$$

ب.م.م ۶ , ۸ = ۲

۱۳۷ الف) (۰/۵)



ب)



(۰/۵) (صفحه: ۵۳)

تلفن تماس: ۰۲۶۳۳۴۰۸۹۴۴

۱۳۸ الف) $q = ۷$ (۰/۲۵) , $p = ۶$ (۰/۲۵)

ب) $N_{G(b)} = \{a, d, c\}$ (۰/۲۵)

ج) (۰/۲۵) $\frac{P(P-۱)}{۲}$ = تعداد یال‌های گراف G + تعداد یال‌های گراف $\overline{G}$

(۰/۲۵) ۱۶ = مجموع درجه‌های رئوس گراف $\overline{G}$ ⇐ (۰/۲۵) ۸ = تعداد یال‌های گراف $\overline{G}$

(صفحه: ۴۱)

۱۳۹

$\underbrace{۲y \overset{۵}{\equiv} ۱۸}_{(۰/۲۵)} \xrightarrow{(۲,۵)=۱} y \overset{۵}{\equiv} ۹$ (۰/۵) $\Rightarrow y \overset{۵}{\equiv} ۹ \overset{۵}{\equiv} ۴$ (۰/۲۵)

(صفحه: ۲۵) $x = -۲k + ۲$ (۰/۲۵) و $y = ۵k + ۴$ (۰/۲۵)

۱۴۰ روز اول مهر، شنبه را برابر صفر در نظر می‌گیریم ۲۹ روز در مهر و سه ماه آبان و آذر و دی و ۱۲ بهمن، فاصله اول مهر تا ۱۲ بهمن است، پس داریم:

ش	ی	د	س	چ	پ	ج
۰	۱	۲	۳	۴	۵	۶

(۰/۲۵)

$۲۹ + ۳۰ + ۳۰ + ۳۰ + ۱۲ = ۱۳۱ \rightarrow ۱۳۱ \overset{۷}{\equiv} ۵$ (۰/۵)

که متناظر این عدد در جدول روز پنج‌شنبه را نشان می‌دهد. (۰/۲۵) (صفحه ۲۴)

۱۴۱ الف) ۲۸ (۰/۵)

تعداد یال های گراف کامل k_p $= \binom{p}{۲} \Rightarrow k_۸ \Rightarrow q = \binom{۸}{۲} = ۲۸$

ب) ۳ راس (۰/۵)

$\gamma \geq ۳ : \gamma \geq \left\lceil \frac{۱۰}{۳+۱} \right\rceil \Leftarrow \left\lceil \frac{p}{\Delta + ۱} \right\rceil \geq \gamma$ می‌دانیم

ج) $p - ۱$ (۰/۵)

$\gamma = ۱ \Rightarrow$ یعنی ۱ راس تمام رئوس دیگر را احاطه می کند $\Rightarrow \Delta = p - ۱$

۱۴۲

۱۴۳ الف) $N_G(d) = \{b, e\}$ (۰/۵)

ب) $q = ۶$ (۰/۲۵)

ج) مجموع درجات رئوس = ۱۲ (۰/۲۵) (ص ۴۱)

تلفن تماس: ۰۲۶۳۳۴۰۸۹۴۴

۱۴۴ الف) abgc (۰/۲۵) ب) bcdgb (۰/۲۵)

ج) $\deg_{\overline{G}}(a) = ۵$ (۰/۲۵) د) خیر- چون مثلاً از f به a مسیری وجود ندارد. (۰/۵)

ه)  (۰/۲۵)

۱۴۵ (ص ۲۵) $۳x \overset{۷}{\equiv} ۱۳ \Rightarrow ۳x \overset{۷}{\equiv} ۶$ (۰/۲۵) $\xrightarrow[(۰/۲۵)]{(۳\,,\,۷)=۱}$ $x \overset{۷}{\equiv} ۲$ (۰/۲۵) $\Rightarrow x = ۷k + ۲$ (۰/۲۵)

۱۴۶

۱۴۷ a عددی فرد است بنابراین $۲ + a$ عددی فرد است و $b \mid a + ۲$، بنابراین b نیز عددی فرد خواهد بود. (۰/۲۵)

می‌دانیم مربع هر عدد فرد، مضربی از ۸ به علاوه یک است. (۰/۲۵)

$$a^۲ + b^۲ + ۳ = (۸m + ۱) + (۸n + ۱)\ (۰/۲۵) + ۳ = ۸(m + n)\ (۰/۲۵) + ۵$$
$$\Rightarrow r = ۵\ \ (۰/۲۵)$$

۱۴۸ (ص ۱۶)
$$\begin{matrix} a \mid ۹k + ۴ \\ a \mid ۵k + ۳ \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} a \mid ۴۵k + ۲۰ & (۰/۲۵) \\ a \mid ۴۵k + ۲۷ & (۰/۲۵) \end{matrix} \Rightarrow a \mid ۷\ \ (۰/۲۵) \xrightarrow{a > ۱} a = ۷\ \ (۰/۲۵)$$

۱۴۹
$$\underbrace{۲x^۲ + ۲y^۲ + ۲ \geq ۲xy + ۲x + ۲y}_{(۰/۲۵)} \Leftrightarrow \underbrace{(x^۲ - ۲x + ۱) + (y^۲ - ۲y + ۱) + (x^۲ - ۲xy + y^۲) \geq ۰}_{(۰/۲۵)}$$
$$\Leftrightarrow (x - ۱)^۲ + (y - ۱)^۲ + (x - y)^۲ \geq ۰ \quad (۰/۲۵)$$
$$\Leftrightarrow (x - ۱)^۲ \geq ۰\ ,\ (y - ۱)^۲ \geq ۰\ ,\ (x - y)^۲ \geq ۰ \quad (۰/۲۵)$$
(ص ۸)

۱۵۰ اگر $\alpha + ۲\beta$ گنگ نباشد (فرض خلف) پس عددی گویا است. (۰/۲۵)

از طرفی طبق فرض $\alpha + \beta$ نیز عددی گویا است. (۰/۲۵)

می‌دانیم تفاضل دو عدد گویا، عددی گویاست در نتیجه: $(\alpha + ۲\beta) - (\alpha + \beta) = \beta \in Q$ (۰/۲۵)

اما با توجه به فرض مسأله: β گنگ است. (۰/۲۵)

با توجه به تناقض ایجاد شده، فرض خلف باطل و حکم ثابت می‌شود. (۰/۲۵) (ص ۸)

۱۵۱ الف) درست (۰/۲۵) ب) درست (۰/۲۵) ج) نادرست (۰/۲۵) د) درست (۰/۲۵)

(ص ۳ و ۱۶ و ۳۶ و ۴۲)

تلفن تماس: ۰۲۶۳۳۴۰۸۹۴۴

۱۵۲ فرض می‌کنیم $۳+\sqrt{۵}$ گنگ نباشد پس آن را به صورت کسر گویا $(b \neq ۰)$ $\frac{a}{b}$ درنظر می‌گیریم.

$$۳+\sqrt{۵}=\frac{a}{b}\ (۰/۲۵) \Rightarrow \sqrt{۵}=\frac{a}{b}-۳=\frac{a-۳b}{b}=\frac{k}{k'}\ (۰/۲۵)$$

که این تناقض است پس فرض خلف باطل و $۳+\sqrt{۵}$ عدد گنگ است. (۰/۲۵)

۱۵۳

$$x=۲k\,,\ y=۲k+۲\,,\ z=۲k+۴$$

$$xyz=(۲k)(۲k+۲)(۲k+۴)\ (۰/۵)=۲k۲(k+۱)۲(k+۲)\ (۰/۲۵)=۸k(k+۱)(k+۲)=۸k'\ (۰/۲۵)$$

$$(k+۱)(k+۲)=۸k'\ (۰/۲۵)$$

۱۵۴ فرض کنیم n زوج باشد. $n=۲k$ (۰/۲۵) پس $n^۲=۲(۲k^۲)$ (۰/۲۵) و این با فرد بودن $n^۲$ تناقض دارد.
(۰/۲۵) پس فرض خلف باطل است. تمرین صفحه ۲۸

۱۵۵

$$(x+y)^۲ \geq ۴xy\ (۰/۲۵) \Rightarrow x^۲+y^۲+۲xy \geq ۴xy \Rightarrow x^۲+y^۲-۲xy \geq ۰\ (۰/۲۵)$$

$$\Rightarrow (x-y)^۲ \geq ۰\ (۰/۲۵)$$

رابطه بدیهی است و تمامی تمامی مراحل بازگشت‌پذیر است. (۰/۲۵) صفحه ۲۱

۱۵۶ اگر تعداد عضوهای زیرمجموعه را به منزله کبوتر $m=۵$ درنظر بگیریم (۰/۲۵) و کبوترها را تعداد مجموع هر دو عدد از S که به صورت زیر برابر ۱۰ می‌شود، $n=۴$ درنظر بگیریم (۰/۵)

$$\{۱,۹\},\{۲,۸\},\{۳,۷\},\{۴,۶\}$$

طبق اصل لانه کبوتری (۰/۲۵) حداقل ۲ عضو وجود دارد که مجموعه‌شان برابر ۱۰ می‌شود. صفحه ۳۰

۱۵۷ فرض خلف: فرض کنیم $\sqrt{۳}$ عددی گویا باشد. صفحه ۲۸

$\sqrt{۳}=\frac{a}{b}\,,\ (a,b)=۱\ (۰/۲۵) \Rightarrow a^۲=۳b^۲ \Rightarrow$ مضرب ۳ است $a^۲$ $\Rightarrow$ مضرب ۳ است a (۰/۲۵)

