

WWW.AKOEDU.IR

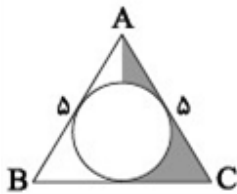
اولین و با کیفیت ترین

کلاسی های vip کنکور
آگادمی کنکور در ایران

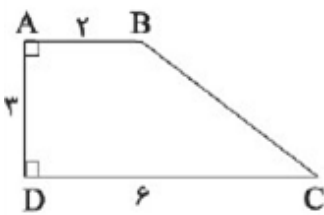


جهت دریافت برنامه ی شخصی سازی شده یک هفته ای رایگان کلیک کنید و یا به شماره ی ۰۹۰۲۵۶۴۶۲۳۴ عدد ۱ را ارسال کنید.

۳۰۰ تست هندسه ۱ فصل ۴



- ۱ مثلث متساوی الساقین ABC با طول ساق ۵ و طول قاعده‌ی ۶ را حول کوچک‌ترین ارتفاع آن دوران دهیم. حجم حاصل از دوران سطح رنگی چه ضریبی از π است؟
- (۱) ۷
(۲) $\frac{7}{5}$
(۳) ۶
(۴) $\frac{6}{5}$



- ۲ حجم شکل حاصل از دوران ذوزنقه‌ی قائم‌الزاویه ABCD حول ساق AD کدام است؟
- (۱) 56π
(۲) 54π
(۳) 52π
(۴) 50π

- ۳ از دو نقطه‌ی مفروض A و B چند صفحه عمود بر صفحه‌ی P عبور می‌کند؟
- (۱) صفر یا ۱
(۲) صفر یا بی‌شمار
(۳) یک یا بی‌شمار
(۴) بی‌شمار

- ۴ اگر یک لوزی با طول قطرهای ۶ و ۴ حول قطر بزرگ دوران داده شود، حجم شکل حاصل چقدر است؟
- (۱) 8π
(۲) 4π
(۳) 16π
(۴) 24π

- ۵ مثلثی به اضلاع ۵، ۵ و ۸ را حول کوچک‌ترین ارتفاع دوران می‌دهیم، حجم شکل حاصل کدام است؟
- (۱) $\frac{16}{3}\pi$
(۲) 16π
(۳) $\frac{20\pi}{3}$
(۴) 48π

- ۶ در مثلث قائم‌الزاویه $\triangle ABC$ ($\hat{A} = 90^\circ$)، $AC = 4$ و $AB = 3$ است. اگر حجم دوران یافته مثلث، حول اضلاع BC و AB را به ترتیب V_1 و V_2 بنامیم، $\frac{V_1}{V_2}$ کدام است؟
- (۱) $\frac{3}{4}$
(۲) $\frac{1}{4}$
(۳) $\frac{1}{5}$
(۴) $\frac{3}{5}$

- ۷ در یک مکعب صفحه‌ی گذرا بر یک یال و وسط یال دیگر، آن را به دو قطعه نابرابر تقسیم می‌کند. مساحت کل وجه‌های قطعه بزرگ‌تر چند برابر مساحت کل وجه‌های قطعه کوچک‌تر است؟
- (۱) ۳
(۲) ۲
(۳) $\frac{1 + \sqrt{5}}{4 + \sqrt{5}}$
(۴) $\frac{11 + \sqrt{5}}{5 + \sqrt{5}}$



- ۸ سطح بیرونی یک مکعب را رنگی کرده‌ایم. این مکعب را با صفحاتی به موازات هر یک از وجه‌های خود سه برش می‌دهیم تا به ۶۴ مکعب کوچک هم‌اندازه تقسیم شود. مجموع مساحت وجه‌های رنگ نشده این مکعب‌ها چند برابر مجموع مساحت وجه‌های رنگی است؟
- ۱ (۴) ۲ (۳) ۳ (۲) ۴ (۱)

- ۹ در یک منشور مثلث‌القاعده، m جفت یال موازی و n جفت یال متنافر وجود دارد، $m - n$ کدام است؟
- ۱ (صفر) ۲ (۳) ۳ (۲) ۴ (۱۲)

- ۱۰ کدام گزینه نادرست است؟
- ۱) از هر نقطه در فضا تنها یک خط می‌گذرد که بر صفحه مفروض P عمود باشد.
- ۲) از هر نقطه در فضا فقط یک صفحه می‌گذرد که بر خط مفروض L عمود باشد.
- ۳) در فضا اگر خط‌های d و d' موازی باشند و خط L یکی از آن‌ها را قطع کند، دیگری را نیز قطع می‌کند.
- ۴) در فضا اگر دو خط d و d' بر خط L عمود باشند الزاماً d و d' موازی نیستند.

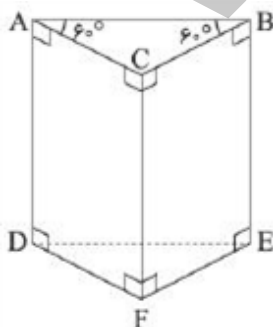
- ۱۱ یک دوزنقه به قاعده‌های ۲ و ۵ و ساق قائم ۳ واحد را حول ساق قائم دوران می‌دهیم. حجم حاصل کدام است؟
- ۱ (۳۶π) ۲ (۳۸π) ۳ (۳۹π) ۴ (۴۰π)

- ۱۲ در یک مکعب به طول یال ۴ واحد، بر انتهای سه یال گذرا بر یک رأس، صفحه‌ای می‌گذرد. مساحت مقطع این صفحه با مکعب کدام است؟
- ۱ (۸) ۲ (۴√۶) ۳ (۱۲) ۴ (۸√۳)



- ۱۳ اگر در شکل زیر ۹ و ۲۴ طول دو ضلع مستطیل محاط در نیم‌دایره باشد، حجم حاصل از دوران ناحیه هاشور، حول خط d کدام است؟
- ۱ (۲۴۷۵π) ۲ (۲۵۵۶π) ۳ (۲۶۳۷π) ۴ (۲۷۱۸π)

- ۱۴ وضعیت خطی از یک صفحه که با صفحه دیگر متقاطع باشد، با فصل مشترک این دو صفحه چگونه است؟
- ۱) متقاطع ۲) منطبق ۳) موازی یا متقاطع ۴) متقاطع یا منطبق



- ۱۵ منشور سه پهلوئی مقابل را در نظر بگیرید، کدام گزینه درست است؟
- ۱) دو خط AB و EF موازی هستند.
- ۲) دو خط BD و AE متنافرند.
- ۳) خط BC و صفحه ADF موازی هستند.
- ۴) خط CF بر خط DE عمود است.

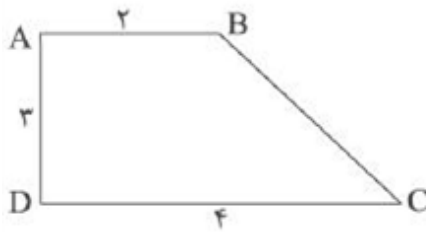
۱۶ در مورد سه صفحه دویه دو متقاطع کدام گزینه درست نیست؟

- (۱) ممکن است فصل مشترک هر سه، یک خط باشد.
 (۲) ممکن است فصل مشترک آن‌ها سه خط موازی و غیرمنطبق باشد.
 (۳) ممکن است خطوط فصل مشترک آن‌ها دویه دو متنافر باشند.
 (۴) ممکن است فصل مشترک آن‌ها سه خط هم‌مرس باشد.

۱۷ از یک نقطه خارج خط d ، چند صفحه موازی با آن می‌توان عبور داد؟

- (۱) صفر (۲) یک (۳) دو (۴) بی‌شمار

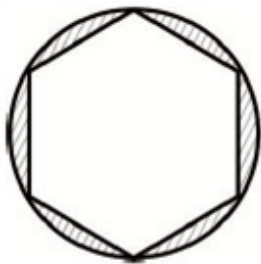
۱۸ از دوران دوزنقه قائم‌الزاویه $ABCD$ حول ساق قائم AD شکلی با کدام حجم ایجاد می‌شود؟



- (۱) 16π
 (۲) 28π
 (۳) 24π
 (۴) 18π

۱۹ قاعده‌ی منشور قائم، شش ضلعی منتظم به ضلع ۴ واحد و طول یال قائم آن $7/5$ واحد است. اگر بزرگ‌ترین استوانه را از این منشور جدا کنیم و شکل حاصل را با صفحه‌ی موازی قاعده قطع دهیم، آنگاه مساحت مقطع حاصل کدام است؟

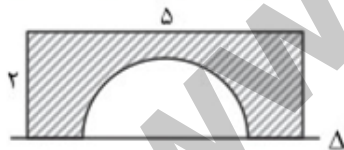
- (۱) $24\sqrt{3} - 6\pi$ (۲) $24\sqrt{3} - 24\pi$ (۳) $12\sqrt{3} - 12\pi$ (۴) $24\sqrt{3} - 12\pi$



۲۰ شش ضلعی منتظم مقابل را حول قطر بزرگ شش ضلعی دوران می‌دهیم. اگر هر ضلع آن واحد باشد، حجم شکل حاصل از ناحیه هاشورزده کدام است؟

- (۱) $\frac{\pi}{12}$
 (۲) $\frac{\pi}{6}$
 (۳) $\frac{\pi}{3}$
 (۴) $\frac{\pi}{2}$

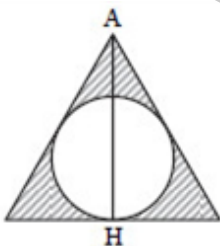
۲۱ سطح محدود به مستطیل 5×2 و نیم‌دایره به قطر ۳ واحد، حول خط Δ دوران می‌کند. حجم جسم حاصل چند برابر π است؟



- (۱) ۱۵
 (۲) $15/5$
 (۳) $16/5$
 (۴) ۱۷

۲۲ در مثلث متساوی‌الاضلاع به ضلع $2\sqrt{3}$ واحد، حجم حاصل از دوران

سطح سایه‌زده شده حول ارتفاع AH کدام است؟



- (۱) $\frac{4\pi}{3}$
 (۲) $\frac{3\pi}{2}$
 (۳) 2π
 (۴) $\frac{5\pi}{3}$

۲۳ دو صفحه‌ی متقاطع P و Q و نقطه‌ی A در خارج هر دو صفحه مفروض‌اند. تعداد صفحات R گذرا بر نقطه‌ی A و متقاطع با صفحه‌های P و Q، فاقد نقطه مشترک این سه صفحه، کدام است؟
 (۱) یک (۲) دو (۳) نشدنی (۴) بی‌شمار

۲۴ در یک مکعب مستطیل، با امتداد یال‌ها، هر یال با چند یال دیگر، متنافر است؟

(۴) ۵

(۳) ۴

(۲) ۳

(۱) ۲

۲۵ در یک مثلث قائم‌الزاویه با زاویه‌ی ۳۰ درجه و طول وتر ۸ واحد، حول وتر خود دوران می‌کند. حجم جسم حاصل چند برابر π است؟

(۴) ۴۰

(۳) ۳۶

(۲) ۳۲

(۱) ۲۴

۲۶ صفحه‌ی P و خط d و نقطه‌ی A مفروض هستند. اگر صفحه‌ی گذرا بر نقطه‌ی A و خط d را Q بنامیم. در کدام حالت، رسم خط گذرا از نقطه‌ی A متقاطع با خط d و موازی صفحه‌ی P غیرممکن است؟

(۲) $Q \cap P = \emptyset, d \parallel P$ (۱) $Q \cap P \neq \emptyset, d \parallel P$ (۴) $Q \cap P = \emptyset, d \not\parallel P$ (۳) $Q \cap P \neq \emptyset, d \not\parallel P$

۲۷ یک دوزنقه‌ی قائم‌الزاویه به قاعده‌های ۲ و ۵ و ساق قائم ۳ واحد را حول ساق قائم دوران می‌دهیم. حجم جسم حاصل کدام است؟

(۴) 40π (۳) 39π (۲) 38π (۱) 36π

۲۸ کدام مورد درست است؟

(۱) دو خط موازی با یک صفحه، با هم موازیند.

(۲) دو صفحه‌ی عمود بر یک صفحه با هم موازیند.

(۳) خطی موازی با یکی از دو صفحه متعامد با صفحه‌ی دیگر موازی است.

(۴) از نقطه‌ای خارج از یک خط بی‌شمار خط بر آن عمود رسم می‌شود.

۲۹ در یک مکعب دو وجه متقاطع را در نظر می‌گیریم، در این دو وجه چند یال دوجه‌دو متنافر هستند؟

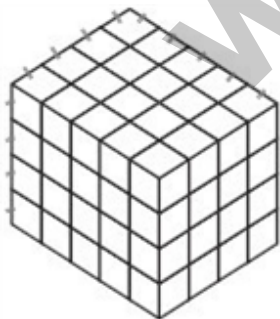
(۴) ۱۲

(۳) ۸

(۲) ۶

(۱) ۴

۳۰ اگر یک مثلث قائم‌الزاویه با اضلاع قائم ۳ و ۴ را حول وتر آن دوران دهیم، حجم شکل حادث چه قدر است؟

(۴) $8/8\pi$ (۳) $14/4\pi$ (۲) $9/6\pi$ (۱) $4/8\pi$ 

۳۱ حداقل m و حداکثر M مکعب باید از شکل سمت چپ برداریم تا نمای بالای شکل حاصل به صورت شکل سمت راست شود.

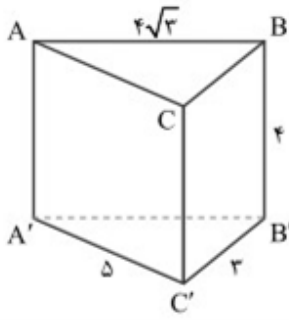
اندازه‌ی $M + m$ چه قدر است؟

(۱) ۱۲۰

(۲) ۱۱۶

(۳) ۲۴

(۴) ۲۰



۳۲ در منشور قائم شکل مقابل داریم $BB' = 4$, $B'C' = 3$, $A'C' = 5$ و $AB = 4\sqrt{3}$ ، صفحه‌ای از رأس B و یال $A'C'$ می‌گذرد. مساحت مقطع

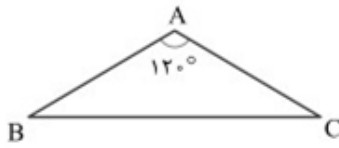
حاصل کدام است؟

- (۱) ۱۲
(۲) ۱۴
(۳) ۲۴
(۴) ۳۶

۳۳ اگر خط d صفحه‌ی P را قطع نکند آن گاه

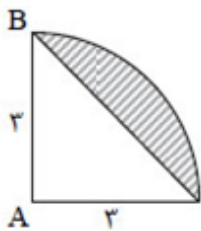
- (۱) با بی‌شمار خط از صفحه‌ی P موازی است.
(۲) هر صفحه‌ی متقاطع با صفحه‌ی P را قطع می‌کند.
(۳) با هر صفحه‌ی متقاطع با صفحه‌ی P موازی است.
(۴) هر خط متقاطع با d ، صفحه‌ی P را قطع می‌کند.

۳۴ در مثلث متساوی‌الساقین ABC ، اگر ارتفاع وارد بر قاعده، یک باشد، مثلث را حول ارتفاع یکی از ساق‌ها دوران می‌دهیم حجم شکل ایجاد شده چقدر است؟



- (۱) $3\sqrt{3}\pi$
(۲) $\frac{3\pi}{2}$
(۳) 3π
(۴) $\frac{8\sqrt{3}}{3}$

۳۵ در شکل مقابل یک ربع دایره به شعاع ۳ مفروض است، از دوران قسمت رنگی حول AB چه حجمی پدید می‌آید؟

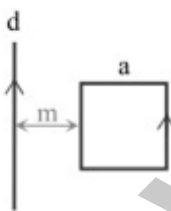


- (۱) 18π
(۲) 2π
(۳) 9π
(۴) 16π

۳۶ در هرم با قاعده‌ی مربع، چند زوج یال متنافر می‌توان یافت؟

- (۱) ۶
(۲) ۱۶
(۳) ۸
(۴) ۴

۳۷ مربعی به ضلع a را حول محور d دوران داده‌ایم. شکل حاصل چگونه است؟

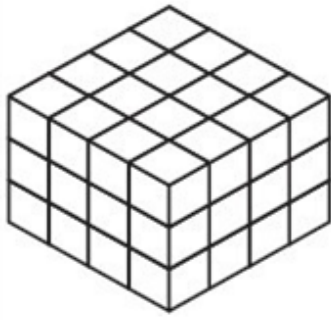


- (۱) فضای بین دو مخروط هم‌رأس
(۲) فضای بین دو کره
(۳) فضای بین دو صفحه‌ی موازی
(۴) فضای بین دو استوانه

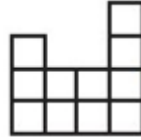
۳۸ کدام گزاره در فضا همواره درست است؟

- (۱) دو خط عمود بر یک خط موازیند.
(۲) دو صفحه عمود بر یک صفحه موازیند.
(۳) خط و صفحه‌ی عمود بر یک صفحه موازی‌اند یا خط بر صفحه واقع است.
(۴) از هر نقطه غیر واقع بر صفحه بی‌شمار خط می‌توان بر آن صفحه عمود کرد.

۳۹ شکل مقابل از مکعب‌های کوچک هم‌نهشت تشکیل شده است. حداکثر چند مکعب



کوچک از آن باید برداشته شود تا نمای بالا به شکل



باشد؟

۳۲ (۲)

۳۶ (۴)

۳۷ (۱)

۴۳ (۳)

۴۰ نسبت مساحت نمای روبه‌روی شکل مقابل به مساحت نمای بالای آن کدام است؟

۱ (۱)

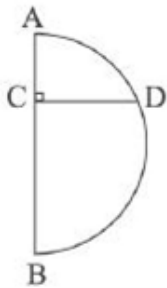
۱/۵ (۲)

۲ (۳)

۵/۳ (۴)



۴۱ در شکل زیر $\frac{AC}{AB} = 0.2$ می‌باشد. نیم‌دایره را حول قطر AB دوران می‌دهیم، نسبت مساحت سطح ایجاد شده از



دوران پاره‌خط CD حول قطر AB به مساحت رویه کره کدام است؟

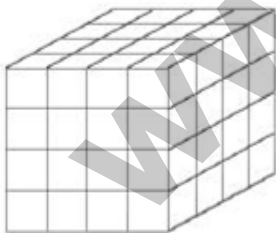
۰/۱ (۱)

۰/۰۱ (۲)

۰/۱۶ (۳)

۰/۰۸ (۴)

۴۲ شکل زیر از ۶۴ مکعب کوچک $1 \times 1 \times 1$ تشکیل شده است و همه وجه‌هایش به‌جز کف آن رنگ شده است. اگر a تعداد مکعب‌های کوچک با دو وجه رنگ شده و b تعداد مکعب‌های کوچک با سه وجه رنگ شده باشد، آن‌گاه حاصل $a + b$ کدام است؟



۲۰ (۱)

۲۴ (۲)

۲۸ (۳)

۳۲ (۴)

۴۳ چه تعداد از گزاره‌های زیر نادرست است؟

الف- دو خط عمود بر یک صفحه با هم موازیند.

ب- دو صفحه عمود بر یک خط با هم موازیند.

ج- دو صفحه عمود بر یک صفحه با هم موازیند.

د- دو خط موازی با یک صفحه با هم موازیند.

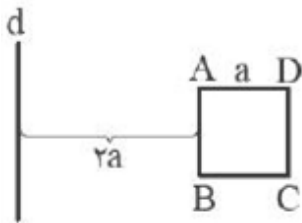
۳ (۴)

۲ (۳)

۱ (۲)

صفر (۱)

۴۴ اگر حجم حاصل از دوران مربع ABCD حول خط d که موازی AB است برابر 1080π باشد، a کدام است؟



- (۱) ۵
(۲) ۶
(۳) ۸
(۴) ۴

۴۵ حجم شکل حاصل از دوران پاره‌خطی به طول ۶ که از خط d به فاصله ۱ قرار دارد، حول خط d کدام است؟

- (۱) 2π (۲) 3π (۳) 6π (۴) 9π

۴۶ در منشور قائم زیر، طول همه یال‌ها برابر ۴ می‌باشد. مساحت مقطعی که صفحه‌ای گذرنده از نقاط A، B و C با منشور پدید می‌آورد، کدام است؟

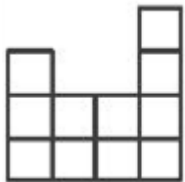
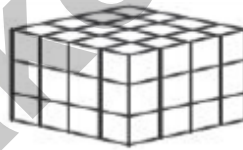


- (۱) $9\sqrt{3}$
(۲) $18\sqrt{3}$
(۳) $4\sqrt{7}$
(۴) $8\sqrt{7}$

۴۷ صفحه P مخروط ناقص V را قطع می‌کند به طوری که P از محور مخروط می‌گذرد، سطح مقطع چگونه شکلی است؟
(۱) مثلث متساوی‌الساقین (۲) مستطیل (۳) دوزنقه متساوی‌الساقین (۴) مربع

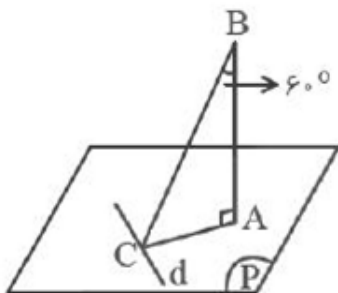
۴۸

حداقل چه تعداد از مکعب‌های شکل برداشته شود تا نمای بالای شکل به صورت زیر باشد؟



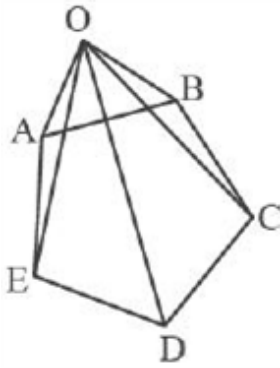
- (۱) ۹
(۲) ۱۲
(۳) ۱۵
(۴) ۱۸

۴۹ خط d درون صفحه P قرار دارد و BA بر صفحه P عمود است. اگر AC عمود بر خط d باشد، زاویه بین BC و خط d کدام است؟ (A و C در صفحه P قرار دارند).



- (۱) 60°
(۲) 90°
(۳) 30°
(۴) 45°

۵۰ در هرم مقابل چند یال وجود دارد که با یال AB متناظر است؟



۱ (۱)

۲ (۲)

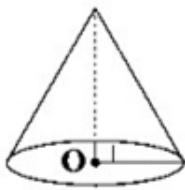
۳ (۳)

۴ (۴)

۵۱ کدام گزینه نادرست است؟

- (۱) دو صفحه عمود بر یک خط، موازی اند.
 (۲) دو خط عمود بر یک صفحه، موازی اند.
 (۳) دو صفحه عمود بر یک صفحه، موازی اند.
 (۴) دو صفحه موازی با یک صفحه، موازی اند.

۵۲ از محور مخروط قائم صفحه‌ای عبور داده‌ایم تا بر صفحه‌ی قاعده عمود باشد، اگر سطح مقطع حاصل از این برش یک مثلث متساوی‌الاضلاع به مساحت $4\sqrt{3}$ باشد، حجم مخروط قائم چند برابر $\sqrt{3}$ است؟

 $\frac{5\pi}{3}$ (۲) $\frac{8\pi}{3}$ (۱) 5π (۴) 8π (۳)

۵۳ دو کره به شعاع‌های ۳ و ۴ واحد، که مرکزهای آنها با یکدیگر ۵ واحد فاصله دارند، متقاطع اند. مساحت مکان هندسی نقاط مشترک این دو کره، کدام است؟

 $5/76\pi$ (۴) $4/8\pi$ (۳) $4/41\pi$ (۲) $3/24\pi$ (۱)

۵۴ مربعی به ضلع ۲ واحد را حول خط d به فاصله‌ی ۳ واحد از ضلع مربع قرار دارد، دوران می‌دهیم. حجم شکل حاصل کدام است؟

 32π (۴) 30π (۳) 24π (۲) 16π (۱)

۵۵ در کدام حالت زیر دو صفحه‌ی مفروض، لزوماً عمود بر هم‌اند؟

- (۱) یک صفحه، عمود بر هر دو صفحه‌ی مفروض
 (۲) یک خط از هر صفحه، عمود بر فصل مشترک
 (۳) یک خط از صفحه‌ی اول، عمود بر فصل مشترک
 (۴) یک خط از صفحه‌ی اول، عمود بر صفحه‌ی دوم

۵۶ از داخل یک استوانه‌ی قائم به ارتفاع ۶ و شعاع قاعده ۲ واحد، بزرگ‌ترین مخروط ممکن را خارج کرده‌ایم. شکلی که باقی‌مانده را با صفحه‌ای موازی قاعده‌ی مخروط که به فاصله‌ی ۲ واحد از آن قرار می‌گیرد، قطع می‌دهیم. مساحت مقطع حاصل کدام است؟

 $\frac{20\pi}{9}$ (۴) 2π (۳) $\frac{12\pi}{9}$ (۲) $\frac{10\pi}{9}$ (۱)

۵۷ مثلث متساوی‌الساقینی که یک ضلع آن قطر دایره و محاط در دایره می‌باشد را در نظر بگیرید. شکل را حول قطر دایره دوران می‌دهیم. نسبت حجم حاصل از دو شکل دوران یافته دایره و مثلث کدام است؟

 $\frac{3}{4}$ (۴) $\frac{2}{3}$ (۳) $\frac{1}{2}$ (۲) $\frac{1}{3}$ (۱)

۵۸) حجم جسم حاصل از دوران مثلث قائم الزاویه ABC با ضلع‌های قائم AB و AC، به ترتیب با اندازه‌های ۵ و $2\sqrt{6}$

واحد، حول خط گذرا از رأس C و موازی ضلع AB، کدام است؟

- (۱) 60π (۲) 70π (۳) 75π (۴) 80π

۵۹) اگر d_1 و d_2 دو خط متنافر و دو صفحه $d_1 \in p_1$ و $d_2 \in p_2$ در خط d مشترک باشند، با d_1 چه وضعیتی دارد؟

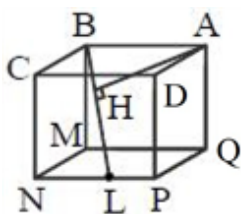
- (۱) متقاطع (۲) متنافر
(۳) متقاطع یا موازی (۴) موازی یا متقاطع یا متنافر

۶۰) صفحه P کره‌ای به مرکز O و شعاع ۷ سانتی‌متر را قطع کرده است. اگر فاصله نقطه O از صفحه P، ۳ سانتی‌متر باشد، مساحت سطح مقطع حاصل کدام است؟

- (۱) 38π (۲) 40π (۳) 42π (۴) 44π

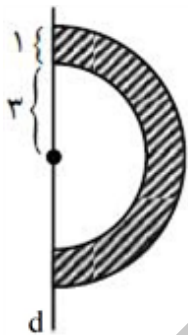
۶۱) اگر دو صفحه P و P' و نقطه A در فضا مفروض باشند به طوری که $P \cap P' = L$ ، $A \notin P$ و $A \notin P'$ ، آن‌گاه تعداد صفحاتی که بر A بگذرند و با P و P' متقاطع باشند، کدام است؟

- (۱) صفر (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) بی‌شمار



۶۲) در مکعب مقابل به طول یال $2\sqrt{2}$ ، اگر L وسط یال PN باشد، فاصله A از BL کدام است؟

- (۱) $\frac{4}{3}$ (۲) $\frac{8}{3}$
(۳) ۴ (۴) $\frac{5}{3}$



۶۳) حجم شکل حاصل از دوران 180° قسمت هاشورخورده حول خط d کدام است؟

- (۱) 12π (۲) 18π
(۳) $\frac{58}{3}\pi$ (۴) $\frac{74}{3}\pi$

۶۴) اگر خطی بر فصل مشترک دو صفحه عمود بر هم عمود باشد، چه تعداد از موارد زیر همواره صحیح است؟

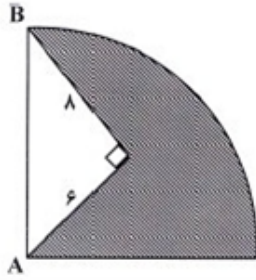
- الف- بر یکی از صفحات عمود و بر دیگری منطبق است.
ب- حداقل بر یکی از صفحات عمود است.
ج- لزوماً داخل یکی از دو صفحه واقع است.
(۱) صفر (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) ۳

۶۵) مثلث متساوی‌الاضلاعی به ضلع ۲ واحد را حول یکی از اضلاع دوران می‌دهیم، حجم شکل حادث چه قدر است؟

- (۱) π (۲) $\frac{\pi}{2}$ (۳) 2π (۴) $\frac{\pi}{4}$

۶۶ از نقطه A خارج دو خط متناظر L' و L"، چند صفحه موازی با آن دو می توان رسم کرد؟
 (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) صفر (۴) بی شمار

۶۷ اگر صفحه زیر که یک مثلث قائم الزاویه از آن حذف شده است را حول شعاع AB دوران دهیم، حجم شکل حاصل، کدام است؟ (π را برابر ۳ فرض کنید)



- (۱) $221/2$
 (۲) $212/2$
 (۳) $121/2$
 (۴) $112/2$

۶۸ استوانه‌ای به شعاع ۴ و ارتفاع ۵ را روی یک استوانه به شعاع ۶ و ارتفاع ۱۰ چنان قرار داده‌ایم که هم‌محورند، یعنی مرکز قاعده‌های آن‌ها بر هم منطبق است. اگر صفحه‌ای به شکل قائم، مجموعه را برش دهد، بیش‌ترین مساحت سطح مقطع ایجاد شده، کدام است؟

- (۱) ۸۰ (۲) ۱۶۰ (۳) 52π (۴) 104π

۶۹ مثلث قائم الزاویه‌ای به اضلاع قائم ۴ و ۹ را یک بار حول ضلع ۴ و بار دیگر حول ضلع ۹ دوران می‌دهیم. نسبت حجم دو شکل به دست آمده، چه قدر است؟

- (۱) $16/81$ (۲) $36/81$ (۳) $4/9$ (۴) $7/16$

۷۰ در یک مکعب به مساحت کلی ۱۲ سانتی‌متر مربع، صفحه‌ای بر یک یال و وسط یال متناظر با آن گذشته است. مساحت سطح مقطع حاصل از برخورد صفحه با مکعب چه قدر است؟

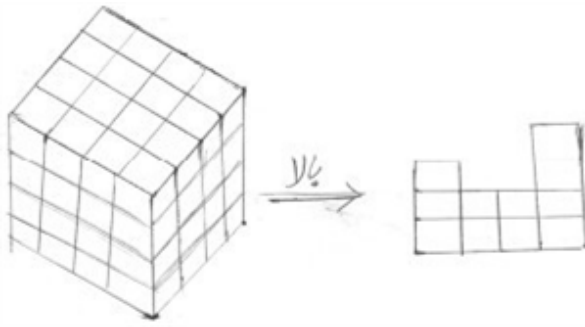
- (۱) $2\sqrt{2}$ (۲) $2\sqrt{3}$ (۳) $\sqrt{5}$ (۴) $2\sqrt{5}$

۷۱ خط d و صفحه‌ی P و نقطه‌ی A در خارج آن دو مفروض است. در رسم خطی گذرا از نقطه‌ی A، موازی صفحه‌ی P و متقاطع با خط d، در کدام وضعیت، خط و صفحه‌ی مفروض، تنها یک جواب دارد؟
 (۱) الزاماً عمود (۲) منطبق (۳) موازی (۴) متقاطع

۷۲ از یک انتهای صفحه‌ای مستطیل شکل با ابعاد ۱۰ و ۳، ربع دایره و از انتهای دیگر آن یک مثلث قائم‌الزاویه متساوی‌الساقین بریده و جدا شده است. اگر صفحه حاصل را حول محور نمایش داده شده در شکل، در فضا دوران دهیم، حجم حاصل چه قدر است؟ (π را ۳ فرض کنید)



- (۱) ۱۳۵ (۲) ۱۶۲ (۳) ۱۸۹ (۴) ۱۹۸



۷۳) حداقل (m) و حداکثر (n) مکعب کوچک باید از شکل سمت چپ برداشته شود تا نمای بالا به شکل سمت راست درآید. $m + n$ کدام است؟

- (۱) ۷۳
(۲) ۶۸
(۳) ۶۳
(۴) ۵۸

۷۴) مثلثی با اضلاع ۲ و ۳ و $\sqrt{5}$ را حول ضلع بزرگتر دوران می‌دهیم. حجم شکل حاصل کدام است؟

- (۱) $\frac{17\pi}{9}$
(۲) $\frac{19\pi}{9}$
(۳) $\frac{20\pi}{9}$
(۴) $\frac{7\pi}{3}$

۷۵) ارتفاع مخروطی برابر با شعاع قاعده‌ی آن است. اگر مولد مخروط برابر $\sqrt{18}$ و صفحه‌ای به فاصله $\frac{1}{3}$ از قاعده و به موازات آن مخروط را قطع کند، حجم فاصله بین مخروط اولیه و مخروط کوچک چقدر است؟

- (۱) $\frac{17\pi}{4}$
(۲) $\frac{19\pi}{3}$
(۳) $\frac{16\pi}{9}$
(۴) $\frac{17\pi}{9}$

۷۶) کدام یک از گزینه‌های زیر درست است؟

- الف) از خط غیر عمود و متقاطع با صفحه، تنها یک صفحه شامل آن خط، عمود بر آن صفحه می‌توان رسم کرد.
ب) از نقطه‌ای خارج دو خط متناظر حداکثر یک خط متقاطع با دو خط می‌توان رسم کرد.
پ) اگر صفحه‌ای تمام مولدها و محور مخروط را قطع کند، شکل حاصل بیضی، دایره یا نقطه می‌شود.
- (۱) الف - ب
(۲) الف - پ
(۳) ب - پ
(۴) الف - ب - پ

۷۷) دو خط موازی با یک صفحه، خود با هم چه وضعی دارند؟

- (۱) موازی
(۲) متناظر
(۳) متقاطع
(۴) هر سه حالت ممکن است اتفاق بیفتد.

