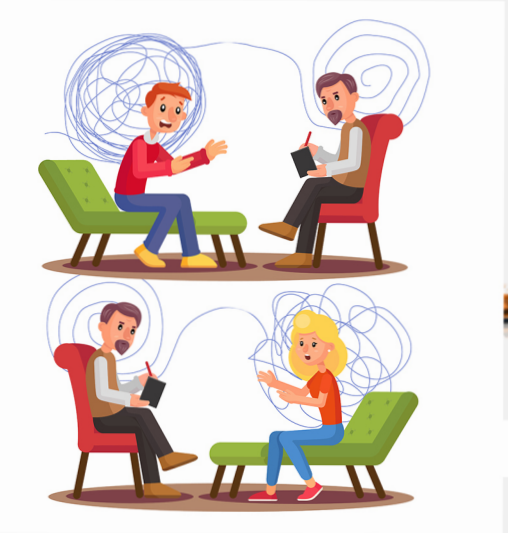
AKO
گروه مشاوره و برنامه ریزی

WWW.AKOEDU.IR

اولین و با کیفیت ترین

آکادمی کنکور در ایران

کلاس های vip کنکور



جهت دریافت برنامه ی شخصی سازی شده یک هفته ای رایگان کلیک کنید و یا به شماره ی ۰۹۰۲۵۶۴۶۲۳۴ عدد ۱ را ارسال کنید.

تلفن تماس: ۰۲۶۳۳۴۰۸۹۴۴

۲۰۰ تست هندسه ۲ تبدیل های هندسی

۱) چندضلعی منتظمی در دایره‌ای به مرکز O محاط شده است. اگر این چندضلعی با دوران‌های ۱۵ و ۱۸ درجه حول نقطه‌ی O بر خودش منطبق شود، آن‌گاه تعداد اضلاع این چندضلعی کدام می‌تواند باشد؟

۱) ۵۰ ۲) ۷۵ ۳) ۹۰ ۴) ۱۲۰

۲) نقاط $A(۲,۳)$، $B(۵,۳)$، $C(۵,-۱)$ و $D(۲,-۱)$ رئوس یک چهارضلعی هستند. ابتدا چهارضلعی را تحت زاویه‌ی ۴۵° نسبت به مرکز آن دوران می‌دهیم و سپس مجانس شکل تصویر را با نسبت تجانس $k=\frac{۳}{۴}$ می‌یابیم. حاصل دارای چه مساحتی است؟

۱) $\frac{۳}{۴}$ ۲) $\frac{۹}{۱۶}$ ۳) $\frac{۹}{۴}$ ۴) $\frac{۲۷}{۴}$

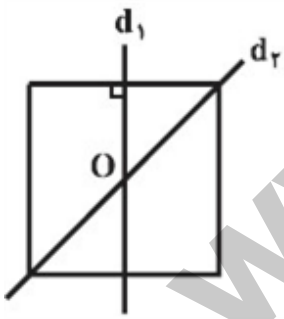
۳) نقطه‌ی P روی ضلع AB از مربع ABCD به گونه‌ای قرار دارد که $AP=۵$ و $BP=۷$ است. حداقل محیط ممکن برای مثلث‌هایی که دو رأس آن B و P و رأس دیگر آن روی قطر AC باشد، کدام است؟

۱) ۱۶ ۲) ۱۸ ۳) ۲۰ ۴) ۲۲

۴) اگر G محل همرسی میانه‌های مثلث ABC و مساحت محصور بین این مثلث و تصویر آن تحت انتقال با بردار $\overrightarrow{BG}$ برابر ۶ واحد مربع باشد، مساحت مثلث ABC کدام است؟

۱) ۳۶ ۲) ۴۲ ۳) ۴۸ ۴) ۵۴

۵) در شکل زیر، بازتاب مربع را ابتدا نسبت به خط $d_۱$ و سپس بازتاب شکل حاصل را نسبت به خط $d_۲$ رسم می‌کنیم. تبدیلی که مربع اولیه را به آخرین شکل تصویر می‌کند، چند نقطه‌ی ثابت تبدیل دارد؟ (O مرکز مربع است)



۱) صفر ۲) بی‌شمار
۳) ۱ ۴) ۲

۶) انتقال‌یافته‌ی دایره‌ی $C(O,R)$ تحت بردار $\vec{v}$ بر دایره‌ی C مماس خارج است. اندازه‌ی بردار $\vec{V}$ کدام است؟

۱) $\frac{۳}{۲}R$ ۲) R ۳) $۲R$ ۴) $\frac{۱}{۲}R$

۷) دو خط D و D' مفروض است. چند نقطه وجود دارد که اگر D را حول آن نقطه، دوران دهیم بر D' منطبق می‌گردد؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) بی‌شمار ۴) ۴

۸) اگر مثلث $A'B'C'$ مجانس مثلث ABC به مرکز O و با نسبت $\frac{۱}{۲}$ باشد، نسبت محیط $A'B'C'$ به محیط ABC کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۲}$ ۲) $\frac{۱}{۴}$ ۳) ۲ ۴) ۴

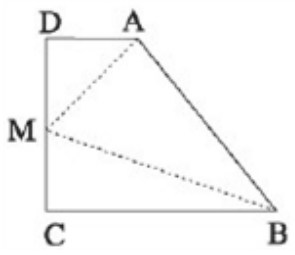
۹) نقطه‌ی $(۳,y)$ بازتاب نقطه‌ی $(x,۶)$ نسبت به نقطه‌ی $O(-۱,۲)$ است. در این صورت $x + y$ کدام است؟

۱) -۲ ۲) -۵ ۳) -۷ ۴) -۳

۱۰) نقطه‌های $A(۱,۵)$ و $B(۵,-۵)$ و خط $L : y - ۲ = ۰$ را در نظر بگیرید. طول کوتاه‌ترین مسیری که متحرکی از نقطه A به نقطه B برود و فاصله‌ی خط L و محور xها را عمودی طی کند چقدر است؟

۱) $۲(\sqrt{۵}+۱)$ ۲) ۱۰ ۳) $۲(۲\sqrt{۵}+۱)$ ۴) ۱۲

۱۱) در ذوزنقه‌ی قائم‌الزاویه $ABCD$ ، $CB = CD = ۶$ و $AD = ۲$ هستند. نقطه‌ی M روی ساق قائم CD ، متحرک است. کمترین مقدار $MA + MB$ کدام است؟



۱) ۱۰ ۲) ۱۰/۵ ۳) ۱۱ ۴) ۱۱/۵

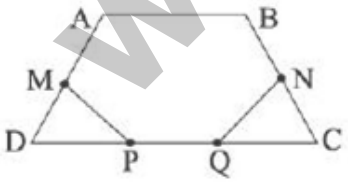
۱۲) یک مربع را در تجانسی با نسبت تجانس $-\frac{۲}{۳}$ و به مرکز نقطه‌ی تلاقی قطرها تصویر کرده‌ایم. اگر مساحت بین مربع و تصویرش ۱۰ باشد. آنگاه محیط مربع اولیه کدام است؟

۱) ۱۲ ۲) ۲۴ ۳) $۱۲\sqrt{۲}$ ۴) $۲۴\sqrt{۲}$

۱۳) دو دایره به شعاع‌های ۳ و ۴ مماس خارج هستند. فاصلهٔ مرکز تجانس مستقیم آن‌ها از مرکز دایره بزرگ‌تر چه‌قدر است؟

۱) ۱۸ ۲) ۲۱ ۳) ۲۸ ۴) ۱۰

۱۴) در ذوزنقهٔ متساوی‌الساقین $ABCD$ شکل زیر، قاعدهٔ کوچک و ساق‌ها برابر ۴ واحد و قاعدهٔ بزرگ ۸ واحد است. M و N وسط‌های دو ساق قرار دارند و $PQ = ۲$ می‌باشد. کم‌ترین محیط شش‌ضلعی $AMPQNB$ چند واحد است؟

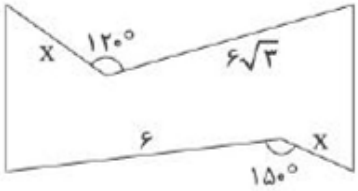


۱) ۱۶
۲) $۱۰ + ۲\sqrt{۳}$
۳) $۱۰ + ۲\sqrt{۷}$
۴) ۱۲

۱۵) مثلث قائم‌الزاویهٔ متساوی‌الساقین $\overset{\triangle}{ABC}$ $(\hat{A} = ۹۰^\circ)$ مفروض است. نقطهٔ M وسط BC و نقطهٔ N روی AC طوری قرار دارد که محیط مثلث MNB، کم‌ترین مقدار است. مساحت مثلث MNB چه کسری از مساحت مثلث ABC است؟

۱) $\frac{۱}{۲}$ ۲) $\frac{۱}{۳}$ ۳) $\frac{۱}{۴}$ ۴) $\frac{\sqrt{۲}}{۲}$

۱۶) زمینی مطابق شکل مفروض است. می‌خواهیم به کمک تبدیل‌های هندسی مساحت آن را افزایش دهیم به طوری که محیط آن تغییر نکند. اگر مساحت افزایش یافته برابر ۲۴ باشد، مقدار x کدام است؟



۱) ۴
۲) ۳
۳) ۲
۴) ۱

۱۷) فرض کنید G محل برخورد میانه‌های مثلث ABC باشد و مثلث‌های A'B'C' و A"B"C" به ترتیب مجانس‌های مثلث ABC با مرکز تجانس G و نسبت‌های تجانس $\frac{۱}{۲}$ و $-\frac{۱}{۲}$ باشند. نسبت مساحت دو مثلث تبدیل یافته چه‌قدر است؟

۱) $\frac{۱}{۴}$ ۲) $\frac{۱}{۲}$ ۳) $\frac{۱}{۳}$ ۴) ۱

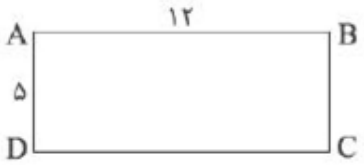
۱۸) مجانس مثلث قائم‌الزاویهٔ $\overset{\triangle}{ABC}$ $(A = ۹۰^\circ)$ را به مرکز تجانس A و نسبت تجانس $\frac{۷}{۴}$ رسم کرده‌ایم. اگر تحت این تبدیل، تصویر B، B' و تصویر C، C' و مساحت چهارضلعی BB'C'C، $\frac{۳۳}{۱۶}$ باشد، مساحت مثلث ABC کدام است؟

۱) $\frac{۴۹}{۱۶}$ ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) $\frac{۳}{۲}$

۱۹) دایره‌های $C(O,۶)$ و $C'(O',۱۶)$ با طول خط‌المرکزین ۳۰ واحد مفروضند. دایرهٔ C را با نسبت k و به مرکز O' مجانس می‌کنیم تا تصویر آن بر هر دو دایره مماس خارج شود، k کدام است؟

۱) $\frac{۳}{۲}$ ۲) $\frac{۲}{۳}$ ۳) $\frac{۳}{۸}$ ۴) $\frac{۸}{۳}$

۲۰) در مستطیل ABCD، رأس A را نسبت به نیمساز زاویهٔ D بازتاب می‌کنیم و سپس تصویر آن را نسبت به نیمساز زاویهٔ B بازتاب می‌کنیم، فاصلهٔ رأس A تا تصویر نهایی کدام است؟



۱) $۷\sqrt{۲}$
۲) ۱۴
۳) ۱۳
۴) $\frac{۱۳\sqrt{۲}}{۲}$

۲۱) نقطهٔ A خارج خط d را نسبت به خط d بازتاب می‌کنیم و 'A می‌نامیم. A را حول مرکز 'A، α درجه دوران می‌دهیم تا تصویر آن روی خط d بیفتد. اندازهٔ زاویهٔ α کدام گزینه می‌تواند باشد؟

۱) ۳۰° ۲) ۴۵° ۳) ۶۰° ۴) ۹۰°

۲۲) نقاط A(-۱,۳)، B(۰,۴) و C(۳,a) را در نظر بگیرید. به ازای کدام مقدار a، مثلث ABC کمترین محیط ممکن را دارد؟

۱) $\frac{۲۳}{۷}$ ۲) $\frac{۲۵}{۷}$ ۳) $\frac{۱۴}{۳}$ ۴) $\frac{۱۱}{۳}$

۲۳) مثلث قائم‌الزاویه‌ی ABC به طول وتر ۸ واحد مفروض است. این مثلث را توسط بردار $\overrightarrow{AT}$ که در جهت بردار $\overrightarrow{AM}$ (M وسط وتر BC) قرار دارد، انتقال می‌دهیم. اگر مساحت محدود بین مثلث اولیه و جدید، $\frac{۱}{۱۶}$ مساحت اولیه باشد، اندازه بردار $\overrightarrow{AT}$، کدام است؟

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) $\frac{۱}{۳}$ ۴) $\frac{۱}{۴}$

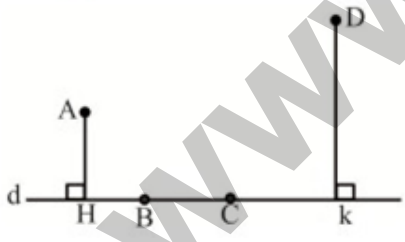
۲۴) اگر دوران نقاط A(۱ , -۱) و B(۳ , ۴) نسبت به نقطه O به‌ترتیب A'(-۵ , ۲) و B'(۰ , ۱) باشد، تفاضل طول و عرض نقطه O کدام است؟

۱) $\frac{۱۳}{۳}$ ۲) ۴ ۳) $\frac{۱۱}{۳}$ ۴) ۳

۲۵) اگر C'(O' , R') تجانس یافته دایره C(O , ۱۰) به مرکز M و نسبت $k = -\frac{۱}{۲}$ و OM = ۱۸ باشد، طول مماس مشترک خارجی دو دایره کدام است؟

۱) $۴\sqrt{۲۱}$ ۲) $۴\sqrt{۲۶}$ ۳) $۸\sqrt{۱۰}$ ۴) $۸\sqrt{۱۱}$

۲۶) اگر در شکل زیر فاصله A و D تا خط d به ترتیب، ۴ و ۱۶، HK = ۴۳ و BC = ۵/۵ باشد، کمترین مقدار AB + BC + CD کدام است؟

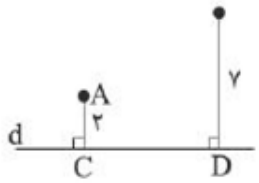


۱) ۴۴/۵
۲) ۴۷
۳) ۴۸
۴) ۴۹/۵

۲۷) درون زاویه‌ای که از محور x ها و خط d به معادلهٔ y = x ساخته می‌شود، نقطهٔ M(۲,۱) قرار دارد. می‌خواهیم نقاط A و B را بر روی محور ox و خط d چنان پیدا کنیم که محیط مثلث MAB مینیمم گردد. طول نقطهٔ A چه‌قدر خواهد بود؟

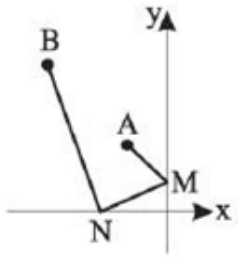
۱) $\frac{۴}{۳}$ ۲) $\frac{۷}{۵}$ ۳) $\frac{۵}{۳}$ ۴) ۲

۲۸) در شکل زیر در محل خط d رودخانه‌ای جریان دارد که فاصلهٔ نقاط A و B از کنار آن رودخانه به‌ترتیب ۲ و ۷ است. اگر طول کوتاه‌ترین مسیری که از A به کنار رودخانه و سپس به B برویم برابر با ۱۵ باشد، فاصلهٔ AB چه‌قدر است؟



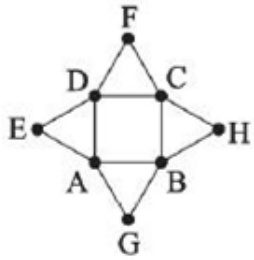
۱) ۹
۲) ۱۰
۳) ۱۲
۴) ۱۳

۲۹) نقاط $A\left|\begin{matrix}-۳\\ ۵\end{matrix}\right.$ و $B\left|\begin{matrix}-۹\\ ۱۱\end{matrix}\right.$ در صفحهٔ مختصات مفروض‌اند. دو نقطهٔ M و N همواره روی دو محور می‌لغزد. کم‌ترین اندازهٔ خط شکستهٔ AMNB کدام است؟



۱) ۱۸
۲) ۱۹
۳) ۲۰
۴) ۲۱

۳۰) مطابق شکل، مثلث متساوی‌الاضلاع در اطراف مربع ABCD با طول ضلع ۴ قرار داده‌ایم تا یک هشت‌ضلعی ساخته شود. اگر بدون تغییر دادن محیط این هشت‌ضلعی و به کمک تکنیک هم‌پیرامونی بخواهیم مساحت آن را افزایش دهیم، حداکثر افزایش مساحت چه‌قدر خواهد بود؟