$\Rightarrow a=۳k \Rightarrow ۹k^۲=۳b^۲ \Rightarrow$ مضرب ۳ است $b^۲$ $\Rightarrow$ مضرب ۳ است b (۰/۲۵)

$\Rightarrow$ تناقض $(a,b)\neq ۱$ (۰/۲۵)

۱۵۸ الف) درست (۰/۲۵) ب) نادرست (۰/۲۵) مثال نقض (۰/۵)

۱۵۹ الف) درست (۰/۲۵)

$$xy \leq \frac{x^۲+y^۲}{۲}\ (۰/۲۵) \Rightarrow ۲xy \leq x^۲+y^۲ \Rightarrow x^۲+y^۲-۲xy \geq ۰ \Rightarrow (x-y)^۲ \geq ۰\ (۰/۲۵)$$

رابطه بدیهی است بنابراین تمامی مراحل بازگشت‌پذیر است. (۰/۲۵) تمرین صفحه ۲۵

ب) نادرست (۰/۲۵) ارائه مثال نقض (۰/۵) $\begin{cases} a=\sqrt{۲} \\ b=-\sqrt{۲} \end{cases} :\ a+b=۰$

۱۶۰ الف) استدلال استنتاجی ب) استدلال استقرایی ج) اثبات بازگشتی

۱۶۱ ۳۰ دانش‌آموز: ۳۰ کبوتر   ۴ فصل سال: ۴ لانه ۰/۲۵

$$\begin{array}{r|l} 30 & 4 \\ \underline{28} & 7 \\ 2 & \end{array}$$

طبق اصل لانه کبوتری ۰/۲۵ ، حداقل $8 = 1 + 7$ دانش‌آموز در یک فصل از سال متولد شده‌اند. ۰/۲۵

۱۶۲ فرض خلف: فرض می‌کنیم $(x + y)$ گنگ نباشد، بنابراین عددی گویا است.

$x + y = a$ گویا $\xrightarrow[0/25]{} y = a - x$ ۰/۲۵ یا $(y = a + (-x))$

می‌دانیم تفاضل (یا جمع) دو عدد گویا، عددی گویا است در نتیجه y گویا است. ۰/۲۵

که این خلاف فرض مسأله است. پس فرض خلف باطل و حکم برقرار است. ۰/۲۵

۱۶۳ $a^2 + 1 \geq b(2 - b) \Leftrightarrow a^2 + 1 \geq 2b - b^2 \Leftrightarrow a^2 + 1 - 2b + b^2 \geq 0$ ۰/۲۵

$\Leftrightarrow a^2 + (1 - b)^2 \geq 0$ ۰/۲۵

درستی عبارت فوق بدیهی است، تمامی روابط برگشت‌پذیر می‌باشند در نتیجه حکم برقرار است. ۰/۲۵

۱۶۴ عددی فرد : $2k + 1 \xrightarrow{0/25} 3(2k + 1) + 1$ ۰/۲۵ $= 6k + 4 = 2(3k + 2)$ ۰/۲۵ $= 2k'$

عددی زوج است.

۱۶۵ خلاف فرض مسأله ۰/۲۵ $x = 3 \Leftarrow x + 4(-1)^2 = 7 \Leftarrow$ ۰/۲۵ $y = -1$: (فرض خلف)

پس فرض خلف باطل و حکم $y \neq -1$ برقرار است. ۰/۲۵

۱۶۶ $a^2 + b^2 \geq 2(b - 1) \Leftrightarrow a^2 + b^2 \geq 2b - 2 \Leftrightarrow a^2 + b^2 - 2b + 2 \geq 0$ ۰/۲۵

$\Leftrightarrow a^2 + b^2 - 2b + 1 + 1 \geq 0$ ۰/۲۵

$\Leftrightarrow a^2 + 1 + (b - 1)^2 \geq 0$ ۰/۲۵

عبارت همواره درست است و تمام مراحل بازگشت‌پذیر می‌باشند. ۰/۲۵

۱۶۷ $\left.\begin{array}{l} x = 2k \\ y = 2k + 2 \\ K \in Z \end{array}\right\} \Rightarrow xy = 2k(2k + 2)$ ۰/۲۵ $= 4\underbrace{k(k + 1)}_{2k'}$ ۰/۲۵ $= 8k'$

درست ۰/۲۵

۱۶۸ نادرست ۰/۲۵ - ارائه مثال نقض ۰/۲۵

۱۶۹ درست ۰/۲۵

۱۷۰

تلفن تماس: ۰۲۶۳۳۴۰۸۹۴۴

۱۷۱ فرض خلف : $۲\sqrt{۵}+۳\sqrt{۷}\notin Q' \Rightarrow ۲\sqrt{۵}+۳\sqrt{۷}=\frac{a}{b}-۳\sqrt{۷}\Rightarrow$ ۰/۲۵ ۰/۲۵

$۲۰=\frac{A^۲}{B^۲}+۶۳-۶\sqrt{۷}\ \frac{a}{b}\Rightarrow ۶\sqrt{۷}\ \frac{a}{b}=\frac{a^۲}{b^۲}+۴۳$ ۰/۲۵

طرف راست رابطه مجموع دو عدد گویا است و طرف چپ رابطه عددی گنگ است. پس به تناقض رسیده و همان حکم اولیه درست است. ۰/۲۵

۱۷۲ عدد فرد $x=۲k+۱\rightarrow\ ۳(۲k+۱)^۲-۳=۱۲\ k'$: حکم ۰/۵

$۳\left(۴k^۲+۴k+۱\right)-۳=۱۲k^۲+۱۲k=۱۲\left(k^۲+k\right)=۱۲k'$ ۰/۵

۱۷۳ مجموعه دلخواه را A در نظر می‌گیریم به برهان خلف $A \not\subset \phi$ ۰/۲۵ پس باید ϕ عضوی داشته باشد که در A نیست و این با تعریف تهی تناقض دارد. ۰/۲۵

۱۷۴ $xy\le\frac{x^۲+۲xy+y^۲}{۴}\Leftrightarrow (x-y)^۲\ge ۰$ ۰/۲۵

۰/۲۵

گزاره همواره درست و بر طبق استدلال برگشتی درست است. ۰/۲۵

۱۷۵

$$\left.\begin{array}{l} \text{فرض}\quad \sqrt{۷}\in Q'\ ,\ x\in Q \\ \text{حکم}\quad x+\sqrt{۷}\in Q' \end{array}\right\}$$ ۰/۲۵

خلاف حکم $x+\sqrt{۷}=\frac{a}{b}\in Q\Rightarrow \sqrt{۷}=\frac{a}{b}-x\ \Rightarrow$

۰/۲۵

تفریق دو گویا، گویا است و مساوی گنگ نمی‌شود پس به تناقض رسیده یعنی حکم برقرار است. ۰/۲۵

۱۷۶ نادرست ۰/۲۵ یک مثال نقض ارائه شود، مثل $y=۰\ ,\ x=۴\Leftarrow xy=۰$ ۰/۲۵

تلفن تماس: ۰۲۶۳۳۴۰۸۹۴۴

۱۷۷ درست (۰/۲۵) و آن را اثبات می‌کنیم:

فرض

$$x=\frac{a}{b}\in Q \ , \ y=\frac{c}{d}\in Q$$

حکم

$$xy=\frac{p}{q}\in Q$$

(۰/۲۵)

$$xy=\frac{a\times c}{b\ d}=\frac{ac}{bd}=\frac{p}{q}$$ (۰/۲۵)

چون a , b , c , d همگی عدد صحیح هستند و اعداد صحیح نسبت به جمع و ضرب و تفریق بسته هستند پس p ,
q هم عدد صحیح بوده و همچنین $b\neq ۰$ و $d\neq ۰$ پس $bd=q\neq ۰$ پس $\frac{p}{q}\in Q$ (۰/۲۵)

۱۷۸ نادرست (۰/۲۵) یک مثال نقض ارائه شود، مثل $x=۱$ (۰/۲۵)

۱۷۹

$$\frac{a}{b^۲}+\frac{b}{a^۲}\geq\frac{۱}{a}+\frac{۱}{b} \Leftrightarrow \frac{a^۳+b^۳}{a^۲b^۲}\geq\frac{a+b}{ab} \Leftrightarrow \frac{(a+b)\left(a^۲-ab+b^۲\right)}{ab}\geq a+b$$

(۰/۲۵) (۰/۲۵)

$$\Leftrightarrow a^۲-ab+b^۲\geq ab \Leftrightarrow a^۲-۲ab+b^۲\geq ۰ \Leftrightarrow (a-b)^۲\geq ۰$$ (۰/۲۵)

گزاره همواره درست و برطبق استدلال برگشتی و برگشت‌پذیربودن روابط حکم درست است. (۰/۲۵)

۱۸۰ برهان خلف: $\sqrt{۳}\in Q\Rightarrow\sqrt{۳}=\frac{a}{b}\ ,\ (a,b)=۱\Rightarrow ۳=\frac{a^۲}{b^۲}\Rightarrow a^۲=۳b^۲\Rightarrow(a=۳k)$

(۰/۲۵) (۰/۲۵) (۰/۲۵)

$$\Rightarrow(۳k)^۲=۳b^۲\Rightarrow ۹k^۲=۳b^۲\Rightarrow\left(b=۳k'\right)\Rightarrow(a,b)=۳$$

(۰/۲۵)