۷۸) دو صفحه‌ی P و Q با هم موازی‌اند. اگر خطوط d_1 و d_2 به ترتیب روی این صفحات واقع شده باشند، وضعیت این دو خط چگونه است؟

- (۱) موازی
(۲) متقاطع
(۳) موازی یا متناظر
(۴) نامشخص

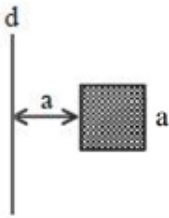
۷۹) دو صفحه‌ی متقاطع P و Q بر صفحه‌ی R عمودند. فصل مشترک این دو صفحه نسبت به R لزوماً چه وضعی دارد؟

- (۱) موازی
(۲) عمود
(۳) متقاطع
(۴) نامشخص

۸۰) دو صفحه‌ی P و Q بر هم عمودند و خط d نیز بر صفحه‌ی P عمود است. این خط نسبت به صفحه‌ی Q لزوماً چه وضعی دارد؟

- (۱) موازی
(۲) متقاطع
(۳) عمود
(۴) نامشخص

۸۱) مطابق شکل از دوران مربعی به ضلع a حول خط d ، جسمی به حجم 24π به دست می‌آید. صفحه‌ای عمود بر d رسم می‌کنیم. مساحت مقطع حاصل از برخورد این صفحه و جسم حاصل کدام است؟



- (۱) 12π
 (۲) 6π
 (۳) 24π
 (۴) 18π

۸۲) دو کره به شعاع‌های ۳ و ۴ و طول خط‌المركزین ۵ مفروضند. مساحت شکل حاصل از برخورد دو کره چه قدر است؟

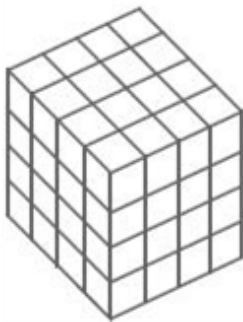
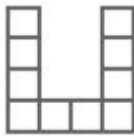
- (۱) $1/44\pi$ (۲) $5/76\pi$ (۳) $12/96\pi$ (۴) $5/29\pi$

۸۳) در یک مکعب به طول یال ۲ واحد، بر انتهای سه یال گذرا بر یک رأس صفحه‌ای می‌گذرد، مساحت مقطع این صفحه

با مکعب چند برابر مساحت کل مکعب است؟

- (۱) $\frac{\sqrt{3}}{6}$ (۲) $\frac{12\sqrt{3}}{7}$ (۳) $\frac{\sqrt{3}}{12}$ (۴) $\frac{\sqrt{3}}{8}$

۸۴) حداقل و حداکثر چند مکعب باید از شکل زیر برداشته شود تا نمای بالای شکل به فرم درآید؟



- (۱) ۲۴ و ۵۴
 (۲) ۱۲ و ۵۴
 (۳) ۱۶ و ۳۶
 (۴) ۲۴ و ۳۶

۸۵) دو خط d و d' بر صفحه P عمودند. اگر خط Δ خط d را قطع کند، وضعیت Δ و d' چگونه است؟

- (۱) موازی (۲) عمود بر هم (۳) متقاطع (۴) غیرمشخص

۸۶) فرض کنید ۲۵ تا مکعب واحد سفید و ۳۹ تا مکعب واحد مشکی داریم. می‌خواهیم توسط همه این مکعب‌های واحد، یک مکعب بزرگ بسازیم، در این صورت حداقل مساحت سطح سفید برابر است با:

- (۱) ۲۴ (۲) ۲۲ (۳) ۱۹ (۴) ۱۷

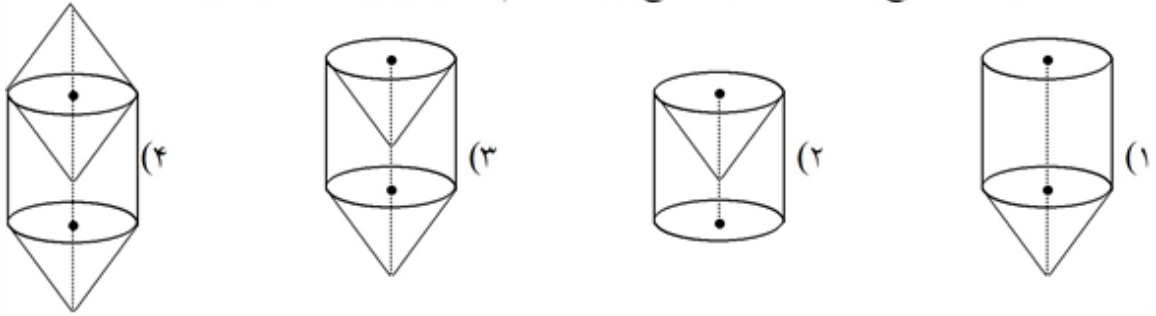
۸۷) کدام مورد درست است؟

- (۱) دو خط عمود بر یک خط موازی هستند.
 (۲) خط موازی با یکی از دو صفحه عمود بر هم، بر صفحه دیگر عمود است.
 (۳) دو صفحه عمود بر یک صفحه، موازی هستند.
 (۴) از نقطه‌ای خارج از یک خط می‌توان بر آن عمود کرد.

۸۸) خط d با صفحه P متقاطع است. وضعیت خط d با خطوط صفحه P کدام است؟

- (۱) متقاطع (۲) متناظر (۳) موازی (۴) متقاطع یا متناظر

۸۹ از دوران متوازی الاضلاع ABCD حول ضلع بزرگ، کدام شکل می تواند حاصل شود؟



۹۰ کدام گزینه ممکن است درست نباشد؟

- (۱) اگر خطی بر صفحه‌ای عمود باشد، بر تمام خطوط صفحه عمود است.
 (۲) اگر خطی بر دو صفحه عمود باشد، آن‌گاه دو صفحه موازی هستند.
 (۳) اگر دو خط بر یک خط عمود باشند، الزاماً موازی نیستند.
 (۴) اگر خطی بر یکی از خطوط صفحه عمود باشد، بر آن صفحه عمود است.

۹۱ خط d و دو نقطه A و B طوری در صفحه قرار دارند که خط گذرنده از A و B بر d عمود است. چند نقطه روی d وجود دارد که از A و B به یک فاصله باشد؟

- (۱) صفر (۲) صفر یا یک (۳) صفر یا بی‌شمار (۴) یک یا بی‌شمار

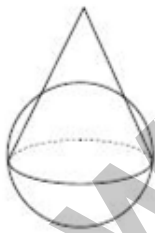
۹۲ در شکل زیر یک مخزن استوانه‌ای به شعاع ۴ و ارتفاع ۱۰ پر از آب است. مکعبی به ضلع ۸ طبق شکل، داخل مخزن فرو می‌رود به طوری که قطر اصلی مکعب موازی ارتفاع استوانه است. حجم آبی که بیرون می‌رود را با V نشان



می‌دهیم، V^2 چند است؟

- (۱) ۳۸۴ (۲) ۲۱۶
 (۳) ۱۹۲ (۴) ۲۲۴
 (۵) ۵۷۶

۹۳ مطابق شکل قاعده مخروط، دایره عظیمه کره بوده و سطح کره مولد مخروط را نصف می‌کند. اگر شعاع کره برابر ۱ باشد، ارتفاع مخروط چند است؟



(۳) $\sqrt{2}$

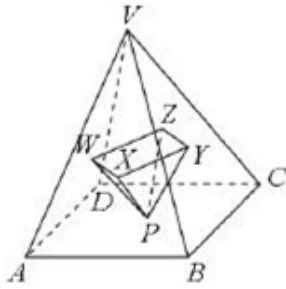
(۲) $\sqrt{\frac{3}{2}}$

(۱) ۱

(۵) ۲

(۴) $\sqrt{3}$

۹۴ در شکل زیر $VABCD$ هرمی با قاعده مربع، نقطه P مرکز قاعده و هرم $PXYZW$ مشابه هرم $VABCD$ بوده و $YW \parallel CD$ و $XZ \parallel BC$ نسبت تشابه هرم کوچکتر به هرم بزرگتر کدام است؟ (X, Y, Z, W روی وجهها هستند.)



$$\frac{1}{2} \quad (3)$$

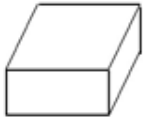
$$\frac{1}{3} \quad (2)$$

$$\frac{1}{1+\sqrt{2}} \quad (1)$$

$$\frac{1}{3+2\sqrt{2}} \quad (5)$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \quad (4)$$

۹۵ در مکعب مستطیل زیر با طول یالهای صحیح، حاصل جمع حجم، مساحت کل و طول همه یالها برابر 2015 می باشد.



$$7\sqrt{19} \quad (3)$$

طول قطر اصلی مکعب مستطیل کدام است؟

$$6\sqrt{19} \quad (2)$$

$$\sqrt{19} \quad (1)$$

$$5\sqrt{19} \quad (5)$$

$$3\sqrt{19} \quad (4)$$

۹۶ در چهاروجهی $ABCD$ می دانیم $AB = 5$, $AC = 3$, $BC = 4$, $BP = 5$, $AD = 3$, $CD = \frac{12\sqrt{2}}{5}$.

حجم این چهاروجهی چند است؟

$$\frac{24}{5} \quad (3)$$

$$2\sqrt{5} \quad (2)$$

$$3\sqrt{2} \quad (1)$$

$$\frac{24}{5} \quad (5)$$

$$3\sqrt{3} \quad (4)$$

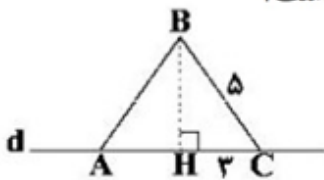
۹۷ مثلث متساوی الساقین ABC را حول خط d دوران می دهیم. حجم شکل حاصل چقدر است؟

$$30\pi \quad (1)$$

$$28\pi \quad (2)$$

$$32\pi \quad (3)$$

$$64\pi \quad (4)$$



۹۸ وجههای یک مکعب شامل 27 مکعب کوچک را رنگ آمیزی کرده ایم. چند مکعب، در 2 وجه رنگ شده اند؟

$$18 \quad (4)$$

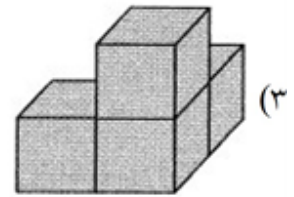
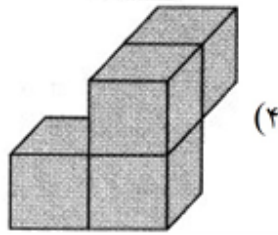
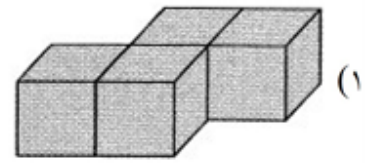
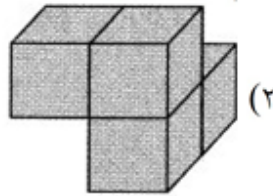
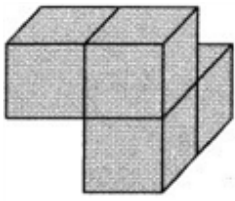
$$12 \quad (3)$$

$$6 \quad (2)$$

$$8 \quad (1)$$

۹۹

هریک از بلوک‌های زیر از ۴ مکعب تشکیل شده است. با کدام بلوک، این مکعب کامل می‌شود؟



۱۰۰

نمای چپ یک استوانه کدام است؟

(۱) دایره (۲) مستطیل

(۳) مثلث (۴) نقطه

۱۰۱

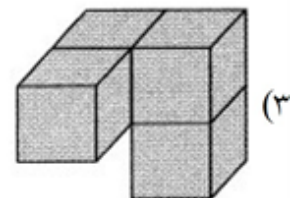
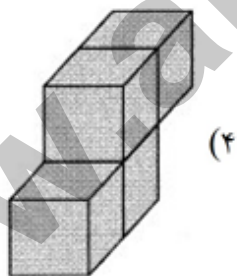
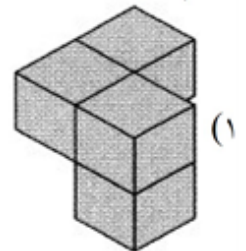
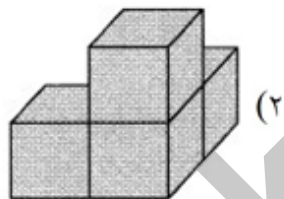
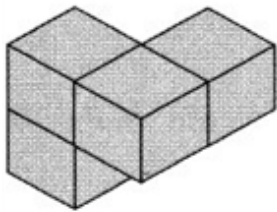
نمای بالای یک مخروط کدام است؟

(۱) مثلث (۲) دایره

(۳) مستطیل (۴) نقطه

۱۰۲

جسم زیر را از جهات مختلف می‌چرخانیم، کدام گزینه همین جسم را نشان می‌دهد؟



۱۰۳

کدام گزینه صحیح است؟

(۱) اگر خطی با صفحه‌ای موازی باشد، با همه‌ی خطوط آن موازی است.

(۲) اگر خطی بر صفحه‌ای عمود باشد، بر همه‌ی خطوط گذرنده از نقطه تلاقی آن عمود است.

(۳) اگر خطی بر یکی از خطوط صفحه عمود باشد، بر آن صفحه عمود است.

(۴) دو صفحه‌ی عمود بر یک صفحه با هم موازی‌اند.

۱۰۴

دو خط d و d' بر هم عمودند. چند خط وجود دارد که بر d عمود و با d' متقاطع باشد؟

(۱) صفر (۲) ۱ (۳) حداکثر ۱ (۴) بی‌شمار

۱۰۵

صفحه‌ی P و نقاط A و B بیرون آن مفروض‌اند. چند صفحه شامل این نقاط و عمود بر P می‌توان رسم کرد؟

(۱) صفر یا بی‌شمار (۲) حداقل ۱ (۳) صفر (۴) بی‌شمار

- ۱۰۶ خط d موازی صفحه‌ی P و عمود بر صفحه‌ی P' موجود است. کدام گزینه لزوماً صحیح است؟
 (۱) P و P' بر هم عمودند.
 (۲) P و P' موازی‌اند.
 (۳) d با فصل مشترک P و P' متقاطع است.
 (۴) d با فصل مشترک P و P' موازی است.

- ۱۰۷ صفحه‌ی P و خط d بیرون آن مفروض است. چند صفحه شامل d و موازی با P می‌توان رسم کرد؟
 (۱) صفر (۲) حداقل ۱ (۳) حداکثر ۱ (۴) بی‌شمار

- ۱۰۸ یک مخروط دوار را با صفحه‌ای موازی قاعده آن طوری قطع می‌دهیم که حجم دو قسمت جدا شده برابر هم باشند. فاصله صفحه قاطع تا صفحه قاعده چند برابر ارتفاع آن است؟

$$\frac{2 - \sqrt[3]{4}}{2} \quad (۱) \quad \frac{2 - \sqrt[3]{2}}{2} \quad (۲) \quad \frac{2 - \sqrt[3]{2}}{3} \quad (۳) \quad \frac{-1 + \sqrt[3]{4}}{3} \quad (۴)$$

- ۱۰۹ اضلاع مکعب مستطیل متناسب با اعداد ۱, ۲, ۳ است. اگر سطح کل آن ۳۵۲ واحد مربع باشد، حجم آن چند واحد مکعب است؟

$$۳۷۲ \quad (۱) \quad ۳۸۴ \quad (۲) \quad ۳۹۶ \quad (۳) \quad ۴۰۸ \quad (۴)$$

- ۱۱۰ در مکعب مفروض، صفحه‌ای بر یک یال و وسط یال دیگر گذشته است. مساحت مقطع حاصل، چند برابر مساحت یکی از وجوه مکعب است؟

$$\frac{\sqrt{5}}{2} \quad (۱) \quad \frac{\sqrt{6}}{2} \quad (۲) \quad \frac{3}{2} \quad (۳) \quad \sqrt{2} \quad (۴)$$

- ۱۱۱ خط d و صفحه‌ی P و نقطه‌ی A در خارج آن دو مفروض است. در رسم خطی گذرا از نقطه‌ی A ، موازی صفحه‌ی P و متقاطع با خط d ، در کدام وضعیت، خط و صفحه مفروض، تنها یک جواب دارد؟
 (۱) الزاماً عمود (۲) منطبق (۳) موازی (۴) متقاطع

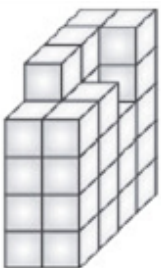
- ۱۱۲ در یک مکعب، صفحه‌ی گذرا بر یک یال و وسط یال دیگر، آنرا به دو قطعه نابرابر تقسیم می‌کند. نسبت حجم‌های این دو قطعه، کدام است؟

$$\frac{1}{4} \quad (۱) \quad \frac{1}{3} \quad (۲) \quad \frac{1}{\sqrt{5}} \quad (۳) \quad \frac{1}{\sqrt{3}} \quad (۴)$$

- ۱۱۳ نقطه‌ی A و خط d و صفحه‌ی P مفروض‌اند. در رسم صفحه‌ای گذرا از نقطه‌ی A ، موازی خط d و عمود بر صفحه P ، در کدام حالت، تعداد جواب‌ها، بی‌شمار است؟
 (۱) $d \cap p = d$ (۲) $d \cap p \neq \emptyset$ (۳) $d \parallel p$ (۴) $d \perp p$

- ۱۱۴ شکل زیر از مکعب‌هایی یکسان ساخته شده است. حداکثر چند مکعب را حذف کنیم تا نمای بالای شکل تغییر نکند؟

$$۲۴ \quad (۱) \quad ۲۸ \quad (۲) \quad ۲۷ \quad (۳) \quad ۲۳ \quad (۴)$$



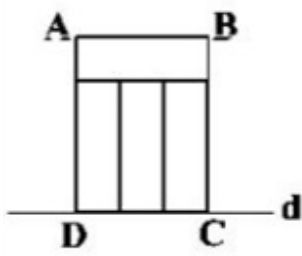
۱۱۵ نقطه M از تمام رأس‌های یک مکعب به طول یال ۱۲ واحد، به یک فاصله است. این فاصله کدام است؟

(۴) $۸\sqrt{۳}$

(۳) $۶\sqrt{۳}$

(۲) ۹

(۱) $۷/۵$



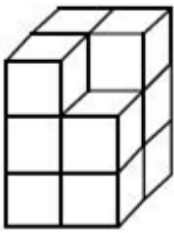
۱۱۶ در شکل زیر، چهار مستطیل یکسان مشاهده می‌شود. اگر چهارضلعی را حول خط d دوران دهیم، حجم حاصل برابر ۶π خواهد بود. محیط یکی از مستطیل‌ها چقدر است؟

(۱) ۲

(۲) ۵

(۳) ۴

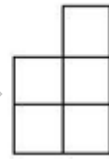
(۴) ۳



۱۱۷ نمای روبه‌روی شکل زیر در کدام گزینه به درستی رسم شده است؟



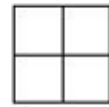
(۲)



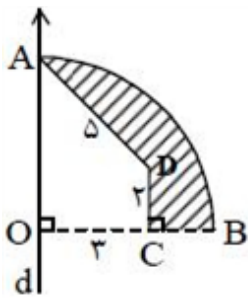
(۱)



(۴)



(۳)



۱۱۸ اگر AOB یک ربع دایره باشد، از دوران قسمت رنگی حول محور d، حجم شکل فضایی ایجاد شده کدام است؟

(۱) ۱۱۲π

(۲) ۱۱۳π

(۳) ۱۱۴π

(۴) ۱۱۵π

۱۱۹ در یک مکعب مستطیل، با امتداد تمام یال‌ها، هر یال با چند یال دیگر متناظر است؟

(۴) ۵

(۳) ۴

(۲) ۳

(۱) ۲

۱۲۰ دو صفحه متقاطع P و P' بر صفحه سومی عمودند. فصل مشترک دو صفحه P و P' با خط عمود بر صفحه سوم کدام وضع را دارد؟

(۱) عمود

(۲) متناظر

(۳) موازی

(۴) نامشخص

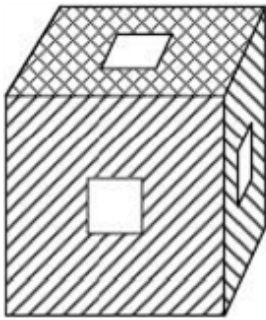
۱۲۱ دو صفحه P_۱ و P_۲ دارای فصل مشترک d می‌باشند. اگر صفحه P' با صفحه P_۱ متقاطع باشد، با صفحه P_۲ چه وضعیتی دارد؟

(۱) موازی است.

(۲) متقاطع است.

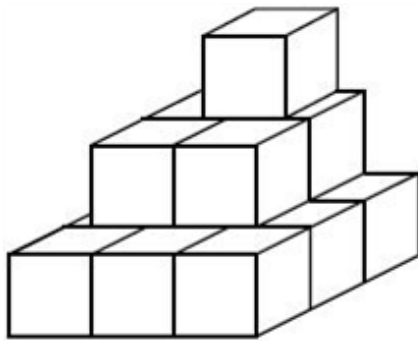
(۳) موازی یا متقاطع است.

(۴) متقاطع با فصل مشترک d است.



۱۲۲ از مکعبی به ابعاد $5 \times 5 \times 5$ ، سه حفره به ابعاد $1 \times 1 \times 5$ مطابق شکل در وسط وجه‌ها ایجاد می‌کنیم. حجم شکل باقی‌مانده چند سانتی‌متر مکعب است؟

- (۱) ۱۱۰
(۲) ۱۱۱
(۳) ۱۱۲
(۴) ۱۱۴



۱۲۳ چهارده مکعب به ضلع ۱ متر مطابق شکل به هم چسبیده‌اند. اگر غیر از قاعده، مابقی قسمت‌های نمایان را رنگ کنیم، برای چند متر مربع باید رنگ تهیه کنیم؟

- (۱) ۳۳
(۲) ۳۶
(۳) ۴۰
(۴) ۴۲

۱۲۴ کدام گزینه صحیح نیست؟

- (۱) از هر نقطه غیر واقع بر یک صفحه، تنها یک خط می‌توان بر صفحه عمود کرد.
(۲) اگر خط d بر صفحه P عمود باشد، تنها یک صفحه از خط d می‌گذرد که بر صفحه P عمود است.
(۳) سه خط دویه دو متقاطع یا هم‌رسند و یا در یک صفحه قرار دارند.
(۴) اگر سه صفحه دویه دو متقاطع باشند، فصل مشترک‌های این سه صفحه یا موازی‌اند یا هم‌رس.

۱۲۵ دو صفحه P و Q بر هم عمود بوده و خط d نیز بر صفحه P عمود است. چند صفحه می‌توان از d گذراند که بر صفحه Q عمود باشد؟

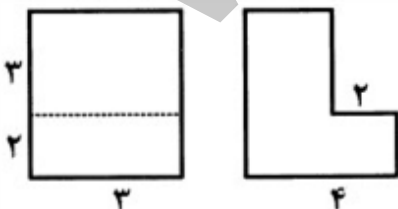
- (۱) صفر
(۲) ۱
(۳) ۲
(۴) بی‌شمار

۱۲۶ نقطه A در خارج خط d و صفحه P مفروض است. در کدام حالت از نقطه A بی‌شمار صفحه عمود بر صفحه P و موازی خط d می‌توان رسم کرد؟

- (۱) $d \parallel P$
(۲) $d \subset P$
(۳) $d \perp P$
(۴) $d \cap P \neq \emptyset$

۱۲۷ حجم حاصل از دوران مثلث قائم‌الزاویه به طول اضلاع قائم $4/5$ و 6 واحد حول وترش، چند واحد مکعب است؟

- (۱) $28/8\pi$
(۲) $32/4\pi$
(۳) $31/5\pi$
(۴) $34/2\pi$



۱۲۸ تصویر قائم و تصویر جانبی جسمی داده شده است. حجم آن کدام است؟

- (۱) ۳۲
(۲) ۳۶
(۳) ۴۲
(۴) ۴۵

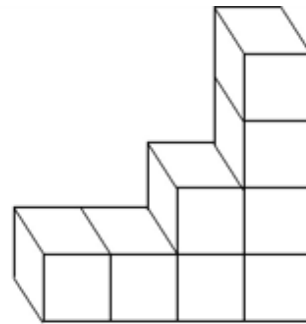
۱۲۹ در یک منشور سه پهلو، چند یال متمایز متناظر با یکی از اضلاع سه ضلعی آن وجود دارد؟

- (۱) ۱
(۲) ۲
(۳) ۳
(۴) ۴

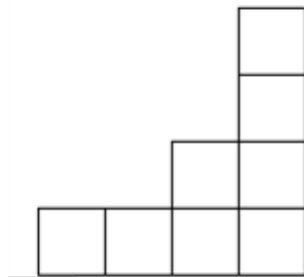
۱۳۰ خط D صفحه‌ی P را در نقطه‌ی A قطع می‌کند و بر آن عمود نیست. چند خط روی صفحه‌ی P از نقطه‌ی A می‌توان رسم کرد که بر خط D عمود باشند؟

- (۱) ۰ (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) نامتناهی

۱۳۱



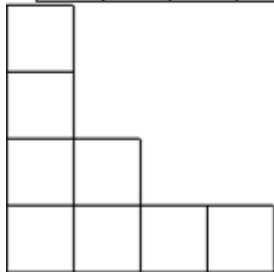
با توجه به شکل کدام گزینه درست است؟



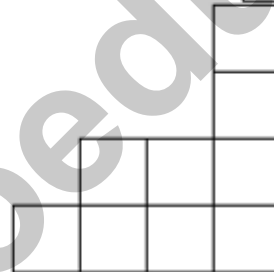
(۲) نمای چپ شکل -



(۱) نمای چپ شکل -

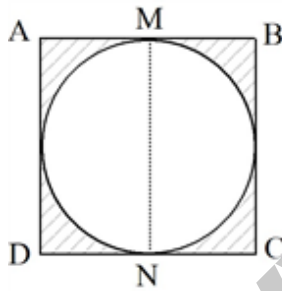


(۴) نمای روبه‌روی شکل



(۳) نمای روبه‌روی شکل

۱۳۲ در شکل روبه‌رو، مربع ABCD به طول ضلع ۴ را حول پاره‌خط MN دوران می‌دهیم. حجم شکل حاصل از دوران قسمت هاشورخورده برابر کدام است؟



(۱) 8π (۲) $\frac{8\pi}{3}$

(۳) 16π (۴) $\frac{16\pi}{3}$

۱۳۳ دو خط موازی D و D' درون صفحه‌ی P قرار دارند و خط Δ با این دو خط متنافر و با صفحه‌ی P متقاطع است. چند خط وجود دارد که سه خط D، D' و Δ را قطع می‌کنند؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۴ (۴) نامتناهی

۱۳۴ از دو خط متمایز L_1 و L_2 ، تنها یک صفحه می‌گذرد. از نقطه‌ی خارج این صفحه چند خط می‌توان رسم کرد که هر دو خط را قطع کند؟

- (۱) دقیقاً یکی (۲) حداکثر یکی (۳) صفر (۴) نامتناهی

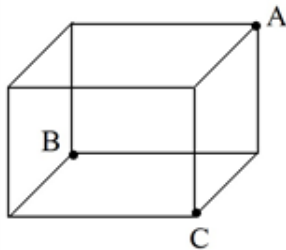
۱۳۵) ارتفاع مخروطی برابر قطر قاعده آن است. اگر سطح جانبی مخروط $۱۶\pi\sqrt{5}$ باشد، مساحت سطح مقطع حاصل از

- برخورد صفحه‌ی افقی که از وسط ارتفاع این مخروط می‌گذرد با مخروط فوق برابر کدام است؟
 (۱) ۹π (۲) ۱۶π (۳) ۴π (۴) ۸π

۱۳۶) از دوران مثلث قائم الزاویه با اضلاع قائمه ۳ و $۳\sqrt{3}$ حول وتر آن چه شکل فضایی به وجود می‌آید؟

- (۱) مخروط با قاعده‌ی به شعاع $۳\sqrt{3}$
 (۲) دو مخروط با قاعده‌ی مشترک به شعاع $۳\sqrt{3}$
 (۳) مخروط با قاعده‌ی به شعاع $\frac{۳\sqrt{3}}{۲}$
 (۴) دو مخروط با قاعده‌ی مشترک به شعاع $\frac{۳\sqrt{3}}{۲}$

۱۳۷) در مکعب شکل مقابل، نسبت مساحت سطح مقطع صفحه‌ی گذرنده از A، B و C به مساحت کل مکعب کدام است؟



- (۱) $\frac{\sqrt{3}}{۲}$
 (۲) $\frac{\sqrt{3}}{۶}$
 (۳) $\frac{\sqrt{3}}{۱۲}$
 (۴) $\frac{\sqrt{3}}{۸}$

۱۳۸) خط D بر دو صفحه‌ی متمایز P و P' عمود است و صفحه‌ی Q صفحه‌ی P را در خط Δ قطع می‌کند. در این صورت کدام گزینه درست است؟

- (۱) Q عمود بر P' است.
 (۲) Q موازی با P' است.
 (۳) Q صفحه‌ی P' را در خطی عمود بر Δ قطع می‌کند.
 (۴) Q صفحه‌ی P' را در خطی موازی با Δ قطع می‌کند.

۱۳۹) از نقطه‌ی A خارج خط L در فضا بی‌شمار خط متقاطع با L و موازی با صفحه‌ی P می‌گذرد. لزوماً کدام نتیجه‌گیری درست است؟

- (۱) $A \in P$ (۲) $L \perp P$ (۳) $L \parallel P$ (۴) $L \subseteq P$

۱۴۰) دو صفحه‌ی متقاطع P و Q بر صفحه‌ی R عمودند. اگر خط d موازی فصل مشترک P و Q باشد، وضعیت خط d نسبت به صفحه‌ی R چگونه است؟

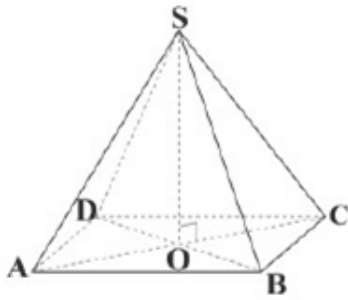
- (۱) عمود (۲) موازی (۳) منطبق (۴) متقاطع

۱۴۱) D و D' دو خط موازی با صفحه‌ی P در فضا هستند. در این صورت

- (۱) D و D' موازیند.
 (۲) D و D' متقاطع‌اند.
 (۳) D و D' لزوماً متناظر یا متقاطع‌اند.
 (۴) D و D' می‌توانند موازی، متقاطع و متناظر باشند.

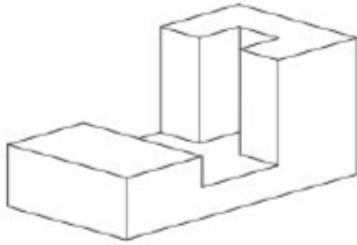
۱۴۲) دو خط d و l در فضا موازی‌اند. اگر خط d را حول l دوران دهیم، فصل مشترک یک صفحه مانند p که با d موازی باشد با سطح دوران یافته، چه شکل‌هایی می‌تواند باشد؟

- (۱) تهی، یک خط، دو خط موازی
 (۲) دو خط موازی، یک صفحه
 (۳) یک خط، یک صفحه، تهی
 (۴) یک خط، دو خط موازی، یک صفحه

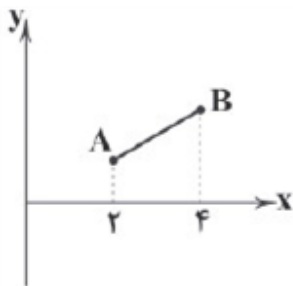
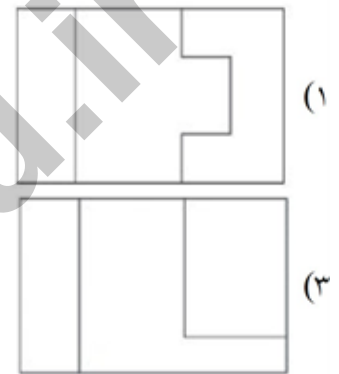
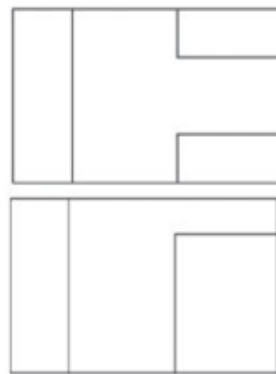


۱۴۳ شکل زیر یک هرم قائم با قاعده‌ی مستطیل است. سطح مقطع حاصل از برش هرم با صفحه‌ی عمود منصف پاره خط BC، چه شکلی است؟

- (۱) مربع
(۲) مستطیل
(۳) ذوزنقه
(۴) مثلث



۱۴۴ نمای بالای تصویر زیر کدام است؟



۱۴۵ پاره خط AB بر خط $y = \frac{x}{2}$ منطبق است. اگر AB را حول محور X دوران دهیم، حجم

جسم حاصل چه قدر است؟

- (۱) $\frac{16\pi}{3}$
(۲) $\frac{14\pi}{3}$
(۳) $\frac{13\pi}{3}$
(۴) $\frac{11\pi}{3}$

۱۴۶ اگر سه صفحه‌ی P، Q و R دو به دو با هم متقاطع باشند، فصل مشترک سه صفحه کدام گزینه نمی‌تواند باشد؟

- (۱) نقطه (۲) خط (۳) صفحه (۴) تهی

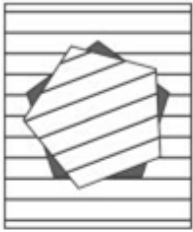
۱۴۷ چه تعداد از جملات زیر صحیح است؟

الف) اگر خطی بر صفحه‌ای عمود باشد، آن‌گاه بر همه‌ی خطوط آن صفحه عمود است.

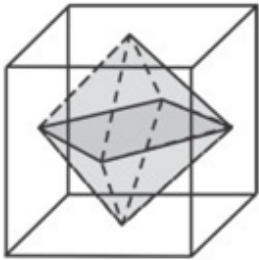
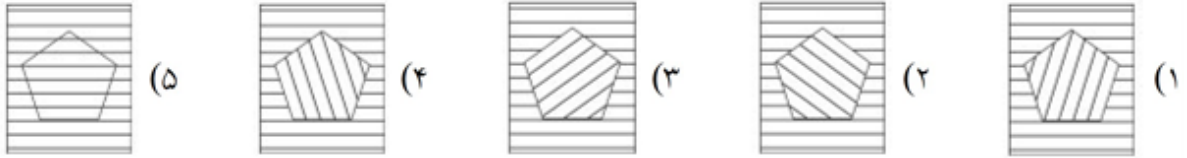
ب) اگر خطی بر دو خط موازی از یک صفحه عمود باشد، بر آن صفحه عمود است.

ج) بر دو خط متقاطع، بی‌شمار خط عمود می‌توان رسم نمود.