۱) ۱۲
۲) ۱۸
۳) ۲۰
۴) ۳۲

۳۱) برای رسم دایره‌ای که بر اضلاع یک زاویه مماس باشد و از نقطهٔ معلوم A که در درون زاویه قرار دارد بگذرد، از کدام تبدیل استفاده می‌کنیم؟

۱) بازتاب ۲) انتقال ۳) دوران ۴) تجانس

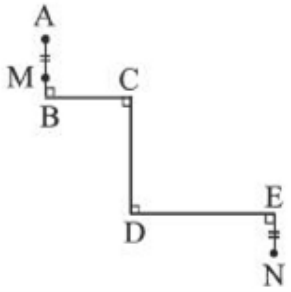
۳۲) در اثر یک تجانس به مرکز O و نسبت k، هر رأس یک مثلث به وسط ضلع مقابل به آن تصویر شده است. بر این اساس کدام نتیجه‌گیری درست است؟

۱) نقطهٔ O داخل مثلث است و $|k| = \frac{۲}{۳}$
۲) نقطهٔ O خارج مثلث است و $|k| = \frac{۲}{۳}$
۳) نقطهٔ O داخل مثلث است و $|k| = \frac{۱}{۲}$
۴) نقطهٔ O خارج مثلث است و $|k| = \frac{۱}{۲}$

۳۳) اگر خط $x = ۲$ را تحت زاویه‌های ۶۰، ۱۲۰، ۱۸۰، ۲۴۰ و ۳۰۰ حول مبدأ مختصات دوران بدهیم، مساحت محدود به شکل حاصل چه‌قدر است؟

۱) $۸\sqrt{۳}$ ۲) $۶\sqrt{۳}$ ۳) $۱۶\sqrt{۳}$ ۴) $۱۲\sqrt{۳}$

۳۴) مطابق شکل $AB = ۲$، $BC = ۳$، $CD = ۴$ و $DE = ۵$ است. اگر $AM = EN$ باشد، طول بردار انتقالی که M را بر N منطبق می‌کند، کدام است؟

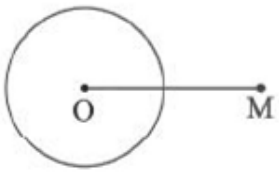


۱) ۱۰
۲) ۱۲
۳) ۱۴
۴) ۱۵

۳۵) اگر نقطهٔ $(۲,-۱)$ بازتاب محوری نقطهٔ $(۴,۳)$ باشد، معادلهٔ محور بازتاب کدام است؟

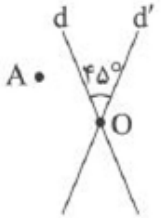
۱) $x + ۲y = ۵$
۲) $y + ۲x = ۵$
۳) $x - ۲y = ۵$
۴) $۲y - x = ۵$

۳۶) دایرهٔ زیر را حول مرکز M و با زاویهٔ ۱۸۰° دوران می‌دهیم. اگر فاصلهٔ دورترین و نزدیک‌ترین نقاط این دایره نسبت به نقطهٔ M به‌ترتیب ۱۰ و ۴ باشد، اندازهٔ مماس مشترک خارجی این دو دایره کدام است؟



۱) ۱۰
۲) ۱۲
۳) ۱۳
۴) ۱۴

۳۷) دو خط d و d' در نقطهٔ $O(۲,-۱)$ متقاطع هستند. بازتاب نقطهٔ $A(-۱,۱)$ را نسبت به خط d و سپس بازتاب تصویر A را نسبت به خط d' پیدا می‌کنیم تا به نقطهٔ A" برسیم. طول پاره‌خط AA" برابر کدام است؟

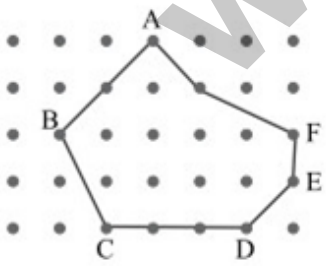


۱) $\sqrt{۱۳}$
۲) $۲\sqrt{۱۳}$
۳) $\sqrt{۲۶}$
۴) $۲\sqrt{۲۶}$

۳۸) تصویر دو نقطه‌ی $A\ (۲,۴)$ و $B\ (-۶,۲)$ را تحت انتقال با بردار $\overrightarrow{W}$ به طول ۴ واحد نقاط A' و B' می‌نامیم. زاویه‌ی بین دو خط AB و A'B' چند درجه است؟

۱) ۰°
۲) ۳۰°
۳) ۹۰°
۴) ۱۲۰°

۳۹) چندضلعی شبکه‌ای مقابل را حول رأس A با زاویه‌ی ۳۰° در خلاف جهت عقربه‌های ساعت دوران می‌دهیم. مساحت شکل تصویر کدام است؟



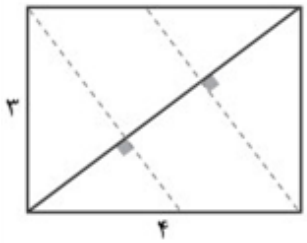
۱) ۱۳
۲) ۱۳/۵
۳) ۱۲
۴) ۱۲/۵

تلفن تماس: ۰۲۶۳۳۴۰۸۹۴۴

۴۰ اگر بازتاب مرکز مختصات نسبت به خط $۳x - y = ۴$ را A' و بازتاب A' را نسبت به $۳y + x = ۱۸$ را A'' بنامیم، مختصات A'' کدام است؟

۱) $(۴ , ۵)$ ۲) $(۶ , ۸)$ ۳) $(۸ , ۱۰)$ ۴) $(۶ , ۱۰)$

۴۱ در مستطیلی به طول اضلاع ۳ و ۴ واحد، از هر دو رأس متقابل، عمودی بر قطر دیگر این مستطیل رسم شده است. مساحت متوازی‌الاضلاع حاصل، کدام است؟



۱) ۵/۲۵ ۲) ۵/۷۵
۳) ۶ ۴) ۷/۵

۴۲ مساحت مجانس مربع به ضلع ۴ تحت تجانس به مرکز $O(۲ , ۱)$ و نسبت $-\frac{۳}{۲}$ چه‌قدر است؟

۱) ۲۴ ۲) ۶۴ ۳) ۱۸ ۴) ۳۶

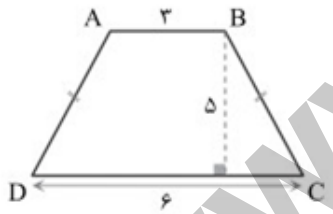
۴۳ با استفاده از کدام تبدیل هندسی داخل مثلث مفروض می‌توان مربعی محاط کرد. که یک ضلع آن بر روی ضلع مثلث و دو رأس دیگر بر روی دو ضلع این مثلث قرار گیرند؟

۱) دوران ۲) بازتاب ۳) انتقال ۴) تجانس

۴۴ دایره‌ی C به معادله‌ی $x^۲ + y^۲ = ۴$ را تحت بردار $\vec{V} = ۲\vec{i}$ موازی با محور x ها انتقال می‌دهیم تا دایره‌ی C' به‌دست آید. مساحت قسمت مشترک بین C و C' کدام است؟

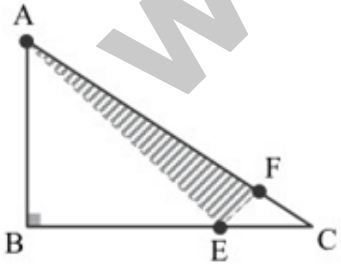
۱) $\frac{۸}{۳}\pi - \sqrt{۳}$ ۲) $\frac{۲}{۳}\pi - \sqrt{۳}$ ۳) $\frac{۴}{۳}\pi - \sqrt{۳}$ ۴) $\frac{۸}{۳}\pi - ۲\sqrt{۳}$

۴۵ در ذوزنقه‌ی متساوی‌الساقین ABCD، $AB = ۳$ و $CD = ۶$، در دو تجانس به نسبت‌های $k_۱ = -۲$ و $k_۲ = ۲$، AB بر CD تصویر می‌شود. فاصله‌ی مراکز تجانس چقدر است؟



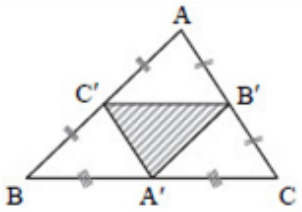
۱) $\frac{۱۰}{۳}$ ۲) $\frac{۵}{۳}$
۳) ۵ ۴) $\frac{۲۰}{۳}$

۴۶ اگر در شکل روبه‌رو از نقطه‌ی A به نقطه‌ی E و سپس به نقطه‌ی F حرکت کنیم، به‌طوری که $FC = ۰/۱AF$ بوده و اندازه‌ی $AE + EF$ کمترین مقدار ممکن را دارا باشد، نسبت BE به EC چقدر است؟



۱) $\frac{۴}{۳}$ ۲) ۳
۳) $\frac{۱۱}{۲}$ ۴) $\frac{۳}{۲}$

۴۷ در شکل روبه‌رو مثلث $\overset{\triangle}{A'B'C'}$ تحت چه تبدیلی به مثلث $\overset{\triangle}{ABC}$ تصویر می‌شود؟

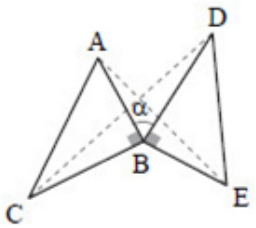


۱) انتقال
۲) تجانس
۳) بازتاب مرکزی
۴) دوران

۴۸ اگر سه خط L_1، L_2 و L_3 دو به دو ناموازی و غیرهمرس باشند و بخواهیم مثلث متساوی‌الاضلاعی چنان رسم کنیم، که هر رأس این مثلث روی یکی از این سه خط باشد، برای این ترسیم چه تبدیلی و با چند جواب ممکن است؟

۱) انتقال - بی‌شمار جواب ۲) انتقال - یک جواب ۳) دوران - بی‌شمار جواب ۴) دوران - یک جواب

۴۹ در شکل مقابل $AB = BE = ۳$ و $BC = BD = ۴$ و $AC = DE = ۵$ و زاویه‌ی $A\hat{B}D = \alpha$ می‌باشد. کدام گزینه درست است؟

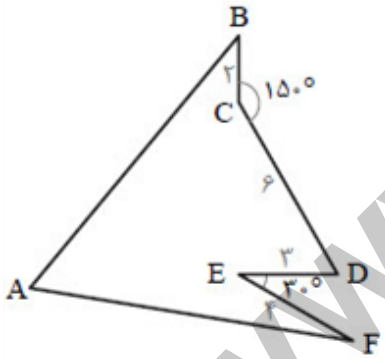


۱) دو مثلث ABC و BDE دوران یک‌دیگر به مرکز B با زاویه‌ی ۹۰° هستند.
۲) دو پاره‌خط AC و DE دوران یک‌دیگر به مرکز B با زاویه‌ی ۹۰° هستند.
۳) دو پاره‌خط AE و DC دوران یک‌دیگر به مرکز B با زاویه‌ی $۹۰ + \alpha$ هستند.
۴) دو مثلث ABC و BDE دوران یک‌دیگر به مرکز B با زاویه‌ی $۹۰ + \alpha$ هستند.

۵۰ دایره‌ی $C'(O', ۴)$ مجانس دایره‌ی $C(O, R)$ نسبت به نقطه‌ی M است که به فاصله‌ی ۸ واحد از نقطه‌ی O' قرار دارد اگر C و C' بر هم مماس خارج باشند نسبت تجانس کدام می‌تواند باشد؟

۱) $\frac{۱}{۲}$ ۲) $\frac{۱}{۳}$ ۳) $\frac{۳}{۲}$ ۴) $\frac{۱}{۴}$

۵۱ دور زمین مقابل حصارکشی شده است. بدون کم و زیاد کردن حصارها، مساحت زمین را افزایش داده‌ایم. میزان افزایش مساحت چه‌قدر است؟



۱) ۱۴
۲) ۱۲
۳) ۱۵
۴) ۱۶

۵۲ یک مربع را در تجانسی با نسبت تجانس $\frac{۲}{۳}$ و به مرکز محل تلاقی قطرها تصویر کرده‌ایم. اگر مساحت بین مربع و تصویرش ۵ باشد، محیط مربع اولیه کدام است؟

۱) ۱۶ ۲) ۱۸ ۳) ۱۰ ۴) ۱۲

۵۳ بازتاب مثلث به اضلاع ۵، ۱۲ و ۱۳ نسبت به ارتفاع وارد بر ضلع بزرگ‌تر رسم شده است. مساحت سطح مشترک تصویر مثلث با خودش چه کسری از مساحت مثلث اصلی است؟

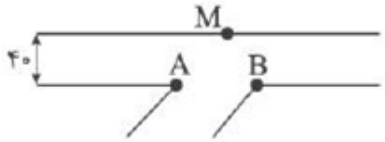
۱) $\frac{۲۵}{۱۳}$ ۲) $\frac{۲۵}{۱۶۹}$ ۳) $\frac{۵۰}{۱۳}$ ۴) $\frac{۵۰}{۱۶۹}$

تلفن تماس: ۰۲۶۳۳۴۰۸۹۴۴

۵۴) نقاط A و B در یک طرف خط d و به‌ترتیب به فاصله‌های ۲ و ۶ واحد از این خط قرار دارند. بازتاب این نقاط نسبت به خط d را A' و B' می‌نامیم. اگر AA'B'B چهارضلعی محیطی باشد، مساحت آن کدام است؟

۱) $۱۸\sqrt{۳}$ ۲) $۱۶\sqrt{۳}$ ۳) $۸\sqrt{۳}$ ۴) $۳۲\sqrt{۳}$

۵۵) می‌خواهیم کنار رودخانه‌ها ۳ اسکله بسازیم. جای ۲ اسکلهٔ A و B مطابق شکل مشخص شده است به‌طوری که AB = ۶۰m است. فاصلهٔ لبهٔ رودخانه نیز ۴۰m محاسبه شده است. اسکلهٔ M در نقطه‌ای ساخته شده است که قایق‌ها هنگام طی مسیر MABM، کوتاه‌ترین مسیر را طی کنند. طول مسیر MABM چند متر است؟

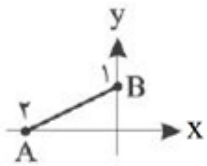


۱) ۱۴۰
۲) ۱۶۰
۳) ۱۷۰
۴) ۱۸۰

۵۶) دو دایره به شعاع‌های ۶ و ۴ و طول خط‌المرکزین ۱۰ واحد، مجانس یک‌دیگرند. فاصلهٔ مرکز تجانس از مرکز دایرهٔ بزرگ‌تر کدام می‌تواند باشد؟

۱) ۳۰ ۲) ۲۴ ۳) ۲۰ ۴) ۱۰

۵۷) پاره‌خط AB را به اندازهٔ °۹۰ در جهت عقربه‌های ساعت حول مبدأ مختصات دوران می‌دهیم تا پاره‌خط A'B' به‌دست آید. معادلهٔ A'B' کدام است؟



۱) $y = -۲x + ۲$
۲) $y = ۲x + ۲$
۳) $y = -۲x + ۱$
۴) $y = ۲x + ۱$

۵۸) مثلث با اضلاع به طول ۵ و ۱۲ و ۱۳ را نسبت به خط d بازتاب داده‌ایم. نسبت مساحت مثلث تصویر به محیط آن کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۱/۵ ۳) ۱ ۴) ۰/۵

۵۹) کدام گزینه درست است؟

۱) بازتاب نسبت به خط، دو نقطهٔ ثابت تبدیل دارد.
۲) انتقال غیرهمانی نمی‌تواند نقطهٔ ثابت تبدیل داشته باشد.
۳) تجانس غیرهمانی نمی‌تواند اندازهٔ مساحت شکل را حفظ کند.
۴) تبدیل طولپا فقط یک نقطهٔ ثابت تبدیل دارد.