پس a ، b هر دو مضربی از ۳ هستند و نسبت به هم اول نیستند، پس به تناقض رسیده و حکم اصلی درست است.
(۰/۲۵)

۱۸۱ نادرست (۰/۲۵)

تلفن تماس: ۰۲۶۳۳۴۰۸۹۴۴

۱۸۲

$$\begin{matrix} \text{تعداد ۶۰ ریالی} = x \\ \text{تعداد ۹۰ ریالی} = y \end{matrix} : ۶۰x + ۹۰y = ۸۷۰ \xrightarrow{\div ۳۰} ۲x + ۳y = ۱۹$$

شرط جواب $(۶۰ , ۹۰) = ۳۰ | ۸۷۰$

به پیمانه‌ی ۲ می‌رویم:

$$\cancel{۲x} + \cancel{۳y} \overset{۲}{=} \cancel{۱۹} : y \overset{۲}{=} ۱ \rightarrow y = ۲k + ۱ \geqslant ۰ : k \geqslant -\frac{۱}{۲} \xrightarrow{\text{اشتراک}} k = \begin{cases} ۰ \\ ۱ \\ ۲ \end{cases}$$

$$\xrightarrow{\text{جاگذاری}} x = -۳k + ۸ \geqslant ۰ : k \leqslant \frac{۸}{۳}$$

$$k = ۰ : \begin{cases} x = ۸ \\ y = ۱ \end{cases} \qquad k = ۱ : \begin{cases} x = ۵ \\ y = ۳ \end{cases} \qquad k = ۲ : \begin{cases} x = ۲ \\ y = ۵ \end{cases}$$

۱۸۳

$$(a, a - b) = d \Rightarrow \begin{cases} d|a \\ d|a - b \end{cases} \xrightarrow{\text{تفاضل}} \begin{cases} d|b \\ \text{از طرفی } d|a \end{cases} \Rightarrow d|\underbrace{(a, b)}_{۱} \Rightarrow d = ۱$$

توجه: $\begin{matrix} a|b \\ a|c \end{matrix} \Rightarrow a|(b, c)$

۱۸۴ اثبات به روش برهان خلف: فرض کنیم $P_۱, P_۲, \dots, P_n$ تنها اعداد اول باشند.
عدد $m = P_۱ \times P_۲ \times \dots \times P_n + ۱$ را در نظر می‌گیریم. m باید مرکب باشد یعنی یک مقسوم‌علیه اول مانند P_j دارد به‌طوری که $P_j | m$ و $P_j | P_۱ \times P_۲ \times \dots \times P_n$ بنابراین $P_j | m - (P_۱ \times P_۲ \times \dots \times P_n)$ پس $P_j | ۱$ که ممکن نیست.

۱۸۵ ۲ عدد زوج متوالی $\begin{cases} a = ۲q \\ b = ۲q + ۲ = ۲(q + ۱) \end{cases} : a \times b = ۲q \times ۲(q + ۱) = ۴\underbrace{q(q + ۱)}_{\text{ضرب ۲ عدد متوالی مضرب ۲}} = ۴(۲k) = ۸k$

۱۸۶ می دانیم: $\binom{n}{k} \in N \Rightarrow \binom{n}{۳} = q \in N \Rightarrow \frac{n!}{۳! \times (n - ۳)!} = q \Rightarrow \frac{n(n - ۱)(n - ۲)}{۳!} = q$

$$\Rightarrow n(n - ۱)(n - ۲) = ۳! \times q = ۶q \Rightarrow ۶|\overbrace{n(n - ۱)(n - ۲)}^{\text{۳ عدد متوالی}}$$

۱۸۷ به گرافی که بین هر ۲ رأس آن یال باشد، گراف کامل گوییم.

۱۸۸ ۲ , ۲ , ۲ , ۳ , ۳ , ۴

۱۸۹ $V_۲V_۳V_۴V_۵V_۶V_۲ , V_۱V_۲V_۳V_۴V_۶V_۱$

۱۹۰

$$V = \{V_۱ , V_۲ , V_۳ , V_۴ , V_۵ , V_۶\}$$

$$E = \{V_۱V_۲ , V_۱V_۶ , V_۲V_۳ , V_۲V_۶ , V_۳V_۴ , V_۴V_۵ , V_۴V_۶ , V_۵V_۶\}$$

۱۹۱

$$۳۸x + ۳۴y = ۱۲۰ \xrightarrow{\div ۲} ۱۹x + ۱۷y = ۶۰$$

شرط جواب $(۳۸, ۳۴) = ۲|۱۲۰$

معادله را به پیمانه‌ی ۱۷ می‌بریم:

$$\underset{۲}{\cancel{۱۹}}x + \underset{۰}{\cancel{۱۷}}y \overset{۱۷}{\equiv} ۶۰ : ۲x \overset{۱۷}{\equiv} ۶۰ \xrightarrow{\div ۲} x \overset{۱۷}{\equiv} ۳۰ \overset{۱۷}{\equiv} -۴ : x = ۱۷q - ۴ \xrightarrow{\text{جاگذاری}} y = -۱۹q + ۸$$

۱۹۲

$$\begin{cases} (a, b) = ۱ \xrightarrow{\text{بزو}} \exists\, x \text{ و } y \in Z : ax + by = ۱ \xrightarrow{\times c} acx + bcy = c & : a(cx + qy) = c \\ a|bc \Rightarrow bc = aq & : aq' = c \Rightarrow a|c \end{cases}$$

۱۹۳

$$(a, b) = d \Rightarrow \begin{cases} d|a \\ d|b \xrightarrow{b|c} d|c \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d|a + c \\ \text{از طرفی } d|b \end{cases} \Rightarrow d|(a + c, b) : d|d' \quad \text{I}$$

$$(a + c, b) = d' \Rightarrow \begin{cases} d'|a + c \\ d'|b \xrightarrow{b|c} d'|c \end{cases} \xrightarrow{\text{تفاضل}} \begin{cases} d'|a \\ \text{از طرفی } d'|b \end{cases} \Rightarrow d'|(a , b) : d'|d \quad \text{II}$$

$$\xrightarrow[\text{II}]{\text{I}} d = d'$$

توجه:

$$\begin{cases} ۱ \quad \begin{matrix} a|b \\ a|c \end{matrix} \Rightarrow a|bx + cy \\ ۲ \quad \begin{matrix} a|b \\ a|c \end{matrix} \Rightarrow a|(b, c) \end{cases}$$

۱۹۴

$$\text{فرد } a = ۲k + ۱ \xrightarrow{\uparrow ۲} a^۲ = \underbrace{۴k^۲ + ۴k}_{\text{۴k فاکتور می دهد.}} + ۱ = ۴\underbrace{k(k + ۱)}_{\substack{\text{ضرب ۲ عدد متوالی،} \\ \text{مضرب ۲ می باشد.}}} + ۱ = ۴(۲q) + ۱ = ۸q + ۱$$

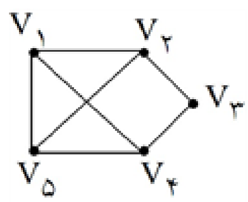
۱۹۵

می‌دانیم در هر گراف ساده $\sum_{i=۱}^{p} \deg(V_i) = ۲q$ می‌باشد، یعنی جمع درجه ی رئوس زوج است، آن‌هایی که درجه‌ی زوج دارند مجموعشان زوج است ولی آن‌هایی که درجه‌ی فرد دارند مجموعشان زوج است که حتماً تعداد آن‌ها زوج است.

۱۹۶

$$V_۱V_۲V_۳ , V_۱V_۴V_۳ , V_۱V_۵V_۴V_۳$$

۱۹۷



تلفن تماس: ۰۲۶۳۳۴۰۸۹۴۴

۱۹۸ طرفین معادله را بر ۳ تقسیم می‌کنیم.

$$۵۱x + ۳۹y = ۳۰۰ \xrightarrow{\div ۳} ۱۷x + ۱۳y = ۱۰۰$$

شرط جواب : $(۵۱ \text{ و } ۳۹) = ۳|۳۰۰$

تساوی را به پیمانه‌ی ۱۳ می‌بریم:

$$\cancel{۱۷}x + \cancel{۱۳}y \overset{۱۳}{\equiv} ۱۰۰ : ۴x \overset{۱۳}{\equiv} ۱۰۰ \xrightarrow{\div ۴} x \overset{۱۳}{\equiv} ۲۵ \overset{۱۳}{\equiv} -۱ : x = ۱۳q - ۱$$

$$\xrightarrow{\text{جاگذاری}} y = -۱۷q + ۹$$

۱۹۹

$$۲^۵ \overset{۳۱}{\equiv} ۱ \xrightarrow{\uparrow ۴} ۲^{۲۰} \overset{۳۱}{\equiv} ۱ \xrightarrow{\times ۲^۳}$$

توجه: $a \overset{m}{\equiv} b \Rightarrow a^n \overset{m}{\equiv} b^n$

$$(۲^۵)^۴ \times ۲^۳ \overset{۳۱}{\equiv} ۲^۳ = ۸ \Rightarrow ۲^{۲۳} - ۸ \overset{۳۱}{\equiv} ۰$$

۲۰۰

$$ac \overset{m}{\equiv} bc : m|ac - bc \xrightarrow{\div d = (m, c)}$$

$$\frac{m}{d}\Big|\frac{c}{d}(a - b) \text{ و } \left(\frac{m}{d}, \frac{c}{d}\right) = ۱$$

بنا به لم اقلیدس داریم:

$$\xrightarrow{\text{لم}} \frac{m}{d}|a - b \Rightarrow a \overset{\frac{m}{d}}{\equiv} b$$

۲۰۱ اثبات به روش برهان خلف: فرض کنیم $P_۱, P_۲, \dots, P_n$ تنها اعداد اول باشند.
عدد $m = P_۱ \times P_۲ \times \dots \times P_n + ۱$ را در نظر می‌گیریم. m باید مرکب باشد یعنی یک مقسوم‌علیه اول مانند P_j دارد به‌طوری که $P_j|m$ و $P_j|P_۱ \times P_۲ \times \dots \times P_n$ بنابراین $P_j|m - (P_۱ \times P_۲ \times \dots \times P_n)$ پس $P_j|۱$ که ممکن نیست.