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) صفر



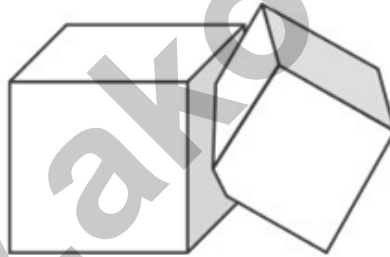
۱۴۸ مطابق شکل، از یک کاغذ خط‌دار یک پنج‌ضلعی منتظم می‌بریم. در هر مرحله، این چند ضلعی را 21° در خلاف جهت عقربه‌های ساعت حول مرکزش می‌چرخانیم. در شکل، وضع را بعد از اولین چرخاندن می‌بینید. وقتی پنج‌ضلعی برای اولین بار در سوراخ قرار می‌گیرد چه شکلی دیده می‌شود؟



۱۴۹ مطابق شکل، یک هشت وجهی داخلی یک مکعب به ضلع ۱ قرار دارد. رأس‌های هشت وجهی مرکزهای وجه‌های مکعب هستند. حجم هشت وجهی چقدر است؟

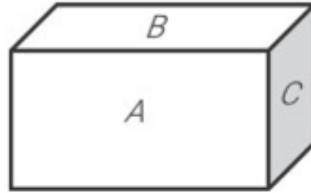
- (۱) $\frac{1}{3}$ (۲) $\frac{1}{4}$ (۳) $\frac{1}{5}$ (۴) $\frac{1}{6}$ (۵) $\frac{1}{8}$

۱۵۰ مطابق شکل، دو مکعب به حجم‌های V و W با هم اشتراک دارند. حجم بخش غیرمشترک مکعب به حجم V برابر است با 90% حجم مکعب و حجم بخش غیرمشترک مکعب به حجم W برابر است با 85% حجم مکعب، V و W چه رابطه‌ای دارند؟



- (۱) $V = \frac{2}{3} W$ (۲) $V = \frac{3}{2} W$ (۳) $V = \frac{85}{90} W$ (۴) $V = \frac{90}{85} W$ (۵) $V = W$

۱۵۱ در شکل، مساحت‌های سه وجه یک کعب از مکعب مستطیل A، B و C هستند. حجم مکعب مستطیل چقدر است؟



$$\sqrt{AB + BC + CA} \quad (۳)$$

$$\sqrt{ABC} \quad (۲)$$

$$ABC \quad (۱)$$

$$۲(A + B + C) \quad (۵)$$

$$\sqrt[۳]{ABC} \quad (۴)$$

۱۵۲ چهار لوزی هم‌نهشت و دو مربع را مطابق شکل کنار هم گذاشته‌ایم و یک هشت‌ضلعی منتظم ساخته‌ایم. اندازه زاویه بزرگ‌تر لوزی چقدر است؟



$$۱۵۰^\circ \quad (۵)$$

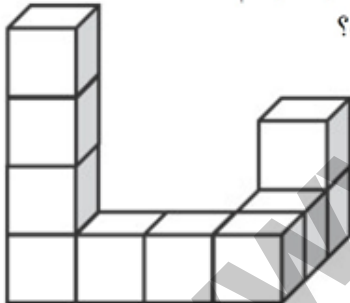
$$۱۴۵^\circ \quad (۴)$$

$$۱۴۴^\circ \quad (۳)$$

$$۱۴۰^\circ \quad (۲)$$

$$۱۳۵^\circ \quad (۱)$$

۱۵۳ سازه شکل زیر را با چسباندن ده مکعب یکجور ساختیم و آن را در سطل رنگ فرو بردیم. تا رنگ کاملاً آن را بپوشاند. چند تا از مکعب‌های کوچک هستند که دقیقاً چهار وجهشان رنگ شده است؟



$$۶ \quad (۱)$$

$$۷ \quad (۲)$$

$$۸ \quad (۳)$$

$$۹ \quad (۴)$$

$$۱۰ \quad (۵)$$

۱۵۴ بهداد با چسباندن چند مکعب یکجور یک مکعب بزرگ درست کرد و بعضی از وجه‌های آن را رنگ کرد. خواهرش، نیلوفر، مکعب را انداخت و مکعب‌های کوچک جدا شدند. معلوم شد که دقیقاً ۴۵ مکعب کوچک هستند که هیچ‌کدام از وجه‌هایشان رنگ نشده است. بهداد چند وجه از مکعب بزرگ را رنگ کرده بود؟

$$۶ \quad (۵)$$

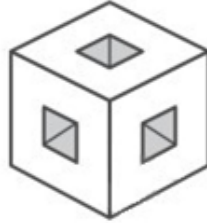
$$۵ \quad (۴)$$

$$۴ \quad (۳)$$

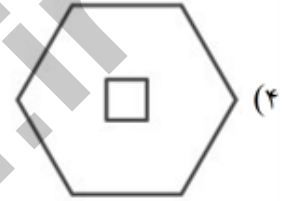
$$۳ \quad (۲)$$

$$۲ \quad (۱)$$

۱۵۵ مطابق شکل، از مکعب $3 \times 3 \times 3$ هفت مکعب کوچک را حذف کرده‌ایم.



این مکعب را با صفحه‌ی گذرنده از مرکز مکعب و عمود بر یکی از چهار قطر بزرگ آن می‌بریم. مقطع چه شکلی است؟



۱۵۶ یک مثلث قائم‌الزاویه را که کوچک‌ترین زاویه‌ی آن α است، یک بار حول ضلع متوسط و یک بار حول کوچک‌ترین ضلع، دوران می‌دهیم. نسبت حجم‌های دو شکل حاصل کدام است؟

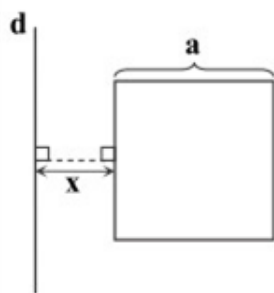
$\sin \alpha \cos \alpha$ (۴)

$\cos \alpha$ (۳)

$\sin \alpha$ (۲)

$\tan \alpha$ (۱)

۱۵۷ مطابق شکل مقابل، مربعی به ضلع a را حول خط d دوران می‌دهیم. اگر $x = \frac{1}{4}a$ و



حجم شکل حاصل از دوران برابر 54π باشد، محیط مربع کدام است؟

۸ (۱)

۱۲ (۲)

۹ (۳)

۱۶ (۴)

۱۵۸ دو خط d_1 و d_2 در فضا با هم متنافر هستند. کدام گزینه درست است؟

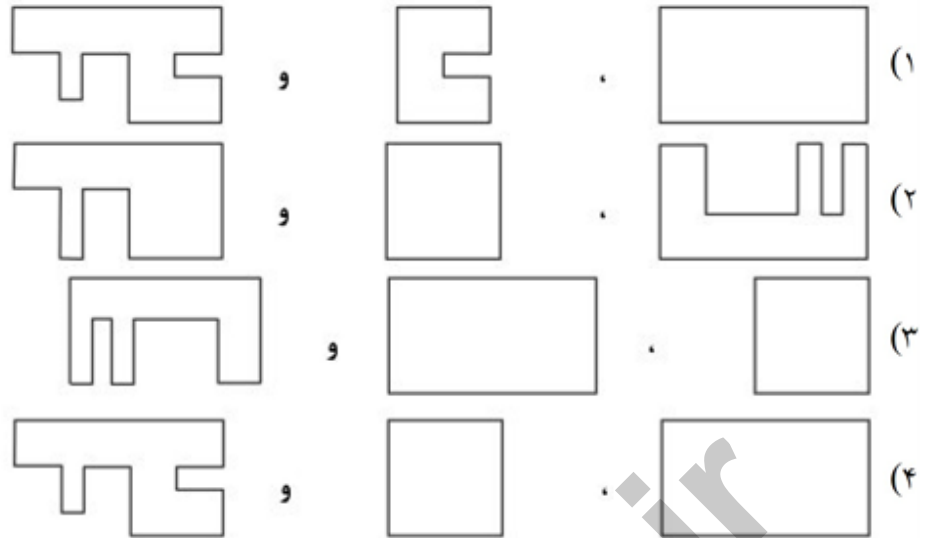
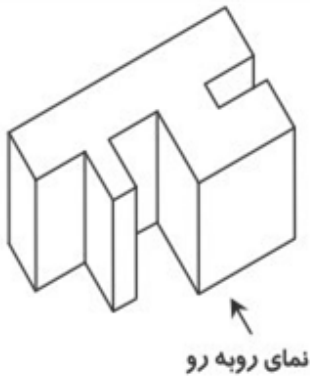
(۱) هر صفحه‌ای مانند P که با d_1 موازی است، با d_2 متقاطع است.

(۲) هر صفحه‌ای مانند P که شامل d_1 باشد، با d_2 متقاطع است.

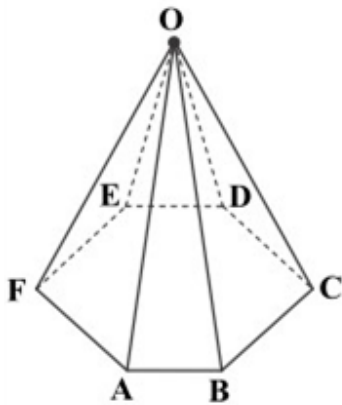
(۳) فقط یک صفحه مانند P وجود دارد که شامل d_1 بوده و با d_2 موازی است.

(۴) هر صفحه‌ای مانند P که با d_1 متقاطع باشد، با d_2 نیز متقاطع است.

۱۵۹ کدام گزینه به ترتیب از راست به چپ نماهای روبه‌رو، چپ و بالای شکل مقابل را درست نشان می‌دهد؟

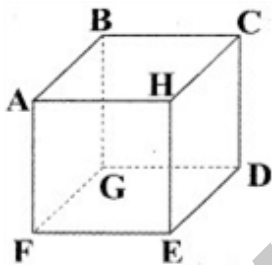


۱۶۰ در هرم شکل مقابل، چند یال با هر دو یال OA و OB متناظر است؟



- (۱) ۶
- (۲) ۲
- (۳) ۳
- (۴) ۴

۱۶۱ در مکعب زیر، خط گذرا از BC با خط گذرا از یال‌ها، متناظر و با خط گذرا از یال‌ها، موازی است. جاهای خالی به ترتیب از راست به چپ کدام‌اند؟



- (۱) ۳ و ۴
- (۲) ۳ و ۲
- (۳) ۲ و ۳
- (۴) ۲ و ۲

۱۶۲ از یک نقطه روی یک خط، چند خط عمود بر آن می‌توان رسم کرد؟

- (۱) صفر
- (۲) ۱
- (۳) ۲
- (۴) بی‌شمار

۱۶۳ حجم حاصل از دوران یک مثلث متساوی‌الاضلاع به ضلع $\frac{\sqrt{3}}{2}$ واحد حول ارتفاع خود کدام است؟

- (۱) $\frac{\pi}{4}$
- (۲) $\frac{\pi}{6}$
- (۳) $\frac{\pi}{3}$
- (۴) $\frac{\pi}{2}$

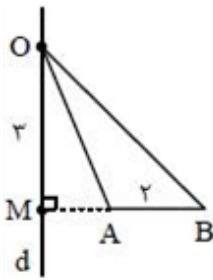
۱۶۴ حجم یک چهارضلعی منتظم به طول یال ۲ کدام است؟

- (۱) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ (۲) $\frac{2\sqrt{2}}{3}$ (۳) $\sqrt{2}$ (۴) $\frac{\sqrt{2}}{3}$

۱۶۵ تمام سطح خارجی یک مکعب $6 \times 6 \times 6$ که از مکعب‌هایی به ضلع $1 \times 1 \times 1$ ساخته شده است را رنگ می‌کنیم.

اگر تعداد مکعب‌هایی که رنگ نشده‌اند، a و تعداد مکعب‌هایی که دو وجه آن‌ها رنگ شده، b و تعداد مکعب‌هایی که سه وجه آن‌ها رنگ شده، c باشد، حاصل $a - b + c$ کدام است؟

- (۱) ۲۸ (۲) ۴۸ (۳) ۲۴ (۴) ۳۰



۱۶۶ در شکل مقابل امتداد AB بر خط d عمود می‌باشد. حجم شکل حاصل از دوران مثلث

OAB حول خط d کدام است؟ ($AM = 1$)

- (۱) 9π (۲) 8π (۳) 24π (۴) 12π

۱۶۷ دو صفحه Q و R بر صفحه P عمودند. کدام گزینه همواره درست است؟

- (۱) خط موازی با صفحه P و عمود بر صفحه Q ، بر صفحه R هم عمود است.
 (۲) خط عمود بر صفحه R ، بر صفحه Q هم عمود می‌باشد.
 (۳) صفحه عمود بر صفحه P با دو صفحه دیگر موازی می‌باشد.
 (۴) خط عمود بر صفحه P با صفحات Q و R موازی می‌باشد.

۱۶۸ در هر مکعب مستطیل، یک یال با چند یال دیگر متناظر می‌باشد؟

- (۱) ۱ (۲) ۳ (۳) ۱ (۴) ۴

۱۶۹ یک کره به شعاع $3k$ را با صفحه‌ای که از مرکز کره به فاصله K است قطع می‌دهیم. نسبت مساحت کره به مساحت

مقطع حاصل کدام است؟

- (۱) ۴ (۲) $4/5$ (۳) ۵ (۴) $16/3$

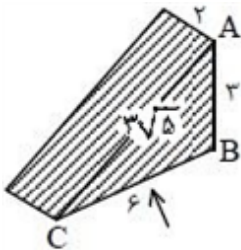
۱۷۰ چه تعداد از موارد زیر همواره درست است؟

- از سه نقطه متمایز فقط یک صفحه می‌گذرد.
- اگر صفحه‌ای با یکی از دو صفحه متقاطع، متقاطع باشد، با دیگری نیز متقاطع است.
- اگر دو صفحه موازی با یک خط باشند، با هم موازی‌اند.
- هر وجه مکعب دقیقاً با ۴ وجه دیگر متقاطع است.

- (۱) ۴ (۲) ۳ (۳) ۲ (۴) ۱

۱۷۱

در منشور مقابل مجموع مساحت‌های نمای بالا و روبه‌رو کدام است؟



$$9 + 6\sqrt{5} \quad (1)$$

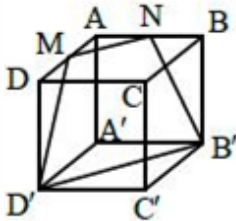
$$18 \quad (2)$$

$$21 \quad (3)$$

$$6 + 6\sqrt{5} \quad (4)$$

۱۷۲

در مکعبی به طول یال ۲ واحد، M و N وسط‌های AD و AB هستند. محیط چهارضلعی MNB'D' کدام است؟



$$2(1 + \sqrt{2} + \sqrt{5}) \quad (1)$$

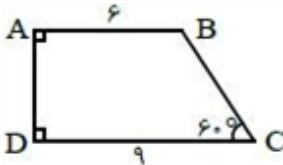
$$3\sqrt{2} + 2\sqrt{5} \quad (2)$$

$$2(\sqrt{2} + \sqrt{5}) \quad (3)$$

$$2 + \sqrt{2} + \sqrt{3} \quad (4)$$

۱۷۳

حجم حاصل از دوران ذوزنقه ABCD حول ساق AD کدام است؟



$$342\pi \quad (2)$$

$$171\sqrt{3}\pi \quad (1)$$

$$513\pi \quad (4)$$

$$342\sqrt{3}\pi \quad (3)$$

۱۷۴

چه تعداد از موارد زیر همواره درست است؟

- دو صفحه متمایز عمود بر یک صفحه همیشه با هم موازی‌اند.
- خط و صفحه عمود بر یک صفحه موازی‌اند و یا خط روی صفحه است.
- اگر خطی بر دو خط متقاطع از صفحه‌ای در محل تقاطع عمود باشد، بر آن صفحه عمود است.
- اگر خطی عمود بر یک صفحه نباشد، از آن خط فقط یک صفحه عمود بر صفحه اول رسم می‌شود.

$$4 \quad (4)$$

$$3 \quad (3)$$

$$2 \quad (2)$$

$$1 \quad (1)$$

۱۷۵

یال AB از مکعبی را در نظر بگیرید. اگر تعداد یال‌هایی از مکعب که با یال AB موازی‌اند را با a، تعداد یال‌هایی که با یال AB متقاطع‌اند را با b و تعداد یال‌هایی که با یال AB متناظرند را با c نمایش دهیم، حاصل $a + 2b + 3c$ کدام است؟

$$24 \quad (4)$$

$$23 \quad (3)$$

$$22 \quad (2)$$

$$21 \quad (1)$$

۱۷۶

مکعبی به ضلع a را به مکعب‌های $1 \times 1 \times 1$ تقسیم کرده‌ایم و سپس تمام وجه‌های مکعب را رنگ آمیزی کرده‌ایم. اگر تعداد مکعب‌های $1 \times 1 \times 1$ رنگ شده ۹۸ باشد، چند مکعب $1 \times 1 \times 1$ وجود دارد که فقط دو وجه آن رنگی شده باشد؟

$$48 \quad (4)$$

$$36 \quad (3)$$

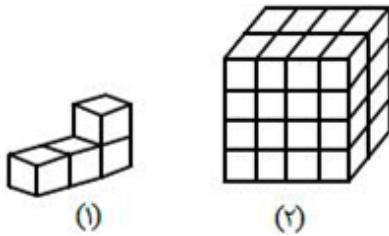
$$24 \quad (2)$$

$$12 \quad (1)$$

۱۷۷

دو صفحه P و Q در خط d مشترک‌اند. کدام گزینه همواره درست است؟

- (۱) اگر خط d'، صفحه P را قطع کند، صفحه Q را هم قطع می‌کند.
- (۲) اگر خط d' با صفحه P موازی باشد، با صفحه Q هم موازی می‌باشد.
- (۳) اگر خط d' با خط d موازی باشد، با صفحه Q موازی یا بر آن منطبق می‌باشد.
- (۴) اگر خط d' با خط d موازی باشد، دو صفحه P و Q را قطع می‌کند.



۱۷۸ برای ساختن شکل (۲)، به چه تعداد از شکل (۱) نیازمندیم؟

(۱) ۱۶

(۲) ۸

(۳) ۱۲

(۴) ۱۰

۱۷۹ یک صفحه و یک استوانه از نظر مجموعه نقاط مشترک آنها، چه حالتی اتفاق نمی‌افتد؟

(۱) بیضی (۲) دایره (۳) مستطیل (۴) دوزنقه

۱۸۰ دو خط d و l در نقطه A با زاویه α متقاطع هستند و خط d حول خط l دوران می‌کند. سطح فضایی حاصل را با

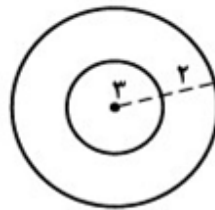
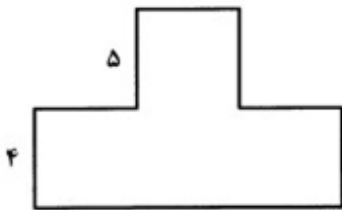
صفحه‌ای عمود بر l با فاصله 4 واحد از نقطه A قطع می‌دهیم. محیط مقطع حاصل کدام است؟

(۱) $4\pi \sin \alpha$ (۲) $8\pi \cos \alpha$ (۳) $8\pi \tan \alpha$ (۴) $4\pi \tan \alpha$

۱۸۱ خط d غیر متقاطع با دو صفحه متقاطع P و Q و نقطه B بر روی فصل مشترک آنها است صفحه‌گذرا بر (d, B) با

دو صفحه مفروض چگونه‌اند؟

(۱) در یک خط مشترک (۲) در یک نقطه مشترک (۳) نقطه مشترک ندارند (۴) بستگی به وضعیت d دارد



۱۸۲ نمای بالا و نمای روبه‌رو از شکلی به صورت زیر است.

حجم این شکل فضایی چند برابر π است؟

(۱) ۱۲۰

(۲) ۱۲۵

(۳) ۱۳۵

(۴) ۱۴۵

۱۸۳ در یک صفحه، از هر نقطه خارج یک خط چند عمود بر آن می‌توان رسم کرد؟

(۱) صفر (۲) ۱ (۳) حداقل ۱ (۴) ۲

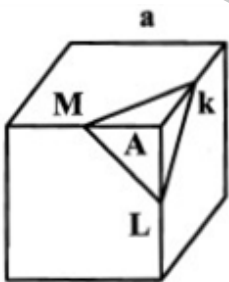
۱۸۴ کدام عبارت نادرست است؟

(۱) دو صفحه عمود بر یک صفحه با هم موازی‌اند.

(۲) دو خط عمود بر یک صفحه با هم موازی‌اند.

(۳) دو صفحه عمود بر یک خط با هم موازی‌اند.

(۴) اگر صفحه‌ای بر یکی از دو خط موازی عمود باشد، بر دیگری نیز عمود است.

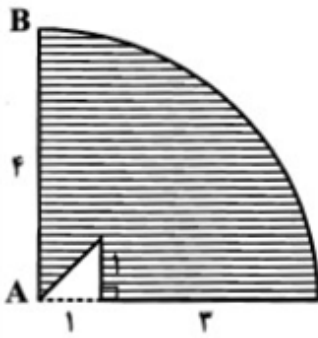


۱۸۵ در شکل زیر، نقاط K و L و M وسط‌های سه یال مکعب‌اند. اگر هرم $AMKL$ را از

مکعب جدا کنیم، از اندازه سطح جانبی مکعب چه مقدار کم می‌شود؟

(۱) $\frac{\sqrt{3}}{8} a^2$ (۲) $\frac{3\sqrt{3}}{8} a^2$

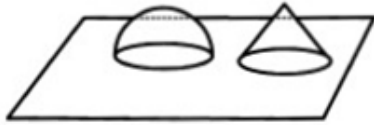
(۳) $\left(\frac{2-\sqrt{2}}{4}\right) a^2$ (۴) $\left(\frac{3-\sqrt{3}}{8}\right) a^2$



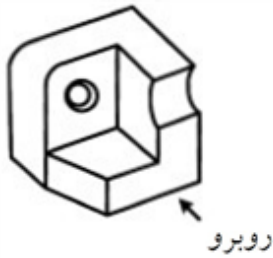
۱۸۶ اگر شکل روبه‌رو را حول شعاع AB دوران دهیم، حجم شکل حاصل، کدام است؟

- (۱) 39π
- (۲) 40π
- (۳) 42π
- (۴) 45π

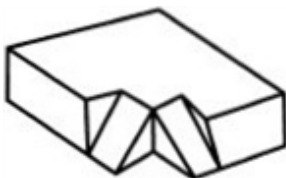
۱۸۷ در شکل زیر، قاعده‌های یک نیم‌کره و یک مخروط با شعاع‌های مساوی روی صفحه P قرار دارند. اگر صفحه‌ای که از رأس مخروط به موازات صفحه P رسم می‌شود بر نیم‌کره مماس باشد. آن‌گاه نسبت حجم نیم‌کره به حجم مخروط، کدام است؟



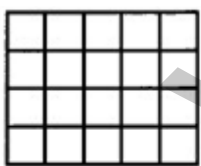
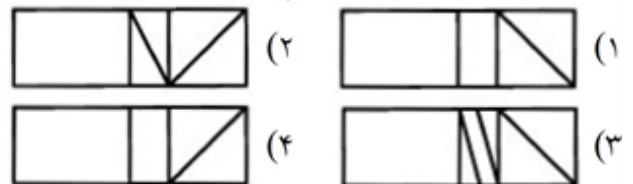
- (۱) ۱
- (۲) ۲
- (۳) $\frac{3}{2}$
- (۴) $\frac{9}{4}$



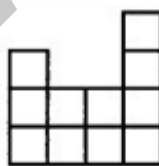
۱۸۸ نمای روبه‌روی شکل مقابل، کدام است؟



۱۸۹ نمای چپ شکل روبه‌رو، کدام است؟



نمای سمت چپ



نمای روبه‌رو

۱۹۰ نمای روبه‌رو و سمت چپ یک حجم فضایی داده شده است. اگر اندازه ضلع هر مربع کوچک یک واحد باشد حجم این شکل فضایی کدام است؟

- (۱) ۴۰
- (۲) ۴۲
- (۳) ۵۵
- (۴) ۴۶

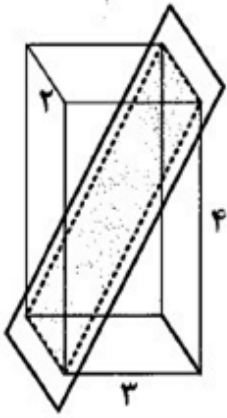
۱۹۱) مساحت مقطع حاصل از برش شکل مقابل کدام است؟

(۱) ۱۰

(۲) $2\sqrt{29}$

(۳) ۲۹

(۴) ۲۰



۱۹۲) صفحه‌ای به فاصله ۴ واحد از مرکز کره‌ای به شعاع ۸ واحد، کره را برش می‌دهد. مساحت قسمت کوچکتر کره به همراه سطح مشترک صفحه و کره چقدر است؟

(۴) $\frac{300\pi}{3}$

(۳) $\frac{272\pi}{3}$

(۲) $\frac{256\pi}{3}$

(۱) $\frac{400\pi}{3}$

۱۹۳) در یک مکعب، زاویه صفحه قطری با یک وجه آن که در یال مکعب مشترک نباشند، چند درجه است؟

(۴) ۳۰

(۳) ۴۵

(۲) ۶۰

(۱) ۹۰

۱۹۴) صفحه‌ای یک مکعب را برش داده است. شکل حاصل کدام نمی‌تواند باشد؟

(۴) مستطیل

(۳) لوزی

(۲) مربع

(۱) مثلث

۱۹۵) مربعی به ضلع a را حول یکی از قطرهایش دوران می‌دهیم، شکل حاصل چگونه است؟

(۱) یک استوانه

(۲) مخروط به شعاع قاعده $\sqrt{2}a$ و ارتفاع $\frac{\sqrt{2}}{2}a$

(۳) یک کره

(۴) مخروط به شعاع قاعده $\frac{\sqrt{2}}{2}a$ و ارتفاع $\frac{\sqrt{2}}{2}a$

۱۹۶) صفحه‌ی P ، خط d و نقطه‌ی A روی خط d مفروض است. چند صفحه‌ی گذرا بر A و d و عمود بر صفحه‌ی P موجود است؟

(۱) یک یا بی‌شمار

(۲) صفر

(۳) بی‌شمار

(۴) صفر، یک یا بی‌شمار

۱۹۷) تحت کدام شرایط دو صفحه‌ی متمایز بر هم عمودند؟

(۱) یک خط از یک صفحه بر یک خط از صفحه‌ی دیگر عمود باشد.

(۲) هر خط موازی با یکی از صفحات، با صفحه‌ی دیگر موازی باشد.

(۳) هر خط عمود بر یک صفحه یا صفحه‌ی دیگر موازی باشد.

(۴) یک خط از یک صفحه بر دو خط متمایز از صفحه‌ی دیگر عمود باشد.

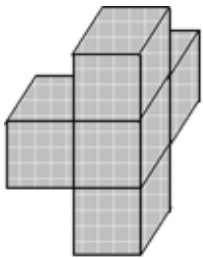
۱۹۸) دو صفحه‌ی P و P' متقاطع‌اند. از نقطه‌ی A خارج این دو صفحه چند خط، موازی هر دو صفحه‌ی P و P' می‌توان رسم کرد؟

(۴) ۱

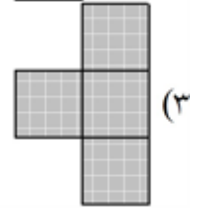
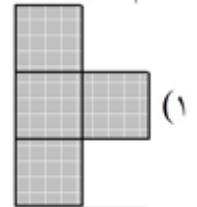
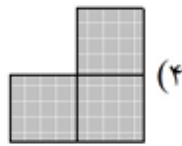
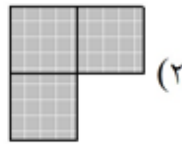
(۳) ۲

(۲) صفر

(۱) بی‌شمار



۱۹۹ جسم زیر را از جهات مختلف نگاه می‌کنیم. کدام شکل نمایی از آن نیست؟



(۴) بیضی

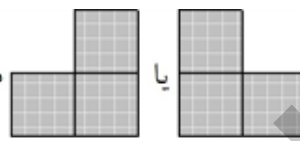
(۳) دایره

۲۰۰ نمای بالای یک مخروط قائم کدام است؟

(۲) نقطه

(۱) مثلث

۲۰۱ نمای یک جسم از هر طرف به صورت



می‌باشد. این جسم از چند مکعب کوچک تشکیل

شده است؟

(۴) ۳

(۳) ۵

(۲) ۴

(۱) ۶

۲۰۲ تمام سطوح خارجی یک مکعب که از ۱۲۵ مکعب واحد ساخته شده راه رنگ می‌کنیم. چند مکعب واحد تنها از دو وجه رنگ شده‌اند؟

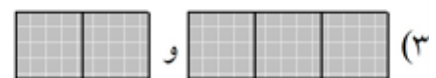
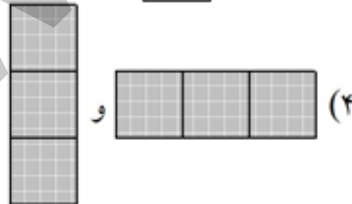
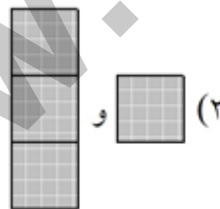
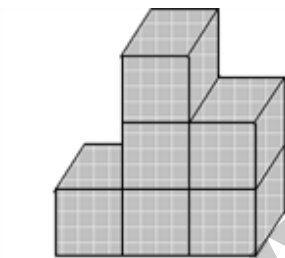
(۴) ۲۴

(۳) ۷۲

(۲) ۱۸

(۱) ۳۶

۲۰۳ نمای بالا و راست از شکل داده شده به ترتیب کدام است؟



۲۰۴ کدام یک از گزینه‌ها لزوماً یک صفحه را معرفی نمی‌کند؟

(۲) دو خط موازی

(۱) سه نقطه

(۴) یک خط و نقطه‌ای خارج آن

(۳) دو خط متقاطع

- ۲۰۵ دو خط d و d' بر صفحه P عمودند. این دو خط نسبت به هم چگونه‌اند؟
 (۱) موازی
 (۲) موازی یا متنافر
 (۳) متنافر
 (۴) لزوماً نمی‌توان تشخیص داد.
- ۲۰۶ در یک مکعب، هر یال با چند یال دیگر متنافر است؟
 (۱) ۱
 (۲) ۲
 (۳) ۳
 (۴) ۴
- ۲۰۷ خط d و صفحه p موازی‌اند. خط L را متقاطع با خط d و عمود بر آن خط در نظر می‌گیریم. وضعیت خط L و صفحه P کدام است؟
 (۱) متقاطع با صفحه P (۲) عمود بر صفحه P (۳) موازی صفحه P (۴) نامعین
- ۲۰۸ دو خط d و d' با هم موازی‌اند. اگر صفحه P خط d را در یک نقطه قطع کند، وضعیت صفحه P با خط d' چگونه است؟
 (۱) منطبق (۲) موازی (۳) متقاطع (۴) متقاطع یا موازی
- ۲۰۹ چهار نقطه A و B و C و D در فضا مفروض است به طوری که امتدادهای AB و CD متنافرند. تصاویر این نقاط بر صفحه P عمود بر خطی که از وسط AC و وسط BD بگذرد، رأس‌های کدام چهارضلعی است؟
 (۱) متوازی‌الاضلاع (۲) لوزی (۳) ذوزنقه (۴) غیر مشخص
- ۲۱۰ در یک هرم منتظم با قاعده مربع، ارتفاع هرم ۴ و ارتفاع مثلث جانبی آن $2\sqrt{7}$ واحد است. حجم این هرم، چند واحد مکعب است؟
 (۱) ۳۶ (۲) ۴۸ (۳) ۵۴ (۴) ۶۴
- ۲۱۱ قاعده P منشور قائم، شش ضلعی منتظم به ضلع ۴ واحد و طول یال قائم آن $7/5$ واحد است. حجم بزرگ‌ترین استوانه که در داخل این منشور جای گیرد، چند برابر π است؟
 (۱) ۷۵ (۲) ۸۴ (۳) ۹۰ (۴) ۱۰۵
- ۲۱۲ در داخل یک استوانه به شعاع قاعده 4 و ارتفاع 6 واحد، بزرگ‌ترین منشور قائم با قاعده مربع، جای گرفته است. حجم این منشور، کدام است؟
 (۱) ۱۷۴ (۲) ۱۸۶ (۳) ۱۹۲ (۴) ۱۹۸
- ۲۱۳ مثلث متساوی‌الساقین ABC ($AB = AC$) در صفحه P است. نقطه M خارج صفحه P است، به طوری که $MA \perp AB$ و $MB = MC$ ، کدام نتیجه‌گیری نادرست است؟
 (۱) $MB \perp BC$ (۲) $MA \perp AC$ (۳) $MA \perp P$ (۴) $MA \perp BC$
- ۲۱۴ در یک چهاروجهی منتظم، هر وجه آن مثلث متساوی‌الاضلاع است. طول هر یال آن $2\sqrt{6}$ واحد است. ارتفاع این هرم، کدام است؟
 (۱) $2\sqrt{2}$ (۲) $2\sqrt{3}$ (۳) ۳ (۴) ۴

۲۱۵ سه صفحه‌ی P ، Q و R دو به دو متعامند. فصل مشترک هر دو صفحه‌ی دلخواه با صفحه‌ی سوم چه وضعیتی دارد؟
 (۱) منطبق (۲) عمود (۳) موازی (۴) منطبق یا موازی

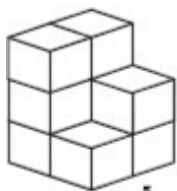
۲۱۶ خط d با صفحه‌ی P متقاطع است و عمود بر هم نیستند. چند صفحه شامل d و عمود بر P وجود دارد؟
 (۱) صفر (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) بی‌شمار

۲۱۷ از هر نقطه بیرون یک صفحه، چند صفحه‌ی موازی آن می‌توان رسم کرد؟
 (۱) صفر (۲) ۲ (۳) ۱ (۴) بی‌شمار

۲۱۸ دو صفحه‌ی P و P' متقاطع‌اند. اگر A بیرون این دو صفحه باشد، چند صفحه شامل A بر هر دو صفحه‌ی P و P' عمود است؟
 (۱) صفر (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) بی‌شمار

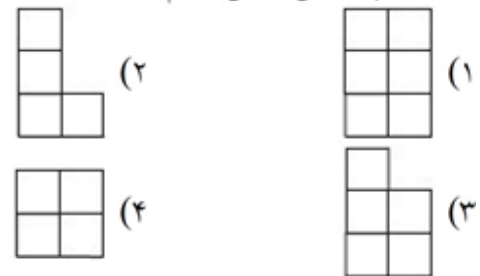
۲۱۹ کدام گزینه، همواره صحیح است؟
 (۱) اگر خط d بر دو خط d' و d'' از صفحه‌ی P عمود باشد، بر P عمود است.
 (۲) اگر خط d از صفحه‌ی P بر خط d' از صفحه‌ی P' عمود باشد، P و P' بر هم عمود هستند.
 (۳) دو خط عمود بر یک خط می‌توانند با هم موازی نباشند.
 (۴) اگر خط d یکی از خطوط موازی را قطع کند، دیگری را هم قطع می‌کند.