۶۰) چهار نقطه‌ی A(۱ , ۳)، B(۱۵ , ۹)، M(a , ۰) و N(a + ۵ , ۰) در صفحه‌ی مختصات مفروض‌اند. کم‌ترین اندازه‌ی خط شکسته‌ی AMNB، کدام است؟

۱) ۱۸ ۲) ۱۹ ۳) ۲۰ ۴) ۲۱

۶۱) معادله‌ی تصویر خط $y + ۲x = ۱$ تحت تجانس به مرکز (۱,۳) و نسبت ۲ به صورت $y + ax = b$ است. a + b کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۱- ۳) صفر ۴) ۲

۶۲) اگر $A(۳,۴)$ و $B(۶,۶)$ و M روی محور xها باشد، طول M کدام باشد، تا $MA + MB$ کمترین مقدار باشد؟

۱) ۳/۸ ۲) ۳/۹ ۳) ۴/۱ ۴) ۴/۲

۶۳) چهار نقطه‌ی $A(۱ , ۱۰)$، $B(۹ , -۹)$، $M(a , ۴)$ و $N(a , ۰)$ را در صفحه‌ی مختصات، درنظر بگیرید. کم‌ترین اندازه‌ی خط شکسته‌ی AMNB، کدام است؟

۱) ۲۱ ۲) ۲۰ ۳) ۱۹ ۴) ۱۸

۶۴) کدام‌یک از تبدیل‌های زیر تعداد کمتری از ویژگی‌های زیر را دارد؟

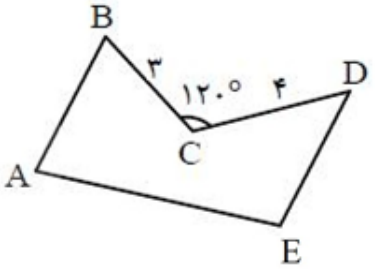
طولپا است. شیب خط را حفظ می‌کند.

اندازه زاویه را حفظ می‌کند. جهت شکل را حفظ می‌کند.

مساحت شکل را حفظ می‌کند.

۱) تجانس ۲) دوران ۳) بازتاب ۴) تجانس و بازتاب

۶۵) زمینی به شکل زیر داریم. می‌خواهیم بدون آن‌که محیط این زمین تغییر کند، مساحتش را افزایش دهیم، میزان افزایش مساحت چه‌قدر است؟



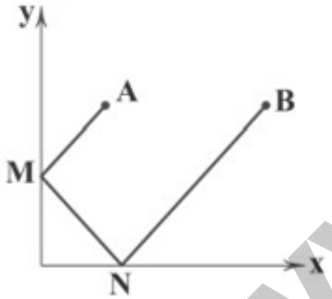
۱) $۳\sqrt{۳}$

۲) ۳

۳) ۶

۴) $۶\sqrt{۳}$

۶۶) نقاط $A\left|\begin{matrix}۲\\۵\end{matrix}\right.$ و $B\left|\begin{matrix}۷\\۵\end{matrix}\right.$ در صفحه‌ی محورهای مختصات مفروض‌اند. دو نقطه‌ی M و N همواره روی دو محور می‌لغزند. کم‌ترین اندازه‌ی خط شکسته‌ی AMNB کدام است؟



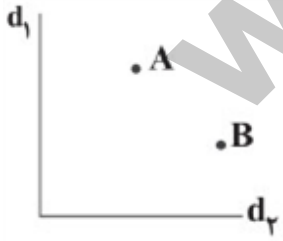
۱) $\sqrt{۱۸۱}$

۲) $\sqrt{۱۵۱}$

۳) $۱۲\sqrt{۲}$

۴) $۱۳\sqrt{۲}$

۶۷) دو نقطه‌ی ثابت A و B و دو خط متقاطع $d_۱$ و $d_۲$ را مطابق شکل درنظر بگیرید. اگر بخواهیم با طی کوتاه‌ترین مسیر با آغاز از نقطه‌ی A و پس از برخورد با دو خط $d_۱$ و $d_۲$ به نقطه‌ی B برسیم، برای این کار از کدام نوع تبدیل هندسی و چند بار باید استفاده کنیم؟

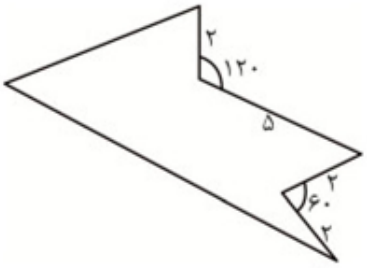


۱) دوران - یک بار ۲) دوران - دو بار

۳) بازتاب - یک بار ۴) بازتاب - دو بار

تلفن تماس: ۰۲۶۳۳۴۰۸۹۴۴

۶۸ در شکل زیر دور زمین‌ها حصارکشی شده است. اگر بخواهیم بدون تغییر اندازه حصارها و تعداد و طول ضلع‌ها، مساحت را افزایش دهیم، مساحت حداکثر چقدر افزایش می‌یابد؟



۱) $۷\sqrt{۳}$

۲) $۶\sqrt{۳}$

۳) $۳\sqrt{۳}$

۴) ۷

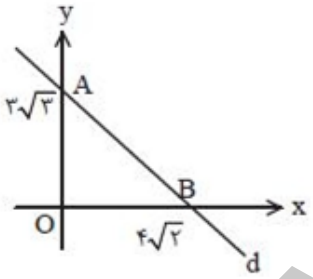
۶۹ مثلث قائم‌الزاویه ABC را یک بار نسبت به نیمساز وارد بر وتر بازتاب کرده و مثلث حاصل را $\overset{\triangle}{A'B'C'}$ نامیده و A'B'C' را بار دیگر نسبت به میانه وارد بر وتر بازتاب کرده و مثلث حاصل را A" B" C" می‌نامیم: $\overset{\triangle}{ABC}$ را با چه تبدیلی می‌توان به $\overset{\triangle}{A''B''C''}$ تبدیل کرد؟

۱) همانی ۲) تجانس ۳) انتقال ۴) دوران

۷۰ اگر دو دایره به شعاع‌های ۳ و ۴ و طول خط‌المرکزین ۱۴ داشته باشیم، فاصله‌ی مرکز تجانس معکوس این دو دایره تا مرکز دایره کوچک‌تر کدام است؟

۱) ۴ ۲) ۵ ۳) ۵/۵ ۴) ۶

۷۱ اگر مجانس خط d به مرکز O با نسبت $\frac{\sqrt{۶}}{۶}$ خط l باشد، آن‌گاه مساحت ناحیهٔ بین دو خط d و l محدود بین محورهای x و y کدام است؟



۱) $۵\sqrt{۶}$

۲) $۶\sqrt{۶}$

۳) $۷\sqrt{۶}$

۴) $۸\sqrt{۶}$

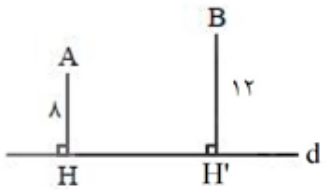
۷۲ دو نقطهٔ A و B به فاصلهٔ $۲\sqrt{۲}$ از یک‌دیگر، خارج خط d و در یک سمت آن قرار دارند به طوری که از خط d به‌ترتیب به فاصلهٔ ۳ و ۲ می‌باشند. طول کوتاه‌ترین مسیر از A به B به طوری که خط d را قطع کند، کدام است؟

۱) $۳\sqrt{۲}$ ۲) $۴\sqrt{۲}$ ۳) $۵\sqrt{۲}$ ۴) $۲\sqrt{۲}$

۷۳ دو دایرهٔ C(O,R) و C'(O',R') مفروض هستند. در چند وضعیت از وضعیت‌های دو دایره، مرکز تجانس غیرمستقیم (معکوس) دو دایره، داخل دایرهٔ کوچک‌تر واقع است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۷۴) با توجه به شکل، فواصل نقاط A و B از خط d به‌ترتیب ۸ و ۱۲ و فاصلهٔ H و 'H برابر ۱۵ است. نقطه‌ای مانند M روی d که MA + MB کم‌ترین مقدار خود را دارد، در نظر بگیرید. MA کدام است؟



۱) ۸
۲) ۱۰
۳) ۱۲
۴) $\frac{\sqrt{۴۸۱}}{۲}$

۷۵) اگر وسطهای اضلاع مثلث دل‌خواهی را به هم وصل کنیم، مثلث حاصل با مثلث اصلی مجانس ..... و مرکز تجانس، نقطهٔ همرسی ..... است.

۱) معکوس - ارتفاع‌ها ۲) مستقیم - میانه‌ها ۳) معکوس - میانه‌ها ۴) مستقیم - ارتفاع‌ها

۷۶) تصویر دایرهٔ C با شعاع ۱ واحد، تحت تجانس به مرکز مبدأ و با نسبت ۳، دایرهٔ 'C است، به طوری که خط‌المرکزین این دو دایره $۲\sqrt{۵}$ می‌باشد. طول مماس مشترک خارجی این دو دایره کدام است؟

۱) ۳ ۲) $۲\sqrt{۳}$ ۳) ۴ ۴) $۳\sqrt{۲}$

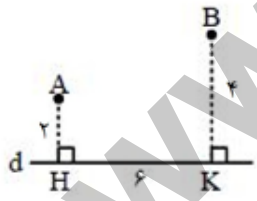
۷۷) دایرهٔ $C'(O',۴)$ مجانس دایره $C(O,R)$ نسبت به نقطهٔ M است که با فاصلهٔ ۸ واحد از نقطهٔ 'O قرار دارد. اگر C و 'C بر هم مماس باشند، نسبت تجانس کدام می‌تواند باشد؟

۱) ۲ ۲) $\frac{۱}{۳}$ ۳) $\frac{۳}{۲}$ ۴) $\frac{۱}{۴}$

۷۸) دو خط متقاطع d و 'd و پاره‌خط AB در صفحهٔ آن‌ها مفروض است. برای رسم پاره‌خطی موازی و مساوی AB که دو سر آن بر روی این دو خط باشد، کدام تبدیل هندسی به کار می‌رود؟

۱) بازتاب ۲) انتقال ۳) دوران ۴) تجانس

۷۹) مطابق شکل HK = ۶ است. نقطهٔ M روی خط d طوری قرار دارد که مسیر AMB کوتاه‌ترین مسیر است. طول این مسیر کدام است؟

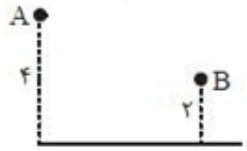


۱) $۳\sqrt{۲}$
۲) $۴\sqrt{۲}$
۳) $۵\sqrt{۲}$
۴) $۶\sqrt{۲}$

۸۰) اگر یک خط و تبدیل یافته‌اش با هم موازی باشند، کدام تبدیل قطعاً یک خط را بر خط دیگر تصویر کرده است؟

۱) تجانس ۲) دوران
۳) بازتاب نسبت به خط ۴) انتقال

۸۱ می‌خواهیم از چادر A که در فاصلهٔ ۴ متری رودخانه است به رودخانه رفته و پس از تهیهٔ آب به چادر B که در فاصلهٔ ۲ متری رودخانه قرار دارد، برویم. با توجه به شکل زیر، طول کوتاه‌ترین مسیر کدام است؟



۱) ۵
۲) ۸
۳) ۱۰
۴) ۱۴

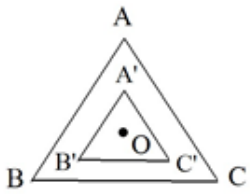
۸۲ قطرهای چهارضلعی ABCD یک‌دیگر را نصف کرده‌اند. با استفاده از کدام تبدیل زیر می‌توان اثبات کرد. این چهارضلعی متوازی‌الاضلاع است؟

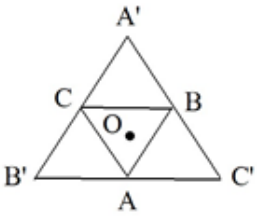
۱) تجانس $k = ۱$ ۲) تجانس $k = -۱$ ۳) دوران ۹۰° ۴) انتقال

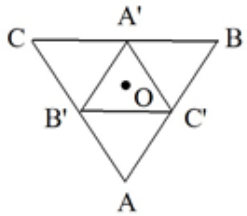
۸۳ دو دایره به شعاع‌های ۱ و ۲ مماس خارج‌اند. فاصلهٔ مرکز تجانس مستقیم آن‌ها از مرکز دایرهٔ کوچک‌تر چه‌قدر است؟

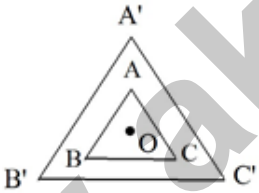
۱) ۴ ۲) ۳ ۳) ۲ ۴) ۱

۸۴ تصویر مثلث متساوی‌الاضلاع $A'B'C'$ در تجانسی که نسبت آن $\frac{۱}{۲}$ است و مرکز تجانس، مرکز ثقل مثلث باشد، رسم شده است. شکل مثلث اولیه کدام‌یک از شکل‌های زیر است؟

۱)


۲)


۳)


۴)


۸۵ دو خط متقاطع d و d' دوران‌یافتهٔ یک‌دیگر به مرکز O و به زاویهٔ ۸۰° می‌باشند. اگر محل تقاطع دو خط، نقطهٔ A باشد، زاویهٔ OA با d کدام است؟

۱) ۸۰ ۲) ۴۰ ۳) ۵۰ ۴) ۱۲۰

۸۶ کدام تبدیل شیب خط را حفظ می‌کند؟

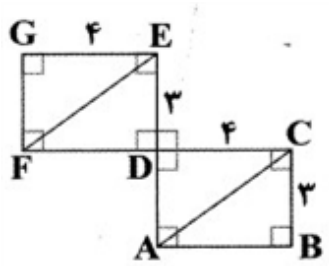
۱) بازتاب ۲) دوران ۳) انتقال ۴) هیچ‌کدام

۸۷ خطوط $L: ۲x + y = ۱$ و $d: x - ۲y = ۳$ مفروض‌اند. بازتاب خط L را نسبت به d به‌دست می‌آوریم و آن را L' می‌نامیم. اگر فاصلهٔ نقطهٔ $A(a,b)$ روی خط L' از خط d برابر $۳\sqrt{۵}$ باشد، کم‌ترین مقدار $a + b$ کدام است؟

۱) ۴ ۲) ۴- ۳) ۳ ۴) ۳-

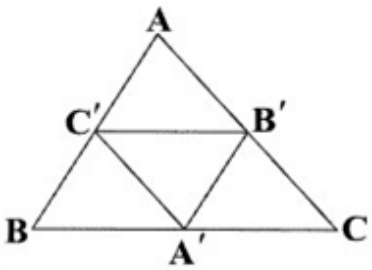
تلفن تماس: ۰۲۶۳۳۴۰۸۹۴۴

۸۸ فاصله‌ی محل برخورد نیمسازهای $\widehat{ABC}$ و محل برخورد نیمسازهای $\widehat{DEF}$ کدام است؟



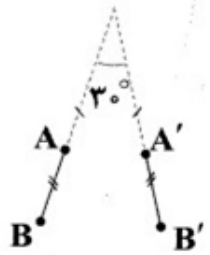
۱) ۳
۲) ۴
۳) ۵
۴) ۷

۸۹ در شکل زیر A'، B' و C' وسط اضلاع مثلث هستند. اگر $AB = ۷$، $AC = ۸$ و $BC = ۹$ باشد، فاصله‌ی محل برخورد ارتفاع‌های $\widehat{AB'C'}$ و محل برخورد ارتفاع‌های $\widehat{B'A'C}$ کدام است؟



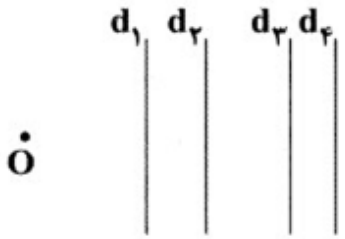
۱) ۳/۵
۲) ۴
۳) ۴/۵
۴) ۵

۹۰ خطوط متقاطع $d_۱$ و $d_۲$ مفروض هستند. در صورتی‌که تبدیل T بازتاب نسبت به $d_۱$ و سپس نسبت به $d_۲$ تعریف شود و داشته باشیم $T(A) = A'$ و $T(B) = B'$، آن‌گاه زاویه‌ی بین $d_۱$ و $d_۲$ کدام است؟



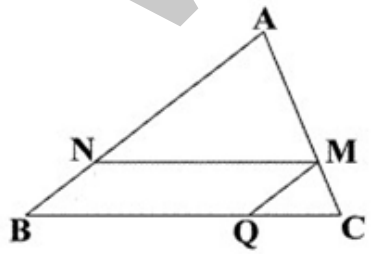
۱) ۱۲۰
۲) ۱۵۰
۳) ۱۵۵
۴) ۱۶۵

۹۱ اگر فاصله‌ی نقطه‌ی O از خطوط $d_۱$، $d_۲$، $d_۳$ و $d_۴$ به ترتیب ۵/۲۱، ۶/۲۱، ۱۰/۱۲۱، ۱۲/۱۲۱ واحد باشد و نقطه‌ی O را نسبت به خطوط موازی $d_۱$، $d_۲$، $d_۳$ و $d_۴$، به طور متوالی بازتاب کنیم تا به نقطه‌ی O' برسیم، فاصله‌ی OO' چند واحد است؟