۲۰۲ اولاً:

$$a| \Rightarrow \quad b = aq \quad (a, q \in Z)$$

$$\xrightarrow{\times c} bc = a(cq) = aq' \Rightarrow a|bc$$

ثانیاً: یک مثال $a = ۸, b = ۶, c = ۴ \Rightarrow ۸|۶ \times ۴$ ولی $۸\nmid ۶$ و $۸\nmid ۴$

۲۰۳ $V_۱, V_۲, V_۵, V_۴, V_۱$ و $V_۱, V_۲, V_۳, V_۴, V_۱$ و $V_۲, V_۳, V_۴, V_۵, V_۲$

۲۰۴ $V_۱, V_۲, V_۵, V_۴, V_۳$

۲۰۵ خیر زیرا لازم است راس‌های $V_۱, V_۵$ یا $V_۲, V_۴$ مجاور باشند یا در چهارضلعی $V_۱V_۲V_۳V_۴$ هیچ‌کدام از قطرها موجود نیست یعنی گراف حفره دارد پس گراف بازه‌ها نیست.

۲۰۶ می دانیم : $q_{\text{کامل}} = \binom{p}{۲} = \frac{p(p-۱)}{۲}$

$$\frac{P(p-۱)}{۲} = q \Rightarrow \frac{۵(۵-۱)}{۲} = q \Rightarrow q = ۱۰$$

۲۰۷ اعضای V را رأس‌های گراف $G(V,E)$ و اعضای E را یال‌های گراف می‌گویند.

۲۰۸ گراف ساده‌ی G زوج مرتبی چون (V,E) است که در آن V مجموعه ای متناهی و ناتهی است و E مجموعه‌ای از زیر مجموعه‌های دوعضوی V است.

۲۰۹

$$\begin{aligned} ۳^{۲} &\overset{۱۰}{\equiv} -۱ \Rightarrow ۳^{۲۴} \overset{۱۰}{\equiv} ۱ \Rightarrow ۳^{۲۵} \overset{۱۰}{\equiv} ۳ \\ ۷^{۲} &\overset{۱۰}{\equiv} -۱ \Rightarrow ۷^{۷۲} \overset{۱۰}{\equiv} ۱ \Rightarrow ۷^{۷۳} \overset{۱۰}{\equiv} ۷ \end{aligned} \quad \Rightarrow ۳^{۲۵} + ۷^{۷۳} \overset{۱۰}{\equiv} ۰$$

۲۱۰

$$\begin{aligned} &a \mid b \Rightarrow \exists q \in z \;;\; b = aq \\ &c \mid b \Rightarrow \exists t \in z \;;\; b = ct \end{aligned}$$

$$(a,c) = ۱ \Rightarrow \exists m,n \in z;\; ma + nc = ۱ \xrightarrow{\times b} mab + nbc = b \Rightarrow$$
$$mact + nacq = b \Rightarrow ac(mt + nq) = b \Rightarrow ac \mid b$$

۲۱۱ فرض کنیم $d = (a,b)$ باشد، آن‌گاه داریم:

$$\begin{aligned} &d \mid a \Rightarrow d \mid ma \\ &d \mid b \Rightarrow d \mid nb \end{aligned} \Rightarrow d \mid ma + nb = ۱ \Rightarrow d \mid ۱ \Rightarrow d = ۱$$

۲۱۲ فرض کنید G یک گراف کامل مرتبه‌ی p و اندازه‌ی q باشد.

$$q = \frac{p(p-۱)}{۲} \text{ و } p = \frac{۱}{۳}q \Rightarrow p = \frac{p(p-۱)}{۶} \Rightarrow p^{۲} - ۷p = ۰ \Rightarrow p = ۷ \Rightarrow q = ۲۱$$

۲۱۳ گراف G را همبند گوییم هرگاه بین هر دو رأس آن حداقل یک مسیر وجود داشته باشد.

۲۱۴

$$(۲,-۹) = ۱ \mid ۵ \Rightarrow \text{معادله جواب دارد } ۲x = ۹y + ۵ \Rightarrow x = ۴y + ۲ + \frac{y+۱}{۲} \in z$$

$$\frac{y+۱}{۲} = t \Rightarrow y = ۲t - ۱ \quad (۱) \qquad x = ۴(۲t-۱) + ۲ + t = ۹t - ۲$$

روش دوم: به پیمانه‌ی یکی از ضرایب می‌رویم:

$$\underset{۰}{\cancel{۲}}x - \underset{۱}{\cancel{۹}}y \overset{۲}{\equiv} \underset{۱}{\cancel{۵}} : y \overset{۲}{\equiv} ۱ \Rightarrow y = ۲k + ۱ \xrightarrow{\text{جاگذاری}} x = ۹k + ۷$$

۲۱۵

$$\text{می دانیم} \begin{cases} a \overset{m}{\equiv} b \\ a \overset{n}{\equiv} b \end{cases} \Rightarrow a \overset{[m,n]}{\equiv} b$$

$$\begin{cases} a \overset{۷}{\equiv} ۲ \overset{۷}{\equiv} ۹ \\ a \overset{۶}{\equiv} ۳ \overset{۶}{\equiv} ۹ \end{cases} \Rightarrow a \overset{[۶,۷]}{\equiv} ۹ : a \overset{۴۲}{\equiv} ۹$$

تلفن تماس: ۰۲۶۳۳۴۰۸۹۴۴

۲۱۶

$$۳^۳ \overset{۱۳}{\equiv} ۱ \Rightarrow ۳^{۶۹} \overset{۱۳}{\equiv} ۱ \Rightarrow ۳^{۶۹} \times ۳^۲ \overset{۱۳}{\equiv} ۹ \Rightarrow ۳^{۷۱} \overset{۱۳}{\equiv} ۹ \qquad (۱)$$

$$۵^۲ \overset{۱۳}{\equiv} -۱ \Rightarrow (۵^۲)^{۵۶} \overset{۱۳}{\equiv} ۱ \Rightarrow ۵^{۱۱۲} \overset{۱۳}{\equiv} ۱ \qquad (۲)$$

$$(۱) + (۲) \Rightarrow ۳^{۷۱} + ۵^{۱۱۲} \overset{۱۳}{\equiv} ۱۰$$

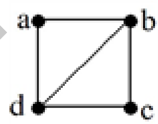
۲۱۷

$$(a,b) = ۱ \Rightarrow \exists\, m,n \in z \; ; \; ma + nb = ۱ \qquad (۱)$$
$$(a,c) = ۱ \Rightarrow \exists\, x,y \in z \; ; \; xa + yc = ۱ \qquad (۲)$$

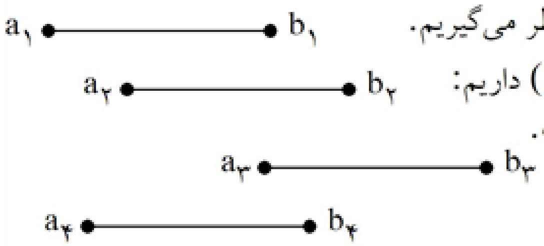
$$(۱) \times (۲) \Rightarrow mxa^۲ + nyac + nxab + nybc = ۱ \Rightarrow a\underbrace{(max + myc + nxb)}_{t} + bc\underbrace{(ny)}_{p} = ۱$$

$$\Rightarrow at + (bc)p = ۱ \Rightarrow (a \, , \, bc) = ۱$$

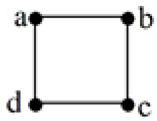
۲۱۸



۲۱۹ بازه‌های $(a_i \, , \, b_i)$ و $i = ۱,۲,۳,۴$ نظیر رأس‌های d,c,b,a در نظر می‌گیریم.
برهان خلف: فرض کنیم گراف بازه‌ای باشد. (بنا به مجاورت رأس‌ها) داریم:
که با توجه به نمودار مقابل $(a_۲ \, , \, b_۲) \cap (a_۴ \, , \, b_۴) \neq \varnothing$ است.
یعنی b با c مجاور است که یک تناقض است.



۲۲۰ گراف G از مرتبه‌ی P (که $P \geq ۳$) را همیلتنی گوئیم هرگاه دارای دوری از مرتبه‌ی P باشد.
گراف G از مرتبه‌ی P (که $P \geq ۳$) را همیلتنی گوئیم، هرگاه دارای دوری باشد که از تمام رئوس G بگذرد.