۲۲۰ دو خط d_1 و d_2 در فضا با هم موازی‌اند. اگر صفحه‌ی P شامل خط d_1 باشد، در مورد وضعیت صفحه‌ی P و خط d_2 کدام گزینه درست است؟
 (۱) می‌توانند متقاطع یا موازی باشند. (۲) موازی‌اند.
 (۳) d_2 در P قرار دارد. (۴) متقاطع نیستند.



نمای روبه رو

۲۲۱ نمای چپ شکل مقابل کدام است؟



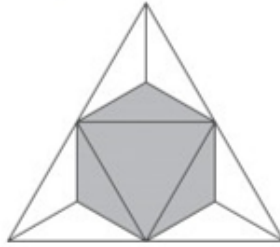
۲۲۲ در فضا از سه خط دوبه‌دو متقاطع، چند صفحه می‌گذرد؟
 (۱) دقیقاً ۱ (۲) ۲ (۳) حداکثر ۳ (۴) بی‌شمار

۲۲۳ از خط d چند صفحه عمود بر صفحه‌ی P می‌توان عبور داد؟
 (۱) همواره یک (۲) همواره بی‌شمار (۳) صفر یا بی‌شمار (۴) یک یا بی‌شمار

۲۲۴ دو صفحه متقاطع P و Q بر صفحه‌ی R عمودند. در مورد فصل مشترک این دو صفحه کدام گزینه درست است؟
 (۱) با تمام خطوط صفحه‌ی R موازی است. (۲) بر تمام خطوط صفحه‌ی R عمود است.
 (۳) داخل صفحه‌ی R است. (۴) با صفحه‌ی R موازی است.

۲۲۵ خط d با صفحه P متقاطع است. خطهای موجود در صفحه P نسبت به خط d چه وضعیتی دارند؟
 (۱) فقط متقاطع (۲) فقط متناظر (۳) متقاطع یا متناظر (۴) موازی یا متناظر

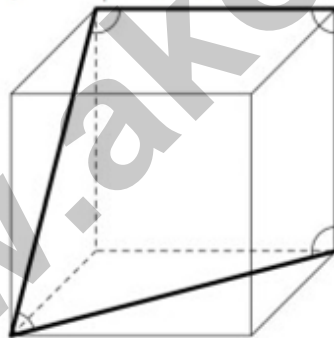
۲۲۶ مطابق شکل، چهاروجهی منتظمی را در نظر بگیرید که هرکدام از کنجهایش را با صفحه‌ای که از وسطهای سه یال آن کنج می‌گذرد بریده‌ایم. حجم جسم به‌دست آمده چه کسری از حجم چهاروجهی اولیه است؟



- (۱) $\frac{4}{5}$ (۲) $\frac{3}{4}$ (۳) $\frac{2}{3}$ (۴) $\frac{1}{2}$ (۵) $\frac{1}{3}$

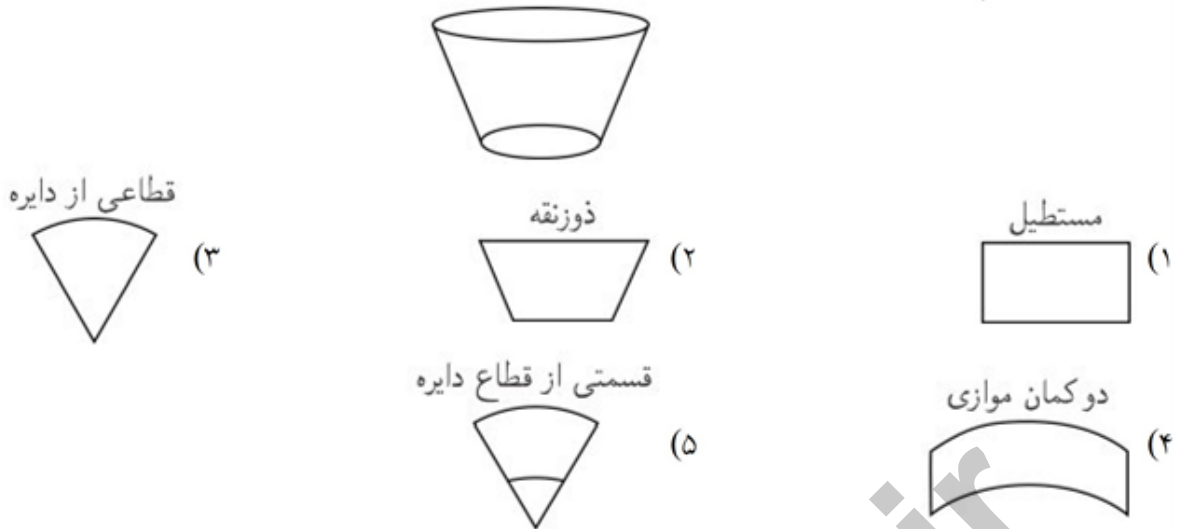
۲۲۷ نقطه‌ای را داخل مکعبی انتخاب کرده‌ایم و با وصل کردن آن به رأسهای مکعب، شش هرم به‌دست آورده‌ایم. حجم پنج هرم از این شش هرم عبارت‌اند از ۲، ۵، ۱۰، ۱۱ و ۱۴. حجم ششم چقدر است؟
 (۱) ۱ (۲) ۴ (۳) ۶ (۴) ۹ (۵) ۱۲

۲۲۸ در شکل مکعبی را نشان داده‌ایم و چهار زاویه را مشخص کرده‌ایم. حاصل جمع این زاویه‌ها چقدر است؟



- (۱) 315° (۲) 330° (۳) 345° (۴) 360° (۵) 375°

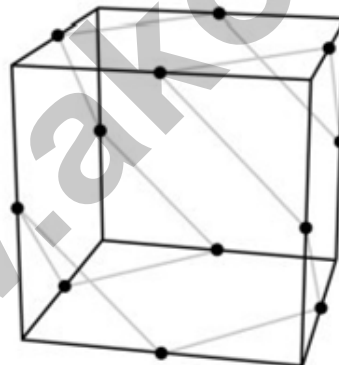
۲۲۹ لیوانی مانند شکل زیر، به شکل مخروط ناقص داریم. می‌خواهیم دیواره‌ی لیوان را با کاغذ رنگی بپوشانیم. باید کاغذ را به چه شکلی ببریم؟



۲۳۰ مورچه‌ای روی یکی از رأس‌های مکعبی به ضلع ۱ است. او می‌خواهد همه‌ی یال‌های مکعب را در کوتاه‌ترین مسیر ممکن طی کند و سر جای اولش برگردد. طول کوتاه‌ترین مسیر چقدر است؟

- (۱) ۱۲ (۲) ۱۴ (۳) ۱۵ (۴) ۱۶ (۵) ۲۰

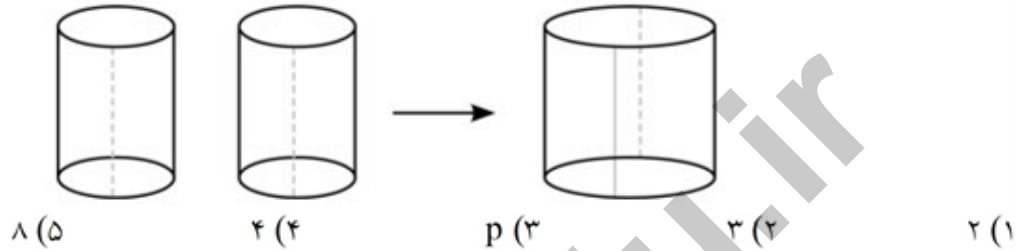
۲۳۱ در شکل زیر، وسط یال‌های مکعبی را به هم وصل کرده‌ایم و یک چند ضلعی ساخته‌ایم. در این چند ضلعی هم مانند هر چند ضلعی دیگری، هر زاویه‌ی داخلی برابر زاویه‌ای است که دو ضلع کنار هم با یکدیگر می‌سازند. مجموع زاویه‌های این چند ضلعی، چند درجه است؟



- (۱) ۷۲۰ (۲) ۱۰۸۰ (۳) ۱۲۰۰ (۴) ۱۴۴۰ (۵) ۱۸۰۰

- ۲۳۲ جعبه‌ای به ابعاد $a \times b \times c$ داریم که $a < b < c$. اگر a ، b یا c را افزایش دهیم، حجم جعبه زیاد می‌شود. در کدام یک از حالت‌های زیر، حجم جعبه بیش‌تر افزایش می‌یابد؟
- (۱) در حالتی که a افزایش یابد.
 - (۲) در حالتی که b افزایش یابد.
 - (۳) در حالتی که c افزایش یابد.
 - (۴) افزایش حجم در هر سه حالت «۱»، «۲» و «۳» یکسان است.
 - (۵) به مقدار a ، b و c بستگی دارد.

- ۲۳۳ مانند شکل زیر، دو استوانه‌ی برابر را از روی نقطه‌چین‌ها می‌بریم. سپس آن‌ها را به هم می‌چسبانیم و یک استوانه‌ی بزرگ‌تر می‌سازیم. نسبت حجم استوانه‌های بزرگ‌تر به حجم استوانه‌های کوچک‌تر برابر است با:

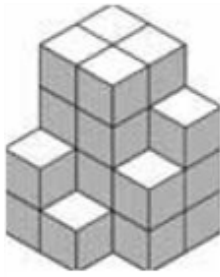


- ۲۳۴ در شکل زیر، گسترده رسم شده، مربوط به کدام شکل است؟
-
- (۱)
 - (۲)
 - (۳)
 - (۴)

- ۲۳۵ مساحت کل منشور قائمی که قاعده آن یک لوزی با زاویه حاده 60° باشد، برابر $32 + 4\sqrt{3}$ است. اگر مجموع ارتفاع و ضلع قاعده این منشور ۶ باشد، طول ارتفاع آن کدام می‌تواند باشد؟
- (۱) $\frac{7}{2}$
 - (۲) $2\sqrt{3}$
 - (۳) ۳
 - (۴) ۴

- ۲۳۶ خطوط متنافر L و L' و نقطه A خارج آن‌ها مفروض‌اند. چند خط از A می‌گذرد که بر L و L' عمود باشد و آن‌ها را قطع کند؟
- (۱) دقیقاً یک
 - (۲) صفر
 - (۳) حداکثر یک
 - (۴) بی‌شمار

۲۳۷ در برش یک مکعب با یک صفحه کدام سطح مقطع نمی‌تواند به وجود بیاید؟
 (۱) دوزنقه (۲) پنج‌ضلعی (۳) شش‌ضلعی (۴) هشت‌ضلعی



۲۳۸ نسبت مساحت نمای چپ به مساحت نمای روبه‌رو در شکل مقابل کدام است؟

- (۱) $\frac{11}{10}$ (۲) $\frac{11}{9}$
 (۳) $\frac{10}{9}$ (۴) ۱

۲۳۹ صفحه P کره‌ای به مرکز O و به شعاع ۱۷ را قطع کرده است. اگر فاصله صفحه P تا مرکز کره برابر ۸ باشد، مساحت سطح مقطع چه قدر است؟

- (۱) 256π (۲) 264π (۳) 20π (۴) 225π

۲۴۰ اگر صفحه P به نیم خط AX و پاره خط BC عمود باشد، چند مورد از گزینه‌های زیر صحیح است؟
 الف- AX و BC متقاطع‌اند.
 ب- AX و BC عمود است.
 پ- AX و BC در یک صفحه قرار دارند.
 ت- AX و BC موازی هستند.

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

۲۴۱ کدام گزینه در فضا همواره صحیح است؟

- (۱) اگر خطی در یکی از دو صفحه موازی باشد، با صفحه دیگر نیز موازی است.
 (۲) از یک نقطه خارج از یک خط می‌توان بی‌نهایت خط به موازات آن رسم نمود.
 (۳) اگر دو خط در دو صفحه موازی قرار داشته باشند، همواره موازی هستند.
 (۴) اگر خطی یکی از دو خط موازی را قطع نماید، دیگری را نیز قطع می‌کند.

۲۴۲ اگر دو خط d_1 و d_2 با خط l موازی باشند، نسبت به هم چه وضعیتی دارند؟

- (۱) موازی (۲) عمود (۳) نامعین (۴) متقاطع

۲۴۳ دو خط l و d متقاطع می‌باشند. چند صفحه وجود دارد که با d موازی باشند و l را قطع کند؟

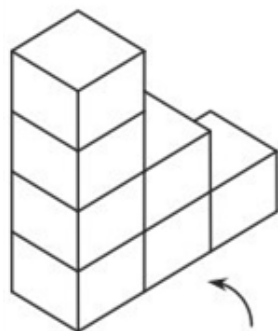
- (۱) بی‌شمار (۲) یک (۳) صفر (۴) دو

۲۴۴ دو خط d و d' با صفحه P موازی هستند. وضعیت نسبی دو خط d و d' چگونه است؟

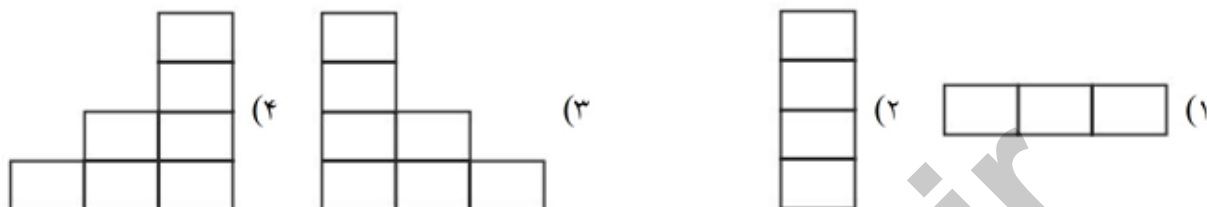
- (۱) موازی‌اند. (۲) متقاطع‌اند. (۳) متناظرند. (۴) وضعیت معینی ندارد.

۲۴۵ صفحه P کره‌ای به مرکز O و شعاع ۵ سانتی‌متر را قطع کرده است. اگر فاصله نقطه O از صفحه P برابر ۳ سانتی‌متر باشد، مساحت این سطح مقطع کدام است؟

- (۱) 25π (۲) 9π (۳) 16π (۴) 64π



نمای روبه‌رو



۲۴۷ L_1 و L_2 دو خط متقاطع و عمود بر هم هستند. اگر P_1 صفحه‌ای شامل L_1 و P_2 صفحه‌ای شامل L_2 باشد،

وضعیت دو صفحه P_1 و P_2 نسبت به هم چگونه نمی‌تواند باشد؟

- (۱) موازی و غیر منطبق (۲) منطبق (۳) متقاطع (۴) عمود بر هم

۲۴۸ اگر A, B, C و D چهار نقطه در فضا باشند که در یک صفحه قرار نداشته باشند، وضعیت AC و BD کدام است؟

- (۱) متقاطع (۲) متنافر (۳) موازی (۴) متقاطع یا موازی

۲۴۹ کدام گزینه درست است؟

- (۱) دو خط عمود بر یک خط، با هم موازی‌اند.
 (۲) دو صفحه عمود بر یک صفحه، با هم موازی‌اند.
 (۳) دو صفحه عمود بر یک خط، با هم موازی‌اند.
 (۴) دو خط که هیچ نقطه مشترکی ندارند، موازی‌اند.

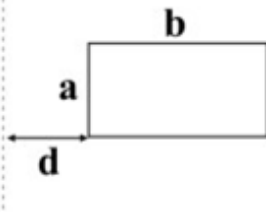
۲۵۰ دو صفحه P و Q بر هم عمودند و خط d نیز بر صفحه P عمود است. این خط نسبت به صفحه Q چه وضعی دارد؟

- (۱) موازی یا منطبق (۲) عمود (۳) متقاطع (۴) عمود یا متقاطع

۲۵۱

L

۲۵۲ از دوران مستطیل زیر، حول خط L یک حجم ایجاد می‌شود. این حجم به چه شکل است؟



- (۱) یک کره
(۲) یک استوانه‌ی توخالی
(۳) یک کره‌ی توخالی
(۴) یک مخروط

۲۵۳ صفحه‌ی P، کره‌ای به مرکز O و شعاع ۱۳ واحد را قطع کرده است. اگر مساحت سطح مقطع حاصل 144π باشد، فاصله‌ی O از صفحه‌ی P چقدر است؟

- (۱) ۲۵ (۲) ۱۰ (۳) ۱۵ (۴) ۵

۲۵۴

۲۵۵

نمای هر طرف یک جسم به صورت یا می‌باشد. این جسم از چند مکعب‌مربع تشکیل

شده است؟
(۱) ۳ (۲) ۴ (۳) ۵ (۴) ۶

۲۵۶ دو صفحه‌ی P و Q بر صفحه‌ی R عمودند. کدام گزینه لزوماً صحیح است؟

- (۱) P و Q با هم موازی‌اند.
(۲) اگر P و Q موازی نباشند، بر هم عمودند.
(۳) اگر P و Q موازی نباشند، فصل مشترکشان بر R عمود است.
(۴) اگر P و Q موازی نباشند، بر هم منطبق‌اند.

۲۵۷ از هر خط غیر واقع بر یک صفحه، چند صفحه می‌گذرد که بر آن صفحه عمود باشد؟
 (۱) یا بی‌شمار (۲) حداکثر ۱ (۳) حداقل ۲ (۴) حداکثر ۲

۲۵۸ از هر نقطه‌ی غیر واقع بر یک صفحه، چند خط می‌توان بر آن صفحه عمود کرد؟
 (۱) صفر (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) بی‌شمار

۲۵۹ دو خط متناظر در فضا مفروض‌اند. چند صفحه وجود دارد که بر هر دو خط عمود باشد؟
 (۱) یک (۲) هیچ (۳) دو (۴) بی‌شمار

۲۶۰ اگر صفحه‌ی P با یکی از دو خط موازی، موازی باشد با خط دیگر چه وضعیتی دارد؟
 (۱) متقاطع یا موازی (۲) موازی (۳) منطبق (۴) موازی یا منطبق

۲۶۱ کدام گزینه نادرست است؟

- (۱) از هر نقطه خارج یک خط، تنها یک خط موازی آن می‌گذرد.
 (۲) از هر نقطه خارج یک صفحه، تنها یک صفحه موازی آن می‌گذرد.
 (۳) از هر نقطه خارج یک خط، بی‌شمار صفحه موازی آن می‌گذرد.
 (۴) از هر نقطه خارج یک صفحه، تنها یک خط موازی آن می‌گذرد.

۲۶۲ D و D' دو خط موازی با صفحه‌ی P هستند. در این صورت

- (۱) D و D' موازی‌اند.
 (۲) D و D' متقاطع نباشند، موازی‌اند.
 (۳) D و D' لزوماً متناظر یا متقاطع‌اند.
 (۴) D و D' می‌توانند موازی، متقاطع یا متناظر باشند.

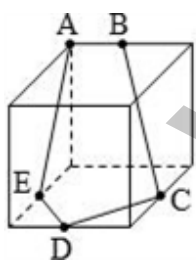
۲۶۳ از داخل یک استوانه‌ی قائم توپُر، به شعاع قاعده‌ی ۴ و ارتفاع ۵ واحد، بزرگ‌ترین مخروط قائم ممکن را حذف می‌کنیم. جسم حاصل را با صفحه‌ای موازی قاعده‌ی مخروط به فاصله‌ی ۳ واحد از آن قطع می‌دهیم. مساحت مقطع حاصل، کدام است؟

- (۱) $10/36\pi$ (۲) $11/28\pi$ (۳) $12/56\pi$ (۴) $13/44\pi$

۲۶۴ منشور دارای ۱۲ وجه می‌باشد. این منشور چند یال دارد؟

- (۱) ۲۴ (۲) ۳۰ (۳) ۴۲ (۴) ۳۶

۲۶۵ در شکل مقابل نقاط B، C، D و E اوساط یال‌های مکعب به ضلع ۴ می‌باشند.



حاصل $AE^2 + ED^2 + BC^2$ برابر کدام است؟

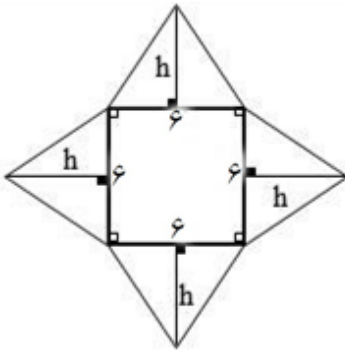
- (۱) ۴۴ (۲) ۵۶ (۳) ۵۲ (۴) ۴۸

۲۶۶ بستنی قیفی زیر از دو قسمت تشکیل شده، بستنی به شکل نیم‌کره در قسمت بالا و قیف به شکل مخروط قائم در قسمت پایین، بستنی به تدریج آب شده و درون قیف می‌ریزد و قسمتی از آن را پر می‌کند. کل بستنی آب شده تا چه ارتفاعی در مخروط بالا می‌آید؟



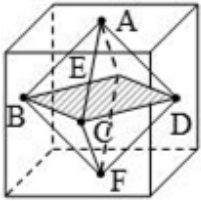
- (۱) $4\sqrt{4}$ (۲) $6\sqrt{2}$ (۳) ۴ (۴) ۶

۲۶۷) ارتفاع مثلث‌ها در شکل مقابل چقدر باشد تا ارتفاع هرم به دست آمده که با تا کردن مثلث‌ها ایجاد می‌شود، ۴ شود؟



- (۱) ۴
(۲) ۵
(۳) ۶
(۴) ۸

۲۶۸) مکعبی به ضلع $2\sqrt{3}$ مفروض است. اگر مرکز تقارن هر کدام از وجه‌های جانبی،



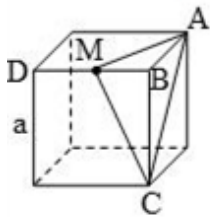
راس‌های یک هشت‌وجهی منتظم باشند، حجم این هشت‌وجهی منتظم کدام است؟

- (۱) $4\sqrt{3}$
(۲) $6\sqrt{3}$
(۳) $8\sqrt{3}$
(۴) $12\sqrt{3}$

۲۶۹) در یک هرم با مساحت قاعده‌ی ۲۷ واحد مربع و ارتفاع ۱۸ واحد صفحه‌ای موازی قاعده، مقطعی به مساحت ۱۲ واحد مربع ایجاد کرده است. فاصله‌ی این صفحه تا سطح قاعده هرم کدام است؟

- (۱) ۴
(۲) ۵
(۳) ۶
(۴) ۷

۲۷۰) در مکعب شکل مقابل نقطه M وسط یال BD قرار دارد. فاصله رأس B تا صفحه مثلث AMC کدام است؟

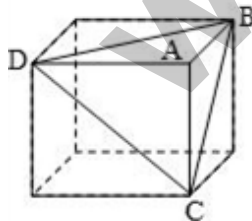


- (۱) $\frac{a}{\sqrt{3}}$
(۲) $\frac{a}{\sqrt{6}}$
(۳) $\frac{a}{3}$
(۴) $\frac{a}{6}$

۲۷۱) در کره‌ای به شعاع R یک مخروط به ارتفاع $\frac{3R}{4}$ محاط شده است. نسبت حجم مخروط به حجم کره کدام است؟

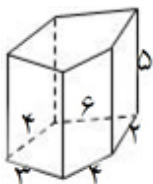
- (۱) $\frac{3}{8}$
(۲) $\frac{9}{32}$
(۳) $\frac{5}{8}$
(۴) $\frac{27}{32}$

۲۷۲) در مکعب مقابل به ضلع a فاصله نقطه A از صفحه BCD چیست؟



- (۱) $\frac{a}{2}$
(۲) $\frac{a}{3}$
(۳) $\frac{a}{\sqrt{3}}$
(۴) $\frac{a}{\sqrt{2}}$

۲۷۳) مساحت جانبی منشور قائم مقابل کدام است؟



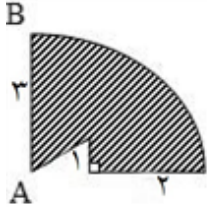
- (۱) ۶۰
(۲) ۷۵
(۳) ۲۴
(۴) ۹۵

۲۷۴ ارتفاع هرم منتظم مربع القاعدهای ۸ و هر ضلع قاعدهی آن ۱۰ سانتیمتر است. مساحت مقطعی که به فاصله‌ی ۴ از رأس می‌گذرد، کدام است؟

- (۱) ۲۰ (۲) ۲۵ (۳) ۵۰ (۴) ۷۵

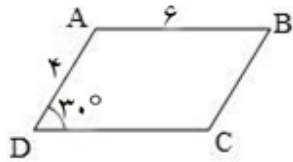
۲۷۵ شعاع کره‌ای محاط در چهاروجهی منتظمی به یال $\sqrt{6}$ کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{2}$ (۲) ۳ (۳) $\frac{3\sqrt{2}}{4}$ (۴) $\frac{\sqrt{3}}{6}$



۲۷۶ اگر شکل روبرو را حول شعاع AB دوران دهیم، حجم شکل حاصل کدام است؟

- (۱) 17π (۲) $\frac{52\pi}{3}$ (۳) $\frac{53\pi}{3}$ (۴) 18π



۲۷۷ اگر متوازی‌اضلاع ABCD را حول DC دوران دهیم،

- آنگاه حجم شکل حاصل کدام است؟
(۱) 24π (۲) 12π (۳) 16π (۴) 28π



۲۷۸ اگر شکل روبرو را که شامل یک مثلث قائم‌الزاویه متساوی‌الساقین و یک مستطیل و یک ربع دایره است، حول AB دوران می‌دهیم. آنگاه حجم شکل حاصل کدام است؟

- (۱) 63π (۲) 47π (۳) 118π (۴) 46π

۲۷۹ منشور قائمی با قاعده مستطیل مفروض است. اگر مجموع طول و عرض این مستطیل ۶ و ارتفاع منشور ۸ باشد، سطح جانبی آن کدام است؟

- (۱) ۴۸ (۲) ۶۰ (۳) ۹۶ (۴) ۷۸

۲۸۰ در مکعب مستطیلی به ابعاد ۱ و ۲ و ۳ تا ارتفاع $\frac{2}{5}$ آب ریخته‌ایم و مکعب مستطیل بر روی کوچک‌ترین وجه قرار دارد. اگر سطحی از مکعب را که روی زمین قرار دارد، تغییر دهیم، ارتفاع آب کدام است؟

- (۱) $\frac{5}{2}$ (۲) $\frac{5}{3}$ یا $\frac{5}{6}$ (۳) $\frac{5}{3}$ یا $\frac{5}{4}$ (۴) $\frac{5}{4}$ یا $\frac{5}{6}$

۲۸۱ کدام گزینه چندوجهی نیست؟
(۱) مکعب مستطیل (۲) هرم (۳) مخروط (۴) منشور

۲۸۲ اگر طول یال یک چهاروجهی منتظم برابر ۱ باشد طول ارتفاع وارد بر یک وجه کدام است؟

(۱) $2 - \sqrt{3}$ (۲) $\sqrt{3} - 1$ (۳) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (۴) $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$

۲۸۳ در هر مکعب زاویه بین یک قطر و قطر وجه که از یک رأس رسم می‌شوند کدام است؟

(۱) $\text{ArcCos} \frac{\sqrt{3}}{2}$ (۲) $\text{ArcCos} \frac{\sqrt{2}}{3}$ (۳) $\text{ArcCos} \frac{\sqrt{6}}{3}$ (۴) $\text{ArcCos} \frac{1}{3}$

۲۸۴ مثلث متساوی‌الاضلاع به ضلع ۴ را حول ارتفاع آن دوران می‌دهیم. حجم جسم حاصل کدام است؟

(۱) $\frac{8\sqrt{3}\pi}{3}$ (۲) $\frac{8\sqrt{3}\pi}{5}$ (۳) $\frac{4\sqrt{3}\pi}{3}$ (۴) $\frac{16\pi}{3}$

۲۸۵ از یک متر مربع مکعبی ساخته‌ایم و از نیم متر مربع نیز مکعب دیگری ساخته‌ایم نسبت حجم این دو مکعب برابر است با:

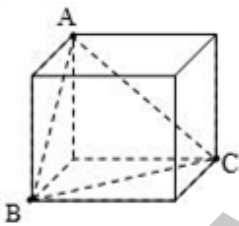
(۱) ۲ (۲) $\sqrt{2}$ (۳) $2\sqrt{2}$ (۴) $4\sqrt{2}$

۲۸۶ در یک چهاروجهی منتظم به ضلع ۲ مساحت کل برابر کدام است؟

(۱) $4\sqrt{3}$ (۲) $2\sqrt{3}$ (۳) $8\sqrt{3}$ (۴) $6\sqrt{3}$

۲۸۷ حجم یک منشور منتظم ۶ ضلعی که اندازه‌ی هر ضلع قاعده‌ی آن ۲ و ارتفاعش نصف محیط قاعده‌ی آن است، کدام می‌باشد؟

(۱) $18\sqrt{3}$ (۲) $36\sqrt{3}$ (۳) $18\sqrt{6}$ (۴) $36\sqrt{2}$



۲۸۸ در مکعب شکل مقابل، اگر مساحت مثلث ABC برابر $\sqrt{3}$ باشد،

آنگاه حجم این مکعب کدام است؟

(۱) ۸ (۲) ۹ (۳) $2\sqrt{2}$ (۴) $3\sqrt{3}$

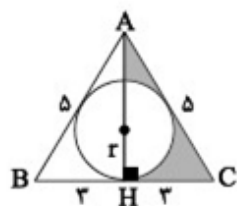
۲۸۹ در چهاروجهی منتظم ABCD نقطه‌ی E وسط یال BC و M مرکز ثقل مثلث ABC می‌باشد. مقدار $\widehat{\text{Cos}} \text{DEM}$ کدام است؟

(۱) $\frac{1}{2}$ (۲) $\frac{1}{3}$ (۳) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ (۴) $\frac{\sqrt{2}}{3}$

۲۹۰ طول ضلع مکعب A برابر قطر مکعب B می‌باشد، نسبت حجم مکعب A به حجم مکعب B چیست؟

(۱) $\sqrt{3}$ (۲) ۹ (۳) ۳ (۴) $3\sqrt{3}$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. کوچک‌ترین ارتفاع مثلث، وارد بر بزرگ‌ترین ضلع آن یعنی قاعده $BC = 6$ است.



$$AH = \sqrt{25 - 9} = 4$$

$$S_{\triangle ABC} = \frac{6 \times 4}{2} = 12$$

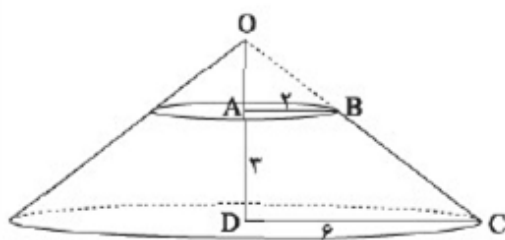
$$\text{محیط} = 2P = 16 \Rightarrow P = 8$$

در ضمن از دوران قسمت هاشور خورده حول ارتفاع AH یک مخروط ایجاد می‌شود که کره‌ای از آن حذف شده است.

$$r = \frac{S}{P} = \frac{12}{8} = \frac{3}{2} \Rightarrow V_{\text{کره}} = \frac{4}{3}\pi \left(\frac{3}{2}\right)^3 = \frac{9}{2}\pi \text{ و } V_{\text{مخروط}} = \frac{1}{3}\pi (3)^2 \times 4 = 12\pi$$

$$\text{حجم فضای بین مخروط و کره} = 12\pi - \frac{9}{2}\pi = \frac{24\pi - 9\pi}{2} = \frac{15}{2}\pi = 7.5\pi$$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است.



مطابق شکل، از دوران ذوزنقه‌ی $ABCD$ حول D یک مخروط ناقص ایجاد می‌شود. برای محاسبه‌ی حجم آن، حجم مخروط بزرگ را منهای حجم مخروط کوچک می‌کنیم.

$$\triangle ODC : AB \parallel DC \Rightarrow \frac{OA}{OD} = \frac{AB}{DC} \Rightarrow \frac{OA}{OA+3} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow 3OA = OA + 3 \Rightarrow OA = \frac{3}{2}$$

$$\text{حجم مخروط بزرگ} = \frac{1}{3}\pi (6)^2 \left(\frac{3}{2} + 3\right) = \frac{1}{3}\pi \times 36 \times \frac{9}{2} = 54\pi$$

$$\text{حجم مخروط کوچک} = \frac{1}{3}\pi (2)^2 \left(\frac{3}{2}\right) = \frac{1}{3}\pi \times 4 \times \frac{3}{2} = 2\pi$$

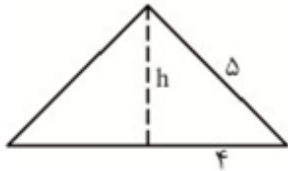
$$\text{حجم مخروط ناقص} = 54\pi - 2\pi = 52\pi$$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. در صورتی که خط گذرا از دو نقطه‌ی A و B بر صفحه‌ی P عمود باشد، مسئله بی‌شمار جواب دارد و اگر خط گذرا از دو نقطه‌ی A و B بر صفحه‌ی P عمود نباشد، مسئله یک جواب دارد.