۱) ۲
۲) ۳
۳) ۴
۴) ۶

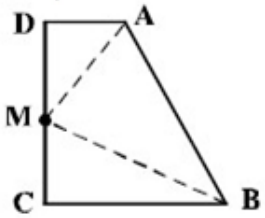
۹۲ اگر مساحت $\widehat{ABC}$ در شکل زیر، برابر با ۶ واحد، مساحت متوازی‌الاضلاع MNBQ برابر با $\frac{۸}{۳}$ واحد و $\widehat{AMN}$ متجانس $\widehat{MCQ}$ با نسبت تجانس $k = ۲$ باشد، مساحت $\widehat{QMC}$ کدام است؟



۱) $\frac{۲}{۳}$
۲) $\frac{۱}{۳}$
۳) $\frac{۴}{۳}$
۴) $\frac{۸}{۳}$

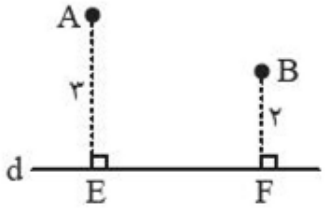
تلفن تماس: ۰۲۶۳۳۴۰۸۹۴۴

۹۳ در ذوزنقه قائم‌الزاویه‌ی ABCD، اندازه‌های CB = CD = ۶ و AD = ۲ هستند، نقطه‌ی M روی ساق قائم CD متحرک است. کم‌ترین مقدار MA + MB، کدام است؟



۱) ۱۰
۲) ۱۰/۵
۳) ۱۱
۴) ۱۱/۵

۹۴ در شکل زیر فاصلهٔ نقاط E و F برابر ۵ است. می‌خواهیم از نقطهٔ A به خط d و از آن‌جا به نقطهٔ B برویم، طول کوتاه‌ترین مسیر چه‌قدر است؟

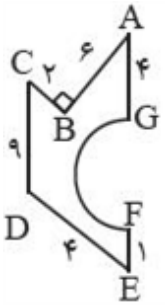


۱) ۵
۲) $۵\sqrt{۲}$
۳) ۶
۴) $۶\sqrt{۲}$

۹۵ دو خط متقاطع l و l' و پاره‌خط AB غیرموازی با l و l' در صفحهٔ آن‌ها داده شده، برای رسم پاره‌خطی موازی و مساوی AB که دو سر آن بر روی این دو خط باشد، کدام تبدیل هندسی کاربرد دارد؟

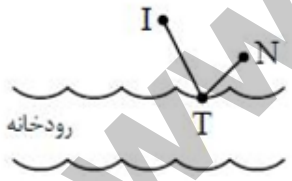
۱) بازتاب محوری ۲) دوران ۳) تجانس ۴) انتقال

۹۶ در شکل زیر GF = ۸ قطر نیم‌دایره می‌باشد. اگر بخواهیم بدون تغییر محیط، مساحت شکل را افزایش دهیم، مقدار افزایش مساحت جدید چه‌قدر است؟



۱) $۳(۸\pi + ۲)$
۲) $۸(۳\pi + ۲)$
۳) $۲(۸\pi + ۳)$
۴) $۴(۴\pi + ۳)$

۹۷ فردی می‌خواهد از خانهٔ خود در نقطهٔ I به سمت رودخانه برود و آب بردارد و سپس به سمت مکان نگه‌داری گوسفندانش در نقطهٔ N حرکت کند. برای آن‌که مسیر این فرد کوتاه‌ترین حالت ممکن را داشته باشد باید نقطهٔ T را در جای مناسب انتخاب کند. با کدام تبدیل می‌توان این مسیر مناسب را یافت؟



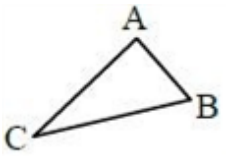
۱) انتقال
۲) بازتاب
۳) دوران
۴) هیچ‌کدام

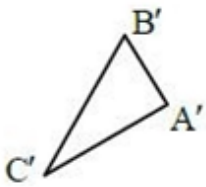
۹۸ پاره‌خط AB به طول ۵ واحد موازی خط d به فاصلهٔ ۲ واحد از آن قرار دارد. نقطهٔ M روی خط d متغیر است. کم‌ترین محیط مثلث MAB کدام است؟

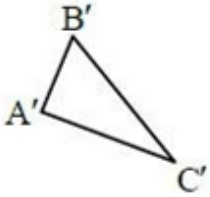
۱) $۵ + \sqrt{۴۱}$ ۲) $۵ + \sqrt{۳۱}$ ۳) $۵ + \sqrt{۲۱}$ ۴) $۵ + \sqrt{۵۱}$

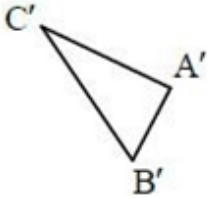
تلفن تماس: ۰۲۶۳۳۴۰۸۹۴۴

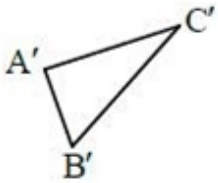
۹۹ مثلث ABC را حول نقطهٔ B با زاویهٔ ۲۹۷۰° در جهت خلاف حرکت عقربه‌های ساعت دوران می‌دهیم. شکل حاصل کدام است؟



۱) 

۲) 

۳) 

۴) 

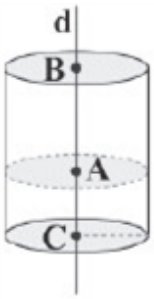
۱۰۰ در مثلث ABC، نقطهٔ A را تحت بردار $\overrightarrow{BC}$ به نقطهٔ 'A، نقطهٔ B را تحت بردار $\overrightarrow{CA}$ به نقطهٔ 'B و نقطهٔ C را تحت بردار $\overrightarrow{AB}$ به نقطهٔ 'C انتقال می‌دهیم. مساحت مثلث 'A'B'C چند برابر مساحت مثلث ABC است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۴ ۴) ۹

۱۰۱ نقاط $A(۲\,,\,۴)$ و $B(۳\,,\,۷)$ مفروضند. اگر نقطه‌ی M که طول و عرض آن با هم برابرند، متغیر باشد به شرطی که $AM + MB$ کم‌ترین مقدار را داشته باشد، فاصله‌ی M از مبدأ مختصات چه‌قدر است؟

۱) $\frac{۱۱\sqrt{۲}}{۳}$ ۲) $\frac{۱۱}{۳}$ ۳) $\frac{۲۲}{۶}$ ۴) $\frac{۲۲\sqrt{۲}}{۳}$

۱۰۲ از دوران یک پاره‌خط حول خط d استوانه‌ای پدید آمده است. مساحت سطح مقطع حاصل از برش صفحه‌ای عمود بر d، برابر ۱۶π است. اگر فاصله‌ی A از B، دو برابر فاصله‌ی A از C و حجم استوانه ۴۸π باشد، اندازه‌ی پاره‌خط AB چه‌قدر است؟



۱) ۲
۲) ۱
۳) ۳
۴) ۴

۱۰۳ یک چهارضلعی کوژ را با کدام تبدیل بر روی یکی از اجزاء آن می‌توان محدّب ساخت که محیط آن ثابت به ماند؟

۱) انتقال ۲) تجانس ۳) بازتاب نسبت به نقطه ۴) بازتاب نسبت به خط

۱۰۴ اگر یک شکل هندسی دارای دو محور تقارن عمود بر هم باشد، آنگاه دارای کدام نوع تبدیل است؟

۱) انتقالی ۲) تقارن دورانی ۳) بازتاب محوری دیگر ۴) متجانس مستقیم

۱۰۵ کدام تبدیل هندسی در صفحه ممکن است طولپا نباشد؟

۱) تجانس ۲) انتقال ۳) بازتاب نسبت به نقطه ۴) دوران

تلفن تماس: ۰۲۶۳۳۴۰۸۹۴۴

۱۰۶) کدام موارد از مطالب زیر، درست‌اند؟

الف: در دو بازتاب که دو محور بازتاب موازی و فاصلهٔ آن‌ها واحد باشد، تبدیل انتقال با برداری به طول ۲ رخ داده است.

ب: در دو بازتاب که زاویهٔ بین دو محور بازتاب $\frac{\pi}{6}$ باشد، تبدیل دوران با تانژانت زاویهٔ بین $\sqrt{3}$ رخ داده است.

پ: هر تبدیل طولپا، اندازهٔ زاویه را حفظ می‌کند.

ت: هر تبدیل که اندازهٔ زاویه را حفظ کند، طولپاست.

۱) الف - ب - ت ۲) الف - پ - ت ۳) ب - پ - ت ۴) الف - ب - پ

۱۰۷) بازتاب مثلث به اضلاع ۳، ۴ و ۵ واحد را نسبت به ارتفاع وارد بر ضلع بزرگ‌تر رسم کنید. مساحت سطح مشترک بازتاب مثلث با خود آن چند درصد مساحت مثلث اصلی است؟

۱) ۳۶ ۲) ۴۸ ۳) ۶۴ ۴) ۷۲

۱۰۸) مثلث متساوی‌الاضلاع ABC را تحت بردار $\overrightarrow{AB}$ ۲، انتقال می‌دهیم. مساحت چهارضلعی ACC'B' چند برابر مساحت مثلث ABC است؟

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۵ ۴) ۶

۱۰۹) نقطه‌های $A(1, 3)$ و $B(2, 5)$ مفروض‌اند و نقطه‌ی متغیر M روی نیم‌ساز ناحیه‌ی اول و سوم $(y = x)$ قرار دارد. کم‌ترین مقدار $MA + MB$ کدام است؟

۱) $\sqrt{7}$ ۲) ۴ ۳) $\sqrt{17}$ ۴) ۵

۱۱۰) اگر $A'(2, 6)$ مجانس نقطه‌ی $A(-1, 3)$ و $B'(6, 6)$ مجانس نقطه‌ی $B(1, 3)$ در تجانس به مرکز O و نسبت k باشند، مختصات مرکز تجانس O کدام است؟

۱) $(0, 4)$ ۲) $(0, -4)$ ۳) $(4, 0)$ ۴) $(-4, 0)$

۱۱۱) فرض کنید G محل برخورد میانه‌های مثلث ABC (مرکز ثقل) باشد و مثلث A'B'C' مجانس مثلث ABC در تجانس به مرکز G و نسبت $k = -\frac{1}{2}$ باشد. اگر مساحت بین مثلث و تصویرش $\frac{3}{2}$ باشد، مساحت مثلث ABC کدام است؟

۱) ۱/۵ ۲) ۲ ۳) ۲/۵ ۴) ۳

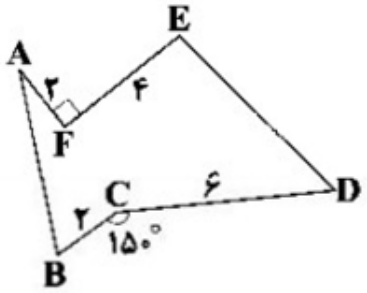
۱۱۲) چه تعداد تبدیل‌های زیر همانی نیست؟

الف) دوران 360° ب) تجانس با نسبت $k = 1$

ج) انتقال بار بردار صفر د) تجانس با نسبت $k = -1$

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۱۱۳) دور زمینی به مساحت ۲۶ واحد مربع مطابق شکل حصارکشی شده است. با فرض این‌که AB و ED ثابت باشند. با جابجا کردن حصارهای دیگر و بدون کم و زیاد کردن طول آن‌ها مساحت را به حداکثر مقدار می‌رسانیم. مقدار مساحت ماکزیمم چقدر است؟



۱) ۴۰
۲) ۳۰
۳) ۵۰
۴) ۶۰

۱۱۴) در کدام حالت، یک شکل هندسی الزاماً مرکز تقارن دارد؟

۱) با دو محور تقارن
۲) با سه محور تقارن
۳) با دو محور تقارن عمود بر هم
۴) با دو محور تقارن موازی

۱۱۵) کدام موارد از مطالب زیر، درست‌اند؟

الف: در دو بازتاب که دو محور بازتاب موازی و فاصلهٔ آن‌ها واحد باشد، تبدیل انتقال با برداری به طول ۲ رخ داده است.

ب: در دو بازتاب که زاویهٔ بین دو محور بازتاب $\frac{\pi}{6}$ باشد، تبدیل دوران با تانژانت زاویهٔ بین $\sqrt{3}$ رخ داده است.

پ: هر تبدیل طولپا، اندازهٔ زاویه را حفظ می‌کند.

ت: هر تبدیل که اندازهٔ زاویه را حفظ کند، طولپاست.

۱) الف - ب - ت
۲) الف - پ - ت
۳) ب - پ - ت
۴) الف - ب - پ

۱۱۶) دو خط متقاطع مفروض، به چند طریق می‌توانند بازتاب یکدیگر باشند؟

۱) ۱
۲) ۲
۳) ۳
۴) ۴

۱۱۷) بازتاب خط d نسبت به خط Δ خط d' است. در کدام حالت، بازتاب شیب خط را حفظ نمی‌کند؟

۱) d و Δ متقاطع
۲) d و Δ موازی
۳) Δ و d عمود
۴) Δ و d منطبق

۱۱۸) به ازای چه مقدار a تبدیل $T(x , y) = (ax + ay , ay - ax)$ ایزومتری است؟

۱) $a = \pm\sqrt{2}$
۲) $a = \pm\frac{3}{\sqrt{2}}$
۳) $a = \pm 1$
۴) $a = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$

۱۱۹) دو نقطه‌ی $A(1 , 7)$ و $B(-1 , 8)$ مفروضند. انتقالی که تحت آن، B تصویر A باشد (تبدیل T) و انتقالی که تحت آن، A تصویر B باشد (تبدیل T') کدام است؟

۱) $T'(x , y) = (x + 2 , y - 1) , T(x , y) = (x - 2 , y + 1)$
۲) $T'(x , y) = (x - 2 , y + 1) , T(x , y) = (x + 2 , y - 1)$
۳) $T'(x , y) = (x - 2 , y + 1) , T(x , y) = (x - 3 , y + 2)$
۴) $T'(x , y) = (x - 3 , y + 2) , T(x , y) = (x - 2 , y + 1)$

تلفن تماس: ۰۲۶۳۳۴۰۸۹۴۴

۱۲۰) کدام گزینه صحیح است؟

۱) در هر دوران، اندازه‌ی تصویر هر پاره خط، بسته به مرکز دوران آن، متغیر است.

۲) در حالتی‌که محور بازتاب، عمودمنصف پاره‌خط AB است، اگر بازتاب AB، A'B' باشد، AB و A'B' بر هم منطبق‌اند.

۳) انتقال با بردار غیرصفر، می‌تواند نقطه‌ی ثابت داشته باشد.

۴) در بازتاب جهت شکل حفظ می‌شود.

۱۲۱) کدام‌یک از گزینه‌های زیر صحیح است؟

۱) تبدیل $T(x , y) = (y , x)$ در شرایط خاص می‌توان خطی را به خطی موازی با آن تصویر کرد.

۲) نتیجه‌ی ترکیب چند انتقال در شرایط خاص می‌تواند بازتاب نسبت به یک خط باشد.

۳) دو دایره‌ی متقاطع که شعاع آن‌ها مساوی است، ۳ محور تقارن دارند.

۴) تبدیل دوران در شرایطی خاص می‌تواند ایزومتری نباشد.

۱۲۲) ترکیب $2n$ بازتاب با محورهای موازی که هر کدام از محورها به اندازه‌ی m واحد از محور کناری فاصله دارد، کدام است؟

۱) دورانی که در مورد زاویه‌ی دوران آن نمی‌توان اظهارنظر کرد.

۲) انتقالی که در مورد جهت و اندازه‌ی بردار انتقال آن می‌توان اظهارنظر کرد.

۳) بازتابی که در مورد محور بازتاب آن می‌توان اظهارنظر کرد.

۴) انتقالی که در مورد جهت و اندازه‌ی بردار انتقال آن نمی‌توان اظهارنظر کرد.

۱۲۳) نقطه‌ی $A = (۳ , ۴)$ را ابتدا ۹۰° در خلاف جهت عقربه‌های ساعت و به مرکز مبدأ دوران می‌دهیم، سپس با بردار $\vec{B} = (۲ , ۲)$ انتقال داده و در نهایت ۹۰° در جهت عقربه‌های ساعت و به مرکز مبدأ دوران می‌دهیم تا به نقطه‌ی C برسیم. فاصله‌ی A و C کدام است؟

۱) $\sqrt{۲}$ ۲) $۲\sqrt{۲}$ ۳) ۸ ۴) $\sqrt{۲۹}$

۱۲۴) کدام جمله‌ی زیر نادرست است؟

۱) از دوران یک مثلث قائم‌الزاویه حول وتر آن، دو مخروط پدید می‌آید.

۲) از دوران یک مثلث متساوی‌الساقین حول ارتفاع وارد بر قاعده، یک مخروط پدید می‌آید.