۲۲۱

$$\begin{cases} d \mid a - ۵ \Rightarrow d \mid (a-۱)(a-۵) = a^۲ - ۶a + ۵ \qquad (۱) \\ d \mid a^۲ - ۶a + ۳ \qquad (۲) \end{cases}$$

$$(۱) \, , \, (۲) \Rightarrow d \mid \left(a^۲ - ۶a + ۵\right) - \left(a^۲ - ۶a + ۳\right) = ۲ \Rightarrow d = ۱ \text{ یا } ۲$$

۲۲۲ $(۳,۲)=۱ \mid ۷ \Rightarrow$ معادله جواب دارد $۲y=۷-۳x \Rightarrow y=۳-۲x+\frac{x+۱}{۲} \quad (۱)$

باید $\frac{x+۱}{۲}\in z \Rightarrow \frac{x+۱}{۲}=m \Rightarrow x=۲m-۱\ ,\ m\in z \quad (۲)$

$$\xrightarrow[(۲)]{(۱)} y=۳-۲(۲m-۱)+m \Rightarrow y=۵-۳m$$

روش دوم:

$$۳x+۲y=۷ \xrightarrow{\text{پیمانه ۲}} \underset{۱}{\cancel{۳}x}+\underset{۰}{\cancel{۲}y}\overset{۲}{\equiv}\underset{۱}{\cancel{۷}} : x\overset{۲}{\equiv}۱ : x=۲k+۱ \xrightarrow{\text{جاگذاری}} y=-۳k+۲$$

۲۲۳ $$۷^{۲}\overset{۱۰}{\equiv}-۱ \Rightarrow (۷^{۲})^{۱۶۳}\overset{۱۰}{\equiv}(-۱)^{۱۶۳} \Rightarrow ۷^{۳۲۶}\overset{۱۰}{\equiv}-۱ \xrightarrow{\times ۷} ۷^{۳۲۷}\overset{۱۰}{\equiv}-۷ \Rightarrow -۷\overset{۱۰}{\equiv}۳$$

رقم یکان ۳ می‌باشد.

روش دوم: می‌دانیم $\begin{cases} a^{۴k+r}\overset{۱۰}{\equiv}a^{r} \\ r\neq ۰ \end{cases}$

$$۷^{۳۲۷}=۷^{(۴\times ۸۱+۳)}=۷^{۴k+۳}\overset{۱۰}{\equiv}۷^{۳}=۷^{۲}\times ۷=\overset{۹}{\cancel{۴۹}}\times ۷\overset{۱۰}{\equiv}۶۳\overset{۱۰}{\equiv}۳$$

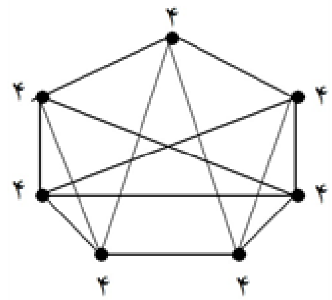
۲۲۴

$a \mid bc \Rightarrow \exists\, q\in z\ ;\ bc=aq \quad (۱)$

$(a,b)=۱ \Rightarrow \exists\, m,n\in z\ ;\ am+bn=۱ \xrightarrow{\times c} amc+(bc)n=c$

$\xrightarrow{(۱)} amc+aqn=c \Rightarrow a(mc+nq)=c \Rightarrow a\mid c$

۲۲۵



۲۲۶ $۴p=۲q \Rightarrow q=۲p\ ,\ p+q=۲۱ \Rightarrow ۳p=۲۱ \Rightarrow p=۷\ ,\ q=۱۴$

۲۲۷ acdb , aecb , adcb

۲۲۸ اگر u و v دو رأس متفاوت گراف G باشند، یک مسیر از u به v دنباله‌ای متشکل از رأس‌های دوبه‌دو متفاوت G است که از u آغاز به v ختم می‌شود.

۲۲۹

تلفن تماس: ۰۲۶۳۳۴۰۸۹۴۴

۲۳۰ $a^2+b^2+4(a+b+2)\geq 0 \Leftrightarrow \left(a^2+4a+4\right)+\left(b^2+4b+4\right)\geq 0 \Leftrightarrow (a+2)^2+(b+2)^2\geq 0$

گزاره همواره درست و بر طبق استدلال برگشتی برقرار است.

۲۳۱ درست

$$x=2k+1 \Rightarrow (2k+1)^3-1=8k^3+12k^2+6k+1-1=2\left(4k^3+6k^2+3k\right)=2k'$$

۲۳۲ روش اول:

$$18x+30y=42 \Rightarrow 3x+5y=7 \qquad (3,5)=1 \Rightarrow 1|7$$

$$3x=7-5y \Rightarrow x=\frac{6+1-6y+y}{3}=2-2y+\frac{1+y}{3} \Rightarrow \frac{1+y}{3}=m \Rightarrow m\in Z$$

$$y=3m-1 \quad , \quad x=4-5m$$

روش دوم:

$$18x+30y=42 \xrightarrow{\div 6} 3x+5y=7 \xrightarrow{\text{به پیمانه ۳ می رویم}}$$

$$\cancel{3x}+5y\overset{3}{\equiv}7 \Rightarrow -y\overset{3}{\equiv}1 \Rightarrow y\overset{3}{\equiv}-1 \longrightarrow y=3k-1$$

۲۳۳

$$2^4\overset{17}{\equiv}-1 \Rightarrow \left(2^4\right)^6\overset{17}{\equiv}1 \Rightarrow 2^{25}\overset{17}{\equiv}2$$

۲۳۴

$$c|a+b \Rightarrow a+b=cq \Rightarrow b=cq-a$$

$$(a,b)=1 \Rightarrow ma+nb=1 \Rightarrow ma+n(cq-a)=1 \qquad m,n\in Z$$

$$ma+ncq-na=1 \Rightarrow (m-n)a+(nq)c=1$$

$$m'a+n'c=1 \Rightarrow (a,c)=1$$

۲۳۵

$$pr=2q \Rightarrow 5p=2q \quad , \quad 2q-3p=12 \Rightarrow 5p-3p=12 \Rightarrow p=6 \quad , \quad q=15$$

۲۳۶

$$(13,17)=1 \Rightarrow 1|100$$

$$13x=100-17y \Rightarrow x=\frac{91+9-13y-4y}{13}=7-y+\frac{9-4y}{13}$$

$$\frac{9-4y}{13}=m \Rightarrow y=\frac{9-13m}{4}=\frac{8+1-12m-m}{4}=2-3m+\frac{1-m}{4}$$

$$\frac{1-m}{4}=k \Rightarrow m=1-4k \Rightarrow y=13k-1 \text{ و } x=9-17k$$

که $k,m\in Z$

روش دوم:

$$13x+17y=100 \xrightarrow[\text{می رویم}]{\text{به پیمانه ۱۳}} \cancel{13x}+17y\overset{13}{\equiv}100$$

$$4y\overset{13}{\equiv}-4 \xrightarrow{\div 4} y\overset{13}{\equiv}-1 \Rightarrow y=13k-1$$

۲۳۷

$$27\overset{10}{\equiv}-3 \rightarrow 27^2\overset{10}{\equiv}9 \rightarrow 27^2\overset{10}{\equiv}-1 \rightarrow \left(27^2\right)^{693}=27^{1386}\overset{10}{\equiv}-1\overset{10}{\equiv}9$$

۲۳۸ که $(a',b') = ۱$

$$a'd + b'd = ۱۰۲ \rightarrow d(a'+b') = ۱۰۲ \quad \text{I}$$

$$c = \frac{ab}{d} \rightarrow ۴۳۲d = a'db'd \rightarrow ۴۳۲ = a'b'd$$

$$\frac{d(a'+b')}{da'b'} = \frac{۱۰۲}{۴۳۲} \rightarrow \frac{a'+b'}{a'b'} = \frac{۱۷}{۷۲} \Rightarrow ۴۳۲ = ۷۲d \Rightarrow d = \frac{۴۳۲}{۷۲} = ۶$$

$$\begin{cases} a'+b' = ۱۷ \\ a'b' = ۷۲ \end{cases} \xrightarrow{d(a'+b') = ۱۰۲} d = ۶$$

۲۳۹

$$(۲k)(۲k+۲)\ (۲k+۴) = ۲^۳(k)\ (k+۱)\ (k+۲) = ۸\times ۶k' = ۴۸k' = ۲۴k''$$

۲۴۰

درجه	تعداد
۲	x
۳	y
	۷

$$\xrightarrow{} x + y = ۷ \quad \text{I}$$

$$\sum \deg(V_i) = ۲q \Rightarrow ۲x + ۳y = ۱۸ \quad \text{II}$$

$$\Rightarrow \text{I} \text{ و } \text{II} \Rightarrow \begin{cases} x+y = ۷ \\ ۲x+۳y = ۱۸ \end{cases} : x = ۳ \ , \ y = ۴$$

۲۴۱ کم‌ترین تعداد رنگ = ۴، مثلاً رئوس g , f قرمز و رئوس d , c آبی و رئوس e , b سبز و رأس a زرد.

۲۴۲ بله چون دارای دور همیلتونی ad egbcfa است.