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. اگر لوزی را حول قطر بزرگ آن دوران دهیم، در این صورت دو مخروط که از قاعده به هم چسبیده‌اند، حاصل می‌شود که این دو مخروط کاملاً یکسان هستند. بنابراین حجم شکل حاصل به صورت زیر خواهد بود:

$$\text{حجم یک مخروط} = \frac{1}{3} \pi (2)^2 \times 3 = 4\pi$$

$$\text{حجم شکل حاصل} = 2 \times 4\pi = 8\pi$$

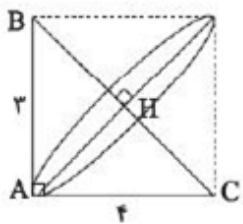


گزینه ۲ پاسخ صحیح است. ارتفاع وارد بر ضلع ۸ کوچک‌ترین و طول آن برابر است با:

$$h = \sqrt{5^2 - 4^2} = 3$$

$$\text{حجم مخروط} = V = \frac{1}{3} \pi r^2 h = 16\pi$$

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. وتر BC برابر ۵ است. دوران حول وتر BC دو مخروط ایجاد می‌کند پس:



$$V_1 = \frac{1}{3} \pi \times AH^2 \times BH + \frac{1}{3} \pi \times AH^2 \times CH \Rightarrow V_1 = \frac{1}{3} \pi AH^2 (BH + CH) = \frac{1}{3} \pi AH^2 \times BC$$

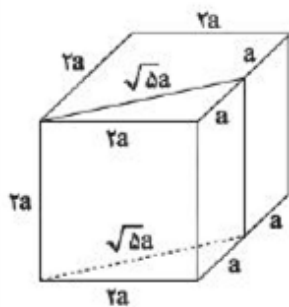
$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} \times 3 \times 4 = \frac{1}{2} \times 5 \times AH \Rightarrow AH = \frac{12}{5}$$

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{\frac{1}{3} \pi \times AH^2 \times BC}{\frac{1}{3} \pi \times AB \times AC} = \frac{AH^2 \times BC}{AB \times AC} = \frac{\frac{144}{25} \times 5}{3 \times 5} \Rightarrow \frac{V_1}{V_2} = \frac{3}{5}$$

۷

گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

برای حل ساده‌تر، ضلع مکعب را $2a$ در نظر می‌گیریم، پس از برش، مکعب به دو منشور با قاعده‌های مثلث و دوزنقه تقسیم می‌شود. مساحت کل یک منشور برابر است با محیط قاعده ضرب در ارتفاع به‌علاوه دو برابر مساحت قاعده آن. در این صورت با توجه به شکل داریم:



$$\frac{S_1}{S_2} = \frac{\text{دوزنقه} \times \text{محیط دوزنقه} + 2S_{\text{دوزنقه}}}{\text{مثلث} \times \text{محیط مثلث} + 2S_{\text{مثلث}}} = \frac{(5a + \sqrt{5}a)2a + 2 \times \frac{1}{2} \times (a + 2a) \times 2a}{(2a + \sqrt{5}a)2a + 2 \times \frac{1}{2} \times 2a \times a}$$

$$\frac{\text{مساحت کل قطعه بزرگتر}}{\text{مساحت کل قطعه کوچکتر}} = \frac{(10 + 2\sqrt{5} + 6)a^2}{(6 + 2\sqrt{5} + 2)a^2} = \frac{16 + 2\sqrt{5}}{8 + 2\sqrt{5}} = \frac{8 + \sqrt{5}}{4 + \sqrt{5}}$$

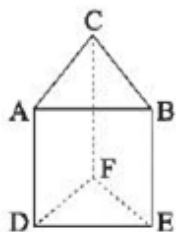
۸

گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

در مجموع ۶۴ مکعب داریم که هر کدام ۶ وجه دارند، پس 64×6 وجه داریم. با توجه به رنگ شدن مکعب اولیه فقط 6×6 وجه رنگ شده است پس:

$$\frac{6 \times 64 - 6 \times 16}{6 \times 16} = \frac{64 - 16}{16} = \frac{48}{16} = 3$$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. در منشور مثلث القاعده شکل مقابل یالهای دو به دو موازی و متناظر عبارتند از:



$(AD, BE), (AD, CF), (BE, CF), (AC, DF), (BC, EF), (AB, DE)$

موازی:

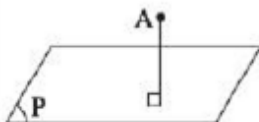
متناظر: هر یک از یالهای AD, BE, CF با دو یال متناظر است مثلاً AD با BC و EF متناظر است.

همچنین هر یک از یالهای قاعده بالایی با دو یال قاعده پایینی متناظر است مثلاً AC با EF و DE متناظر است.

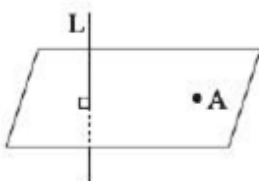
$$n = 3 \times 2 + 3 \times 2 = 12$$

$$n - m = 12 - 6 = 6$$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است.



از نقطه A فقط یک خط بر صفحه P عمود می‌شود، پس گزینه (۱) صحیح است.

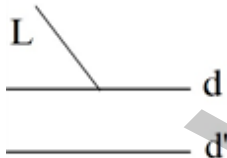


از نقطه A فقط یک صفحه می‌گذرد که بر L عمود باشد، پس گزینه (۲) صحیح است.

اگر دو خط بر یک خط عمود باشند می‌توانند حالات مختلف داشته باشند، پس گزینه (۴) درست است.

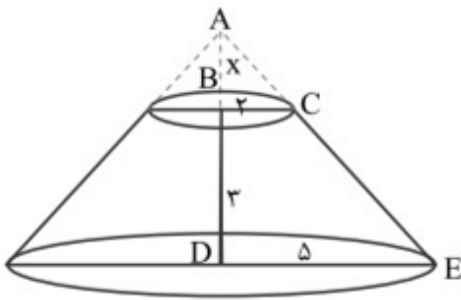


ولی اگر خط L در فضا یکی از دو خط موازی d و d' را قطع کند می‌تواند دیگری را قطع نکند.



گزینه ۳ پاسخ صحیح است. ابتدا در مثلث ADE قضیه تالس را می نویسیم:

۱۱



$$\frac{BC}{DE} = \frac{x}{x+3} = \frac{2}{5} \Rightarrow 2x + 6 = 5x \Rightarrow 3x = 6 \Rightarrow x = 2$$

از دوران دوزنقه حول ساق قائم آن، یک مخروط ناقص پدید می آید که حجم آن به صورت زیر محاسبه می شود:

$$V = \frac{1}{3} \pi \times 5^2 \times 5 = \frac{125\pi}{3}$$

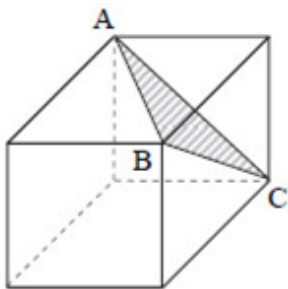
مخروط بزرگ

$$V = \frac{1}{3} \pi \times 2^2 \times 2 = \frac{8\pi}{3}$$

مخروط کوچک

$$V = \frac{125\pi}{3} - \frac{8\pi}{3} = \frac{117\pi}{3} = 39\pi$$

مخروط ناقص



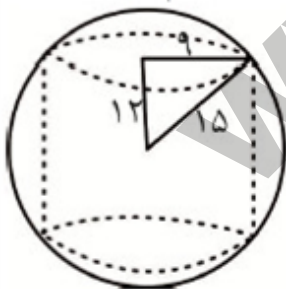
گزینه ۴ پاسخ صحیح است. قطع صفحه ای که از انتهای سه یال گذرا بر یک رأس می گذرد، با مکعب، مثلث ABC خواهد بود.

اضلاع AB و BC و AC قطر وجوه مکعب هستند که طول همه ی آنها برابر $4\sqrt{2}$ خواهد بود یعنی مثلث ABC متساوی الاضلاع است و داریم:

$$S = \frac{\sqrt{3}}{4} a^2 = \frac{\sqrt{3}}{4} (4\sqrt{2})^2 = \frac{\sqrt{3}}{4} \times 32 = 8\sqrt{3}$$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. دوران قسمت هاشورخورده کره ای ایجاد می کند که باید استوانه ای از آن کم شود.

۱۳

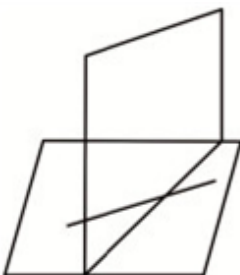


$$V = \frac{4}{3} \pi \times 15^3 - \pi \times 9^2 \times 24 = 2556\pi$$

گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

۱۴

ممکن است که خط موردنظر با صفحه دیگر متقاطع بوده، پس نمی تواند فصل مشترک باشد. چون خط با صفحه متقاطع است، نقطه تقاطع، عضو هر دو صفحه، پس عضو فصل مشترک می باشد، پس خط و فصل مشترک نمی توانند موازی غیر منطبق باشند پس متقاطع هستند.

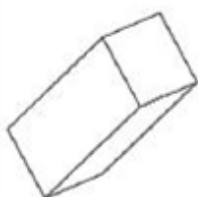
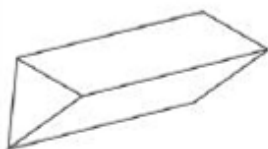
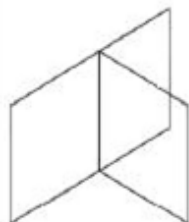


۱۵

- گزینه ۴ پاسخ صحیح است.
- گزینه (۱): نادرست است، زیرا AB و EF در یک صفحه قرار نمی‌گیرند و متنافر هستند.
- گزینه (۲): نادرست است، زیرا AE و BD هر دو در صفحه $ABED$ هستند و متقاطع هستند.
- گزینه (۳): نادرست است، زیرا خط BC و صفحه ADF در نقطه C متقاطع هستند.
- گزینه (۴): درست است، زیرا خط CF بر دو خط FD و FE عمود است، پس بر کل خطوط آن صفحه از جمله DE نیز عمود است.

۱۶

- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.
- مثالی برای گزینه (۱): صفحات مختلف یک کتاب



- مثالی برای گزینه (۲): منشور مثلث القاعده

- مثالی برای گزینه (۴): کنج یک مکعب مستطیل

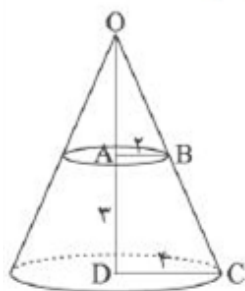
۱۷

- گزینه ۴ پاسخ صحیح است.
- از A خطی موازی d رسم می‌کنیم به نام l . همه صفحات گذرنده از l با خط d موازی هستند.



گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

از دوران دوزنقه قائم‌الزاویه ABCD حول AD یک مخروط ناقص ایجاد می‌شود. (شکل را ببینید).



$$\begin{aligned} \triangle ODC: AB \parallel DC &\Rightarrow \frac{OA}{OD} = \frac{AB}{DC} \Rightarrow \frac{OA}{OA+3} = \frac{2}{4} \\ \xrightarrow{\text{تفضیل در مخرج}} \frac{OA}{3} = \frac{2}{3} &\Rightarrow OA = 2 \end{aligned}$$

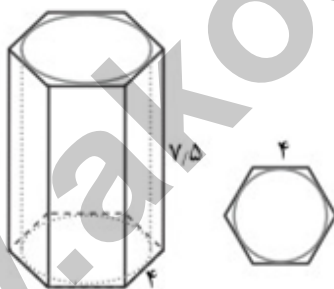
بنابراین:

$$\text{حجم مخروط کوچک} - \text{حجم مخروط بزرگ} = \text{حجم خواسته شده} = \frac{1}{3}\pi(4)^2(6) - \frac{1}{3}\pi(2)^2(3) = 28\pi$$

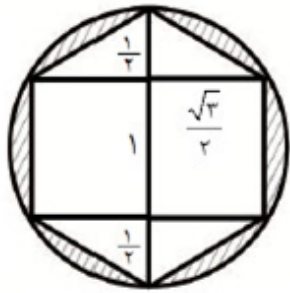
گزینه ۴ پاسخ صحیح است. اگر شکل مقابل را با صفحه‌ای موازی با قاعده‌ی قطع کنیم، آنگاه مقطع حاصل یک

شش ضلعی است که دایره‌ای از آن جدا شده است. قطر این دایره برابر قطر کوچک شش ضلعی و مساوی $4\sqrt{3}$

است. پس مساحت مقطع حاصل برابر است با:



$$\text{مساحت دایره} - \text{مساحت شش ضلعی} = 6 \left(\frac{\sqrt{3}}{4} (4)^2 \right) - \pi (2\sqrt{3})^2 = 24\sqrt{3} - 12\pi$$



گزینه ۳ پاسخ صحیح است. (۲۰)

حجم دو هرم به ارتفاع $\frac{1}{2}$ و شعاع قاعده $\frac{\sqrt{3}}{2}$ و یک استوانه به ارتفاع ۱ و شعاع قاعده $\frac{\sqrt{3}}{2}$ را از حجم کره کم می‌کنیم.

$$\frac{4}{3}\pi \times 1^3 - 2 \times \frac{1}{3} \times \pi \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 \times \frac{1}{2} - \pi \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 \times 1 = \pi \left(\frac{4}{3} - \frac{1}{4} - \frac{3}{4}\right) = \frac{\pi}{3}$$

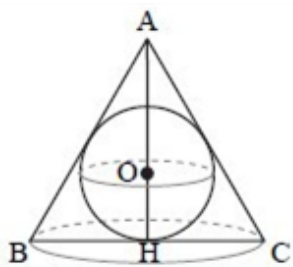
گزینه ۲ پاسخ صحیح است. شکل داده شده از یک مستطیل که نیم دایره‌ای از آن حذف شده، تشکیل شده است. از دوران آن حول خط Δ یک استوانه که از آن کره‌ای جدا شده است، به وجود می‌آید. ارتفاع استوانه ۵ و شعاع قاعده‌ی آن ۲ است و شعاع کره برابر $\frac{3}{2}$ است.

$$\text{حجم استوانه} = \pi R^2 h = \pi (2)^2 (5) = 20\pi$$

$$\text{حجم کره} = \frac{4}{3} \pi R^3 = \frac{4}{3} \pi \left(\frac{3}{2}\right)^3 = \frac{9}{2} \pi$$

بنابراین حجم خواسته شده برابر است با:

$$20\pi - \frac{9}{2} \pi = \frac{31}{2} \pi = 15.5 \pi$$



گزینه ۴ پاسخ صحیح است. از دوران مثلث متساوی‌الاضلاع ABC حول AH یک مخروط و از دوران دایره حول AH یک کره ایجاد می‌شود. پس حجم خواسته شده حجم بین مخروط و کره است.

ارتفاع این مخروط برابر AH و مساوی $\frac{\sqrt{3}}{2} BC = \frac{\sqrt{3}}{2} (2\sqrt{3}) = 3$ است. پس:

$$\text{حجم مخروط} = \frac{1}{3} \pi \left(\frac{BC}{2}\right)^2 AH = \frac{1}{3} \pi (\sqrt{3})^2 (3) = 3\pi$$

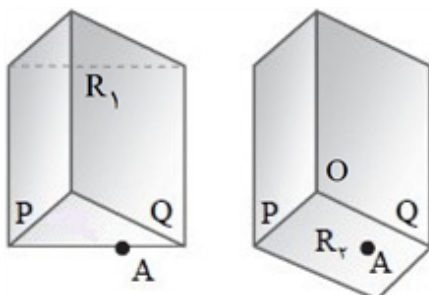
از طرف دیگر O مرکز دایره نقطه‌ی تلاقی میانه‌ها و ارتفاع‌ها و نیم‌سازهای مثلث متساوی‌الاضلاع ABC است پس

$$\text{حجم کره} = \frac{4}{3} \pi R^3 = \frac{4}{3} \pi (1)^3 = \frac{4}{3} \pi$$

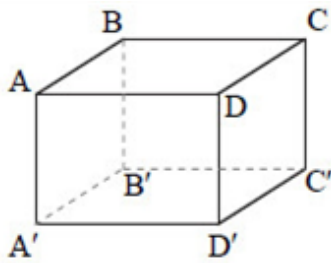
$OH = \frac{1}{3} AH$ در نتیجه $OH = 1$ داریم:

$$3\pi - \frac{4}{3} \pi = \frac{5}{3} \pi$$

بنابراین حجم خواسته شده برابر است با:



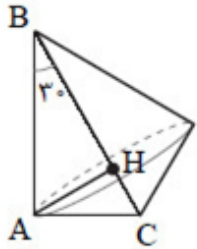
گزینه ۱ پاسخ صحیح است. از نقطه‌ی A دو صفحه می‌گذرد که با صفحات P و Q متقاطع هستند. یکی صفحه‌ی R_1 و دیگری صفحه‌ی R_2 ولی صفحه‌ی R_3 قابل قبول نیست. زیرا R_3 از نقطه‌ی مشترک سه صفحه یعنی از O می‌گذرد. پس این سؤال فقط یک جواب دارد آن هم صفحه‌ی R_1 .



گزینه ۳ پاسخ صحیح است. در مکعب مستطیل شکل مقابل یال AB با یال‌های DD' و CC' و $B'C'$ و $A'D'$ متناظر است. پس هر یال مکعب مستطیل با چهار یال دیگر متناظر است.

۲۴

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. در مثلث قائم‌الزاویه‌ی ABC فرض کنید $\hat{B} = 30^\circ$ و $BC = 8$ داریم:



$$\hat{B} = 30^\circ \Rightarrow AC = \frac{BC}{2} = \frac{8}{2} = 4$$

$$\hat{C} = 60^\circ \Rightarrow AB = \frac{\sqrt{3}}{2} BC = 4\sqrt{3}$$

اگر ارتفاع AH را رسم کنیم آن‌گاه مثلث ABC به دو مثلث قائم‌الزاویه‌ی ABH و ACH تقسیم می‌شود. پس از دوران ABC حول وترش دو مخروط با شعاع قاعده‌ی AH و ارتفاع‌های BH و CH تقسیم می‌شود داریم:

حجم مخروط دوم + حجم مخروط اول = حجم خواسته شده

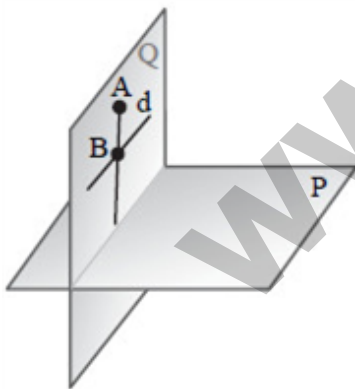
$$= \frac{1}{3}\pi(AH)^2(BH) + \frac{1}{3}\pi(AH)^2(CH) = \frac{1}{3}\pi(AH)^2(BC)$$

حال AH را از رابطه‌ی زیر به دست می‌آوریم:

$$AH \times BC = AB \times AC \Rightarrow AH \times 8 = 4 \times 4\sqrt{3} \Rightarrow AH = 2\sqrt{3}$$

$$\text{حجم خواسته شده} = \frac{1}{3}\pi(2\sqrt{3})^2(8) = 32\pi$$

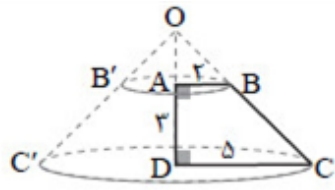
بنابراین:



گزینه ۱ پاسخ صحیح است. اگر $d \parallel P$ و $Q \cap P \neq \emptyset$ باشد آن‌گاه هر خط که از A بگذرد و خط d را در B قطع کند آن‌گاه ممکن نیست AB موازی صفحه‌ی P باشد. زیرا اگر AB موازی صفحه‌ی P باشد آن‌گاه دو خط متقاطع AB و d موازی صفحه‌ی P هستند.

پس باید دو صفحه‌ی P و Q موازی باشند که خلاف فرض $Q \cap P \neq \emptyset$ است.

۲۶



گزینه ۳ پاسخ صحیح است. از دوران دوزنقه قائم‌الزاویه $ABCD$ حول ساق قائم AD یک مخروط ناقص ایجاد می‌شود. با ادامه دادن ساق‌های BC و $B'C'$ این مخروط ناقص به یک مخروط قائم تبدیل می‌شود.

برای پیدا کردن حجم مخروط ناقص کافی است حجم مخروط کوچک‌تر را از حجم مخروط بزرگ‌تر کم کنیم. برای این کار ابتدا ارتفاع OA مخروط کوچک را به دست می‌آوریم:

$$\triangle ODC : AB \parallel DC \xrightarrow{\text{تالس}} \frac{OA}{OD} = \frac{AB}{DC} = \frac{2}{5} \xrightarrow{\text{تفضیل از مخرج}} \frac{OA}{AD} = \frac{2}{3} \Rightarrow \frac{OA}{3} = \frac{2}{3} \Rightarrow OA = 2$$

$$\text{حجم مخروط بزرگ} = \frac{1}{3}sh = \frac{1}{3}\pi(5)^2(5) = \frac{125}{3}\pi$$

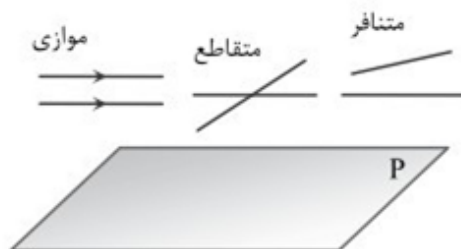
$$\text{حجم مخروط کوچک} = \frac{1}{3}s'h' = \frac{1}{3}\pi(2)^2(2) = \frac{8}{3}\pi$$

$$\text{حجم مخروط ناقص} = \frac{125\pi}{3} - \frac{8\pi}{3} = \frac{117\pi}{3} = 39\pi$$

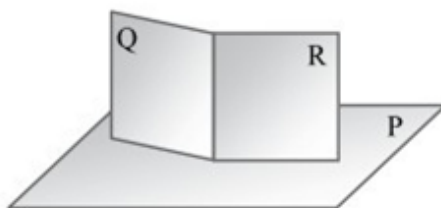
www.akoedu.ir

گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

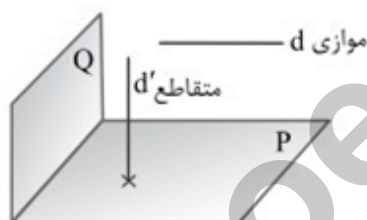
گزینه ۱: دو خط موازی با یک صفحه می‌توانند متقاطع یا متناظر یا موازی باشند.



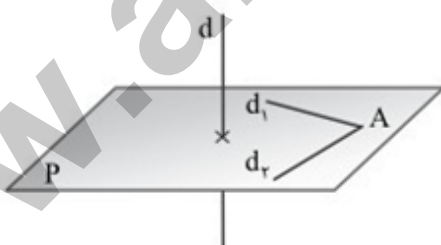
گزینه ۲: دو صفحه‌ی عمود بر یک صفحه می‌توانند موازی یا متقاطع باشند:



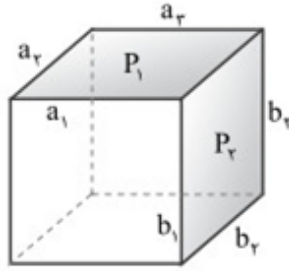
گزینه ۳: خط موازی با یکی از دو صفحه‌ی متعامد، می‌تواند با دیگری موازی یا متقاطع باشد:



گزینه ۴: مطابق شکل صفحه‌ی P از A گذشته و بر d عمود شده است. بنابراین تمام خطوط گذرنده از A و عمود بر d روی صفحه‌ی P قرار دارند و بی‌شمار هستند.



گزینه ۲ پاسخ صحیح است. در شکل روبه‌رو دو وجه P_1 و P_2 متقاطع‌اند، که در یک یال مشترک می‌باشند، یال مشترک را حذف کرده، به شرح زیر داریم:



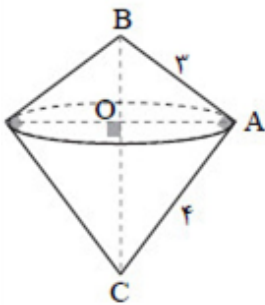
یال‌های متنافر عبارت‌اند از:

$$\{a_1, b_2\}, \{a_1, b_3\}, \{a_2, b_3\}, \{a_2, b_1\}, \{a_3, b_1\}, \{a_3, b_2\}$$

$$\text{تعداد یال‌های متنافر} = 2 + 2 + 2 = 6$$

بنابراین:

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. اگر مثلث قائم‌الزاویه را حول وتر آن دوران دهیم، دو مخروط هم قاعده به صورت روبه‌رو پدید می‌آید، که برای حجم آن داریم:



$$\begin{cases} \hat{A} = 90^\circ \\ AB = 3, AC = 4 \end{cases} \Rightarrow BC = 5$$

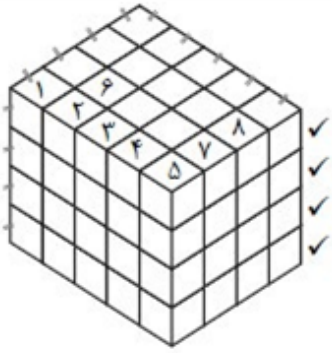
پس با استفاده از رابطه‌ی طولی در مثلث قائم‌الزاویه می‌نویسیم:

$$BC \times OA = AB \times AC \Rightarrow 5OA = 12 \Rightarrow OA = \frac{12}{5}$$

فرض کنید مساحت دایره به شعاع OA را برابر s در نظر بگیریم؛ آن‌گاه داریم:

$$v = v_1 + v_2 \Rightarrow \begin{cases} v_1 = \frac{1}{3}s \times OB \\ v_2 = \frac{1}{2}s \times OC \end{cases} \Rightarrow v = \frac{1}{3}s(BO + OC)$$

$$\Rightarrow v = \frac{1}{3}s \times BC = \frac{1}{3}\pi(OA)^2 \times 5 = \frac{1}{3}\pi \times \left(\frac{12}{5}\right)^2 \times 5 \Rightarrow \left(\frac{1}{3} \times \frac{144}{5} \times \frac{12}{5} \times \phi\right) \pi = \frac{48}{5}\pi = 9.6\pi$$



گزینه ۱ پاسخ صحیح است. برای آن که نمای بالای شکل به صورت داده شده بشود باید مکعب‌های شماره‌گذاری شده را حذف کنیم.

m حداقل تمام مکعب‌های غیرشماره‌دار و مکعب‌های زیر آن‌ها برداشته شود:

$$m = (12) \times 4 = 48$$

M حداکثر، مکعب‌هایی که باید حذف شود

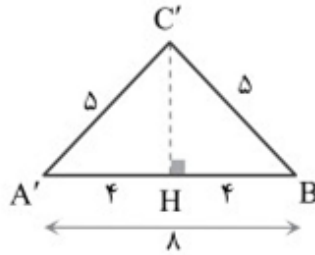
M = مکعب‌های شماره‌دار - کل مکعب‌ها

$$M = 5 \times 4 \times 4 - 8 = 72$$

$$M + m = 72 + 48 = 120$$

اکنون حاصل $M + m$ به صورت:

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. صفحه‌ی گذرنده از B و $A'C'$ ، مقطع مثلث $A'BC'$ را به وجود می‌آورد. داریم:



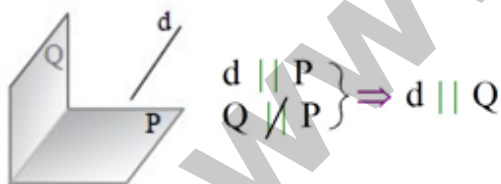
$$\triangle BB'C' : BC'^2 = 3^2 + 4^2 \Rightarrow BC' = 5, \quad A'C' = 5$$

$$\triangle AA'B' : A'B^2 = (4\sqrt{3})^2 + 4^2 = 48 + 16 = 64 \Rightarrow A'B = 8$$

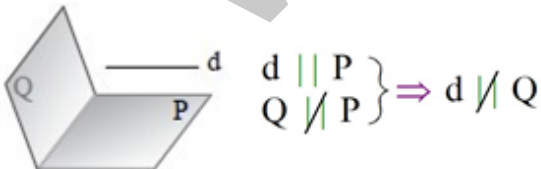
$$\triangle A'C'B : C'H^2 = 5^2 - 4^2 \Rightarrow C'H = 3$$

$$S_{\triangle A'C'B} = \frac{1}{2} \times 3 \times 8 = 12$$

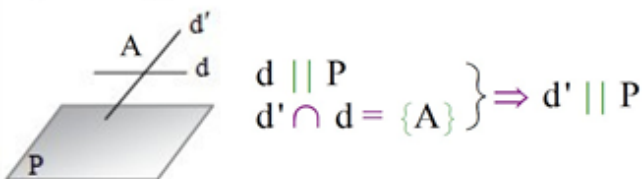
گزینه ۱ پاسخ صحیح است. به نادرستی گزینه‌های دیگر توجه کنید:



گزینه‌ی ۲ غلط است: شکل روبه‌رو را ببینید.

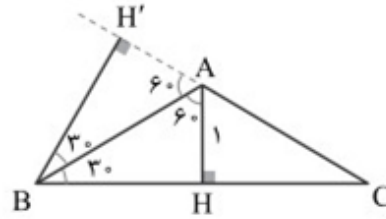


گزینه‌ی ۳ غلط است: شکل روبه‌رو را ببینید.



گزینه‌ی ۴ غلط است: شکل روبه‌رو را ببینید.

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. از دوران مثلث ABC حول ارتفاع BH' دو مخروط بزرگ و کوچک ایجاد می‌شود به طوری که BH' ارتفاع هر دوی آنها و CH' و AH' شعاع قاعده‌ی آنها است.



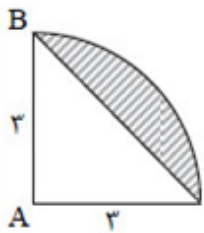
$$\triangle ABH : \sin 30^\circ = \frac{AH}{AB} \Rightarrow AB = AC = 2$$

$$\triangle ABH' : \sin 60^\circ = \frac{BH'}{AB} \Rightarrow BH' = \sqrt{3}$$

در ضمن در مثلث قائم‌الزاویه ABH' ضلع AH' روبه‌روی زاویه‌ی 30° درجه است. پس نصف AB و برابر یک است. بنابراین $CH' = 3$ داریم.

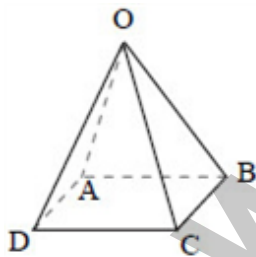
$$\text{حجم مخروط کوچک} - \text{حجم مخروط بزرگ} = \frac{1}{3} \pi \times 3^2 \times \sqrt{3} - \frac{1}{3} \pi \times 1^2 \times \sqrt{3} = \frac{8\sqrt{3}}{3} \pi$$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. از دوران شکل حول AB یک نیم‌کره که مخروطی از آن جدا شده است به وجود می‌آید. داریم:



$$V_{\text{جسم}} = V_{\text{نیمکره}} - V_{\text{مخروط}} = \frac{2}{3} \pi R^3 - \frac{1}{3} \pi R^2 h$$

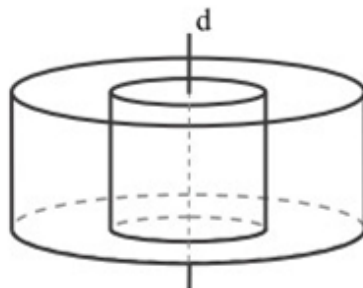
$$= \frac{2}{3} \pi \times 27 - \frac{1}{3} \pi \times 9 \times 3 = 18\pi - 9\pi = 9\pi$$



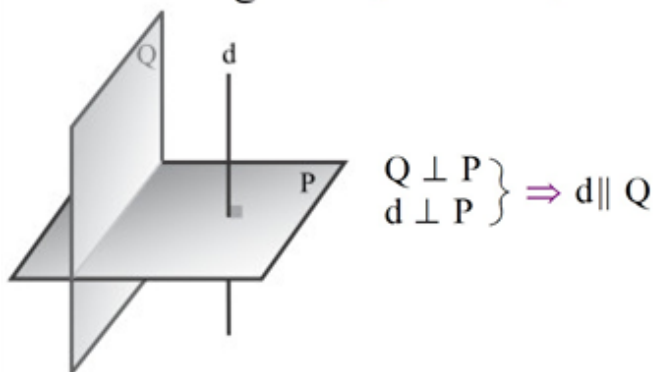
گزینه ۳ پاسخ صحیح است. هر یال مانند OA یا OB یا OC یا OD که صفحه‌ی $ABCD$ را قطع می‌کند، با دو یال از $ABCD$ متناظر می‌باشد (مثلاً OA با BC و CD متناظر است). هر ضلع $ABCD$ با دو یال از بین یال‌های OA و OB و OC و OD متناظر است. با حذف حالت‌های تکراری، مجموعاً ۸ جفت یال متناظر می‌توان یافت. که عبارتند از:

$$(OA, BC), (OA, DC), (OB, DC), (OB, AD), (OC, AB), (OC, AD), (OD, AB), (OD, BC)$$

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. شکل حاصل فضای بین دو استوانه‌ای درون هم است.



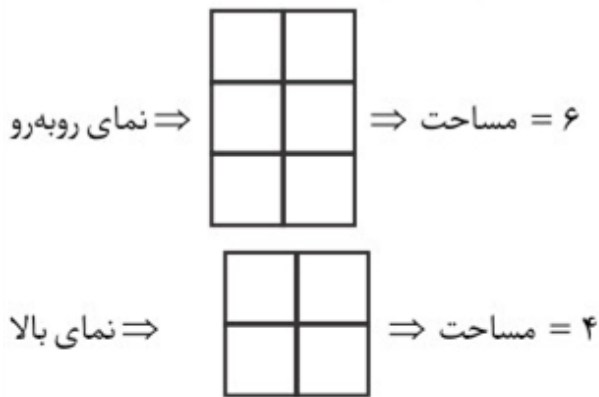
گزینه ۳ پاسخ صحیح است. خط و صفحه‌ی عمود بر یک صفحه یا موازی‌اند یا خط بر صفحه واقع است.



ولی در فضا دو خط عمود بر یک خط می‌توانند متناظر یا متقاطع هم باشند و دو صفحه‌ی عمود بر یک صفحه می‌توانند متقاطع باشند و از هر نقطه فقط یک خط عمود بر یک صفحه می‌توان رسم کرد. پس گزینه‌های «۱»، «۲» و «۴» نادرست هستند.

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. اگر ردیف بالا و وسط شکل را حذف کنیم که هر ردیف دارای ۱۶ مکعب کوچک است به ردیف پایینی می‌رسیم. (کف معکب مستطیل بزرگ) و اگر از آن ۵ مکعب کوچک حذف کنیم آن‌گاه نمای بالای شکل باقی مانده مانند شکل داده شده درمی‌آید پس حداکثر تعداد مکعب‌های کوچکی که از شکل باید حذف شود برابر $37 = 16 + 16 + 5$ است.

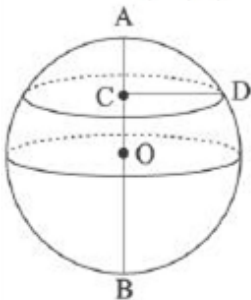
گزینه ۲ پاسخ صحیح است. نمای روبه‌رو و نمای بالای شکل داده شده به صورت زیر است.



پس نسبت مساحت‌ها برابر $\frac{۶}{۴} = \frac{۳}{۲} = ۱/۵$ است.

گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

شکل حاصل از دوران حول قطر AB یک کره است که $OA = OB = OD = R$ و نقطه O مرکز کره است.



می‌دانیم مساحت رویه کره برابر $4\pi R^2$ است.

$$\frac{AC}{AB} = \frac{1}{2} \xrightarrow{AB = 2R} AC = \frac{1}{2}R$$

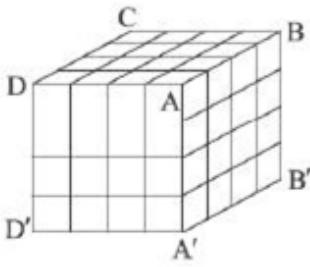
$$\Rightarrow OC = OA - AC = R - \frac{1}{2}R = \frac{1}{2}R$$

$$\triangle OCD (\hat{C} = 90^\circ): CD = \sqrt{OD^2 - OC^2} = \sqrt{R^2 - (\frac{1}{2}R)^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}R$$

مساحت ایجاد شده از دوران پاره خط CD حول قطر AB برابر است با:

$$\pi CD^2 = \pi (\frac{\sqrt{3}}{2}R)^2 = \frac{3}{4}\pi R^2 \Rightarrow \frac{\frac{3}{4}\pi R^2}{4\pi R^2} = \frac{3}{16}$$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. ۴۲



(۱) روی یال‌های AB و BC و DC و AD هر کدام دو مکعب با دو وجه رنگی وجود دارد، پس $4 \times 2 = 8$ مکعب داریم.