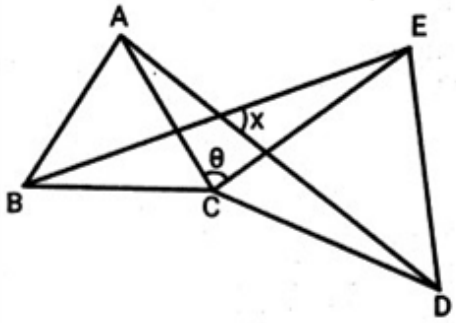
۳) از دوران یک مستطیل حول محور تقارن آن، یک استوانه پدید می‌آید.

۴) از دوران یک نیم‌دایره حول قطر آن، نیم‌کره پدید می‌آید.

۱۲۵) بازتاب خط $y = Cotg(۵۴^\circ)x$، نسبت به خط $y = Cotg(۷۲^\circ)x$ کدام است؟

۱) $y = ۰$ ۲) $y = tg(۵۴^\circ)x$ ۳) $y = tg(۳۶^\circ)x$ ۴) $y = tg(۷۲^\circ)x$

۱۲۶) در شکل زیر، مثلث‌های $\overset{\triangle}{ABC}$ و $\overset{\triangle}{CDE}$ متساوی‌الاضلاع می‌باشند. اندازه x، کدام است؟



۱) ۴۵°

۲) ۶۰°

۳) θ

۴) $\frac{۳}{۲}\theta$

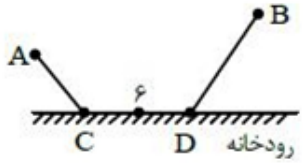
۱۲۷) پاره خط AB به طول ۶۰ واحد موازی خط Δ به فاصله ۱۶ واحد از آن مفروض است. نقطهٔ M روی خط Δ متحرک است. کمترین محیط مثلث MAB کدام است؟

۱) ۱۲۴ ۲) ۱۲۸ ۳) ۱۳۲ ۴) ۱۳۶

۱۲۸) دو دایره به شعاع‌های ۲ و ۳ و طول خط‌المرکزین ۹ داریم. به وسیلهٔ انتقال با برداری به طول a، تصویر دایرهٔ کوچک‌تر با دایرهٔ بعدی مماس خارج می‌شود. مقدار a کدام است؟ (بردار موازی خط‌المرکزین رسم می‌شود.)

۱) ۶ ۲) ۴ یا ۱۴ ۳) ۸ ۴) ۸ یا ۹

۱۲۹) دو شهر A و B مطابق شکل در یک طرف رودخانه واقع‌اند. می‌خواهیم جاده‌ای از A به B بسازیم به طوری که ۶ کیلومتر از این جاده در ساحل رودخانه ساخته شود. اگر طول کوتاه‌ترین مسیر K باشد و E نقطهٔ روی رودخانه باشد که AE + EB کم‌ترین مقدار ممکن است و AE + EB = ۱۳ باشد، در مورد K کدام گزینه درست است؟



۱) K = ۱۹

۲) K > ۱۹

۳) K < ۱۹

۴) با این اطلاعات در مورد K چیزی نمی‌توان گفت.

۱۳۰) در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC، M وسط وتر AC است و N نقطه‌ای متغیر روی BC است که محیط مثلث NAM کم‌ترین مقدار را دارد. $\frac{CN}{BN}$ کدام است؟

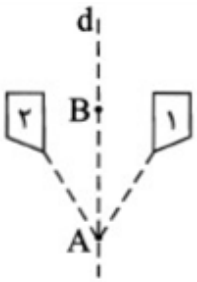
۱) ۱ ۲) ۲

۳) ۱/۵ ۴) بستگی به اندازهٔ اضلاع مثلث ABC دارد.

۱۳۱) خط Δ مجانس خط به معادله $۴y + ۳x = ۸$ با مرکز تجانس (۲ , ۴) و نسبت تجانس $-\frac{۳}{۲}$ است. عرض از مبدأ این خط کدام است؟

۱) ۱۰ ۲) ۱۰/۷۵ ۳) ۱۱/۲۵ ۴) ۱۲

۱۳۲) شکل ۱ تحت کدام تبدیل شکل ۲ را حاصل می‌کند.



الف) دوران به مرکز نقطه A
ب) بازتاب نسبت به نقطه B
پ) تجانس، مرکز نقطه B
ت) بازتاب نسبت به خط d

۱) الف - ت ۲) پ - ت ۳) ب - ت ۴) الف

۱۳۳) کدام‌یک از تبدیل زیر با هم برابرند؟

الف - تجانس به مرکز مبدأ مختصات و $k = -۱$
ب- دوران با زاویه π و مرکز مبدأ مختصات.
پ- بازتاب نسبت به خط گذرنده از مبدأ مختصات.
ت- بازتاب نسبت به مبدأ مختصات.

۱) الف، پ ۲) الف، ب، ت ۳) الف، پ، ت ۴) همه موارد

۱۳۴) بازتاب نقطه $(-۲ , ۱)$ نسبت به نقطه‌ی M نقطه $(۱ , -۳)$ می‌باشد. بازتاب نقطه $(۲ , ۱)$ نسبت به M کدام است؟

۱) $(۳ , -۳)$ ۲) $(۱ , ۳)$ ۳) $(۱ , -۳)$ ۴) $(-۳ , -۳)$

۱۳۵) کدام‌یک از عبارت‌های زیر در رابطه با تبدیلات درست است؟

الف - در دوران نقطه ثابت تبدیل همان مرکز دوران است.
ب- دوران با زاویه ۲π بیش از یک نقطه ثابت دارد.
پ- هر تبدیل طولپا شیب را نگه می‌دارد.

۱) الف، پ ۲) ب، پ ۳) الف، ب ۴) همه موارد

۱۳۶) پاره‌خط AB ، به مرکز نقطه‌ی O خارج از پاره‌خط با تجانس به نسبت $\left(-\frac{۱}{۲}\right)$ را به A'B' تبدیل می‌کنیم. سپس AB را به مرکز O و نسبت تجانس $\left(k \neq -\frac{۱}{۲}\right)$ به A"B" تبدیل می‌کنیم. اگر $BB" = BB'$ باشد، $\frac{A"B"}{A'B'}$ کدام است؟

۱) ۶ ۲) ۵ ۳) ۳ ۴) $\frac{۵}{۲}$

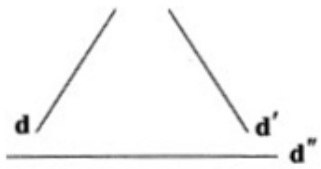
۱۳۷) خط $y = ۲x + ۱$ را نسبت به خط $۲y + x = ۲$ بازتاب داده‌ایم. نقطه ثابت این تبدیل کدام است؟

۱) $(۰ , ۱)$ ۲) $(۰ , -۱)$ ۳) $(-۱ , ۰)$ ۴) $(۱ , ۰)$

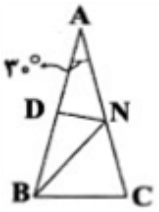
۱۳۸) کدام‌یک از توابع زیر یک تبدیل را نمایش می‌دهند؟

۱) $f(x) = x^۲ + x$ ۲) $f(x) = ۳$ ۳) $f(x) = x^۳ - x^۲$ ۴) $f(x) = x^۳ + x$

۱۳۹) سه خط دوبه‌دو ناموازی d ، d' و d" در صفحه مفروض‌اند. می‌خواهیم پاره‌خطی به طول $a > ۰$ رسم کنیم که دو سر آن روی d و d' بوده و موازی d" باشد. تعداد جواب کدام است؟



۱) ۱
۲) ۲
۳) صفر
۴) بی‌شمار جواب



۱۴۰) مثلث متساوی‌الساقین ABC $(\hat{A} = ۳۰^\circ \ , \ AB = AC = ۶)$ مطابق شکل مفروض است. اگر D وسط ساق AB و N نقطه‌ای روی ساق AC باشد، کم‌ترین مقدار NB + ND کدام است؟

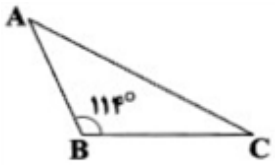
۱) ۳
۲) $۴\sqrt{۳}$
۳) $۳\sqrt{۳}$
۴) ۴

۱۴۱) دو خط موازی به فاصله‌ی ۴ واحد از یک‌دیگر قرار دارند و نقطه‌ی A به فاصله‌های ۱ و ۳ واحد از این دو خط واقع است. این دو خط در کدام تجانس تصویر یک‌دیگرند؟

۱) تجانس به مرکز A و نسبت تجانس ۳
۲) تجانس به مرکز A و نسبت تجانس ۳-
۳) تجانس به مرکز A و نسبت تجانس ۴
۴) تجانس به مرکز A و نسبت تجانس ۴-

۱۴۲) تصاویر نقاط A و B در دورانی به زاویه‌ی α به ترتیب A و C می‌باشد. کدام گزینه درست است؟

۱) AB = AC
۲) BC = AB
۳) BC = AC
۴) AB = AC = BC



۱۴۳) مثلث ABC با $\hat{B} = ۱۱۴^\circ$ مطابق شکل زیر مفروض است. رأس‌های A و C را حول B به اندازه‌ی ۳۴° دوران می‌دهیم. نقاط 'A و 'C پدید می‌آیند. زاویه‌ی برخورد خط‌های شامل 'AA و 'CC چند درجه است؟

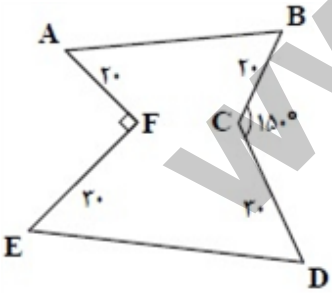
۱) ۷۲
۲) ۶۴
۳) ۶۸
۴) ۶۶

۱۴۴) معادله‌ی تصویر خط $۲y + x = ۶$، تحت تجانس به مرکز $O'(۲ , ۱)$ و نسبت تجانس $\frac{۳}{۲}$، کدام است؟

۱) $y + ۲x = ۲$
۲) $۲y + x = ۷$
۳) $۲y + x = ۹$
۴) $۳y + x = ۹$

۱۴۵) بازتاب خط Δ به معادله‌ی $۲y + x = ۶$، نسبت به خط $y = -x$، خط Δ' است. معادله‌ی خط Δ'، کدام است؟

۱) $y + ۲x = -۶$
۲) $y + ۲x = ۲$
۳) $y + ۳x = -۲$
۴) $y - ۲x = ۸$



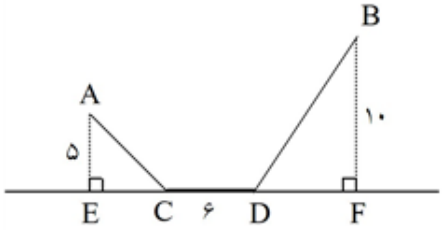
۱۴۶) در شکل مقابل اگر بدون تغییر محیط و تعداد اضلاع، مساحت شکل را به کمک بازتاب افزایش دهیم، میزان افزایش مساحت کدام است؟

۱) ۳۰۰
۲) ۶۰۰
۳) ۹۰۰
۴) ۱۲۰۰

۱۴۷) یک مثلث متساوی‌الاضلاع را حول نقطهٔ همرسی میانه‌هایشان دوران می‌دهیم. اگر دوران‌یافتهٔ مثلث بر خودش منطبق باشد، زاویهٔ دوران کدام می‌تواند باشد؟

۱) ۶۰°
۲) ۱۲۰°
۳) ۹۰°
۴) ۱۸۰°

۱۴۸) دو شهر A و B مطابق شکل زیر در یک طرف رودخانه‌ای واقع‌اند. می‌خواهیم جاده‌ای از A به B بسازیم به طوری‌که ۶ کیلومتر از این جاده در ساحل رودخانه ساخته شود. اگر EF = ۱۴ باشد آن‌گاه کوتاه‌ترین مسیر ACDB چند کیلومتر است؟



۱) ۲۲
۲) ۲۴
۳) ۲۵
۴) ۲۳

۱۴۹) بازتاب نسبت به یک نقطه کدام‌یک از ویژگی‌های زیر را دارا نمی‌باشد؟

۱) ایزومتری ۲) حفظ شیب خط ۳) حفظ جهت شکل ۴) حفظ زاویه

۱۵۰) دایره‌ی C(o , ۳) و نقطه‌ی A به فاصله‌ی ۴ از مرکز آن مفروض است. تصویر دایره‌ی (C) را در تجانس به مرکز A و نسبت تجانس ۳، دایره‌ی (C') می‌نامیم. وضعیت این دو دایره چگونه است؟

۱) متخارج‌اند. ۲) متقاطع‌اند. ۳) متداخل‌اند. ۴) مماس خارج‌اند.

۱۵۱) مساحت یک مثلث ۱۲۸ و مساحت تصویر آن در یک تجانس ۵۰ است. اندازه‌ی تصویر پاره‌خطی به طول ۱۲ در این تجانس کدام است؟

۱) ۸/۵ ۲) ۶/۵ ۳) ۷/۵ ۴) ۷

۱۵۲) دو خط d و d' در نقطه‌ی O با زاویه‌ی °۳۰ یک‌دیگر را قطع می‌کنند. اگر نقطه‌ی M روی خط d' به فاصله‌ی a از O و S_d نماد بازتاب نسبت به محور d باشد، آن‌گاه فاصله‌ی نقطه‌ی $S_{d'}oS_d$ از O کدام است؟

۱) a ۲) $a\sqrt{۲}$ ۳) $a\sqrt{۳}$ ۴) ۲a

۱۵۳) دو خط D و D' مفروض است. چند نقطه وجود دارد که اگر D را حول آن نقطه، دوران دهیم بر D' منطبق گردد؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) بی‌شمار ۴) ۴

۱۵۴) در مستطیل ABCD ، AB = ۶، AD = ۴ و نقطه‌ی E روی AB آن‌را به نسبت ۲ به ۱ تقسیم می‌کند. E را در بازتاب نسبت به خط AD تصویر می‌کنیم و سپس نقطه‌ی حاصل را در بازتاب نسبت به محور BC تصویر می‌کنیم، نقطه‌ی E' به دست می‌آید. فاصله‌ی E و E' کدام است؟

۱) ۱۰ ۲) ۶ ۳) ۱۲ ۴) ۸

۱۵۵) در یک انتقال، تصویر خط D بر آن منطبق است، راستای بردار انتقال و خط D چگونه‌اند؟

۱) بر هم عمودند. ۲) موازی‌اند. ۳) زاویه‌ی °۴۵ می‌سازند. ۴) زاویه‌ی °۳۰ می‌سازند.

۱۵۶) خط D را تحت انتقال با برداری به طول ۲ که راستای آن با خط D زاویه‌ی °۳۰ می‌سازد تصویر می‌کنیم و خط D' به دست می‌آید. سپس D' را در بازتاب با محور D تصویر می‌کنیم، خط D" به دست می‌آید. فاصله‌ی D" و D' کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) $\sqrt{۳}$ ۴) $\frac{۳}{۲}$

۱۵۷) کدام‌یک از تبدیل‌های زیر، یک تبدیل همانی است؟

۱) دوران تحت زاویه‌ی ۱۸۰°
۲) بازتاب
۳) تجانس
۴) دوران تحت زاویه‌ی ۳۶۰°

۱۵۸) نقاط $A(۲ , ۳)$، $B(۵ , ۳)$، $C(۵ , -۱)$ و $D(۲ , -۱)$ رئوس یک چهارضلعی هستند. ابتدا چهارضلعی را تحت زاویه‌ی ۴۵° نسبت به مرکز آن دوران می‌دهیم و سپس مجانس شکل تصویر را با نسبت تجانس $k = \frac{۳}{۴}$ می‌یابیم. شکل حاصل دارای چه مساحتی است؟

۱) $\frac{۳}{۴}$
۲) $\frac{۹}{۱۶}$
۳) $\frac{۹}{۴}$
۴) $\frac{۲۷}{۴}$

۱۵۹) مجانس دایره‌ای به شعاع r ، دایره‌ای به شعاع R است. اگر داشته باشیم $R = \frac{\sqrt{۳}}{۲}r$، در این صورت نسبت تجانس کدام است؟

۱) $\frac{۳}{۴}$
۲) $\frac{\sqrt{۳}}{۲}$
۳) $\frac{۳}{۲}$
۴) $\frac{\sqrt{۳}}{۴}$

۱۶۰) اگر دوران‌یافته‌ی نقطه‌ی $A(۲ , -۱)$، نقطه‌ی $A'(-۴ , ۲)$ باشد، مرکز دوران کدام نقطه می‌تواند باشد؟

۱) $\left(۲ , \frac{۳}{۲}\right)$
۲) $\left(-۲ , \frac{۳}{۲}\right)$
۳) $\left(-۲ , -\frac{۳}{۲}\right)$
۴) $\left(۲ , -\frac{۳}{۲}\right)$

۱۶۱) کدام‌یک از گزینه‌های زیر، از ویژگی‌های دوران نیست؟

۱) موقعیت شکل را حفظ می‌کند.
۲) ایزومتری است.
۳) اندازه‌ی زاویه را حفظ می‌کند.
۴) شیب خط را حفظ نمی‌کند.