۲۴۳ دو مسیر از a به b : afcb و afb

۲۴۴ اگر $\sqrt{۲}$ گنگ نباشد پس گویاست بنابراین $\sqrt{۲} = \frac{p}{q}$ که در آن p و $q \neq ۰$ اعداد صحیحی می‌باشند که نسبت به هم اول هستند. ۰/۲۵

$$\sqrt{۲} = \frac{p}{q} \Rightarrow ۲ = \frac{p^۲}{q^۲} \Rightarrow ۲q^۲ = p^۲ \Rightarrow p^۲ \text{ زوج است} \Rightarrow p \text{ زوج است} \Rightarrow p = ۲k \ \ ۰/۵ \Rightarrow p^۲ = ۴k^۲$$

$$\Rightarrow ۲q^۲ = ۴k^۲ \Rightarrow q^۲ = ۲k^۲ \Rightarrow q^۲ \text{ زوج است} \ \ ۰/۲۵ \ \Rightarrow q \text{ زوج است}$$

با فرض اول بودن p و q به تناقض رسیده‌ایم یعنی حکم اولیه درست است. ۰/۲۵

۲۴۵

$$x^۲ + y^۲ + ۱ \geq xy + x + y \Rightarrow ۲x^۲ + ۲y^۲ + ۲ - ۲xy - ۲x - ۲y \geq ۰ \Rightarrow \quad ۰/۵$$

$$(x-۱)^۲ + (x-y)^۲ + (y-۱)^۲ \geq ۰ \quad ۰/۵$$

درستی عبارت بدیهی است. بنابراین تمامی روابط برگشت‌پذیر است. ۰/۲۵

۲۴۶ فرض خلف $\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right.$ گنگ نیست$\left.\right) \Rightarrow \sqrt{2}+\sqrt{3}=a$ ۰/۲۵ (a گویا) $\Rightarrow \sqrt{3}=a-\sqrt{2} \Rightarrow$ ۰/۲۵

$3=a^2+2-2a\sqrt{2} \Rightarrow 2a\sqrt{2}=a^2-1 \Rightarrow \sqrt{2}=\frac{a^2-1}{2a} \Rightarrow$ گنگ $\neq$ گویا ۰/۲۵

به تناقض رسیده‌ایم یعنی حکم اولیه درست است. ۰/۲۵

۲۴۷ $2a^2+b^2+1 \geq 2(a-ba) \Rightarrow 2a^2+b^2+1+2ab-2a \geq 0 \Rightarrow (a-1)^2+(a+b)^2 \geq 0$ ۰/۲۵ ۰/۲۵

درستی عبارت بدیهی است. بنابراین تمامی روابط برگشت‌پذیر است. ۰/۵

۲۴۸ نادرست ۰/۲۵ مثال نقض ۰/۲۵

۲۴۹ درست ۰/۲۵

۲۵۰ نادرست ۰/۲۵ مثال نقض ۰/۲۵

۲۵۱ استنتاجی ۰/۲۵

۲۵۲

$\frac{a}{b}+\frac{b}{a} \leq -2 \Leftrightarrow \frac{a^2+b^2}{ab} \leq -2 \Leftrightarrow a^2+b^2 \geq -2ab \Leftrightarrow (a+b)^2 \geq 0$ ۰/۲۵ ۰/۲۵ ۰/۲۵

عبارت همواره درست است و تمام مراحل بازگشت‌پذیر می‌باشند. ۰/۲۵

۲۵۳ فرض: $\sqrt{2}$ گنگ   فرض خلف: $\sqrt[3]{1+\sqrt{2}}=a$ گویا $\Rightarrow 1+\sqrt{2}=a^3 \Rightarrow \sqrt{2}=a^3-1$ (تناقض) ۰/۲۵ ۰/۲۵ ۰/۲۵

حکم: $\sqrt[3]{1+\sqrt{2}}$ گنگ

تفریق دو عدد گویا همواره گویا است (این تناقض نشان می‌دهد که خلاف حکم برقرار نمی‌باشد.) ۰/۲۵

۲۵۴ فرض: $x=3q$ $x(x+3)=3q(3q+3)=9q(q+1)=9(2t)=18t$ ۰/۲۵ ۰/۵ ۰/۲۵

حکم: $x(x+3)=18t$

ضرب دو عدد متوالی همیشه زوج است.

تلفن تماس: ۰۲۶۳۳۴۰۸۹۴۴

۲۵۵ فرض خلف : $n\neq ۲k+۱ \Rightarrow n=۲k$ ۰/۲۵

$۵n+۳=۵(۲k)+۳=۱۰k+۳=۲(۵k+۱)+۱=۲q+۱$ ۰/۲۵ ۰/۲۵

این تناقض نشان می‌دهد که فرض خلف نادرست است.

۲۵۶

$a^۲+b^۲+c^۲+۳\geq ۲a+۲b+۲c \Leftrightarrow$

$a^۲+b^۲+c^۲+۱+۱+۱-۲a-۲b-۲c\geq ۰ \Leftrightarrow$ ۰/۲۵

$(a^۲-۲a+۱)(b^۲-۲b+۱)+(c^۲-۲c+۱)\geq ۰ \Leftrightarrow$ ۰/۲۵

$(a-۱)^۲+(b-۱)^۲+(c-۱)^۲\geq ۰$

عابرت همواره درست است و بر طبق استدلال برگشتی برقرار می‌باشد. ۰/۲۵

۲۵۷ نادرست است. ۰/۲۵

$a=-۳<۰ \Rightarrow a^۲=۹>۰$ ۰/۲۵

۲۵۸ درست است ۰/۲۵

$\left.\begin{array}{l} a=۵q \\ b=۵t \end{array}\right\} \Rightarrow a+b=۵q+۵t=۵(q+t)=۵(۲k)=۱۰k$

q,t فرد هستند ۰/۲۵ جمع دو عدد فرد زوج است ۰/۲۵

راه حل دوم:

$\left.\begin{array}{l} a=۵(۲t+۱) \\ b=۵(۲t'+۱) \end{array}\right\} \Rightarrow a+b=۵(۲t+۱)+۵(۲t'+۱)=۱۰(t+t'-۱)=۱۰k$ ۰/۲۵ ۰/۲۵

۲۵۹ بلی، چون یک دور داریم که از همه رئوس می‌گذرد که می‌توانیم با شروع از یکی از رئوس داخلی به این امر برسیم.

۲۶۰ چون در هر گراف همیلتنی حداقل یک دور به طول P داریم یعنی برای هر رأس، یک یال ورودی و یک یال خروجی داریم، پس حداقل درجه رأس برابر ۲ می‌گردد.

۲۶۱ چون در هر گراف همیلتنی حداقل یک دور به طول P داریم که از تمام رئوس گذشته است پس حتماً گراف همبند است.

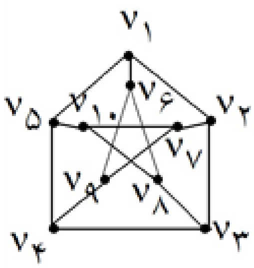
۲۶۲

به طول ۵ : $v_۱ v_۲ v_۳ v_۴ v_۵ v_۱$

به طول ۶ : $v_۱ v_۲ v_۷ v_۹ v_۴ v_۵ v_۱$

به طول ۸ : $v_۲ v_۷ v_۹ v_۶ v_۸ v_{۱۰} v_۵ v_۱ v_۲$

به طول ۹ : $v_۱ v_۲ v_۳ v_۴ v_۹ v_۷ v_{۱۰} v_۸ v_۶ v_۱$



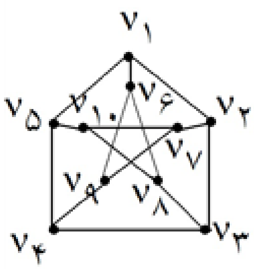
۲۶۳

به طول ۵ : $v_۱ v_۲ v_۳ v_۴ v_۵ v_۱$

به طول ۶ : $v_۱ v_۲ v_۷ v_۹ v_۴ v_۵ v_۱$

به طول ۸ : $v_۲ v_۷ v_۹ v_۶ v_۸ v_{۱۰} v_۵ v_۱ v_۲$

به طول ۹ : $v_۱ v_۲ v_۳ v_۴ v_۹ v_۷ v_{۱۰} v_۸ v_۶ v_۱$



۲۶۴ خیر، زیرا دوری به طول ۱۰ در آن نمی‌توان یافت. دقت کنیم در گراف پترسن، دور به‌طول ۳ و ۴ و ۷ و ۱۰ نداریم.

۲۶۵ خیر، زیرا دوری به طول ۱۰ در آن نمی‌توان یافت. دقت کنیم در گراف پترسن، دور به‌طول ۳ و ۴ و ۷ و ۱۰ نداریم.

۲۶۶ نادرست ۰/۲۵

۲۶۷ $\underset{۰/۲۵}{n=۲k} \Rightarrow \underset{۰/۲۵}{۳(۲k)+۲} = ۶k+۲ = \underset{۰/۲۵}{۲(۳k+۱)} = ۲A$ خلاف حکم

به خلاف فرض رسیده‌ایم، پس همان حکم داده شده صحیح است. ۰/۲۵

۲۶۸ $\underset{۰/۲۵}{(۲K)(۲K+۲)} = \underset{۰/۲۵}{(۴K^۲+۴K)} = ۴K(K+۱) = \underset{۰/۲۵}{۴(۲K')} = \underset{۰/۲۵}{۸K'}$

۲۶۹
$$\frac{a^۳+b^۳}{a+b} \geqslant ab \Leftrightarrow \overset{(۰/۲۵)}{a^۳+b^۳ \geqslant (a+b)ab} \Leftrightarrow \overset{(۰/۵)}{(a+b)(a^۲-ab+b^۲) \geqslant (a+b)ab} \Leftrightarrow$$

$$\overset{(۰/۲۵)}{a^۲-ab+b^۲ \geqslant ab} \Leftrightarrow (a-b)^۲ \geqslant ۰ \quad (۰/۲۵)$$

بر طبق استدلال برگشتی چون به عبارت همواره درست رسیده‌ایم، پس حکم برقرار است. (۰/۲۵)