(۲) روی یال‌های AA' و BB' و CC' و DD' هر کدام سه مکعب با دو وجه رنگی وجود دارد، پس $4 \times 3 = 12$ مکعب داریم.

(۳) روی یال‌های $A'B'$ و $B'C'$ و $C'D'$ و $A'D'$ مکعب‌های هر سر یال دارای دو وجه رنگی هستند که در بخش ۲ آن‌ها شمرده شده‌اند، بنابراین تعداد مکعب‌های با دو وجه رنگی برابر $a = 8 + 12 = 20$ است. در ضمن فقط رئوس مکعب بزرگ می‌توانند دارای سه وجه رنگ شده باشد، آن‌ها عبارت‌اند از رأس‌های A و B و C و D . توجه کنید چون کف مکعب بزرگ رنگ نشده است، رئوس پایینی سه وجه رنگ شده ندارد، بنابراین تعداد مکعب‌های با سه وجه رنگ شده برابر $b = 4$ است، پس $a + b = 24$ است.

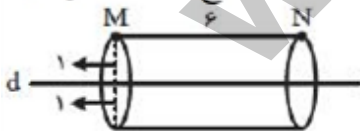
گزینه ۳ پاسخ صحیح است. گزاره‌های «ج» و «د» نادرست هستند. ۴۳

دو صفحه عمود بر یک صفحه می‌توانند موازی یا متقاطع باشند. دو خط موازی با یک صفحه می‌توانند موازی، متقاطع یا متناظر باشند.

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. حجم حاصل از دوران فضای بین دو استوانه است که استوانه بزرگ‌تر دارای شعاع $3a$ و ارتفاع a است و استوانه کوچک‌تر دارای شعاع $2a$ و ارتفاع a است. ۴۴

$$1080\pi = (3a)^2 a\pi - (2a)^2 a\pi \Rightarrow 1080\pi = 9a^3\pi - 4a^3\pi$$

$$\Rightarrow 1080\pi = 5a^3\pi \Rightarrow 5a^3 = 1080 \Rightarrow a^3 = 216 \Rightarrow a = 6$$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. از دوران پاره خط MN حول خط d ، استوانه‌ای به شعاع قاعده ۱ و ارتفاع ۶ ایجاد می‌شود. ۴۵

$$\text{حجم استوانه} = \pi r^2 h = \pi(1)^2 \times 6 = 6\pi$$

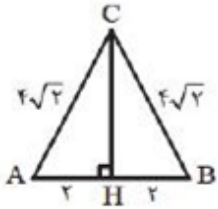
گزینه ۳ پاسخ صحیح است. با نوشتن فیثاغورس در مثلث BFC داریم:

۴۶



$$BC^2 = BF^2 + CF^2 \Rightarrow BC^2 = 4^2 + 4^2 = 32 \Rightarrow BC = 4\sqrt{2}$$

به همین ترتیب $AC = 4\sqrt{2}$ است، پس مثلث ABC به شکل زیر است. با نوشتن فیثاغورس در مثلث BHC خواهیم داشت:



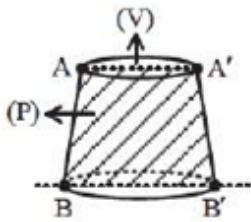
$$BC^2 = BH^2 + CH^2 \Rightarrow 32 = 4 + CH^2 \Rightarrow CH^2 = 28 \Rightarrow CH = 2\sqrt{7}$$

حالا مساحت مثلث ABC به راحتی به دست می آید.

$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} AB \times CH = \frac{1}{2} \times 4 \times 2\sqrt{7} = 4\sqrt{7}$$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

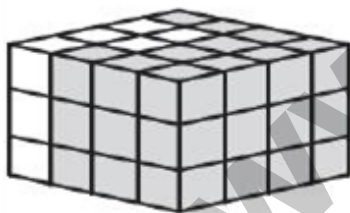
۴۷



$$V \cap P = \{AA'B'B\} \Rightarrow \begin{cases} AB = A'B' \\ AA' \parallel BB' \end{cases} \Rightarrow \text{دوزنقه متساوی الساقین}$$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. سه ردیف ۱۶ تایی روی هم چیده شده پس ۴۸ مکعب داریم، قسمت رنگی را در شکل زیر ببینید!

۴۸



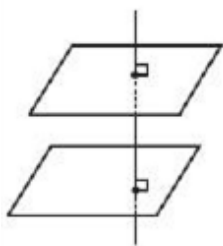
قرار است از نمای بالا فقط قسمت رنگی را ببینیم، پس باید قسمت غیررنگی حذف شود. قسمت غیررنگی دارای ۵ مکعب است که در سه ردیف روی هم چیده شده یعنی $5 \times 3 = 15$ مکعب باید حذف شود.

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. از آنجایی که BA بر صفحه P عمود است، بنابراین بر تمام خطوط صفحه P از جمله d عمود است. همچنین d بر AC نیز عمود است یعنی d هم بر AC و هم بر AB عمود است و چون AC و AB متقاطع هستند، پس d بر صفحه گذرنده از A، B و C عمود است، بنابراین d بر BC نیز عمود است و زاویه خواسته شده 90° است.

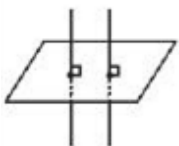
۴۹

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. یال AB با یال‌های OC ، OD و OE متنافر است. ۵۰

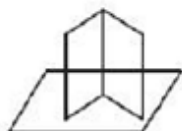
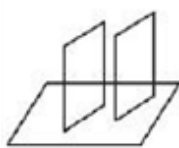
گزینه ۳ پاسخ صحیح است. بررسی گزینه‌ها:
گزینه (۱): اگر دو صفحه بر یک خط عمود باشند، آن دو صفحه موازی‌اند. ۵۱



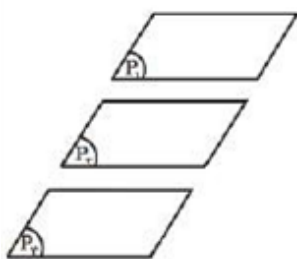
گزینه (۲): دو خط که بر یک صفحه عمود باشند، با هم موازی‌اند.



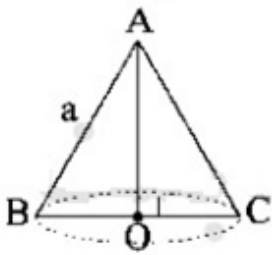
گزینه (۳): دو صفحه عمود بر یک صفحه می‌تواند موازی یا متقاطع باشند.



گزینه (۴): دو صفحه موازی با یک صفحه موازی‌اند، مثلاً اگر P_1 با P_2 و P_2 با P_3 مواز باشند، P_1 با P_3 موازی است.



$$S_{\text{مساوی الاضلاع}} = \frac{a^2 \sqrt{3}}{4} = 4\sqrt{3} \Rightarrow a^2 = 16 \Rightarrow a = 4$$

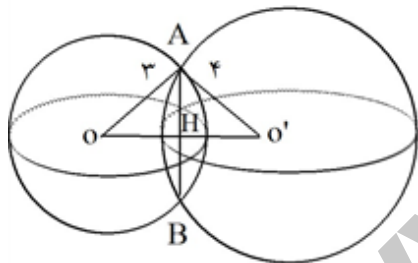


قطر قاعده = ۴

$$\text{ارتفاع مثلث مساوی الاضلاع} = OA = \frac{\sqrt{3}}{2} a = \frac{\sqrt{3}}{2} \times 4 = 2\sqrt{3}$$

$$\text{حجم مخروط} = \frac{1}{3} \times (\text{مساحت قاعده}) \times \text{ارتفاع} = \frac{1}{3} \times \pi (2)^2 \times 2\sqrt{3} = \frac{8\pi}{3} \sqrt{3}$$

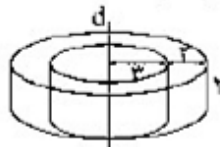
گزینه ۴ پاسخ صحیح است. تلاقی دو کره یک دایره است. در شکل AH شعاع دایره‌ی موردنظر است. چون $OA = 3$ و $O'A = 4$ و $OO' = 5$ پس مثلث قائم‌الزاویه OAO' است. بنابراین با استفاده از رابطه‌ی طولی در مثلث قائم‌الزاویه می‌نویسیم.



$$AH \times OO' = OA \times O'A \Rightarrow AH \times 5 = 3 \times 4 \Rightarrow AH = \frac{12}{5}$$

$$\text{مساحت دایره} = \pi AH^2 = \pi \left(\frac{12}{5}\right)^2 = \frac{144}{25} \pi = 5.76\pi$$

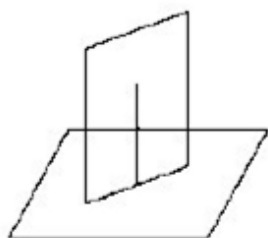
گزینه ۴ پاسخ صحیح است. شکل حاصل از این دوران یک استوانه به شعاع قاعده‌ی ۵ واحد است که در داخل آن استوانه‌ای توخالی به شعاع ۳ واحد قرار دارد.



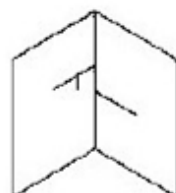
$$\text{حجم استوانه‌ی کوچک} - \text{حجم استوانه‌ی بزرگ} = \text{حجم شکل}$$

$$= \pi (5)^2 \times 2 - \pi (3)^2 \times 2 = 2\pi (25 - 9) = 32\pi$$

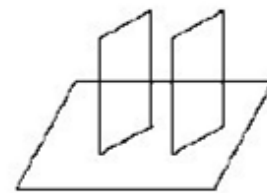
گزینه ۴ پاسخ صحیح است. ۵۵



گزینه‌ی (۴) درست (تعریف کتاب)

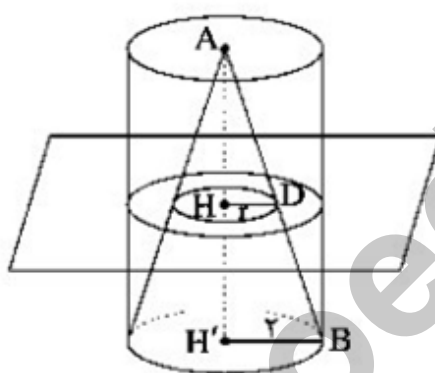


نقض گزینه‌ی (۲) و (۳)



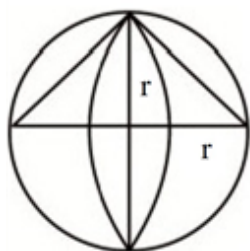
نقض گزینه‌ی (۱)

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. ۵۶



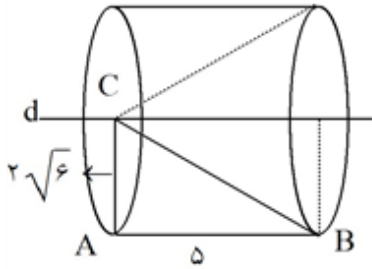
$$\Delta AH'B : HD \parallel H'B \Rightarrow \frac{AH'}{AH} = \frac{r}{2} \Rightarrow \frac{4}{6} = \frac{r}{2} \Rightarrow r = \frac{4}{3}$$

$$\text{مساحت مقطع حاصل} = \pi(2)^2 - \pi\left(\frac{4}{3}\right)^2 = 4\pi - \frac{16}{9}\pi = \frac{20\pi}{9}$$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. اگر شعاع دایره باشد، شعاع کره r و ارتفاع هر مخروط نیز r است. ۵۷

$$\frac{\text{دو مخروط}}{\text{کره}} = \frac{2 \times \frac{1}{3} \pi r^2 \times r}{\frac{4}{3} \pi r^3} = \frac{1}{2}$$

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. از دوران مثلث قائم الزاویه ABC حول خط d یک استوانه که از آن مخروطی جدا شده است به دست می‌آید. به طوری که ارتفاع استوانه و مخروط ۵ و شعاع قاعده‌ی هر دو آن‌ها $2\sqrt{6}$ است.



$$\text{حجم استوانه} = \pi R^2 h = \pi (2\sqrt{6})^2 (5) = 24 \times 5\pi$$

$$\text{حجم مخروط} = \frac{1}{3} \pi R^2 h = \frac{1}{3} \pi (2\sqrt{6})^2 (5) = \frac{24 \times 5}{3} \pi$$

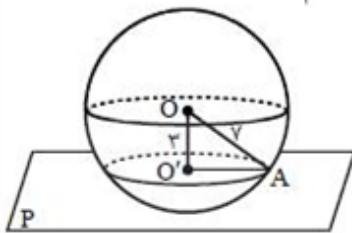
$$\text{حجم خواسته شده} = 24 \times 5\pi - \frac{24 \times 5}{3} \pi = \frac{2 \times 24 \times 5}{3} \pi = 80\pi$$

بنابراین:

گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

چون d_1 و d در یک صفحه هستند پس نمی‌توانند متناظر باشند ولی هر دو حالت متقاطع یا موازی می‌توانند باشند.

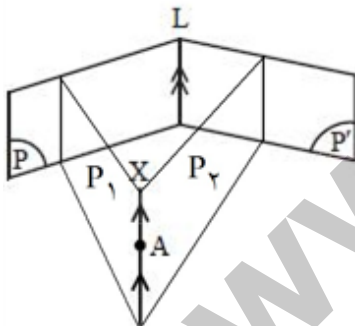
گزینه ۲ پاسخ صحیح است. با توجه به شکل، طبق قضیه فیثاغورس، در مثلث OAO' داریم:



$$O'A^2 = 7^2 - 3^2 = 49 - 9 \Rightarrow O'A = \sqrt{40} = 2\sqrt{10}$$

$$S_{\text{سطح مقطع}} = \pi (O'A)^2 = 40\pi$$

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. به روش رسم شکل به شرح زیر داریم:



اکنون از A خط AX را موازی L رسم می‌کنیم. از این خط بی‌شمار صفحه مانند P_1, P_2, \dots, P_n می‌گذرد که دو صفحه P و P' را قطع می‌کند.

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. مطابق شکل داریم:

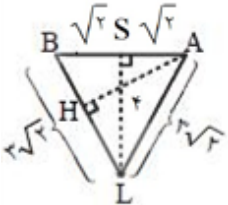
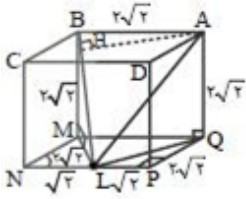
۶۲

$$LQ^2 = (\sqrt{2})^2 + (2\sqrt{2})^2 = 2 + 8 = 10 \Rightarrow LQ = \sqrt{10}$$

$$AL^2 = AQ^2 + LQ^2 = 8 + 10 = 18 \Rightarrow AL = 3\sqrt{2}$$

$$ML^2 = (\sqrt{2})^2 + (2\sqrt{2})^2 = 2 + 8 = 10 \Rightarrow ML = \sqrt{10}$$

$$BL^2 = BM^2 + ML^2 = 8 + 10 = 18 \Rightarrow BL = 3\sqrt{2}$$

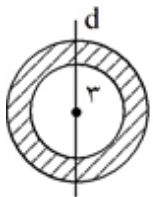


$$LS = AP = \sqrt{2} \times 2\sqrt{2} = 4$$

$$S_{\triangle ABL} = \frac{1}{2} \times 4 \times 2\sqrt{2} = \frac{1}{2} \times AH \times 3\sqrt{2} \Rightarrow AH = \frac{4}{3}$$

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. از دوران شکل مورد نظر حول خط d به اندازه 180° ، دو نیم کره حاصل می شود که حجم قسمت هاشورخورده در آن ها برابر است با تفاضل حجم دو نیم کره:

۶۳

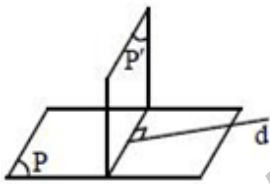


$$\text{حجم قسمت هاشورخورده} = \frac{1}{2} \left(\frac{4}{3} \pi R^3 - \frac{4}{3} \pi r^3 \right) = \frac{1}{2} \times \frac{4}{3} \pi (R^3 - r^3)$$

$$= \frac{1}{2} \times \frac{4}{3} \pi (4^3 - 3^3) = \frac{1}{2} \times \frac{4}{3} \pi \times 37 = \frac{2}{3} \times \pi \times 37 = \frac{74}{3} \pi$$

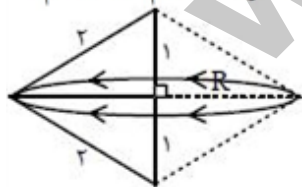
گزینه ۱ پاسخ صحیح است. مطابق شکل زیر، خطی که بر فصل مشترک دو صفحه عمود می شود ممکن است هیچ یک از حالت های «الف»، «ب» و «ج» را نداشته باشد.

۶۴



گزینه ۳ پاسخ صحیح است. در این دوران دو مخروط از قاعده به هم چسبیده ایجاد می شود که برای حجم آن داریم:

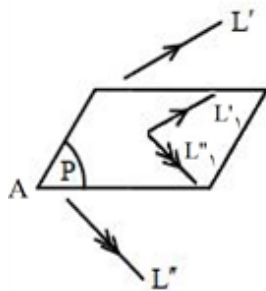
۶۵



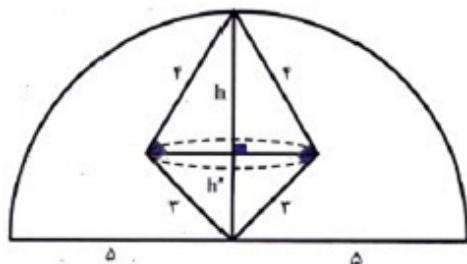
$$R^2 = 4 - 1 = 3 \Rightarrow R^2 = 3$$

$$\begin{cases} V_1 = \frac{1}{3} \pi R^2 \cdot h = \frac{1}{3} \times \pi \times 3 \times 1 \\ V_2 = \frac{1}{3} \pi R^2 \cdot h = \frac{1}{3} \times \pi \times 3 \times 1 \end{cases} \Rightarrow V = V_1 + V_2 \Rightarrow V = \pi + \pi = 2\pi$$

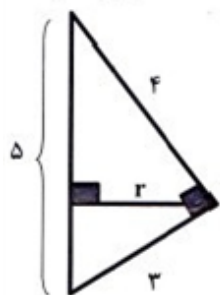
گزینه ۱ پاسخ صحیح است. از نقطه A دو خط یک موازی L' و دیگری موازی L'' رسم می‌کنیم به نام‌های L'_1 و L''_1 از این دو خط فقط یک صفحه مانند P می‌گذرد که همان جواب مسئله است.



گزینه ۱ پاسخ صحیح است. شکل حاصل نیم‌کره‌ای است که دو مخروط از آن جدا شده است.



$$AB^2 = 3^2 + 4^2 \Rightarrow AB = 5 \quad \text{شعاع نیم‌کره}$$



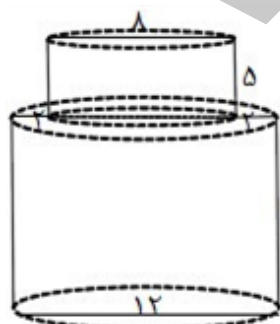
$$\rightarrow 3 \times 4 = 5 \times r$$

$$\text{شعاع مخروط‌ها } r = \frac{12}{5} = 2.4$$

$$V = V_{\text{نیم‌کره}} - \frac{1}{3}\pi r^2 h' - \frac{1}{3}\pi r^2 h$$

$$V_{\text{نهایی}} = \frac{2}{3} \times 3 \times 5^3 - \frac{1}{3} \times 3 \times \left(\frac{12}{5}\right)^2 [h' + h]$$

$$V_{\text{نهایی}} = 250 - 5/76 \times 5 \Rightarrow V = 221/2$$



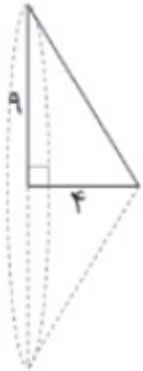
گزینه ۲ پاسخ صحیح است. بیش‌ترین سطح مقطع زمانی ایجاد می‌شود که صفحه‌ی برش‌دهنده دربرگیرنده‌ی محور مشترک قائم دو استوانه باشد که از مرکز قاعده‌های آنها می‌گذرد:

$$S = (12 \times 10) + (8 \times 5)$$

$$\Rightarrow S = 160$$



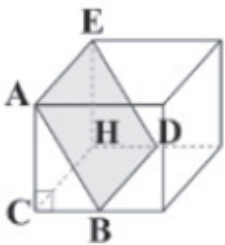
$$(1) \text{ حجم} = \frac{1}{3} \times \pi \times 4^2 \times 9$$



$$(2) \text{ حجم} = \frac{1}{3} \times \pi \times 9^2 \times 4$$

$$\frac{\text{حجم ۱}}{\text{حجم ۲}} = \frac{\frac{1}{3} \times \pi \times 16 \times 9}{\frac{1}{3} \times \pi \times 81 \times 4} = \frac{4}{9}$$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. بنابر فرض سؤال شکل زیر را خواهیم داشت. ۷۰

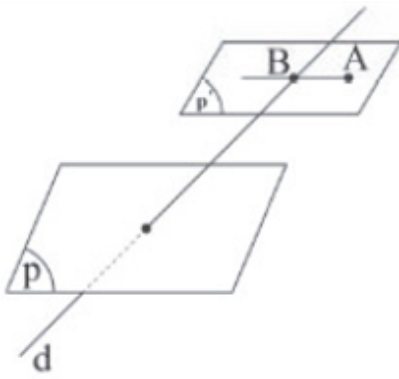


$$S_{\text{مکعب}} = 6a^2 = 12 \Rightarrow a^2 = 2 \Rightarrow a = \sqrt{2}$$

$$\Rightarrow BC = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\triangle ACB : AB^2 = AC^2 + BC^2 = (\sqrt{2})^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \frac{5}{2} \Rightarrow AB = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}}$$

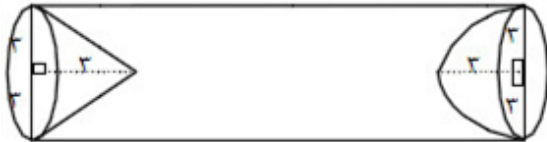
$$\text{مساحت مستطیل } ABDE = \text{مساحت مقطع حاصل} = \sqrt{2} \times \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}} = \sqrt{5}$$



گزینه ۴ پاسخ صحیح است. فرض کنید خط d و صفحه‌ی P متقاطع باشند. از نقطه‌ی A ، صفحه‌ی P' را موازی صفحه‌ی P رسم می‌کنیم. خط d صفحه‌ی P' را در نقطه‌ی B قطع می‌کند. در این صورت خط گذرنده از نقاط A و B ، تنها خطی است که خط d را قطع کرده است و با صفحه‌ی P موازی است. پس باید خط d با صفحه‌ی P متقاطع باشد تا مسئله یک جواب داشته باشد و مسلماً عمود بودن خط d بر صفحه‌ی P تأثیری در جواب ندارد. همان متقاطع بودن کفایت.

۷۱

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. پس از دوران، برای محاسبه حجم ابتدا، حجم استوانه را حساب می‌کنیم و سپس حجم یک نیم‌کره و یک مخروط را از آن کم می‌کنیم.



$$V_{\text{استوانه}} = \pi r^2 \cdot h = 3 \times (3)^2 \times 10 = 270$$

$$V_{\text{مخروط}} = \frac{1}{3} \pi r^2 \cdot h' = \frac{1}{3} \times 3 \times (3)^2 \times 3 = 27$$

$$V_{\text{نیم کره}} = \frac{2}{3} \pi r^3 = \frac{2}{3} \times 3 \times 3^3 = 54$$

$$V_{\text{شکل نهایی}} = V_{\text{استوانه}} - V_{\text{مخروط}} - V_{\text{نیم کره}} = 270 - 27 - 54 = 189$$

۷۲

*	*	*	
	*	*	

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. حداقل (m) : کافی است از تمام ردیف‌ها، ۵ مکعب کوچک که با ستاره مشخص شده‌اند را برداریم:

$$m = 4 \times 5 = 20$$

حداکثر (n) : تمام مکعب‌های ۳ ردیف بالا را برداریم و در ردیف چهارم (کف) فقط ۵ مکعب که با ستاره مشخص شده‌اند را برداریم:

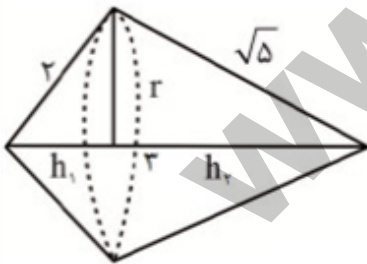
$$n = (3 \times (4 \times 4)) + 5 = 53$$

$$m + n = 20 + 53 = 73$$

۷۳

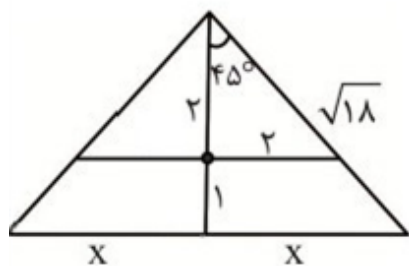
گزینه ۳ پاسخ صحیح است. مثلث با اضلاع موردنظر قائم‌الزاویه بوده پس از دوران این مثلث حول وتر دو مخروط ایجاد می‌شود و حجم شکل حاصل برابر است با:

۷۴



$$r = \frac{2 \times \sqrt{5}}{3} \Rightarrow v = \frac{1}{3} \pi r^2 (h_1 + h_2) = \frac{20}{9} \pi$$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. از روبرو مخروط به شکل زیر دیده می‌شود. شعاع قاعده‌ی مخروط را X در نظر می‌گیریم پس بنا بر فرض سؤال ارتفاع مخروط هم برابر X است. داریم:



$$x^2 + x^2 = 18 \Rightarrow x = 3$$

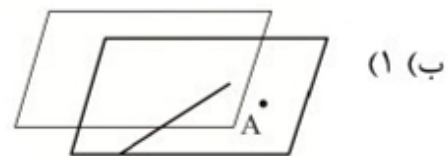
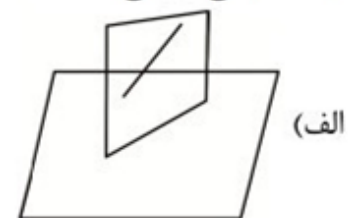
پس حجم مخروط اولیه برابر $9\pi = \frac{1}{3} \pi (3)^2 (3)$ است. بنا بر شکل شعاع قاعده و ارتفاع مخروط کوچک برابر ۲ و

حجم مخروط کوچک برابر $\frac{8}{3} \pi$ است پس حجم بین آنها برابر $\frac{19\pi}{3} = \frac{8}{3} \pi - 9\pi$ است.

www.akoedu.ir

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. شکل‌های هر کدام عبارتست از:

۷۶

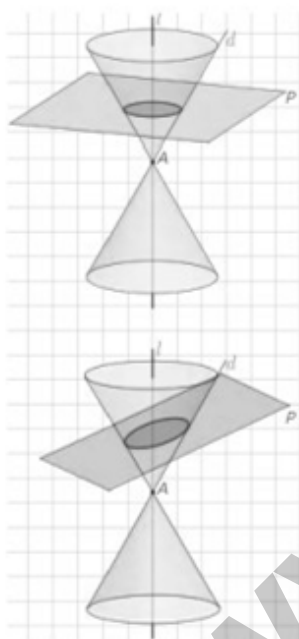
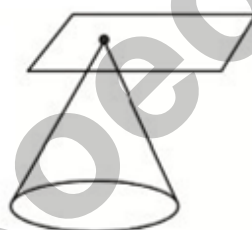


هیچ خطی نمی‌توان رسم کرد.



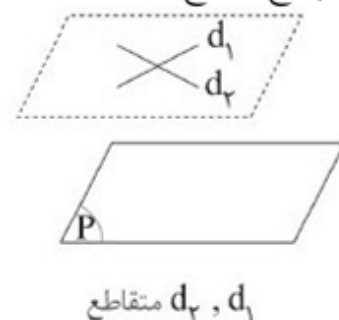
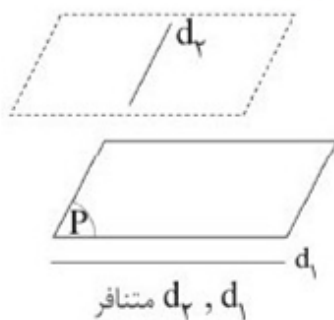
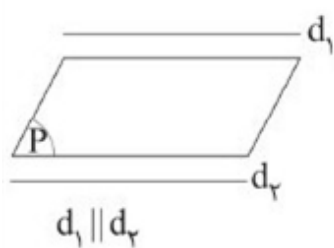
تنها یک خط می‌توان رسم کرد.

(پ) حالت نقطه مطابق شکل زیر می‌باشد.

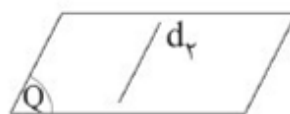
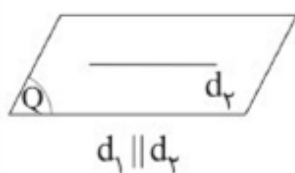
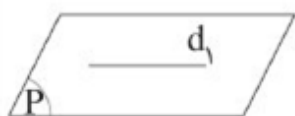


گزینه ۴ پاسخ صحیح است. حالت‌های زیر را ببینید:

۷۷

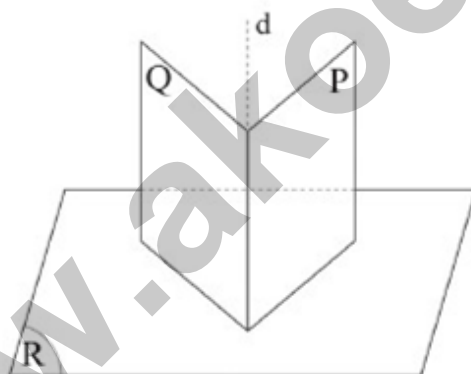


گزینه ۳ پاسخ صحیح است. این دو خط می‌توانند موازی یا متنافر باشند:



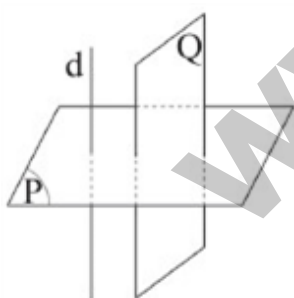
d_2, d_1 متنافرند.

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. d فصل مشترک دو صفحه‌ی متقاطع P و Q است، چون هر دو صفحه بر R عمودند، پس d نیز بر R عمود است. (مطابق شکل)

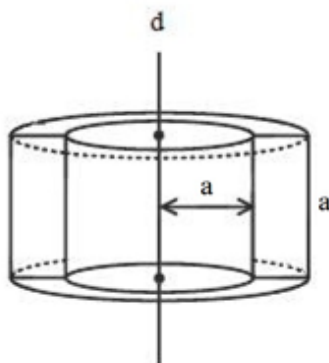


گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

چون صفحه‌ی Q و خط d بر صفحه‌ی P عمودند، لذا صفحه Q و خط d مطابق شکل با هم موازی می‌باشند یا خط d بر Q واقع می‌شود.



گزینه ۱ پاسخ صحیح است. حجم حاصل از دوران مربع به ضلع a حول خط d ، جسمی به شکل زیر به دست می آید، داریم:

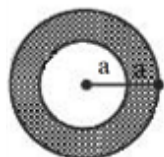


حجم استوانه‌ای به شعاع قاعده a و ارتفاع a - حجم استوانه‌ای به شعاع قاعده $2a$ و ارتفاع a = حجم جسم حاصل

$$V = \pi \times (2a)^2 \times a - \pi \times a^2 \times a = 4\pi a^3 - \pi a^3 = 3\pi a^3$$

$$\Rightarrow V = 24\pi \Rightarrow 3\pi a^3 = 24\pi \Rightarrow a^3 = 8 \Rightarrow a = 2$$

با رسم صفحه‌ای عمود بر d ، مقطع حاصل برابر است با:



$$S = \pi \times (2a)^2 - \pi a^2 = 4\pi a^2 - \pi a^2 = 3\pi a^2 = 3\pi \times 2^2 = 12\pi$$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. مقطع حاصل از برخورد دو کره، دایره‌ای به شعاع $AH = r$ می‌باشد، داریم:

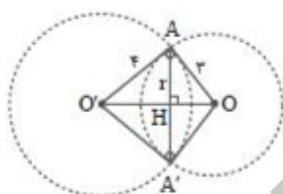
$$OO' = 5$$

$$OA = 3$$

$$O'A = 4 \Rightarrow 5^2 = 3^2 + 4^2 \Rightarrow \widehat{OAO'} = 90^\circ$$

$$\triangle OAO': AH = \frac{3 \times 4}{5} = \frac{12}{5} \Rightarrow \text{شعاع دایره} = \frac{12}{5}$$

$$\text{مساحت دایره مقطع} = \pi r^2 = \pi \times \frac{12^2}{5^2} = \pi \times \frac{144}{25} = \frac{5}{76}\pi$$



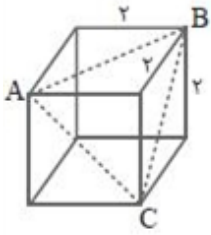
گزینه ۳ پاسخ صحیح است. سطح مقطع صفحه گذرا بر انتهای سه یال گذرا بر یک رأس مثلث متساوی الاضلاع است که ضلع آن قطر وجه مکعب است.

$$BC = a\sqrt{2} = 2\sqrt{2}$$

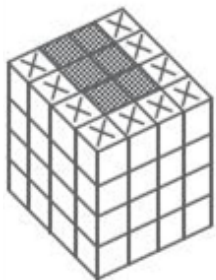
$$S_{ABC} = \frac{\sqrt{3}}{4} BC^2 = \frac{\sqrt{3}}{4} \times (2\sqrt{2})^2 = 2\sqrt{3}$$

$$S_{\text{مکعب کل}} = 6a^2 = 6 \times 4 = 24$$

$$\frac{S_{ABC}}{S_{\text{کل}}} = \frac{2\sqrt{3}}{24} = \frac{\sqrt{3}}{12}$$



گزینه ۱ پاسخ صحیح است. برای آن که نمای خواسته شده حاصل شود باید حداقل تمام مکعب‌های رنگی و مکعب‌های زیر آن برداشته شود.