۱۶۲) دو خط $d_۱$ و $d_۲$ با زاویه‌ی ۳۰ درجه یک‌دیگر را در نقطه‌ی M قطع می‌کنند. مثلث A'B'C' بازتاب مثلث ABC نسبت به خط $d_۱$ و مثلث A"B"C" بازتاب مثلث A'B'C' نسبت به خط $d_۲$ است. اگر مثلث ABC ، خارج از دو خط و یک طرف خط $d_۱$ باشد، با چه تبدیلی می‌توان $\overset{\triangle}{A''B''C''}$ را تصویر $\overset{\triangle}{ABC}$ دانست؟

۱) دوران به مرکز M و زاویه‌ی ۳۰ درجه
۲) دوران به مرکز M و زاویه‌ی ۶۰ درجه
۳) دوران به مرکز M و زاویه‌ی ۹۰ درجه
۴) بازتاب نسبت به نیمساز زاویه‌ی M

۱۶۳) دو خط $d_۱$ و $d_۲$ به موازات یک‌دیگر و به فاصله‌ی m واحد از هم قرار دارند. اگر نقطه‌ی A خارج از دو خط و به فاصله‌ی R $(R < m)$ واحد از خط $d_۱$ قرار داشته باشد و A' تصویر A تحت خط $d_۱$ و A" تصویر A تحت خط $d_۲$ باشد، فاصله‌ی A' از A" کدام است؟

۱) ۲m
۲) m
۳) R
۴) ۲R

۱۶۴) کدام‌یک از گزینه‌های زیر از ویژگی‌های بازتاب تحت یک خط نیست؟

۱) تصویر هر نقطه روی خط بازتاب، بر خودش منطبق است.

۲) اگر A' بازتاب نقطه‌ی A تحت خط d باشد، خط d عمودمنصف پاره‌خط AA' است.

۳) بازتاب نسبت به خط، بی‌نهایت نقطه‌ی ثابت تبدیل دارد.

۴) بازتاب نسبت به خط، شیب خط را حفظ می‌کند.

۱۶۵) فرض کنید ABC مثلث متساوی‌الاضلاع و T یک تبدیل است، به طوری‌که $T(A) = B$، $T(B) = A$ و $T(C) = C$. تبدیل T کدام یک از تبدیل‌های زیر می‌تواند باشد؟

۱) دوران ۲) بازتاب تحت یک خط ۳) انتقال ۴) بازتاب تحت یک نقطه

۱۶۶) کدام‌یک از گزینه‌های زیر از ویژگی‌های بازتاب تحت یک نقطه است؟

۱) بازتاب تحت یک نقطه، بی‌نهایت نقطه‌ی ثابت تبدیل دارد.

۲) بازتاب تحت یک نقطه، موقعیت شکل را حفظ می‌کند.

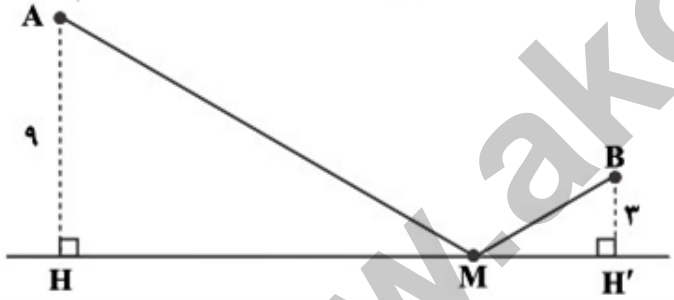
۳) بازتاب تحت یک نقطه، شیب خط را حفظ نمی‌کند.

۴) بازتاب تحت یک نقطه، اندازه ی زاویه‌ی خطوط نسبت به محورها را حفظ می‌کند.

۱۶۷) اندازه‌ی اضلاع قائم یک مثلث قائم‌الزاویه ۹ و ۱۲ است. این مثلث را تحت بازتاب نسبت به خط شامل وتر تصویر می‌کنیم. فاصله‌ی دورترین رأس مثلث و تصویرش کدام است؟

۱) ۴/۳۵ ۲) ۷/۲ ۳) ۸/۷ ۴) ۱۴/۴

۱۶۸) در شکل مقابل، نقاط A و B ثابت هستند. اگر کمترین مقدار $AM + MB$ برابر ۲۴ باشد، زاویهٔ HAM کدام است؟



۱) 30°

۲) 15°

۳) 75°

۴) 60°

۱۶۹) خط D محور یک بازتاب را با زاویه‌ی 15° قطع می‌کند. نقطه‌ی A روی خط D از نقطه‌ی تقاطع به فاصله‌ی $\sqrt{3} + 1$ است. فاصله‌ی نقطه‌ی A و نقطه‌ی تصویرش تحت این بازتاب کدام است؟

۱) $\sqrt{6}$ ۲) $\sqrt{3}$ ۳) $\sqrt{2}$ ۴) ۲

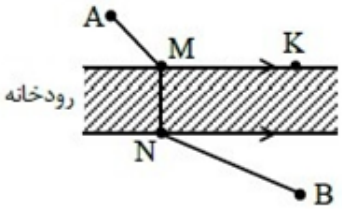
۱۷۰) دو بازتاب با محورهای موازی L و L' مفروض‌اند. خط d را ابتدا نسبت به محور L تصویر می‌کنیم، خط d' به دست می‌آید. سپس تصویر d' در بازتاب نسبت به محور L' را d'' می‌نامیم. اگر فاصله‌ی دو محور بازتاب $6\sqrt{3}$ و زاویه‌ی خط d با محور L برابر با 30° باشد، آن‌گاه فاصله‌ی دو خط d و d'' کدام است؟

۱) $6\sqrt{3}$ ۲) ۱۲ ۳) ۱۸ ۴) $9\sqrt{3}$

۱۷۱) خط D با خط L زاویه‌ی α می‌سازد به طوری‌که $tg\alpha = \frac{۲}{۳}$. اگر D را تحت بازتاب نسبت به محور L تصویر کنیم، تانژانت زاویه‌ی خط D و تصویرش، در این بازتاب کدام است؟

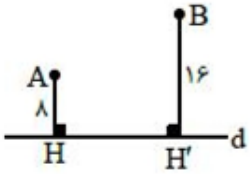
۱) ۲/۲ ۲) ۲/۸ ۳) ۲/۵ ۴) ۲/۴

۱۷۲) دو شهر A و B دو طرف رودخانه هستند و می‌خواهیم جاده‌ای از A به B بسازیم به طوری که پل MN بر راستای رودخانه عمود باشد. اگر مسیر AMNB کوتاه‌ترین مسیر ممکن باشد و $A\hat{M}N + B\hat{N}M = ۲۵۰^\circ$، اندازهٔ زاویهٔ AMK چند درجه است؟



۱) ۱۵۴
۲) ۱۶۰
۳) ۱۵۵
۴) ۱۲۵

۱۷۳) با توجه به شکل فواصل نقاط A و B از خط d، ۸ و ۱۶ و فاصلهٔ H تا H' برابر ۱۰ است. نقطه‌ای مانند M روی d که MA + MB کم‌ترین مقدار خود را دارد در نظر بگیرید. MA + MB کدام است؟



۱) ۲۴
۲) ۲۵
۳) ۲۶
۴) ۲۷

۱۷۴) چه تعداد از موارد زیر درست است؟

- هر تبدیل همانی طولپاست.
- بازتاب هیچ‌گاه تبدیل همانی نیست.
- تجانس هیچ‌گاه تبدیل همانی نیست.

۱) ۳ ۲) ۲ ۳) ۱ ۴) صفر

۱۷۵) شرط لازم و کافی برای آن‌که پاره‌خطهای نابرابر AB و A'B' مجانس یک‌دیگر باشند، کدام است؟

۱) $AB \parallel A'B'$ ۲) $AB \perp A'B'$ ۳) $AA' = BB'$ ۴) هیچ‌کدام

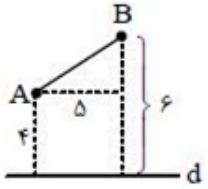
۱۷۶) مساحت مجانس مربعی به طول ضلع ۴ در تجانس به مرکز نقطهٔ تلاقی قطرهای مربع با نسبت $k = -\frac{۱}{۳}$ کدام است؟

۱) $\frac{۴}{۳}$ ۲) $\frac{۱۶}{۳}$ ۳) $\frac{۴}{۹}$ ۴) $\frac{۱۶}{۹}$

۱۷۷) مثلث متساوی‌الاضلاعی به ضلع ۴ را یک‌بار به مرکز O و زاویهٔ ۹۰° و سپس به همین مرکز و زاویهٔ ۱۲۰° دوران می‌دهیم. مساحت مثلث دوران‌یافته کدام است؟

۱) $۲\sqrt{۳}$ ۲) $۳\sqrt{۳}$ ۳) $۴\sqrt{۳}$ ۴) $۶\sqrt{۳}$

۱۷۸) در شکل مقابل بازتاب نقاط A و B نسبت به خط d را 'A و 'B می‌نامیم. مساحت چهارضلعی 'ABB'A کدام است؟



۱) ۲۵
۲) ۴۰
۳) ۵۰
۴) ۶۵

۱۷۹) تجانس در چه صورتی تبدیل همانی است؟

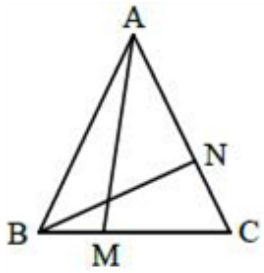
۱) هرگاه نسبت تجانس ۱- باشد.
۲) هرگاه نسبت تجانس ۱± باشد.
۳) هرگاه نسبت تجانس ۱ باشد.
۴) هیچ‌وقت

۱۸۰) دو پاره‌خط مساوی AB و 'A'B در چند حالت ازحالات زیر همواره بازتاب محوری هم هستند؟

الف- موازی باشند.
ب- در یک امتداد باشند.
ج- ساق‌های یک ذوزنقه باشند.
د- اضلاع روبه‌روی یک مستطیل باشند.
هـ- از یک نقطه رسم شده باشند.
و- بر هم عمود باشند.

۱) ۱
۲) ۳
۳) ۴
۴) ۵

۱۸۱) در مثلث متساوی‌الاضلاع مقابل می‌دانیم BM = CN می‌باشد. اگر نقطهٔ G مرکز ثقل مثلث ABC باشد، برای انطباق مثلث ABM به مثلث BCN چه نوع تبدیلی لازم است؟



۱) دوران به مرکز B و زاویهٔ °۶۰
۲) دوران به مرکز B و زاویهٔ °۱۲۰
۳) دوران به مرکز G و زاویهٔ °۱۲۰
۴) دوران به مرکز G و زاویهٔ °۶۰

۱۸۲) نقطهٔ M در فاصلهٔ ۶ از نقطهٔ O قرار دارد. اگر M را حول O و به اندازهٔ ۱۲۰ درجه دوران دهیم تا نقطهٔ 'M به‌دست آید، فاصلهٔ O تا پاره‌خط 'MM کدام است؟

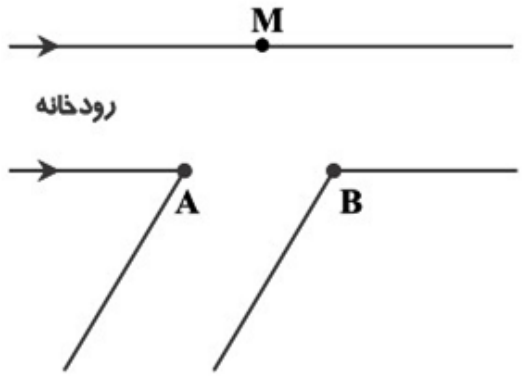
۱) ۲
۲) ۳
۳) ۴
۴) ۶

۱۸۳) ضلع AB بازتاب قسمتی از ضلع AC در مثلث ABC می‌باشد. کدام گزینه در این بازتاب، مرکز بازتاب (نقطهٔ ثابت) می‌باشد؟

۱) محل همرسی ارتفاع‌ها
۲) مرکز دایرهٔ محاطی داخلی
۳) مرکز دایرهٔ محیطی
۴) روی ضلع BC

تلفن تماس: ۰۲۶۳۳۴۰۸۹۴۴

۱۸۴) در شکل مقابل، اگر نقاط A و B ثابت و نقطهٔ M روی خط بالایی رودخانه متغیر باشد و بخواهیم مسیر AMBA کوتاه‌ترین مسیر ممکن باشد، نوع مثلث MAB الزاماً کدام است؟



۱) فقط قائم‌الزاویه

۲) قائم‌الزاویهٔ متساوی‌الساقین

۳) فقط متساوی‌الساقین

۴) متساوی‌الاضلاع

۱۸۵) زمینی به‌شکل مقابل مفروض است. با انجام چند بازتاب می‌توانیم با ثابت نگه داشتن محیط و تعداد اضلاع شکل، مساحت زمین را به بیشترین مقدار ممکن افزایش دهیم؟

۱) ۱

۲) ۲

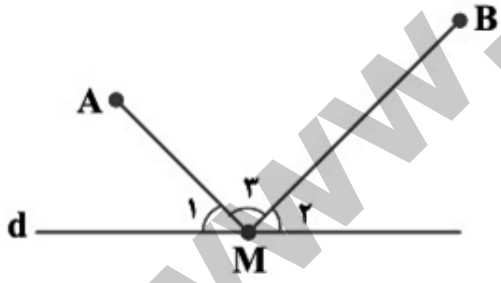
۳) ۳

۴) ۴

۱۸۶) در تجانس T به مرکز O و نسبت $k = \frac{۵}{۳}$، اگر $OM = ۱۲$ و داشته باشیم $T(M) = M'$، آنگاه طول پاره‌خط MM' کدام است؟

۱) ۲۰ ۲) ۸ ۳) ۱۲ ۴) ۴

۱۸۷) در شکل مقابل، کوتاه‌ترین مسیر برای رفتن از A به B و از طریق عبور از نقطه‌ای روی خط d، مسیر AMB است. کدام گزینه درست است؟



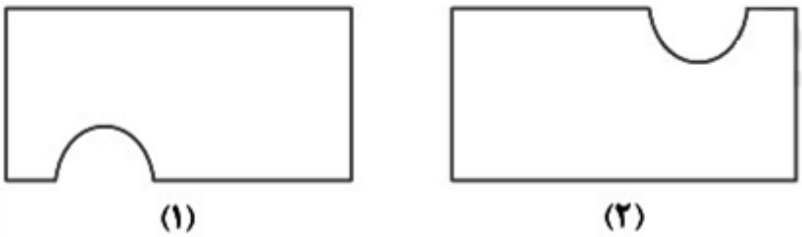
۱) $\hat{M}_۱ + \hat{M}_۲ = \hat{M}_۳$

۲) $\hat{M}_۳ = ۲\hat{M}_۱$

۳) $\hat{M}_۳ = ۲\hat{M}_۲$

۴) $\hat{M}_۱ = \hat{M}_۲$

۱۸۸) شکل (۱) با کدام تبدیل به شکل (۲) تصویر می‌شود؟



۱) دوران ۱۸۰°

۲) بازتاب

۳) انتقال

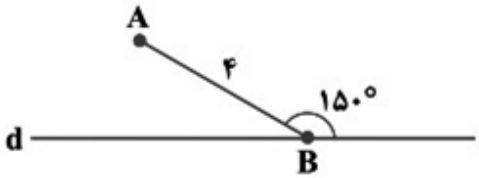
۴) تجانس با نسبت $k = ۱$

تلفن تماس: ۰۲۶۳۳۴۰۸۹۴۴

۱۸۹) کدام گزینه از ویژگی‌های تجانس نیست؟

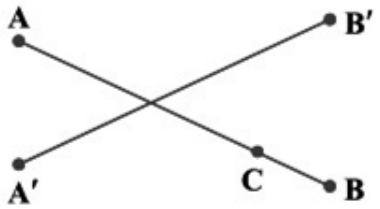
۱) شیب خط را حفظ می‌کند.
۲) اندازهٔ زاویه را حفظ می‌کند.
۳) طولپاست.
۴) جهت شکل را حفظ می‌کند.