۲۷۰ درست (۰/۲۵) و استدلال استنتاجی:

$$\overset{(۰/۲۵)}{x=۲k+۱} \Rightarrow \overset{(۰/۲۵)}{(۲k+۱)(۲k+۳)} = ۴k^۲+۸k+۳ = \overset{(۰/۲۵)}{۲(۲k^۲+۴k+۱)+۱} = ۲k'+۱$$

۲۷۱ نادرست (۰/۲۵) و مثال نقض: ۲ و ۳ هر دو اول هستند و ۵=۳+۲ هم اول است. (۰/۲۵)

۲۷۲ راه حل اول: با مثال نقض حل می‌کنیم:

اگر $\underset{۰/۵}{a=۱}$ و $b=۰ \Rightarrow (a-۱)(b-۱) = \underset{۰/۲۵}{(۱-۱)(۰-۱)} = ۰$

$$(a-۱)(b-۱)=۰ \Rightarrow \begin{cases} a-۱=۰ \\ b-۱=۰ \end{cases} \; ۰/۲۵ \Rightarrow a=۱ \text{ یا } b=۱ \quad ۰/۵$$

۲۷۳
$$x=۲k+۱ \quad ۰/۲۵$$
$$۳x+۳ = \underset{۰/۲۵}{۳(۲k+۱)+۳} = \underset{۰/۲۵}{۶k+۶} = ۶(k+۱) = ۶t \quad ۰/۲۵$$

۲۷۴ از برهان خلف استفاده کرده و می‌گوییم اگر $x = \sqrt{۱ + \sqrt{۲}}$ اصم نباشد پس گویا است. ۰/۲۵

$$\sqrt{۱ + \sqrt{۲}} = \frac{a}{b} \quad \begin{cases} a \text{ و } b \in z \\ b \neq ۰ \end{cases} \xrightarrow{\text{توان ۲}} \quad ۰/۲۵$$

$$۱ + \sqrt{۲} = \frac{a^۲}{b^۲} \Rightarrow \underbrace{\sqrt{۲}}_{\text{گنگ}} = \underbrace{\frac{a^۲}{b^۲} - ۱}_{\text{گویا}} \quad ۰/۲۵$$

که این تناقض است پس حکم برقرار است. ۰/۲۵

۲۷۵

$$(a - ۱)^۲ \geq ۰ \quad ۰/۲۵ \Leftrightarrow a^۲ - ۲a + ۱ \geq ۰ \Leftrightarrow$$

$$a^۲ + ۱ \geq ۲a \quad ۰/۲۵$$

طرفین این نامعادله را بر a تقسیم می‌کنیم

$$\Leftrightarrow \frac{a^۲}{a} + \frac{۱}{a} \geq \frac{۲a}{a} \quad ۰/۲۵ \Leftrightarrow a + \frac{۱}{a} \geq ۲ \quad ۰/۲۵$$

۲۷۶

$$xy \leq \left(\frac{(x + y)}{۲}\right)^۲ \Rightarrow xy \leq \frac{x^۲ + y^۲ + ۲xy}{۴} \quad ۰/۲۵$$

$$\Rightarrow ۴xy \leq x^۲ + y^۲ + ۲xy \quad ۰/۲۵$$

$$x^۲ + y^۲ - ۲xy \geq ۰ \quad ۰/۲۵ \quad (x - y)^۲ \geq ۰ \quad ۰/۲۵$$ بدیهی است

۲۷۷ نادرست ۰/۲۵ یک عدد گنگ است. $x = \sqrt{۳ + \sqrt{۵}} \Rightarrow x^۲ = ۳ + \sqrt{۵}$ ۰/۲۵

۲۷۸

$$x = ۲K \quad y = ۲K + ۲ \quad z = ۲K + ۴ \quad K \in Z \quad ۰/۲۵$$

$$x.y.z = (۲K)(۲K + ۲)(۲K + ۴) = ۸(K)(K + ۱)(K + ۲) \quad ۰/۲۵$$

K و $K + ۱$ و $K + ۲$ سه عدد صحیح متوالی هستند پس یکی از این سه عدد مضرب ۳ است. ۰/۲۵ پس:

$$x.y.z = ۸(۳q) = ۲۴q \quad ۰/۲۵$$

۲۷۹

$$(۲k - ۱)^۲ + ۱ = ۲q \quad ۰/۲۵$$

$$\underbrace{۴k^۲ + ۱ - ۴k + ۱ = ۴k^۲ - ۴k + ۲}_{۰/۲۵} = \underbrace{۲(۲k^۲ - ۲k + ۱) = ۲q}_{۰/۲۵}$$ زوج است

۲۸۰

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq ۲$$

$$\underbrace{\frac{a^۲ + b^۲}{ab} \geq ۲}_{۰/۲۵} \Rightarrow \underbrace{a^۲ + b^۲ - ۲ab \geq ۰}_{۰/۲۵} \Rightarrow \underbrace{(a - b)^۲ \geq ۰}_{۰/۵}$$ بدیهی است

۲۸۱ اگر $a^2+\sqrt{3}$ عدد گنگ نباشد پس گویا است یعنی: $a^2+\sqrt{3}=\frac{p}{q} \Rightarrow \begin{cases} p \text{ و } q \in z \\ q \neq 0 \end{cases}$ ۰/۲۵

$\sqrt{3}=\frac{p}{q}-a^2$ ۰/۲۵ $\sqrt{3}=\frac{p-qa^2}{q}$ ۰/۲۵ $\Rightarrow \sqrt{3}=\frac{a'}{q} \quad \begin{cases} a' \text{ و } q \in z \\ q \neq 0 \end{cases}$

$\sqrt{3}$ یک عدد گویا شده که تناقض با فرض مسئله دارد. پس فرض خلف باطل بوده و حکم برقرار است یعنی $\sqrt{3}+a^2$ گنگ است. ۰/۲۵

۲۸۲

$(a-1)^2+(b-1)^2+(c-1)^2 \geq 0 \Leftrightarrow$ ۰/۲۵

$a^2-2a+1+b^2-2b+1+c^2-2c+1 \geq 0 \Leftrightarrow$

$a^2+b^2+c^2+3-2a-2b-2c \geq 0 \Leftrightarrow$ ۰/۲۵

$a^2+b^2+c^2+3 \geq 2a+2b+2c \Leftrightarrow$ ۰/۲۵

$a^2+b^2+c^2+3 \geq 2(a+b+c)$ ۰/۲۵

۲۸۳

$x=2k+1 \qquad y=2k'+1$

$x^2+y^2=(2k+1)^2+(2k'+1)^2 \Rightarrow x^2+y^2=4k^2+4k+1+4k'^2+4k'+1$ ۰/۲۵

$\Rightarrow x^2+y^2=4k^2+4k'^2+4k+4k'+2 \Rightarrow x^2+y^2=2\left(2k^2+2k'^2+2k+2k'+1\right)$ ۰/۲۵

$\Rightarrow x^2+y^2=2k''$ ۰/۲۵

۲۸۴ از برهان خلف استفاده کرده و می‌گوییم اگر $y\neq 1$ نباشد پس $y=1$. ۰/۲۵

$y=1 \Rightarrow x^3+(1)^3=65 \Rightarrow x^3=64 \Rightarrow x=4$ ۰/۲۵

این تساوی با فرض مسئله تناقض دارد پس حکم برقرار است یعنی $y\neq 1$. ۰/۲۵

۲۸۵

۲۸۶

$x=2k+1$ ۰/۲۵

$x^2+3=(2k+1)^2+3=4k^2+4k+1+3=4\left(k^2+k+1\right)=4k'$ ۰/۲۵

۰/۲۵ ۰/۲۵

تلفن تماس: ۰۲۶۳۳۴۰۸۹۴۴

۲۸۷

فرض : $n^{۲} = ۵k$ حکم : $n = ۵k'$

فرض خلف $n = ۵k + r \,,\, r = \begin{cases} ۱ \\ ۲ \\ ۳ \\ ۴ \end{cases}$

$\rightarrow n^{۲} = \underbrace{۲۵k^{۲} + ۱۰\, k.r}_{\text{مضرب ۵}} + r^{۲} : n^{۲} \neq ۵k$ تناقض

عامل ۵ ندارد

حکم برقرار است $\Rightarrow$ (تناقض)

۲۸۸

الف) نادرست $۱^{۲} = ۱^{۳}$

ب) درست

$x = ۲k$, $y = ۲k'$ $xy = ۴kk' = ۲(۲kk') = ۲k''$

۲۸۹

$$x = ۲k,\quad y = ۲k' + ۱ \quad \Rightarrow \quad ۳x + y = ۶k + ۲k' + ۱ = ۲\underbrace{(۳k + k')}_{k''} + ۱ = ۲k'' + ۱$$

۲۹۰

$$۲x^{۲} + ۲y^{۲} + ۲ \geqslant ۲xy + ۲x + ۲y \Leftrightarrow$$

$$(x^{۲} - ۲xy + y^{۲}) + (x^{۲} - ۲x + ۱) + (y^{۲} - ۲y + ۱) \geqslant ۰ \quad \Leftrightarrow$$

$(x - y)^{۲} + (x - ۱)^{۲} + (y - ۱)^{۲} \geqslant ۰$ بدیهی است.