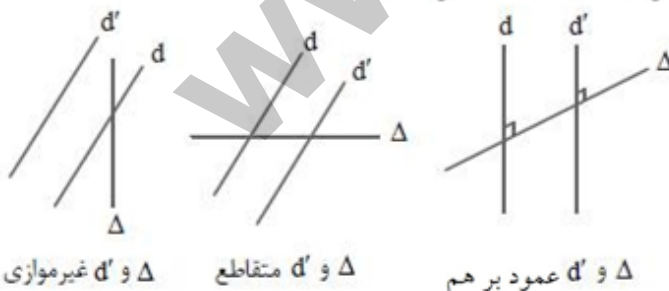


$$\text{حداقل تعداد مکعب‌های حذفی} = 6 \times 4 = 24$$

و برای آن که حداکثر تعداد مکعب‌های حذفی را به دست آوریم باید فقط مکعب‌های به شکل \boxtimes را نگه داریم و بقیه حذف شوند.

$$\text{حداکثر تعداد مکعب‌های حذفی} = (4 \times 4 \times 4) - 10 = 54$$

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. وقتی d و d' بر صفحه‌ای عمود هستند یعنی با هم موازیند. اگر خط Δ خط d را قطع کند، تمام حالت‌های زیر ممکن است برای d' و Δ پیش آید، پس وضعیت مشخصی ندارند.



d' و Δ غیرموازی

d' و Δ متقاطع

d' و Δ عمود بر هم

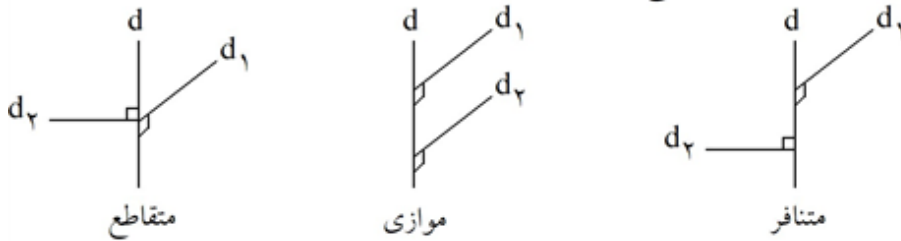
۸۶

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. کلاً $25 + 39 = 64$ مکعب داریم. چون $4 \times 4 \times 4 = 64$ ، پس مکعبی داریم که همه ابعاد آن ۴ واحد است. برای حداقل شدن سطح سفید، همه مکعب‌هایی که هیچ وجه آن‌ها قابل مشاهده نیست را سفید می‌گذاریم که این تعداد برابر است با: $(4-2)(4-2)(4-2) = 8$ یعنی ۸ مکعب سفید در مرکز مکعب $4 \times 4 \times 4$ قرار می‌گیرد و دیده نمی‌شود. حال $25 - 8 = 17$ مکعب سفید می‌ماند. چون قرار است که مساحت سطح سفید حداقل شود، سطوحی که تنها یک وجه آن‌ها قابل مشاهده است را سفید قرار می‌دهیم که تعداد این مکعب‌ها برابر است با: $6 \times 2 \times 2 = 24$ ، پس ۲۴ تا مکعب که فقط یک وجه آن‌ها قابل مشاهده می‌باشد. ۱۷ تا را انتخاب کرده و سفید می‌کنیم که این یعنی حداقل مساحت سفید، ۱۷ می‌باشد.

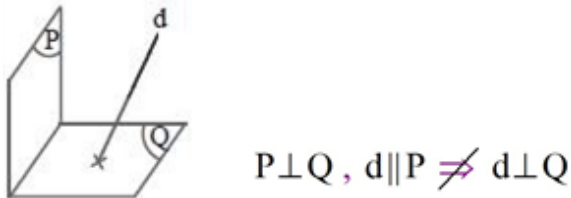
۸۷

گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

گزینه (۱): دو خط عمود بر یک خط می‌توانند موازی یا متقاطع یا متنافر باشند:



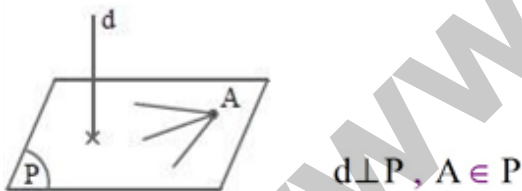
گزینه (۲):



گزینه (۳):

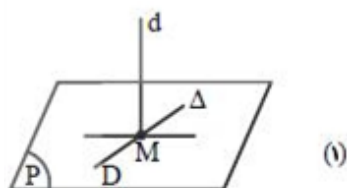


گزینه (۴):

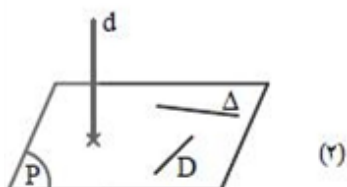


در نتیجه بی‌شمار خط از A می‌گذرد که بر d عمود متنافر می‌باشد.

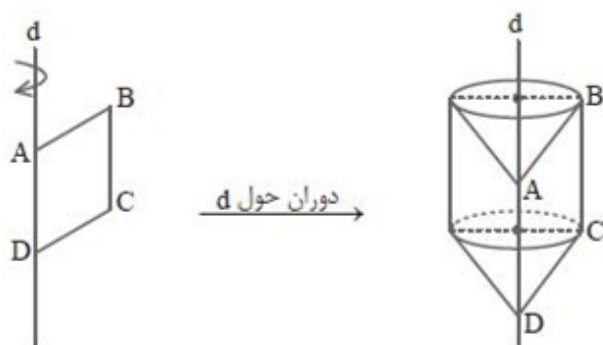
گزینه ۴ پاسخ صحیح است. مطابق شکل، خط d با صفحه P متقاطع است. دو حالت داریم: ۸۸
در حالت (۱)، خط d با بی‌شمار خط از صفحه P «متقاطع» است.



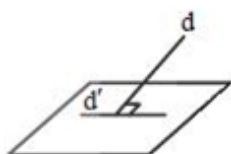
در حالت (۲)، خط d با بی‌شمار خط از صفحه P «متنافر» می‌باشد.



گزینه ۳ پاسخ صحیح است. ۸۹

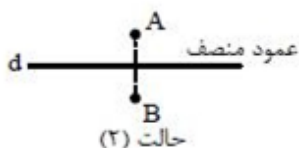
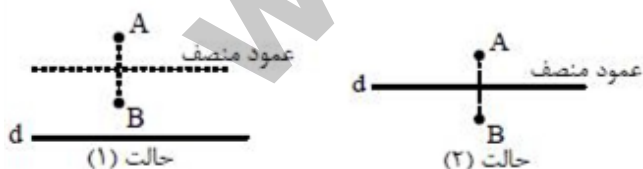


گزینه ۴ پاسخ صحیح است. اگر خطی بر یک خط صفحه عمود باشد، ممکن است بر کل صفحه عمود نباشد و ممکن است حتی داخل صفحه منطبق باشد. ۹۰



شرط لازم و کافی برای آن که خطی بر صفحه‌ای عمود باشد آن است که بر دو خط متقاطع صفحه عمود باشد.

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. دو حالت دارد: ۹۱



در حالت (۱) چون عمود منصف موازی خط d می‌باشد، پس جواب صفر است.

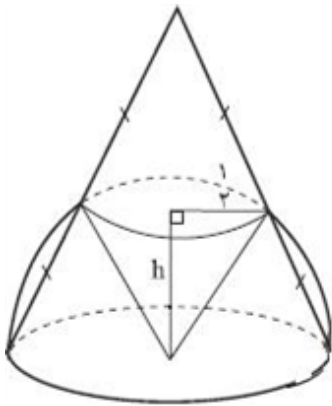
در حالت (۲) چون عمود منصف منطبق بر خط d می‌باشد، پس جواب بی‌شمار است.

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. اگر خوب تجسم کنید می‌توان دریافت ناحیه‌ای که درون آب می‌رود، هرمی با قاعده مثلث متساوی‌الاضلاع است که هر سه وجه آن مثلث‌های قائم‌الزاویه‌ای هم‌نهشت هستند. مرکز قاعده همان مرکز قاعده استوانه است، در نتیجه طول ضلع قاعده برابر $4\sqrt{3}$ می‌باشد و در نتیجه طول یال‌های هرم برابر

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \times 4\sqrt{3} = 2\sqrt{6}$$

می‌باشد، بنابراین حجم هرم برابر است با:

$$V = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{2} \times (2\sqrt{6})^2 \right) \times 2\sqrt{6} = 8\sqrt{6}$$



گزینه ۴ پاسخ صحیح است. سطح مقطع برخورد مخروط و کره، یک دایره است. می‌توان دریافت شعاع دایره نصف شعاع کره است، در نتیجه طبق قضیه فیثاغورس، مقدار $h = \sqrt{1 - \frac{1}{4}} = \frac{1}{2}\sqrt{3}$ بوده و بنابراین ارتفاع مخروط برابر با $\sqrt{3}$ می‌باشد.

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. ارتفاع جسم کوچک را با h و قطر آن را با d نشان دهید. با توجه به شکل می‌توان گفت:

$$\triangle VWY \sim \triangle VCD$$

نسبت تشابه را با k نشان می‌دهیم. می‌دانیم ارتفاع هرم بزرگ برابر kh و طول ضلع آن برابر $k\frac{d}{\sqrt{2}}$ می‌باشد. حال می‌توان نوشت:

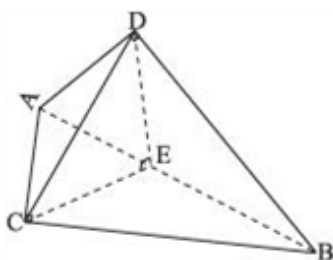
$$\frac{(k-1)h}{kh} = \frac{d}{k\frac{d}{\sqrt{2}}} \Rightarrow \frac{k-1}{k} = \frac{\sqrt{2}}{k} \Rightarrow k = 1 + \sqrt{2}$$

گزینه ۵ پاسخ صحیح است. طول ضلع‌ها را با a, b, c نشان دهید، می‌دانیم:

$$4(a+b+c) + 2(ab+ac+bc) + abc = 2015$$

پس: $a = \frac{2023}{(b+2)(c+2)}$ ، بنابراین: $b+2$ و $c+2$ مقسوم‌علیه ۲۰۲۳ هستند. می‌دانیم: $2023 = 7 \times 17^2$

اگر $b=c=15$ ، در نتیجه: $a=5$ ، اگر $b=5$ یا $c=5$ ، در این صورت $a=15$ یا $b=15$ ، در نتیجه: طول قطر برابر است با:

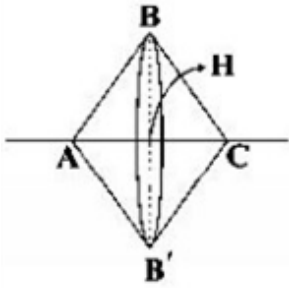
$$\sqrt{5^2 + 15^2 + 15^2} = 5\sqrt{19}$$


گزینه ۳ پاسخ صحیح است. می‌دانیم $\triangle ABC$ و $\triangle ABD$ قائم‌الزاویه هستند. همچنین $\triangle CDE$ قائم‌الزاویه‌ای متساوی‌الساقین است، در نتیجه حجم ۴ وجهی برابر است با:

$$\frac{1}{3} \times 6 \times \frac{12}{5} = \frac{24}{5}$$

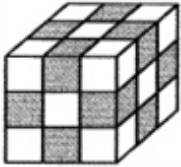
می‌باشد.

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. با دوران سطح ABC حول d ، دو مخروط توپر شبیه به هم تولید می‌شود که ارتفاع آن‌ها $AH = HC = ۳$ و شعاع قاعده‌ی آن‌ها $BH = ۴$ است.



$$V = 2 \times \frac{1}{3} \pi (4)^2 \times 3 = 32\pi$$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. مکعب‌های مشخص شده دارای ۲ وجه رنگی‌اند که تعداد آن‌ها ۱۲ تا می‌باشد.



گزینه ۲ پاسخ صحیح است. این بلوک با جسم گزینه‌ی (۲) کامل می‌شود.

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. نمای بالای استوانه، یک دایره و نمای چپ و روبه‌روی آن، مستطیل است.

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. نمای بالای یک مخروط، دایره و نمای چپ و روبه‌روی آن، مثلث متساوی‌الساقین است.

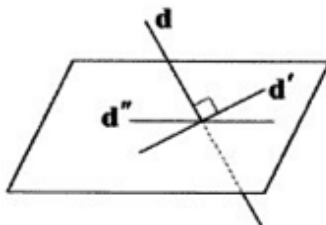
گزینه ۳ پاسخ صحیح است. کافی است جسم داده‌شده را ۱۸۰° افقی بچرخانید.

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. بررسی سایر گزینه‌ها:

(۱) نادرست است، چون ممکن است متناظر باشد.

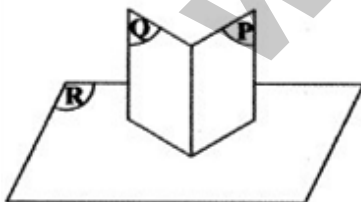
(۳) نادرست است. شکل زیر را ببینید:

d بر d' عمود است، اما بر d'' و در نتیجه بر صفحه عمود نیست.

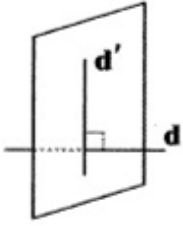


(۴) نادرست است. شکل زیر را ببینید:

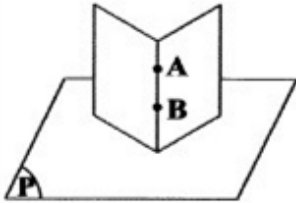
P و Q بر R هم‌دند، اما با هم موازی نیستند.



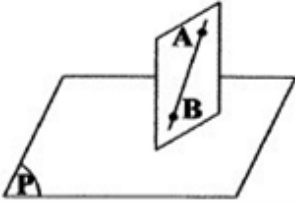
۱۰۴ گزینه ۴ پاسخ صحیح است. صفحه‌ی شامل d' و عمود بر d را در نظر می‌گیریم. هر خط در این صفحه که با d' متقاطع باشد، بر d نیز عمود است.



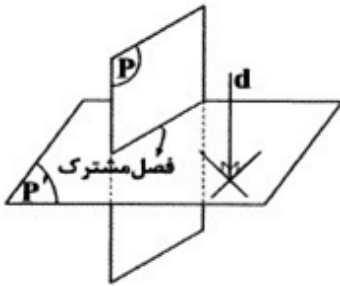
۱۰۵ گزینه ۲ پاسخ صحیح است. حالت‌های زیر را در نظر بگیرید:
(۱) $AB \perp P$: در این صورت هر صفحه‌ی شامل AB بر P عمود است. مسئله بیشمار جواب دارد.



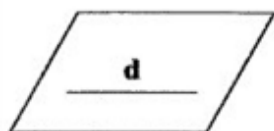
(۲) $AB \not\perp P$: در این صورت فقط یک صفحه شامل AB و عمود بر P وجود دارد. مسئله یک جواب دارد.



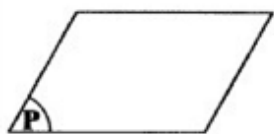
۱۰۶ گزینه ۱ پاسخ صحیح است. اگر $P \parallel P'$ باشد، آن‌گاه هر خط موازی با یکی با دیگری نیز موازی است، پس d نمی‌تواند بر P' عمود باشد، پس P و P' متقاطع‌اند، در ضمن لزومی ندارد d با فصل مشترک P و P' متقاطع باشد. فقط در صورتی که d واقع بر صفحه‌ی P باشد، این مورد اتفاق می‌افتد. اما حتماً P و P' بر هم عمودند، زیرا در این صورت هر خط موازی با یکی بر دیگری عمود است.



گزینه ۳ پاسخ صحیح است. حالت‌های زیر را ببینید: ۱۰۷

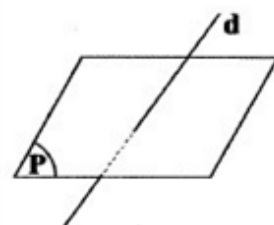


(۱) $d \parallel P$



فقط یک صفحه می‌توان رسم کرد. \Rightarrow

(۲) $d \not\parallel P$ (با P متقاطع باشد).

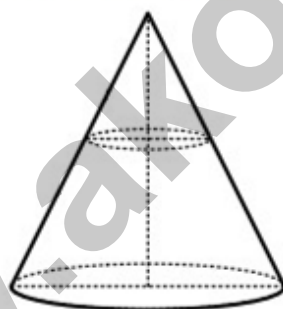


هر صفحه‌ی شامل d ، با P متقاطع است. \Rightarrow

صفحه‌ی مطلوب وجود ندارد. \Rightarrow

بنابراین حداکثر ۱ صفحه می‌توان رسم کرد.

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. ارتفاع مخروط h و فاصله دو صفحه x باشد. ۱۰۸

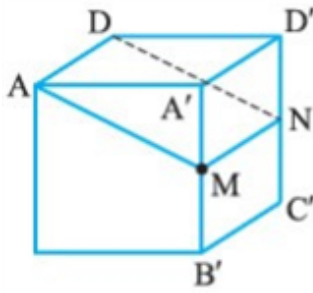


$$\frac{V_1}{V_2} = \left(\frac{h-x}{h}\right)^3 = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{h-x}{h} = \frac{1}{\sqrt[3]{2}} = \frac{\sqrt[3]{4}}{2} \Rightarrow x = \frac{2 - \sqrt[3]{4}}{2}$$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. اضلاع مکعب $k, 2k, 3k$ است. ۱۰۹

$$2(2k^2 + 3k^2 + 6k^2) = 352 \Rightarrow k^2 = 16 \Rightarrow k = 4$$

پس حجم آن $6k^3 = 384$



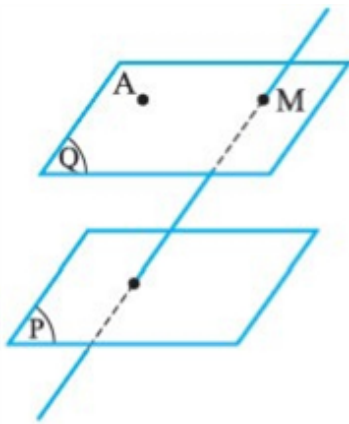
گزینه ۱ پاسخ صحیح است. صفحه‌ای که از یال AD و از وسط یال $A'B'$ (یعنی نقطه M) بگذرد از وسط یال $C'D'$ (یعنی نقطه N) نیز می‌گذرد و مستطیل $AMND$ سطح مقطع آن صفحه با مکعب است. اگر طول یال مکعب a باشد، آن‌گاه $D'N = \frac{a}{2}$ و $DD' = a$ است و در مثل قائم‌الزاویه $DD'N$ داریم:

$$DN^2 = a^2 + \frac{a^2}{4} = \frac{5a^2}{4} \Rightarrow DN = \frac{\sqrt{5}}{2}a$$

$$S_{\text{مقطع}} = S_{AMND} = AD \cdot DD' = a \times \frac{a\sqrt{5}}{2} = \frac{a^2\sqrt{5}}{2}$$

پس:

مساحت هر وجه مکعب a^2 است، پس مساحت مقطع $\frac{\sqrt{5}}{2}$ برابر آن است.



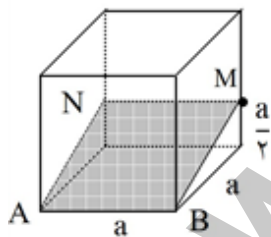
گزینه ۴ پاسخ صحیح است. تمام خطهایی که از A می‌گذرند و موازی با صفحه P هستند روی صفحه‌ای قرار دارند که شامل نقطه A است و با صفحه P موازی می‌باشد. (صفحه Q)

اگر خط d موازی با P باشد ولی روی Q نباشد هر خطی که نقطه A را به یک نقطه از d وصل کند، در این صورت مسأله جواب ندارد.

اگر d روی Q باشد، آن‌گاه هر خطی که نقطه A را به یک نقطه از d وصل کند جواب مسأله است و مسأله بی‌نهایت جواب دارد.

اما اگر d ، صفحه P را قطع کند، Q را نیز در M قطع می‌کند و AM تنها جواب مسأله است. یعنی اگر خط d صفحه P را قطع کند، آن‌گاه فقط یک خط وجود دارد که از A می‌گذرد، d را قطع می‌کند و با صفحه P موازی است.

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. در مکعب مقابل صفحه‌ی گذرا بر یال AB و نقطه‌ی M وسط یال دیگر مکعب رسم شده است. اگر طول ضلع مکعب a باشد آن‌گاه داریم:

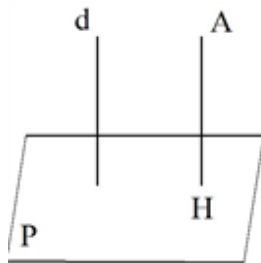


$$\text{حجم منشور (قسمت کوچکتر)} = Sh = \frac{1}{2}(a)\left(\frac{a}{2}\right)(a) = \frac{a^3}{4}$$

$$\text{حجم منشور} - \text{حجم مکعب} = \text{حجم قسمت بزرگتر} = a^3 - \frac{a^3}{4} = \frac{3a^3}{4}$$

$$\frac{\text{حجم قسمت کوچکتر}}{\text{حجم قسمت بزرگتر}} = \frac{\frac{a^3}{4}}{\frac{3a^3}{4}} = \frac{1}{3}$$

بنابراین:

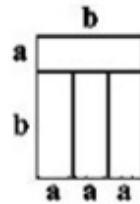


۱۱۳ گزینه ۴ پاسخ صحیح است.
در صورتی که خط d بر صفحه P عمود باشد آن گاه از A فقط یک خط عمود بر P مثل AH می توان رسم کرد. به طوری که AH موازی خط d است. (زیرا AH و d هر دو بر صفحه P عمودند) حال هر صفحه گذرا از AH هم بر P عمود است و هم موازی d است پس در این حالت تعداد صفحات رسم شده بی شمار است.

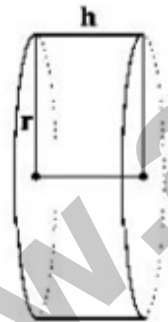
۱۱۴ گزینه ۳ پاسخ صحیح است. اگر همه مکعب ها به غیر از مکعب های ردیف اول (از پایین) حذف شوند، نمای بالا ثابت می ماند. در ردیف های دوم و سوم ۸ مکعب، در ردیف چهارم ۷ مکعب و در ردیف پنجم ۴ مکعب قرار گرفته است، پس اگر حداکثر ۲۷ ($۸ + ۸ + ۷ + ۴ = ۲۷$) مکعب را حذف کنیم نمای بالای جسم تغییر نمی کند.

۱۱۵ گزینه ۳ پاسخ صحیح است.
نقطه M در وسط قطر مکعب است قطر مکعب $۱۲\sqrt{3}$ می باشد پس فاصله از رأس ها برابر است با $۶\sqrt{3}$

۱۱۶ گزینه ۳ پاسخ صحیح است.
با توجه به این که چهار مستطیل یکسان هستند، به راحتی مشخص می شود که $b = ۳a$ است.



حال با دوران شکل حول خط d ، یک استوانه خواهیم داشت:



$$r = a + b = ۴a$$

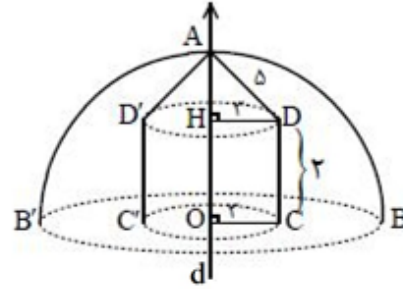
$$h = ۳a$$

$$V = \pi r^2 h = \pi (4a)^2 (3a) = 48\pi a^3 = 6\pi \Rightarrow a^3 = \frac{1}{8} \Rightarrow a = \frac{1}{2} \Rightarrow b = \frac{3}{2}$$

$$(مستطیل) ۲P = ۲(a + b) = ۲\left(\frac{1}{2} + \frac{3}{2}\right) = ۴$$

۱۱۷ گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. بعد از دوران حول خط d ، شکل زیر را خواهیم داشت. حجم شکل حاصل از دوران قسمت رنگی مطابق شکل به صورت زیر محاسبه می‌شود:



$$V_{\text{قسمت رنگی}} = V_{\text{مخروط}} - V_{\text{استوانه}} - V_{\text{نیم کره}}$$

با توجه به قضیه فیثاغورس در مثلث AHD داریم:

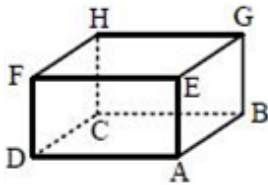
$$AH^2 = 25 - 9 = 16 \Rightarrow AH = 4$$

در نتیجه:

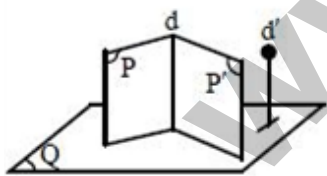
$$\text{شعاع نیم کره} = OA = OH + AH = 2 + 4 = 6$$

$$V = \frac{1}{2} \left(\frac{4}{3} \pi \times 6^3 \right) - \pi \times 3^2 \times 2 - \frac{1}{3} (\pi \times 3^2) \times 4 = 144\pi - 18\pi - 12\pi = 114\pi$$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. اگر یال AB را در مکعب مستطیل شکل زیر در نظر بگیریم، آن‌گاه یال AB با یال‌های CH, DF, EF, GH متناظر است.

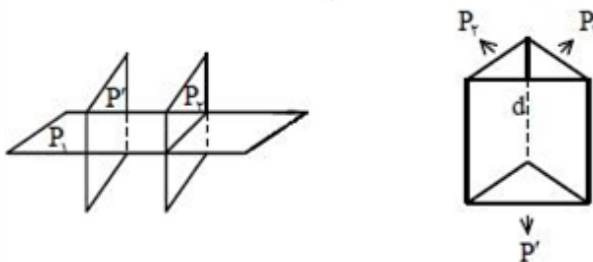


گزینه ۳ پاسخ صحیح است. اگر دو صفحه متقاطع P و P' بر صفحه‌ای عمود باشند، فصل مشترکشان هم بر آن صفحه عمود خواهد بود، بنابراین فصل مشترک آن‌ها با خط عمود بر صفحه سوم موازی می‌باشد، به صورت ریاضی می‌توان گفت:

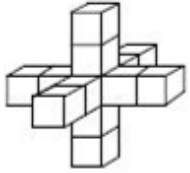


$$\left. \begin{array}{l} P \perp Q \\ P' \perp Q \\ P \cap P' = d \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} d \perp Q \\ d' \perp Q \end{array} \right\} \Rightarrow d \parallel d'$$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. مطابق شکل‌های زیر، صفحه P' با صفحه P موازی یا متقاطع است.



گزینه ۳ پاسخ صحیح است. حفره‌ها مطابق شکل زیر خواهند بود یعنی در مجموع ۱۳ مکعب $1 \times 1 \times 1$ خواهیم داشت، پس:



$$\text{حجم باقی مانده} = 5 \times 5 \times 5 - 13(1 \times 1 \times 1) = 125 - 13 = 112$$

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. کافی است مساحت هریک از نمادها (به جز نمای پایین) را به دست آوریم، داریم:

$$\text{مساحت} = 9 \Rightarrow \text{یک مربع } 3 \times 3 \text{ نمای بالا}$$

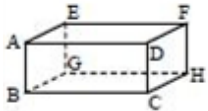
$$\text{مساحت} = 6 \Rightarrow \text{شش مربع } 1 \times 1 \text{ نمای چپ}$$

$$\text{مساحت} = 6 \Rightarrow \text{شش مربع } 1 \times 1 \text{ نمای راست} \Rightarrow \text{مساحت کل} = 9 + 4(6) = 33$$

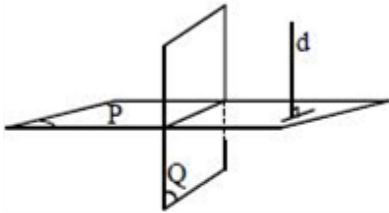
$$\text{مساحت} = 6 \Rightarrow \text{شش مربع } 1 \times 1 \text{ نمای روبه رو}$$

$$\text{مساحت} = 6 \Rightarrow \text{شش مربع } 1 \times 1 \text{ نمای پشت}$$

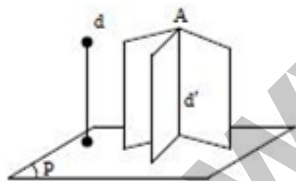
گزینه ۲ پاسخ صحیح است. گزینه‌های ۱، ۳ و ۴، همگی صحیح می‌باشند، ولی با توجه به شکل زیر، گزینه (۲) نادرست است.



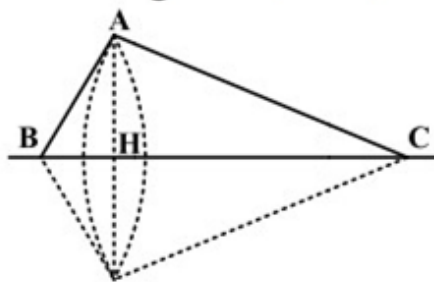
گزینه ۲ پاسخ صحیح است. از آنجا که صفحه Q و خط d، هر دو بر صفحه P عمودند، با هم موازی می‌باشند. از طرفی چون خط d بر صفحه Q عمود نیست، تنها یک صفحه از d می‌گذرد که بر Q عمود باشد.



گزینه ۳ پاسخ صحیح است. اگر خط d بر صفحه p عمود باشد، خطی که از نقطه A به موازات d رسم می‌شود (d') هم بر صفحه P عمود است، در نتیجه هر صفحه‌ای که از d' بگذرد بر P عمود خواهد بود یعنی در این حالت مسأله بی‌شمار جواب دارد.



گزینه ۲ پاسخ صحیح است. جسم دوار حاصل دو مخروط به شعاع قاعده AH و ارتفاع‌های BH و CH است. (۱۲۷)



$$BC^2 = (6)^2 + (4/5)^2 \Rightarrow BC = \sqrt{37/5}$$

$$AB \cdot AC = BC \cdot AH \Rightarrow AH = \frac{6 \times 4/5}{\sqrt{37/5}} = \frac{24}{\sqrt{37}}$$

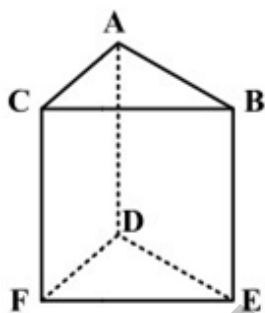
$$V = V_1 + V_2 = \frac{1}{3} \pi AH^2 \cdot BH + \frac{1}{3} \pi AH^2 \cdot CH = \frac{1}{3} \pi AH^2 \cdot BC = \frac{24}{5} \pi AH^2$$

$$V = \frac{32}{4\pi} \text{ پس}$$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. از مکعب مستطیل به ابعاد ۵ و ۳ و ۴ واحد یک مکعب مستطیل به ابعاد ۲ و ۳ و ۳ واحد بریده شده است پس حجم جسم مفروض $42 = (5 \times 3 \times 4) - (3 \times 3 \times 2)$ (۱۲۸)

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. (۱۲۹)

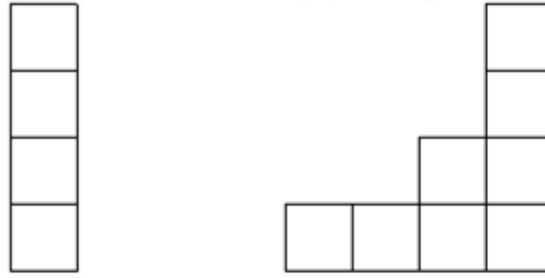
خط AB با هر یک از سه خط CF و FD و FE متناظر است پس ۳ خط متمایز موجود است.



گزینه ۲ پاسخ صحیح است. خط‌هایی که از A بر خط D عمود هستند درون صفحه‌ای هستند که از A می‌گذرد و بر خط D عمود است. (۱۳۰)

فصل مشترک این صفحه با صفحه‌ی P جواب مسئله است. در نتیجه جواب مسئله منحصر به فرد است.

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. با توجه به شکل، نمای چپ و نمای روبه‌روی شکل به صورت زیر است. (۱۳۱)



نمای چپ شکل

نمای روبه‌روی شکل

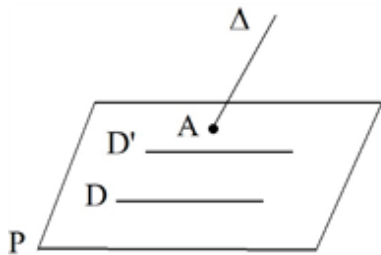
گزینه ۴ پاسخ صحیح است. از دوران مربع MND یک استوانه به شعاع قاعده‌ی ۲ و ارتفاع ۴ ایجاد می‌شود و از دوران دایره حول MN یک کره به شعاع ۲ به دست می‌آید. توجه کنید که:

$$\text{حجم کره} = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{4}{3}\pi \times 2^3 = \frac{32}{3}\pi$$

$$\text{حجم استوانه} = \pi R^2 h = \pi \times 2^2 \times 4 = 16\pi$$

حجم خواسته شده محدوددهی بین این استوانه و کره است.

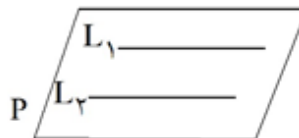
$$\text{حجم خواسته شده} = \text{حجم استوانه} - \text{حجم کره} = \frac{16\pi}{3}$$



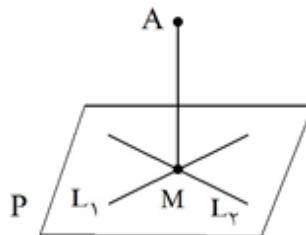
گزینه ۴ پاسخ صحیح است. از نمادگذاری شکل روبه‌رو استفاده می‌کنیم. اگر خط Δ صفحه‌ی P را در نقطه‌ی A قطع کند، آن‌گاه از نقطه‌ی A نامتناهی خط می‌توان رسم کرد که دو خط D و D' را قطع می‌کند. هر یک از این خط‌ها یکی از جواب‌های این مسئله هستند. (۱۳۳)

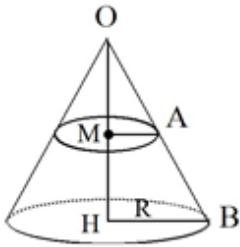
گزینه ۲ پاسخ صحیح است. اگر دو خط L_1 و L_2 موازی باشند، از نقطه‌ی A هیچ خطی نمی‌توان رسم کرد که هر دو خط L_1 و L_2 را قطع کند. (۱۳۴)

A •



هم‌چنین اگر دو خط L_1 و L_2 متقاطع باشند، فقط یک خط از A می‌گذرد که هر دو خط L_1 و L_2 را قطع کند (این خط از محل برخورد دو خط L_1 و L_2 می‌گذرد).