۱۹۰) در شکل زیر اگر بازتاب نقطهٔ A نسبت به خط d نقطهٔ A' باشد، مساحت مثلث BAA' چند برابر $\sqrt{۳}$ است؟



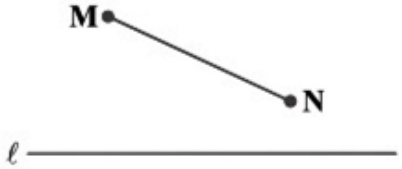
۱) ۱
۲) ۲
۳) ۳
۴) ۴

۱۹۱) فرض کنید T یک تبدیل طولپا باشد، $T(A) = A'$ و $T(B) = B'$.
اگر مطابق شکل، C نقطه‌ای روی پاره‌خط AB باشد و $T(C) = C'$،
آن‌گاه چند نقطه در صفحه وجود دارد که می‌تواند C' باشد؟



۱) ۱
۲) ۲
۳) بی‌شمار
۴) ۴

۱۹۲) در شکل مقابل اگر نقاط M' و N' به‌ترتیب بازتاب نقاط M و N نسبت به خط l باشند، نوع چهارضلعی MNN'M' کدام است؟

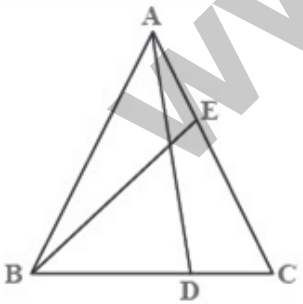


۱) متوازی‌الاضلاع
۲) ذوزنقهٔ قائم‌الزاویه
۳) ذوزنقهٔ متساوی‌الساقین
۴) غیر مشخص

۱۹۳) تبدیل طولپا تبدیلی است که .....

۱) موقعیت شکل را حفظ می‌کند.
۲) نقاط را روی خودشان تصویر می‌کند.
۳) شیب خط را حفظ می‌کند.
۴) طول پاره‌خط را حفظ می‌کند.

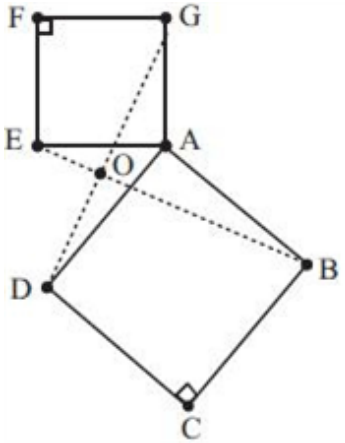
۱۹۴) در مثلث متساوی‌الاضلاع ABC ، داریم $BD = CE$. پاره‌خط های AD و BE .....



۱) بازتاب محوری یک‌دیگر نسبت به یکی از اضلاع مثلث هستند.
۲) دوران‌یافته‌ی یک‌دیگر در دوران °۶۰ هستند.
۳) بازتاب محوری یک‌دیگر نسبت به یکی از ارتفاعات مثلث هستند.
۴) دوران‌یافته‌ی یک‌دیگر در دوران °۱۲۰ هستند.

۱۹۵) دو دایره متخارج و نقطه‌ی O خارج این دو دایره مفروضند. اگر بخواهیم مثلث قائم‌الزاویه‌ی متساوی‌الساقینی رسم کنیم که یک رأسش O بوده و دوراس دیگرش هر کدام بر روی یکی از دو دایره‌ی مفروض واقع باشد، از چه تبدیلی باید استفاده کنیم؟

۱) دوران
۲) بازتاب
۳) انتقال
۴) تجانس



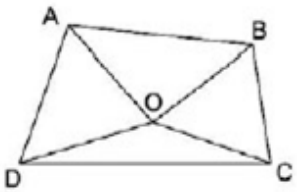
۱۹۶) با توجه به شکل روبه‌رو، دو مربع در رأس A مشترک‌اند. پاره‌خط GD با چه زاویه‌ای پاره‌خط EB را قطع می‌کند؟

۱) ۹۰ درجه

۲) ۱۲۰ درجه

۳) ۱۳۵ درجه

۴) ۷۳/۵ درجه



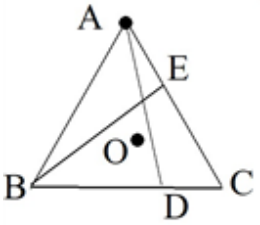
۱۹۷) در چهارضلعی شکل مقابل نقطه‌ی O داخل چهارضلعی به گونه‌ای قرار دارد که:

$OA = OD$, $OB = OC$, $D\hat{A}O = C\hat{B}O = ۷۰^\circ$

زاویه‌ی بین دو قطر چهارضلعی ABCD کدام است؟

۱) ۷۰° ۲) ۲۰°

۳) ۴۰° ۴) ۵۰°



۱۹۸) نقطه‌ی O مرکز ثقل مثلث متساوی‌الاضلاع ABC و $BD = CE$ ، کدام بیان نادرست است؟

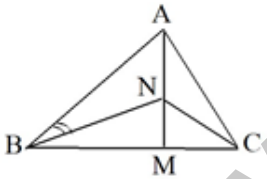
۱) $OE = OD$

۲) $OD \perp BE$

۳) $E\hat{O}D = ۱۲۰^\circ$

۴) $A\hat{O}C = ۱۲۰^\circ$

۱۹۹) در شکل روبه‌رو عمودمنصف‌های AB و NC در نقطه‌ی M روی BC متقاطع‌اند. اگر $A\hat{B}N = ۱۵^\circ$ باشد، اندازه‌ی زاویه‌ی A چه‌قدر است؟



۱) ۵۰°

۲) ۴۵°

۳) ۶۰°

۴) ۷۵°

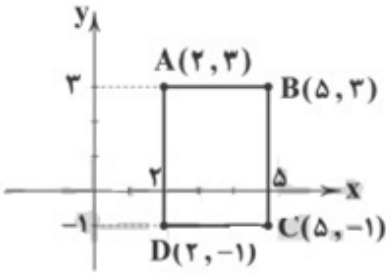
۲۰۰) دو خط متقاطع d و d' و پاره‌خط AB در صفحه آن‌ها مفروض است. برای رسم پاره‌خطی موازی و مساوی AB که دو سر آن بر روی این دو خط باشد، کدام تبدیل هندسی به‌کار می‌رود؟

۱) بازتاب ۲) انتقال ۳) دوران ۴) تجانس

تلفن تماس: ۰۲۶۳۳۴۰۸۹۴۴

۱ گزینه ۴ پاسخ صحیح است. با توجه به این‌که $\frac{۳۶۰^\circ}{۱۸^\circ} = ۲۰$, $\frac{۳۶۰^\circ}{۱۵^\circ} = ۲۴$ است، اگر این چندضلعی را ۲۰ بار با زاویه‌ی ۱۸° یا ۲۴ بار با زاویه‌ی ۱۵° حول نقطه‌ی O دوران دهیم، بر خودش منطبق می‌شود (دوران با زاویه‌ی ۳۶۰°، معادل تبدیل همانی است) ، پس تعداد اضلاع این چندضلعی هم مضرب ۲۰ و هم مضرب ۲۴ است و در نتیجه تعداد اضلاع این چندضلعی مضرب ک‌م‌م دو عدد ۲۰ و ۲۴، یعنی ۱۲۰ می‌باشد که در بین گزینه‌ها تنها عدد ۱۲۰ دارای این ویژگی است.

۲ گزینه ۴ پاسخ صحیح است. چون دوران یک تبدیل ایزومتری است، لذا مساحت تصویر تحت دوران تغییر نمی‌کند، اما درتجانس با نسبت تجانس k، نسبت مساحت تصویر به مساحت شکل برابر $k^۲$ است.

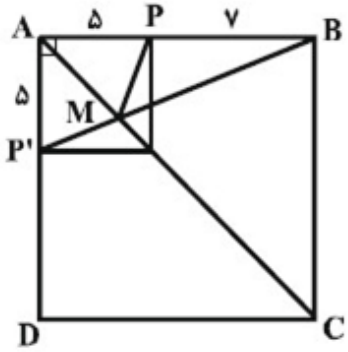


با رسم چهارضلعی ABCD مطابق شکل، مشاهده می‌شود که چهارضلعی ABCD یک مستطیل به طول ۴ و عرض ۳ است بنابراین:

$$S_{ABCD} = ۳ \times ۴ = ۱۲$$

$$\frac{S_{A'B'C'D'}}{S_{ABCD}} = \frac{S_{A'B'C'D'}}{۱۲} = k^۲ = \left(\frac{۳}{۴}\right)^۲ = \frac{۹}{۱۶} \Rightarrow S_{A'B'C'D'} = ۱۲ \times \frac{۹}{۱۶} = \frac{۲۷}{۴}$$

تلفن تماس: ۰۲۶۳۳۴۰۸۹۴۴



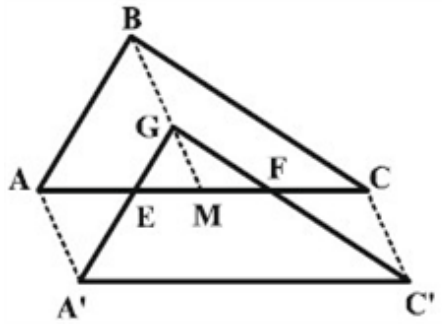
۳ گزینه ۳ پاسخ صحیح است. اگر رأس دیگر مثلث را M فرض کنیم، برای یافتن نقطه‌ی M به طوری که محیط مثلث PBM حداقل باشد، باید کم‌ترین مقدار PM + BM را پیدا کنیم. (مقدار PB = ۷ مشخص است.) برای این کار از روش هرون کمک می‌گیریم. نقطه‌ی P را نسبت به AC بازتاب داده و P' می‌نامیم. نقطه‌ی M محل برخورد P'B با AC است.

با توجه به شکل داریم:

$$PM + BM = P'M + BM = P'B$$

$$B\overset{\triangle}{A}P' : P'B^{۲} = \underbrace{AP'^{۲}}_{۵} + \underbrace{AB^{۲}}_{۱۲} = P'B = ۱۳$$

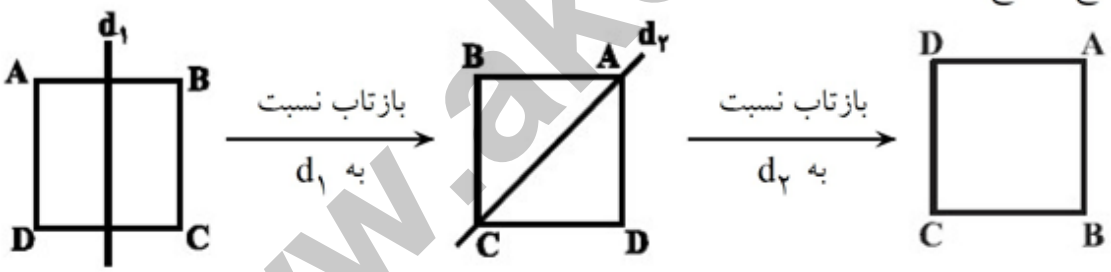
$$\text{محیط مثلث } OBM = \underbrace{PM + BM}_{۱۳} + \underbrace{PB}_{۷} = ۲۰$$



۴ گزینه ۴ پاسخ صحیح است. مثلث‌های ABC و EGF به حالت تساوی زاویه‌هایشان متشابه‌اند و داریم:

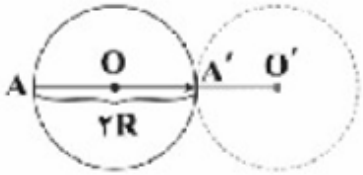
$$\frac{S_{\overset{\triangle}{EGF}}}{S_{\overset{\triangle}{ABC}}} = \left(\frac{GM}{BM}\right)^{۲} \Rightarrow \frac{۶}{S_{\overset{\triangle}{ABC}}} = \left(\frac{۱}{۳}\right)^{۲} \Rightarrow S_{\overset{\triangle}{ABC}} = ۵۴$$

۵ گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

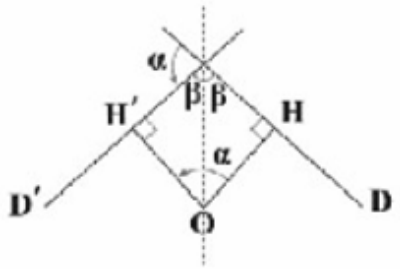


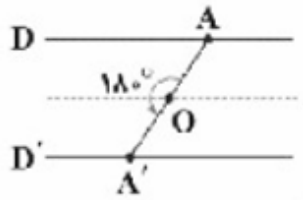
در واقع مربع نسبت به دو خط متقاطع بازتاب یافته است، پس مطابق شکل، مربع به اندازه‌ی دو برابر زاویه‌ی بین دو خط یعنی به اندازه‌ی °۹۰ در جهت حرکت عقربه‌های ساعت دوران یافته است. در نتیجه تنها نقطه‌ی ثابت تبدیل، مرکز دوران (محل برخورد خطوط $d_۱$ و $d_۲$ یعنی مرکز مربع) است.

۶ گزینه ۳ پاسخ صحیح است. هر دایره‌ای را به اندازه ای قطرش در هر جهتی جابه‌جا کنیم، تصویر آن بر خودش مماس خواهد شد، پس اندازه‌ی بردار انتقال برابر قطر دایره یا همان ۲R است.



۷ گزینه ۳ پاسخ صحیح است. اگر دو خط متقاطع باشند، هر نقطه روی نیم‌ساز زاویه‌ی بین دو خط مانند O، مرکز دورانی است که در آن D' تصویر خط D است و اگر دو خط D و D' موازی باشند، آن‌گاه D' در بی‌شمار دوران به زاویه‌ی °۱۸۰ تصویر خط d است و مرکز این دوران‌ها روی خطی موازی و متساوی‌الفاصله از خطوط D و D' قرار دارند.





۸ گزینه ۱ پاسخ صحیح است. در تبدیل تجانس، اندازه‌ی تصویر هر پاره‌خط با نسبت تجانس k، برابر با حاصل‌ضرب نسبت تجانس در طول پاره‌خط است. بنابراین بین اضلاع مثلث A'B'C' و اضلاع مثلث ABC روابط زیر برقرار است.

$$\begin{cases} A'B' = \frac{۱}{۲} AB \\ A'C' = \frac{۱}{۲} AC \\ B'C' = \frac{۱}{۲} BC \end{cases} \Rightarrow \frac{\text{محیط } \overset{\triangle}{A'B'C'}}{\text{محیط } \overset{\triangle}{ABC}} = \frac{A'B' + A'C' + B'C'}{AB + AC + BC}$$

$$= \frac{\frac{۱}{۲}AB + \frac{۱}{۲}AC + \frac{۱}{۲}BC}{AB + AC + BC} = \frac{\frac{۱}{۲}(AB + AC + BC)}{(AB + AC + BC)} \Rightarrow \frac{\text{محیط } \overset{\triangle}{A'B'C'}}{\text{محیط } \overset{\triangle}{ABC}} = \frac{۱}{۲}$$

در فعالیت صفحه ۴۶ و کار در کلاس صفحه ۴۹ کتاب نسبت مساحت‌ها و نسبت پاره‌خطها در تجانس بیان شده است. در این سؤال نسبت محیطها هم بیان شده تا با نسبت مساحت‌ها که برابر با مربع نسبت تجانس است اشتباه گرفته نشود.

نکته: در حالت کلی نسبت محیط تصویر شکل به محیط آن شکل تحت تبدیل تجانس، برابر نسبت تجانس است.

۹ گزینه ۳ پاسخ صحیح است. با توجه به ویژگی بازتاب تحت یک نقطه، اگر A' بازتاب نقطه‌ی A نسبت به نقطه‌ی O باشد، در این صورت نقطه‌ی O وسط پاره‌خط AA' قرار می‌گیرد، بنابراین:

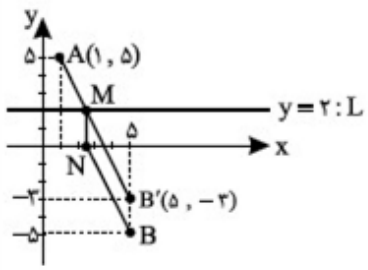
$$\frac{A + A'}{۲} = O$$

در حالت کلی اگر $O = (\alpha , \beta)$, $A = (u , v)$ و $A' = (u' , v')$، خواهیم داشت:

$$\left(\frac{u + u'}{۲} , \frac{v + v'}{۲}\right) = (\alpha , \beta) \Rightarrow \begin{cases} u' = ۲\alpha - u \\ v' = ۲\beta - v \end{cases}$$

با توجه به روابط فوق، برای این مسئله داریم:

$$\begin{cases} ۳ = ۲(-۱) - x \Rightarrow x = -۲ - ۳ \Rightarrow x = -۵ \\ y = ۲(۲) - ۶ \Rightarrow y = ۴ - ۶ \Rightarrow y = -۲ \end{cases} \Rightarrow x + y = -۵ + (-۲) = -۷$$



۱۰ گزینه ۳ پاسخ صحیح است. توجه کنید فاصله بین خط L و محور y برابر ۲ واحد است، پس از نقطه‌ی B در جهت محور y به اندازه‌ی ۲ واحد به سمت A حرکت می‌کنیم تا $B'(۵,-۳)$ به دست آید.