۲۹۱ برهان خلف: فرض کنیم $\sqrt[۳]{۲ + \sqrt{۵}}$ گنگ نباشد. پس گویاست.

$$\sqrt[۳]{۲ + \sqrt{۵}} = \frac{a}{b} \Rightarrow ۲ + \sqrt{۵} = \frac{a^{۳}}{b^{۳}} \Rightarrow \sqrt{۵} = \frac{a^{۳}}{b^{۳}} - ۲$$

گویا = گنگ

به تناقض رسیدیم پس $\sqrt[۳]{۲ + \sqrt{۵}}$ گنگ است.

۲۹۲

$x = ۲k$, $y = ۲k + ۲$, $z = ۲k + ۴$

$$x.y.z = ۲k\,(۲k + ۲)\,(۲k + ۴) = ۲^{۳}k(k + ۱)\,(k + ۲) = ۸k'$$

۲۹۳

۲۹۴
$$x = ۲k \quad y = ۲k + ۲ \;,\; z = ۲k + ۴$$
$$x + y + z = ۲k + (۲k + ۲) + (۲k + ۴) = ۶k + ۶ = ۶\underbrace{(k + ۱)}_{k'} = ۶k'$$

۲۹۵ خیر

مثال نقض $\Rightarrow\ a = \sqrt{۲} \quad , \quad b = ۲\sqrt{۲} \quad , \quad c = \sqrt{۳}$

$$abc^{۲} = \sqrt{۲} \times ۲\sqrt{۲} \times \left(\sqrt{۳}\right)^{۲} = ۱۲$$

۲۹۶ از برهان خلف استفاده می‌کنیم و می‌گوییم اگر مضرب ۳ نباشد، پس:

$$n = ۳k + ۱ \Rightarrow n^{۲} = (۳k + ۱)^{۲} \Rightarrow n^{۲} = ۹k^{۲} + ۶k + ۱ \Rightarrow n^{۲} = ۳\left(۳k^{۲} + ۲k\right) + ۱ \Rightarrow n^{۲} \neq ۳k'$$
$$n = ۳k + ۲ \Rightarrow n^{۲} = (۳k + ۲)^{۲} \Rightarrow n^{۲} = ۹k^{۲} + ۱۲k + ۴ \Rightarrow n^{۲} = ۳\left(۳k^{۲} + ۴k + ۱\right) + ۱ \Rightarrow n^{۲} \neq ۳k'$$

هر دو رابطه‌ی اخیر خلاف فرض هستند، پس حکم برقرار است.

۲۹۷
$$(x - y)^{۲} \geqslant ۰ \Rightarrow x^{۲} + y^{۲} - ۲xy \geqslant ۰ \Rightarrow$$
$$x^{۲} + y^{۲} \geqslant ۲xy \xrightarrow[\text{تقسیم می کنیم } xy]{\text{طرفین نامعادله را بر}} \frac{x^{۲} + y^{۲}}{xy} \geqslant \frac{۲xy}{xy}$$
$$\frac{x^{۲}}{xy} + \frac{y^{۲}}{xy} \geqslant ۲ \qquad \frac{x}{y} + \frac{y}{x} \geqslant ۲$$

۲۹۸
$$\frac{\sqrt{b} + \sqrt{a}}{\sqrt{ab}} \geq \frac{۴}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} \quad ۰/۲۵$$
$$\Rightarrow \left(\sqrt{a} + \sqrt{b}\right)^{۲} \geqslant ۴\sqrt{ab} \Rightarrow a + b + ۲\sqrt{ab} \geqslant ۴\sqrt{ab} \Rightarrow a + b - ۲\sqrt{ab} \geqslant ۰$$
۰/۲۵ ۰/۲۵
$$\Rightarrow \left(\sqrt{a} - \sqrt{b}\right)^{۲} \geqslant ۰ \quad ۰/۲۵$$

بدیهی - پس با استفاده از استدلال بازگشتی مطلب برقرار است.

تلفن تماس: ۰۲۶۳۳۴۰۸۹۴۴

۲۹۹ با استفاده از برهان خلف:

فرض می‌کنیم $\sqrt{2}$ گنگ نباشد، چون $\sqrt{2}$ گنگ نیست، پس گویاست. چون $\sqrt{2}$ گویاست، پس به شکل $\frac{p}{q}$ نوشته می‌شود که $q \neq 0$ و $(p,q)=1$ لذا داریم که:

$$\frac{p}{q}=\sqrt{2} \rightarrow p=\sqrt{2}q \rightarrow p^2=2q^2$$

چون p^2 عددی زوج است پس p نیز زوج بوده در نتیجه $p=2t$ درنتیجه:

$$(2t)^2=2q^2 \rightarrow 4t^2=2q^2 \rightarrow 2t^2=q^2$$

۳۰۰ از برهان خلف استفاده می‌کنیم و می‌گوییم اگر n مضرب ۷ نباشد، پس:

$$r=\{1,2,3,4,5,6\}^{\text{توان } 2} \Rightarrow r^2 \neq 7k$$

$$n=7q+r \Rightarrow n^2=(7q+r)^2 \Rightarrow n^2=49q^2+14qr+r^2$$

$$n^2=7(7q^2+2qr)+r^2 \Rightarrow n^2=7q'+r^2 \Rightarrow n^2 \neq 7q'$$

۳۰۱

$$x=\frac{a}{b},\ \begin{cases} a \text{ و } b \in z \\ b \neq 0 \end{cases},\qquad y=\frac{c}{d},\ \begin{cases} c \text{ و } d \in z \\ d \neq 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow\quad x-y=\frac{a}{b}-\frac{c}{d}=\frac{ad-bc}{bd}=\frac{p}{q}\ \begin{cases} p \text{ و } q \in z \\ q \neq 0 \end{cases}$$

۳۰۲ اگر $6+\sqrt{5}$ گنگ نباشد داریم:

$$6+\sqrt{5}=\frac{p}{q} \quad \text{و} \quad p \text{ و } q \in z \quad \text{و} \quad q \neq 0$$

$$\sqrt{5}=\frac{p}{q}-6 \rightarrow \sqrt{5}=\frac{p-6q}{q} \rightarrow \sqrt{5}=\frac{k}{q} \in Q \quad \text{و} \quad k \in z$$

که این با گنگ بودن $\sqrt{5}$ در تناقض است. پس فرض $6+\sqrt{5}$ گنگ نباشد، غلط است.

۳۰۳ با توجه به بازگشت‌پذیری:

$$\frac{x}{y}+\frac{y}{x} \geq 2 \leftrightarrow x^2+y^2 \geq 2xy \leftrightarrow x^2+y^2-2xy \geq 0 \leftrightarrow (x-y)^2 \geq 0$$: اثبات بازگشتی

۳۰۴

$$x=2k+1 \rightarrow x^3-1=(2k+1)^3-1=\left((2k)^3+3(2k)^2+3(2k)+1\right)-1$$

$$x^3-1=2\left(4k^3+6k^2+3k\right)=2k'$$ چون مضرب ۲ می‌باشد پس زوج است.

تلفن تماس: ۰۲۶۳۳۴۰۸۹۴۴

۳۰۵

$x = ۲$: فرض خلف

متناقص با فرض مسئله ($y \neq ۱$): $\Rightarrow x^{۳} + ۲y = ۱۰ \xrightarrow{x=۲} ۸ + ۲y = ۱۰ \rightarrow y = ۱$

پس فرض خلف باطل است یعنی $y \neq ۱$ است.

۳۰۶

۳۰۷

۳۰۸

۳۰۹

۳۱۰

۳۱۱

تلفن تماس: ۰۲۶۳۳۴۰۸۹۴۴

۳۱۲

۳۱۳

۳۱۴

۳۱۵

۳۱۶

۳۱۷

۳۱۸

۳۱۹

۳۲۰

۳۲۱

۳۲۲

۳۲۳

۳۲۴

۳۲۵

۳۲۶

۳۲۷

۳۲۸

۳۲۹

۳۳۰

۳۳۱

۳۳۲

۳۳۳

۳۳۴

۳۳۵

۳۳۶

۳۳۷

۳۳۸

۳۳۹

۳۴۰

۳۴۱

۳۴۲

۳۴۳

۳۴۴

۳۴۵

۳۴۶

۳۴۷

۳۴۸

۳۴۹

۳۵۰

۳۵۱

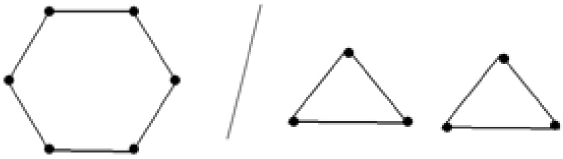
۳۵۲

۳۵۳

۳۵۴

۳۵۵

۳۵۶



$p = ۶$
$q = ۲$
۲ منتظم

۳۵۷

۳۵۸

۳۵۹

۳۶۰

۳۶۱

تلفن تماس: ۰۲۶۳۳۴۰۸۹۴۴

۳۶۲

۳۶۳

۳۶۴

۳۶۵

۳۶۶

۳۶۷

۳۶۸

۳۶۹

۳۷۰

۳۷۱

۳۷۲

۳۷۳

۳۷۴

۳۷۵

۳۷۶

تلفن تماس: ۰۲۶۳۳۴۰۸۹۴۴

تلفن تماس: ۰۲۶۳۳۴۰۸۹۴۴

۳۷۸

۳۷۹

۳۸۰

۳۸۱

۳۸۲

۳۸۳

۳۸۴

۳۸۵

۳۸۶

۳۸۷
۳۸۸
۳۸۹
۳۹۰
۳۹۱
۳۹۲
۳۹۳
۳۹۴
۳۹۵
۳۹۶
۳۹۷

۳۹۸

۳۹۹

۴۰۰