گزینه ۳ پاسخ صحیح است. فرض کنید M وسط ارتفاع OH باشد. اگر صفحه‌ی افقی از M عبور کند، مقطع حاصل دایره‌ای به شعاع MA است.

چون سطح جانبی مخروط از رابطه‌ی πRL به دست می‌آید که در آن شعاع قاعده و L اندازه‌ی مولد آن است. پس:

$$\pi RL = 16\sqrt{5}\pi \Rightarrow RL = 16\sqrt{5} \quad (1)$$

از طرف دیگر:

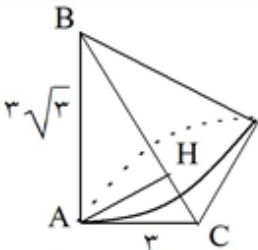
$$\begin{aligned} \triangle OBH : OH^2 + HB^2 &= OB^2 \Rightarrow OH^2 + R^2 = OB^2 \xrightarrow{OH = 2R} \\ (2R)^2 + R^2 &= OB^2 \Rightarrow OB = \sqrt{5}R \Rightarrow L = \sqrt{5}R \quad (2) \end{aligned}$$

از تساوی‌های ۱ و ۲ نتیجه می‌گیریم:

$$R(\sqrt{5}R) = 16\sqrt{5} \Rightarrow R^2 = 16 \Rightarrow R = 4$$

چون M وسط ارتفاع OH و موازی BH است، پس بنابر قضیه‌ی میان خط $MA = \frac{BH}{2} = 2$. بنابراین:

$$\text{مساحت مقطع} = \pi MA^2 = 4\pi$$



گزینه ۴ پاسخ صحیح است. با رسم ارتفاع AH در مثلث قائم‌الزاویه‌ی ABC این مثلث به دو مثلث قائم‌الزاویه‌ی ABH و ACH تقسیم می‌شود. می‌دانیم از دوران مثلث قائم‌الزاویه حول ضلع قائم آن مخروط به وجود می‌آید. بنابراین از دوران این دو مثلث حول خط BC دو مخروط با قاعده‌ی مشترک و شعاع قاعده‌ی AH ایجاد می‌شود. از روابط طولی در مثلث قائم‌الزاویه نتیجه می‌شود.

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 = 27 + 9 = 36 \Rightarrow BC = 6$$

$$AH \times BC = AB \times AC \Rightarrow 6AH = 3\sqrt{3} \times 3 \Rightarrow AH = \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

پس شکل فضایی ایجاد شده دو مخروط با قاعده‌ی مشترک به شعاع $\frac{3\sqrt{3}}{2}$ است.

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. اندازه‌ی یال مکعب را a در نظر می‌گیریم. سطح مقطع موردنظر مثلث متساوی‌الاضلاع ABC با طول ضلع $a\sqrt{2}$ است. در نتیجه:

$$\frac{S_{ABC}}{S_{\text{مکعب}}} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{4} (a\sqrt{2})^2}{6a^2} = \frac{\sqrt{3}}{12}$$

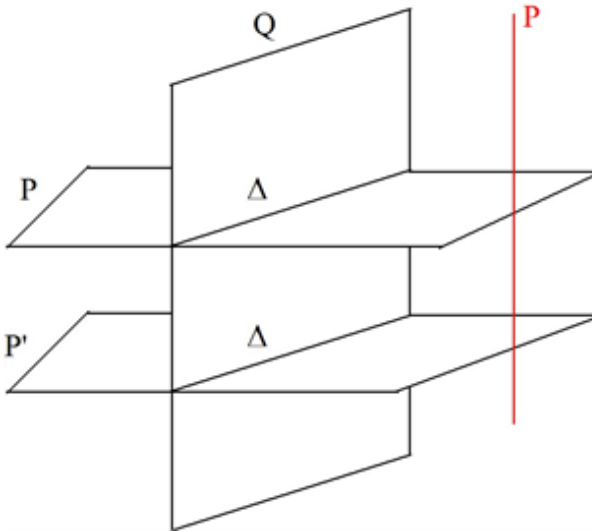
۱۳۸

گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

از نمادگذاری شکل روبه‌رو استفاده می‌کنیم.

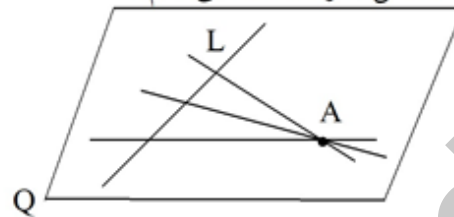
چون دو صفحه‌ی P و P' بر خط d عمود هستند پس با هم موازی‌اند ($P \parallel P'$).

هم‌چنین می‌دانیم، اگر صفحه‌ای یکی از دو صفحه‌ی موازی را قطع کند دیگری را هم قطع می‌کند و فصل مشترک آن‌ها موازی‌اند. بنابراین چون صفحه‌ی Q صفحه‌ی P را قطع کرده، صفحه‌ی P' را هم قطع می‌کند و دو خط Δ و Δ' با هم موازی هستند.



۱۳۹

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. از نمادگذاری شکل زیر استفاده می‌کنیم.



همه‌ی خط‌هایی که از A می‌گذرد و موازی P است، در صفحه‌ای موازی صفحه‌ی P هستند (صفحه‌ی Q در شکل). چون خط L با این خط‌ها متقاطع است، پس خط L هم در این صفحه قرار دارد، در نتیجه خط L موازی صفحه‌ی P است.

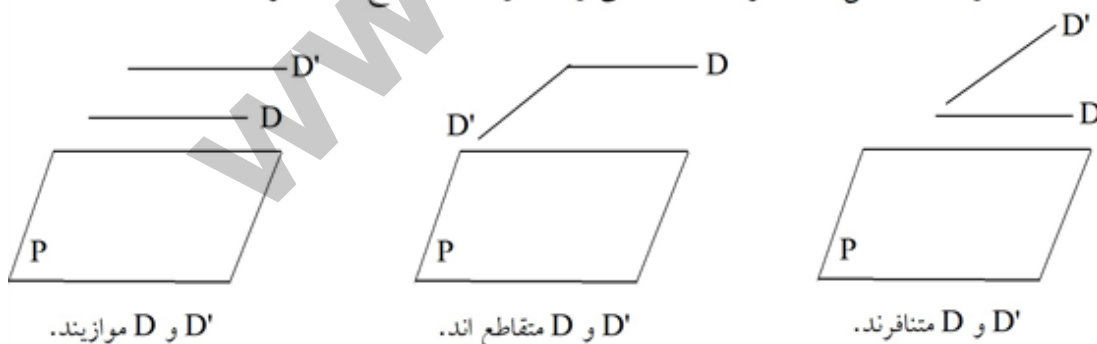


۱۴۰

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. می‌دانیم اگر دو صفحه‌ی متقاطع بر صفحه‌ای عمود باشند، فصل مشترک آن‌ها نیز بر آن صفحه عمود است. پس در این تست فصل مشترک دو صفحه‌ی P و Q یعنی خط Δ بر صفحه‌ی R عمود است. چون خط d موازی خط Δ است، پس خط d نیز بر صفحه‌ی R عمود است.

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. با توجه به شکل‌های زیر D و D' می‌توانند موازی، متقاطع یا متنافر باشند.

۱۴۱



D و D' موازی‌اند.

D و D' متقاطع‌اند.

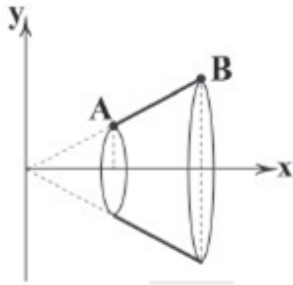
D و D' متنافرند.

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. اگر خط d را حول l دوران دهیم یک سطح استوانه‌ای شکل ایجاد می‌شود. صفحه‌ای که موازی p باشد نسبت به سطح استوانه‌ای سه حالت زیر را دارد:

(الف) اگر فاصله‌ی صفحه‌ی p از خط l کم‌تر از فاصله‌ی d و l باشد، فصل مشترک، دو خط موازی خواهد بود.
 (ب) اگر فاصله‌ی p از خط l دقیقاً برابر فاصله‌ی دو خط d و l باشد، آن‌گاه p بر سطح استوانه‌ای شکل مماس شده و فصل مشترک، یک خط خواهد بود.
 (ج) اگر فاصله‌ی p از خط l بیش‌تر از فاصله‌ی d و l باشد، فصل مشترک ندارند و مکان تهی است.

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. سطح مقطع، مثلثی است که ارتفاع آن ارتفاع هرم و قاعده‌ی آن طول مستطیل می‌باشد.

گزینه ۱ پاسخ صحیح است.



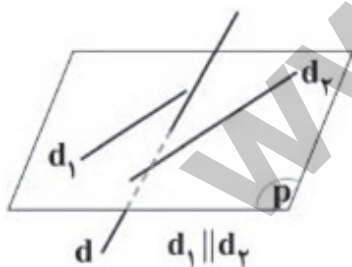
گزینه ۲ پاسخ صحیح است. اگر پاره‌خط AB را حول محور x ها دوران دهیم، مخروط ناقصی به دست می‌آید. تفاضل حجم‌های دو مخروط برابر حجم مخروط ناقص است. مختصات نقاط B و A به صورت $A(2, 1)$ و $B(4, 2)$ می‌باشد. اگر شعاع‌های مخروط‌های کوچک و بزرگ به ترتیب r و R و ارتفاع‌های آن به ترتیب h و H باشند، آن‌گاه:

$$V = \frac{\pi}{3} R^2 H - \frac{\pi}{3} r^2 h = \frac{\pi}{3} (2^2 \times 4 - 1^2 \times 2) = \frac{14\pi}{3}$$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. اگر P, Q, R دو به دو متقاطع باشند، حالت‌های زیر رخ می‌دهد:
 (الف) وقتی دو صفحه‌ی P و Q متقاطع باشند، فصل مشترک آن‌ها یک خط است که ممکن است صفحه‌ی سوم با این خط موازی باشد، در این صورت فصل مشترک سه صفحه، تهی خواهد بود.
 (ب) ممکن است صفحه‌ی سوم با فصل مشترک دو صفحه، متقاطع باشد، در این صورت فصل مشترک سه صفحه، یک نقطه است.
 (ج) سه صفحه‌ی P, Q, R در یک خط مشترک باشند.
 بنابراین فصل مشترک یا خط است یا نقطه یا فصل مشترک ندارد (تهی) است، در نتیجه هیچ‌گاه فصل مشترک، صفحه نخواهد شد.

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. الف صحیح است.

ب ناصحیح است، زیرا ممکن است که خط با صفحه متقاطع و نسبت به آن مایل باشد.



$$d \perp d_1, d \perp d_2, d \not\parallel p$$

ج صحیح است.

بنابراین فقط ۲ جمله، صحیح است.

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. زمانهایی پنج ضلعی روی سوراخ قرار می‌گیرد که مجموع زاویه‌های دوران، مضرب ۱۰۸ باشد. (108° اندازه هر یک از زاویه‌های داخلی پنج ضلعی منتظم است.) از طرفی مجموع زاویه‌های دوران، مضرب ۲۱ نیز هست. پس اولین بار که پنج ضلعی داخل سوراخ قرار می‌گیرد، اولین مضرب مشترک ۲۱ و ۱۰۸ با همان ک.م.م این دو عدد است. از طرفی، $108 \times 7 = [108, 21]$. پس رأسی که ابتدا در بالای صفحه بوده در جهت عقربه‌های ساعت ۷ بار چرخیده، بعد از ۵ بار روی خودش افتاده و بعد از ۲ بار دیگر، به رأسی که در پایین صفحه و سمت چپ بوده، منتقل شده است.

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. هشت وجهی از دو هرم با قاعده مربع تشکیل شده است. قطر وجه مربع از این هرمها برابر ۱ است. پس مساحت قاعده هرم برابر است با $\frac{1}{2} \times 1 \times 1 = \frac{1}{2}$.

از طرفی ارتفاع هر یک از هرمها برابر $\frac{1}{2}$ است. پس حجم هر هرم برابر است با $\frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{12}$. در نتیجه حجم هشت وجهی برابر است با $8 \times \frac{1}{12} = \frac{2}{3}$.

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. اگر حجم بخش مشترک را X بنامیم، داریم:

$$\frac{V - X}{V} = \frac{9}{10}, \quad \frac{W - X}{W} = \frac{15}{100}$$

در نتیجه:

$$1 - \frac{X}{V} = \frac{9}{10} \Rightarrow \frac{X}{V} = \frac{1}{10}, \quad 1 - \frac{X}{W} = \frac{15}{100} \Rightarrow \frac{X}{W} = \frac{15}{100}$$

پس:

$$X = \frac{V}{10}, \quad X = \frac{15W}{100}$$

بنابراین:

$$\frac{V}{10} = \frac{15}{100} W \\ \Rightarrow \frac{V}{W} = \frac{3}{2} \Rightarrow V = \frac{3}{2} W$$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

اگر طول، عرض و ارتفاع مکعب مستطیل را با a، b و c نشان دهیم، داریم:

$$ab = C, \quad ac = B, \quad bc = A$$

پس $ab \times ac \times bc = ABC$ ، یعنی $(abc)^2 = ABC$. از طرفی حجم مکعب مستطیل برابر است با abc. پس حجم مکعب مستطیل برابر است با \sqrt{ABC} .

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. زاویه بزرگتر لوزی، یک زاویه از هشت ضلعی منتظم را ساخته است. هر زاویه داخلی یک هشت ضلعی منتظم 135° است. پس زاویه بزرگتر لوزی هم 135° است.

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. مکعب‌هایی ۴ وجهشان رنگ می‌شود که از دو وجه به مکعب‌های دیگر چسبیده باشند. تمام مکعب‌ها به جز مکعب اول و آخر، از دو وجه به مکعب‌های دیگر چسبیده‌اند.

۱۵۴

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. امکان ندارد مکعب بزرگ، $۶ \times ۶ \times ۶$ یا بزرگتر باشد. اگر این مکعب $۶ \times ۶ \times ۶$ باشد، حتی اگر تمام وجه‌هایش رنگ شده باشند $۶۴ = ۴ \times ۴ \times ۴$ مکعب کوچک بدون وجه رنگی خواهیم داشت. مکعب بزرگ نمی‌تواند $۳ \times ۳ \times ۳$ یا کوچکتر باشد، چون تعداد مکعب‌های کوچک چنین مکعب‌هایی از ۴۵ کم‌تر است. همچنین مکعب بزرگ نمی‌تواند $۴ \times ۴ \times ۴$ باشد، چون اگر $۴ \times ۴ \times ۴$ باشد و تنها یک وجه آن رنگ شده باشد، $۴۸ = ۳ \times ۴ \times ۴$ مکعب بدون وجه رنگی خواهیم داشت. اگر آن دو وجه آن رنگ شده باشد هم دو حالت داریم:

حالت اول: دو وجه کنار هم رنگ شده باشند که در این صورت $۳۶ = ۳ \times ۳ \times ۴$ مکعب بدون وجه رنگی خواهیم داشت.

حالت دوم: دو وجه روبه‌روی هم رنگ شده باشند که، در این صورت $۳۲ = ۴ \times ۴ \times ۲$ مکعب بدون وجه رنگی خواهیم داشت.

اگر هم بیش از دو وجه رنگ شده باشند، تعداد مکعب‌های بدون وجه رنگی باز هم کم‌تر می‌شود. پس مکعب بزرگ نمی‌تواند $۴ \times ۴ \times ۴$ باشد. بنابراین تنها حالتی که باقی می‌ماند این است که مکعب $۵ \times ۵ \times ۵$ باشد.

اگر هر شش وجه مکعب بزرگ رنگ شده باشند، $۲۷ = ۳ \times ۳ \times ۳$ مکعب بدون وجه رنگی خواهیم داشت. اگر پنج وجه مکعب بزرگ رنگ شده باشند، $۳۶ = ۳ \times ۳ \times ۴$ مکعب بدون وجه رنگی خواهیم داشت.

اگر چهار وجه مکعب بزرگ رنگ شده باشند و دو وجهی که رنگ نشده‌اند کنار هم باشند، $۴۸ = ۳ \times ۴ \times ۴$ وجه بدون رنگ خواهیم داشت.

اگر چهار وجه مکعب رنگ شده باشند و دو وجه بدون رنگ روبه‌روی هم باشند، آنگاه $۴۵ = ۳ \times ۳ \times ۵$ وجه بدون رنگ خواهیم داشت.

اگر کم‌تر از ۴ وجه رنگی داشته باشیم، تعداد مکعب‌های با وجه‌های بدون رنگ بیش‌تر از ۴۵ خواهد بود. پس چهار وجه مکعب رنگ شده‌اند.

۱۵۵

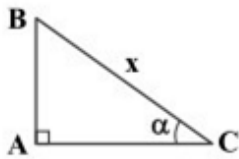
گزینه ۱ پاسخ صحیح است.



گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

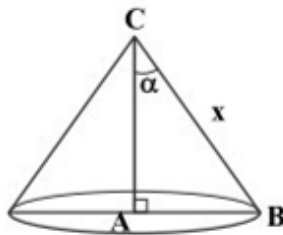
نکته: حجم مخروطی به شعاع قاعده‌ی r و ارتفاع h برابر با $V = \frac{1}{3} \pi r^2 h$ است.

نکته: در شکل مقابل داریم:

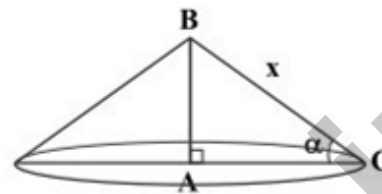


$$\begin{cases} AB = x \sin \alpha \\ AC = x \cos \alpha \end{cases}$$

شکل‌های حاصل از دوران دو مخروط به شکل‌های زیر است:



شکل «۱»



شکل «۲»

نسبت حجم این دو مخروط برابر است با:

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{\frac{1}{3} \pi \times AB^2 \times AC}{\frac{1}{3} \pi \times AC^2 \times AB} = \frac{\frac{1}{3} \pi (x \sin \alpha)^2 (x \cos \alpha)}{\frac{1}{3} \pi (x \cos \alpha)^2 (x \sin \alpha)} = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \tan \alpha$$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

نکته: حجم استوانه‌ای به شعاع قاعده‌ی r و ارتفاع h برابر با $V = \pi r^2 h$ است. شکل حاصل از دوران مربع حول خط d ، فضای بین دو استوانه به ارتفاع a و شعاع‌های قاعده‌ی x و $a+x$ است. پس داریم:

$$r_1 = a + x \text{ : شعاع قاعده‌ی استوانه‌ی بزرگ}$$

$$r_2 = x \text{ : شعاع قاعده‌ی استوانه‌ی کوچک}$$

$$h = a \text{ : ارتفاع هر دو استوانه}$$

$$V_1 = \pi r_1^2 h = \pi (a + x)^2 a \text{ : حجم استوانه‌ی بزرگ}$$

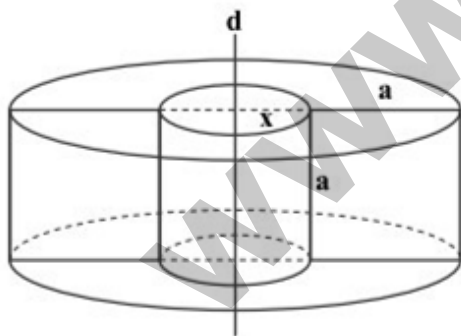
$$V_2 = \pi r_2^2 h = \pi x^2 a \text{ : حجم استوانه‌ی کوچک}$$

$$(V = V_1 - V_2 = \pi (a + x)^2 a - \pi x^2 a = \pi a (a + x)^2 - x^2)$$

$$= \pi a (a^2 + x^2 + 2ax - x^2) = \pi a (a^2 + 2ax)$$

$$= \pi a^2 (a + 2x) \stackrel{2x = a}{=} \pi a^2 (a + a) \Rightarrow V = \pi a^2 \times 2a = 2\pi a^3$$

$$\xrightarrow{V = 54\pi} 2\pi a^3 = 54\pi \Rightarrow a^3 = 27 \Rightarrow a = 3$$



www.akoedu.ir

۱۶۰

۱۶۱

۱۶۲

۱۶۳

۱۶۴

۱۶۵

www.akoedu.ir

www.akoedu.ir

www.akoedu.ir

www.akoedu.ir

۱۷۷

۱۷۸

۱۷۹

۱۸۰

۱۸۱

۱۸۲

۱۸۳

www.akoedu.ir

www.akoedu.ir

۱۸۷

۱۸۸

۱۸۹

۱۹۰

۱۹۱

۱۹۲

www.akoedu.ir

www.akoedu.ir

www.akoedu.ir

۲۰۰

۲۰۱

۲۰۲

۲۰۳

۲۰۴

۲۰۵

۲۰۶

۲۰۷

www.akoedu.ir

www.akoedu.ir

www.akoedu.ir

۲۱۵

۲۱۶

۲۱۷

۲۱۸

۲۱۹

۲۲۰

www.akoedu.ir



www.akoedu.ir

۲۲۵

۲۲۶

۲۲۷

۲۲۸

۲۲۹

۲۳۰

www.akoedu.ir



www.akoedu.ir

www.akoedu.ir

۲۳۷

۲۳۸

۲۳۹

۲۴۰

۲۴۱

۲۴۲

۲۴۳

www.akoedu.ir

۲۴۴

۲۴۵

۲۴۶

۲۴۷

۲۴۸

www.akoedu.ir

www.akoedu.ir

۲۵۲

۲۵۳

۲۵۴

۲۵۵

۲۵۶

www.akoedu.ir

۲۵۷

۲۵۸

۲۵۹

۲۶۰

www.akoedu.ir

۲۶۱

۲۶۲

۲۶۳

۲۶۴

۲۶۵

www.akoedu.ir

www.akoedu.ir

www.akoedu.ir

www.akoedu.ir

www.akoedu.ir

۲۸۰

۲۸۱

۲۸۲

۲۸۳

۲۸۴

www.akoedu.ir

۲۸۵

۲۸۶

۲۸۷

۲۸۸

۲۸۹

www.akoedu.ir

www.akoedu.ir

۱	۱	۲	۳	۴	۳۳	۱	۲	۳	۴	۶۵	۱	۲	۳	۴	۹۷	۱	۲	۳	۴
۲	۱	۲	۳	۴	۳۴	۱	۲	۳	۴	۶۶	۱	۲	۳	۴	۹۸	۱	۲	۳	۴
۳	۱	۲	۳	۴	۳۵	۱	۲	۳	۴	۶۷	۱	۲	۳	۴	۹۹	۱	۲	۳	۴
۴	۱	۲	۳	۴	۳۶	۱	۲	۳	۴	۶۸	۱	۲	۳	۴	۱۰۰	۱	۲	۳	۴
۵	۱	۲	۳	۴	۳۷	۱	۲	۳	۴	۶۹	۱	۲	۳	۴	۱۰۱	۱	۲	۳	۴
۶	۱	۲	۳	۴	۳۸	۱	۲	۳	۴	۷۰	۱	۲	۳	۴	۱۰۲	۱	۲	۳	۴
۷	۱	۲	۳	۴	۳۹	۱	۲	۳	۴	۷۱	۱	۲	۳	۴	۱۰۳	۱	۲	۳	۴
۸	۱	۲	۳	۴	۴۰	۱	۲	۳	۴	۷۲	۱	۲	۳	۴	۱۰۴	۱	۲	۳	۴
۹	۱	۲	۳	۴	۴۱	۱	۲	۳	۴	۷۳	۱	۲	۳	۴	۱۰۵	۱	۲	۳	۴
۱۰	۱	۲	۳	۴	۴۲	۱	۲	۳	۴	۷۴	۱	۲	۳	۴	۱۰۶	۱	۲	۳	۴
۱۱	۱	۲	۳	۴	۴۳	۱	۲	۳	۴	۷۵	۱	۲	۳	۴	۱۰۷	۱	۲	۳	۴
۱۲	۱	۲	۳	۴	۴۴	۱	۲	۳	۴	۷۶	۱	۲	۳	۴	۱۰۸	۱	۲	۳	۴
۱۳	۱	۲	۳	۴	۴۵	۱	۲	۳	۴	۷۷	۱	۲	۳	۴	۱۰۹	۱	۲	۳	۴
۱۴	۱	۲	۳	۴	۴۶	۱	۲	۳	۴	۷۸	۱	۲	۳	۴	۱۱۰	۱	۲	۳	۴
۱۵	۱	۲	۳	۴	۴۷	۱	۲	۳	۴	۷۹	۱	۲	۳	۴	۱۱۱	۱	۲	۳	۴
۱۶	۱	۲	۳	۴	۴۸	۱	۲	۳	۴	۸۰	۱	۲	۳	۴	۱۱۲	۱	۲	۳	۴
۱۷	۱	۲	۳	۴	۴۹	۱	۲	۳	۴	۸۱	۱	۲	۳	۴	۱۱۳	۱	۲	۳	۴
۱۸	۱	۲	۳	۴	۵۰	۱	۲	۳	۴	۸۲	۱	۲	۳	۴	۱۱۴	۱	۲	۳	۴
۱۹	۱	۲	۳	۴	۵۱	۱	۲	۳	۴	۸۳	۱	۲	۳	۴	۱۱۵	۱	۲	۳	۴
۲۰	۱	۲	۳	۴	۵۲	۱	۲	۳	۴	۸۴	۱	۲	۳	۴	۱۱۶	۱	۲	۳	۴
۲۱	۱	۲	۳	۴	۵۳	۱	۲	۳	۴	۸۵	۱	۲	۳	۴	۱۱۷	۱	۲	۳	۴
۲۲	۱	۲	۳	۴	۵۴	۱	۲	۳	۴	۸۶	۱	۲	۳	۴	۱۱۸	۱	۲	۳	۴
۲۳	۱	۲	۳	۴	۵۵	۱	۲	۳	۴	۸۷	۱	۲	۳	۴	۱۱۹	۱	۲	۳	۴
۲۴	۱	۲	۳	۴	۵۶	۱	۲	۳	۴	۸۸	۱	۲	۳	۴	۱۲۰	۱	۲	۳	۴
۲۵	۱	۲	۳	۴	۵۷	۱	۲	۳	۴	۸۹	۱	۲	۳	۴	۱۲۱	۱	۲	۳	۴
۲۶	۱	۲	۳	۴	۵۸	۱	۲	۳	۴	۹۰	۱	۲	۳	۴	۱۲۲	۱	۲	۳	۴
۲۷	۱	۲	۳	۴	۵۹	۱	۲	۳	۴	۹۱	۱	۲	۳	۴	۱۲۳	۱	۲	۳	۴
۲۸	۱	۲	۳	۴	۶۰	۱	۲	۳	۴	۹۲	۱	۲	۳	۴	۱۲۴	۱	۲	۳	۴
۲۹	۱	۲	۳	۴	۶۱	۱	۲	۳	۴	۹۳	۱	۲	۳	۴	۱۲۵	۱	۲	۳	۴
۳۰	۱	۲	۳	۴	۶۲	۱	۲	۳	۴	۹۴	۱	۲	۳	۴	۱۲۶	۱	۲	۳	۴
۳۱	۱	۲	۳	۴	۶۳	۱	۲	۳	۴	۹۵	۱	۲	۳	۴	۱۲۷	۱	۲	۳	۴
۳۲	۱	۲	۳	۴	۶۴	۱	۲	۳	۴	۹۶	۱	۲	۳	۴	۱۲۸	۱	۲	۳	۴

۱۲۹	۱	۲	۳	۴
۱۳۰	۱	۲	۳	۴
۱۳۱	۱	۲	۳	۴
۱۳۲	۱	۲	۳	۴
۱۳۳	۱	۲	۳	۴
۱۳۴	۱	۲	۳	۴
۱۳۵	۱	۲	۳	۴
۱۳۶	۱	۲	۳	۴
۱۳۷	۱	۲	۳	۴
۱۳۸	۱	۲	۳	۴
۱۳۹	۱	۲	۳	۴
۱۴۰	۱	۲	۳	۴
۱۴۱	۱	۲	۳	۴
۱۴۲	۱	۲	۳	۴
۱۴۳	۱	۲	۳	۴
۱۴۴	۱	۲	۳	۴
۱۴۵	۱	۲	۳	۴
۱۴۶	۱	۲	۳	۴
۱۴۷	۱	۲	۳	۴
۱۴۸	۱	۲	۳	۴
۱۴۹	۱	۲	۳	۴
۱۵۰	۱	۲	۳	۴
۱۵۱	۱	۲	۳	۴
۱۵۲	۱	۲	۳	۴
۱۵۳	۱	۲	۳	۴
۱۵۴	۱	۲	۳	۴
۱۵۵	۱	۲	۳	۴
۱۵۶	۱	۲	۳	۴
۱۵۷	۱	۲	۳	۴
۱۵۸	۱	۲	۳	۴
۱۵۹	۱	۲	۳	۴
۱۶۰	۱	۲	۳	۴

۱۶۱	۱	۲	۳	۴
۱۶۲	۱	۲	۳	۴
۱۶۳	۱	۲	۳	۴
۱۶۴	۱	۲	۳	۴
۱۶۵	۱	۲	۳	۴
۱۶۶	۱	۲	۳	۴
۱۶۷	۱	۲	۳	۴
۱۶۸	۱	۲	۳	۴
۱۶۹	۱	۲	۳	۴
۱۷۰	۱	۲	۳	۴
۱۷۱	۱	۲	۳	۴
۱۷۲	۱	۲	۳	۴
۱۷۳	۱	۲	۳	۴
۱۷۴	۱	۲	۳	۴
۱۷۵	۱	۲	۳	۴
۱۷۶	۱	۲	۳	۴
۱۷۷	۱	۲	۳	۴
۱۷۸	۱	۲	۳	۴
۱۷۹	۱	۲	۳	۴
۱۸۰	۱	۲	۳	۴
۱۸۱	۱	۲	۳	۴
۱۸۲	۱	۲	۳	۴
۱۸۳	۱	۲	۳	۴
۱۸۴	۱	۲	۳	۴
۱۸۵	۱	۲	۳	۴
۱۸۶	۱	۲	۳	۴
۱۸۷	۱	۲	۳	۴
۱۸۸	۱	۲	۳	۴
۱۸۹	۱	۲	۳	۴
۱۹۰	۱	۲	۳	۴
۱۹۱	۱	۲	۳	۴
۱۹۲	۱	۲	۳	۴

۱۹۳	۱	۲	۳	۴
۱۹۴	۱	۲	۳	۴
۱۹۵	۱	۲	۳	۴
۱۹۶	۱	۲	۳	۴
۱۹۷	۱	۲	۳	۴
۱۹۸	۱	۲	۳	۴
۱۹۹	۱	۲	۳	۴
۲۰۰	۱	۲	۳	۴
۲۰۱	۱	۲	۳	۴
۲۰۲	۱	۲	۳	۴
۲۰۳	۱	۲	۳	۴
۲۰۴	۱	۲	۳	۴
۲۰۵	۱	۲	۳	۴
۲۰۶	۱	۲	۳	۴
۲۰۷	۱	۲	۳	۴
۲۰۸	۱	۲	۳	۴
۲۰۹	۱	۲	۳	۴
۲۱۰	۱	۲	۳	۴
۲۱۱	۱	۲	۳	۴
۲۱۲	۱	۲	۳	۴
۲۱۳	۱	۲	۳	۴
۲۱۴	۱	۲	۳	۴
۲۱۵	۱	۲	۳	۴
۲۱۶	۱	۲	۳	۴
۲۱۷	۱	۲	۳	۴
۲۱۸	۱	۲	۳	۴
۲۱۹	۱	۲	۳	۴
۲۲۰	۱	۲	۳	۴
۲۲۱	۱	۲	۳	۴
۲۲۲	۱	۲	۳	۴
۲۲۳	۱	۲	۳	۴
۲۲۴	۱	۲	۳	۴

۲۲۵	۱	۲	۳	۴
۲۲۶	۱	۲	۳	۴
۲۲۷	۱	۲	۳	۴
۲۲۸	۱	۲	۳	۴
۲۲۹	۱	۲	۳	۴
۲۳۰	۱	۲	۳	۴
۲۳۱	۱	۲	۳	۴
۲۳۲	۱	۲	۳	۴
۲۳۳	۱	۲	۳	۴
۲۳۴	۱	۲	۳	۴
۲۳۵	۱	۲	۳	۴
۲۳۶	۱	۲	۳	۴
۲۳۷	۱	۲	۳	۴
۲۳۸	۱	۲	۳	۴
۲۳۹	۱	۲	۳	۴
۲۴۰	۱	۲	۳	۴
۲۴۱	۱	۲	۳	۴
۲۴۲	۱	۲	۳	۴
۲۴۳	۱	۲	۳	۴
۲۴۴	۱	۲	۳	۴
۲۴۵	۱	۲	۳	۴
۲۴۶	۱	۲	۳	۴
۲۴۷	۱	۲	۳	۴
۲۴۸	۱	۲	۳	۴
۲۴۹	۱	۲	۳	۴
۲۵۰	۱	۲	۳	۴
۲۵۱	۱	۲	۳	۴
۲۵۲	۱	۲	۳	۴
۲۵۳	۱	۲	۳	۴
۲۵۴	۱	۲	۳	۴
۲۵۵	۱	۲	۳	۴
۲۵۶	۱	۲	۳	۴

۲۵۷	۱	۲	۳	۴
۲۵۸	۱	۲	۳	۴
۲۵۹	۱	۲	۳	۴
۲۶۰	۱	۲	۳	۴
۲۶۱	۱	۲	۳	۴
۲۶۲	۱	۲	۳	۴
۲۶۳	۱	۲	۳	۴
۲۶۴	۱	۲	۳	۴
۲۶۵	۱	۲	۳	۴
۲۶۶	۱	۲	۳	۴
۲۶۷	۱	۲	۳	۴
۲۶۸	۱	۲	۳	۴
۲۶۹	۱	۲	۳	۴
۲۷۰	۱	۲	۳	۴
۲۷۱	۱	۲	۳	۴
۲۷۲	۱	۲	۳	۴
۲۷۳	۱	۲	۳	۴
۲۷۴	۱	۲	۳	۴
۲۷۵	۱	۲	۳	۴
۲۷۶	۱	۲	۳	۴
۲۷۷	۱	۲	۳	۴
۲۷۸	۱	۲	۳	۴
۲۷۹	۱	۲	۳	۴
۲۸۰	۱	۲	۳	۴
۲۸۱	۱	۲	۳	۴
۲۸۲	۱	۲	۳	۴
۲۸۳	۱	۲	۳	۴
۲۸۴	۱	۲	۳	۴
۲۸۵	۱	۲	۳	۴
۲۸۶	۱	۲	۳	۴
۲۸۷	۱	۲	۳	۴
۲۸۸	۱	۲	۳	۴

۲۸۹	۱	۲	۳	۴
۲۹۰	۱	۲	۳	۴

www.akoedu.ir