AB' را وصل می‌کنیم تا خط L را در M قطع کند و از M عمود بر محور xها رسم می‌کنیم تا نقطه‌ی N به دست آید. AMNB کوتاه‌ترین مسیر است. (MNBB' متوازی‌الاضلاع است.) با توجه به شکل داریم:

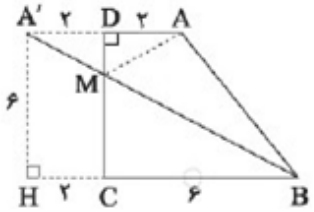
$$AB' = \sqrt{(۱-۵)^۲ + (۵+۳)^۲} = \sqrt{۸۰} = ۴\sqrt{۵}$$

$$\text{طول کوتاه‌ترین مسیر} = AM + MN + NB = AM + ۲ + MB' = AB' + ۲$$

$$\text{طول } AMNB = ۴\sqrt{۵} + ۲ = ۲\left(۲\sqrt{۵} + ۱\right)$$

۱۱ گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

بازتاب نقطه‌ی A را نسبت به DC نقطه‌ی A' می‌نامیم. از A' به B وصل می‌کنیم تا DC را در M قطع کند. در این‌صورت بنابر مسئله هرون AMB کوتاه‌ترین مسیر است. یعنی MA + MB کمترین طول را دارد و چون بازتاب ایزومتری است، پس MA = MA' است، بنابراین MA + MB = MA' + MB = A'B است. با توجه به شکل، طول A'B را در مثلث قائم‌الزاویه‌ی A'HB به دست می‌آوریم.



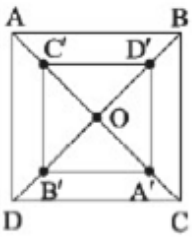
$$\overset{\triangle}{A'BH} : A'B^۲ = A'H^۲ + BH^۲$$

$$\Rightarrow A'B^۲ = ۶^۲ + ۸^۲ = ۱۰۰$$

$$\overset{\triangle}{A'BH} : A'B^۲ = A'H^۲ + BH^۲$$

۱۲ گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

مجانس مربع ABCD به مرکز O با نسبت $-\frac{۲}{۳}$، مربع A'B'C'D' است. این دو مربع، با نسبت $\frac{۲}{۳}$ متشابه هستند.



$$\frac{S_{A'B'C'D'}}{S_{ABCD}} = \left(\frac{۲}{۳}\right)^۲ = \frac{۴}{۹} \xrightarrow{\text{تفضیل از صورت}} \frac{S_{ABCD} - S_{A'B'C'D'}}{S_{ABCD}} = \frac{۹-۴}{۹}$$

$$\Rightarrow \frac{۱۰}{S_{ABCD}} = \frac{۵}{۹}$$

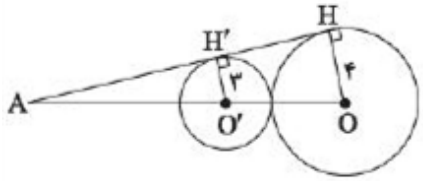
$$\Rightarrow S_{ABCD} = ۱۸ \Rightarrow AB^۲ = ۱۸ \Rightarrow AB = ۳\sqrt{۲}$$

پس محیط مربع ABCD برابر $۱۲\sqrt{۲}$ است.

تلفن تماس: ۰۲۶۳۳۴۰۸۹۴۴

۱۳ گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

محل تلاقی امتداد خط‌المرکزین و مماس مشترک خارجی دو دایرهٔ مرکز تجانس مستقیم است (نقطهٔ A). عمودهای OH و O'H' را در محل نقاط تماس رسم می‌کنیم.



$$OH \parallel O'H' \xrightarrow{\text{تالس جزء به کل}} \frac{AO'}{AO} = \frac{O'H'}{OH}$$

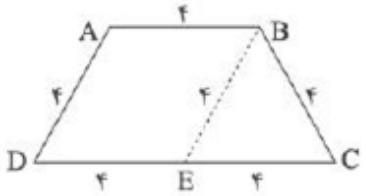
$$\xrightarrow{OO' = ۷} \frac{AO'}{AO' + ۷} = \frac{۳}{۴} \Rightarrow ۴AO' = ۳AO' = ۳AO' + ۲۱ \Rightarrow AO' = ۲۱$$

$$AO = ۲۱ + ۷ = ۲۸$$

تلفن تماس: ۰۲۶۳۳۴۰۸۹۴۴

۱۴ گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

با توجه به مقادیر ساق‌ها و قاعده‌ها، زاویهٔ ذوزنقهٔ متساوی‌الساقین را در ابتدای کار به‌دست می‌آوریم. از B به موازات AD رسم می‌کنیم، بنابراین $\overset{\triangle}{BEC}$ مثلث متساوی‌الاضلاع است پس:



$$\hat{D} = \hat{C} = ۶۰^\circ$$
$$\hat{A} = \hat{B} = ۱۲۰^\circ$$

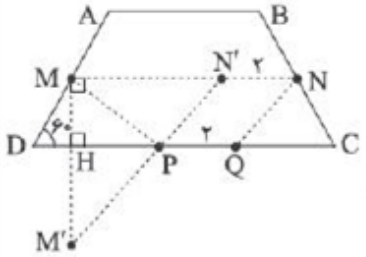
و چون M و N وسط دو ساق است پس:

$$MN = \frac{AB + DC}{۲} = \frac{۴ + ۸}{۲} = ۶$$

محیط شش ضلعی $= AB + BN + NQ + PQ + MP + MA$

$= ۴ + ۲ + NQ + ۲ + MP + ۲ = ۱۰ + MP + NQ$

حال باید کم‌ترین مقدار $MP + NQ$ را بیابیم. از N به سمت M به موازات DC و به اندازهٔ ۲ واحد حرکت می‌کنیم (انتقال N به 'N)، سپس بازتاب M نسبت به DC را 'M می‌نامیم و 'M'N را وصل می‌کنیم تا DC را در P قطع کند.



$$MP + NQ = M'P + N'P = M'N' \Rightarrow MN' = ۶ - ۲ = ۴$$

$$\overset{\triangle}{DMH}: MH = \frac{\sqrt{۳}}{۲}MD = \frac{\sqrt{۳}}{۲}(۲) = \sqrt{۳} \Rightarrow MM' = ۲MH = ۲\sqrt{۲}$$

$$\overset{\triangle}{MN'M'}\ (M'\hat{M}N' = ۹۰^\circ): M'N' = \sqrt{MM'^{۲} + MN'^{۲}}$$

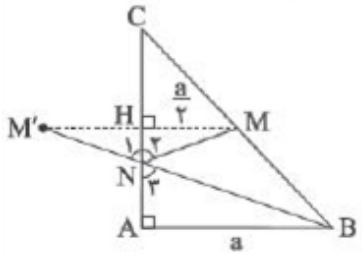
$$\Rightarrow M'N' = \sqrt{(۲\sqrt{۳})^{۲} + (۴)^{۲}} = \sqrt{۲۸} = ۲\sqrt{۷}$$

کمترین محیط شش ضلعی $= ۱۰ + ۲\sqrt{۷}$

تلفن تماس: ۰۲۶۳۳۴۰۸۹۴۴

۱۵ گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

اگر محیط مثلث MNB کم‌ترین مقدار را داشته باشد، MN + NB نیز کم‌ترین مقدار است. طبق دستور هرون، M را نسبت به محور AC بازتاب می‌کنیم و M' می‌نامیم. از M' به B وصل می‌کنیم تا AC را در N قطع کند، در این‌صورت محیط مثلث MNB مینیمم است اگر ساق مثلث ABC را a می‌نامیم. آنگاه داریم:



$$MH \parallel AB \xrightarrow{\text{تالس}} \frac{CH}{AC} = \frac{CM}{BC} = \frac{MH}{AB} = \frac{۱}{۲} \Rightarrow \begin{cases} MH = \frac{a}{۲} \\ CH = \frac{a}{۲} \end{cases}$$

$$\left.\begin{matrix} \hat{N}_۱ = \hat{N}_۲ \\ \hat{N}_۱ = \hat{N}_۳ \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} \hat{N}_۲ = \hat{N}_۳ \\ \hat{H} = \hat{A} = ۹۰^\circ \end{matrix}\right\} \Rightarrow M\overset{\triangle}{H}N \sim A\overset{\triangle}{B}N$$

$$\Rightarrow \left.\begin{matrix} \frac{HN}{An} = \frac{MH}{AB} = \frac{۱}{۲} \\ HN + AN = \frac{a}{۲} \end{matrix}\right\} \Rightarrow \begin{cases} MH = \frac{a}{۶} \\ AN = \frac{a}{۳} \end{cases}$$

$$S_{M\overset{\triangle}{N}B} = S_{A\overset{\triangle}{B}C} - S_{M\overset{\triangle}{N}C} - S_{A\overset{\triangle}{B}N}$$

$$= \frac{۱}{۲}AB \times AC - \frac{۱}{۲}MH \times CN - \frac{۱}{۲}AB \times AN$$

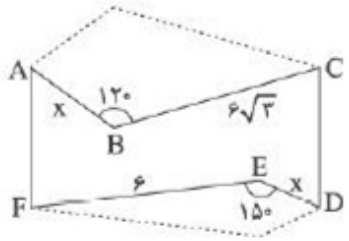
$$= \frac{۱}{۲}a^۲ - \frac{۱}{۲} \times \frac{a}{۲} \times \left(\frac{a}{۲} + \frac{a}{۶}\right) - \frac{۱}{۲}a \times \frac{a}{۳} = \frac{a^۲}{۶}$$

$$\frac{S_{M\overset{\triangle}{N}B}}{S_{A\overset{\triangle}{B}C}} = \frac{\frac{a^۲}{۶}}{\frac{a^۲}{۲}} = \frac{۱}{۳}$$

تلفن تماس: ۰۲۶۳۳۴۰۸۹۴۴

۱۶ گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

برای آن‌که بدون تغییر محیط، مساحت افزایش یابد باید B را نسبت به محور AC و E را نسبت به محور DF بازتاب کنیم. مقدار مساحت افزایش یافته برابر است با:

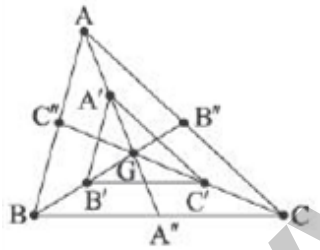


$$\text{مساحت افزایشه یافته} = ۲S_{\overset{\triangle}{ABC}} + ۲S_{\overset{\triangle}{DEF}}$$

$$\Rightarrow ۲۴ = ۲ \times \frac{۱}{۲} \times x \times ۶\sqrt{۳} \times \overset{\frac{\sqrt{۳}}{۲}}{\cancel{\text{Sin}\,۱۲۰^\circ}} + ۲ \times \frac{۱}{۲} \times x \times ۶ \times \overset{\frac{۱}{۲}}{\cancel{\text{Sin}\,۱۵۰^\circ}}$$

$$\Rightarrow ۲۴ = ۹x + ۳x \Rightarrow ۱۲x = ۲۴ \Rightarrow x = ۲$$

۱۷ گزینه ۴ پاسخ صحیح است.در شکل مثلث A'B'C' مجانس مثلث ABC به مرکز G با نسبت $\frac{۱}{۲}$ است و مثلث A"B"C" مجانس ABC به مرکز G با نسبت $-\frac{۱}{۲}$ است. چون هر دو مثلث متجانس، متشابه هستند، داریم:



$$A'G = \frac{۱}{۲}AG \Rightarrow \frac{S_{\overset{\triangle}{A'B'C'}}}{S_{\overset{\triangle}{ABC}}} = \left(\frac{۱}{۲}\right)^۲ = \frac{۱}{۴}$$

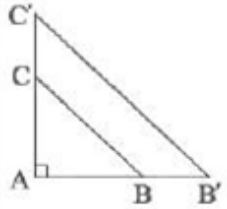
$$A''G = -\frac{۱}{۲}AG \Rightarrow \frac{S_{\overset{\triangle}{A''B''C''}}}{S_{\overset{\triangle}{ABC}}} = \left(-\frac{۱}{۲}\right)^۲ = \frac{۱}{۴}$$

$$\frac{S_{\overset{\triangle}{A''B''C''}}}{S_{\overset{\triangle}{A'B'C'}}} = \frac{\frac{۱}{۴}}{\frac{۱}{۴}} = ۱$$

تلفن تماس: ۰۲۶۳۳۴۰۸۹۴۴

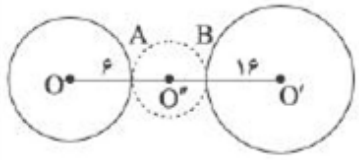
۱۸ گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

می‌دانیم در تجانسی به نسبت k، نسبت مساحت مجانس به شکل اولیهٔ آن $k^۲$ است، پس:



$$\frac{S_{\overset{\triangle}{AB'C'}}}{S_{\overset{\triangle}{ABC}}} = \left(\frac{۷}{۴}\right)^۲ = \frac{۴۹}{۱۶} \xrightarrow[\text{صورت}]{\text{تفضیل از}} \frac{S_{BCC'B'}}{S_{ABC}} = \frac{۳۳}{۱۶} \xrightarrow{S_{BB'CC'} = \frac{۳۳}{۱۶}} S_{ABC} = ۱$$

۱۹ گزینه ۲ پاسخ صحیح است. مرکز دایرهٔ جدید را "O می‌نامیم. با توجه به شکل زیر:



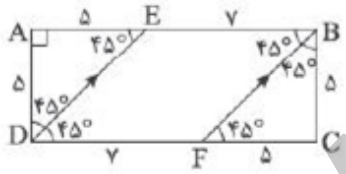
$$AB = OO' - (۶ + ۱۶) = ۳۰ - ۲۲ = ۸ \Rightarrow O''B = \frac{۸}{۲} = ۴$$

نسبت تجانس برابر است با نسبت شعاع‌های دو دایره.

$$k = \frac{O''B}{OA} = \frac{۴}{۶} = \frac{۲}{۳}$$

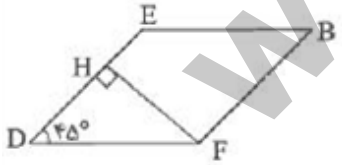
۲۰ گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

ترکیب دو بازتاب با محورهای موازی، یک انتقال است با برداری به طول دو برابر فاصلهٔ محورها، پس فاصلهٔ DE و BF را به‌دست می‌آوریم.



$$\sin ۴۵^\circ = \frac{FH}{DF} = \frac{\sqrt{۲}}{۲} \Rightarrow FH = \frac{۷\sqrt{۲}}{۲}$$

بنابراین فاصلهٔ نقطهٔ A تا تصویر نهایی برابر است با:

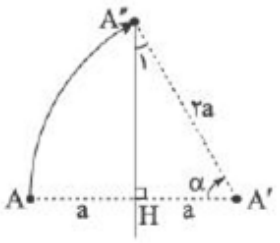


$$۲FH = ۷\sqrt{۲}$$

تلفن تماس: ۰۲۶۳۳۴۰۸۹۴۴

۲۱ گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

محور بازتاب، عمودمنصف پاره‌خط واصل نقطه و تصویر است پس:



$AH = A'H = a$

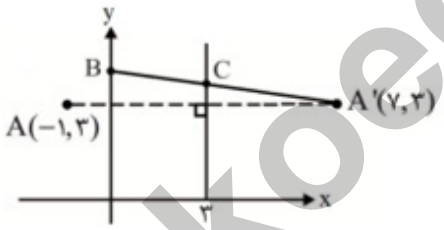
از طرفی در تبدیل دوران، فاصلهٔ نقطهٔ A تا مرکز دوران با فاصلهٔ تصویر آن تا مرکز دوران برابر است پس:

$A'A'' = AA' = ۲a$

در مثلث قائم‌الزاویه، ضلع روبه‌رو به زاویهٔ °۳۰ نصف وتر است و بالعکس:

$A'H = \frac{۱}{۲}A'A'' \Rightarrow A''_{۱} = ۳۰^\circ \Rightarrow A' = ۶۰^\circ$

۲۲ گزینه ۲ پاسخ صحیح است. مکان C روی $x = ۳$ است. به روش مسئله هرون عمل می‌کنیم.



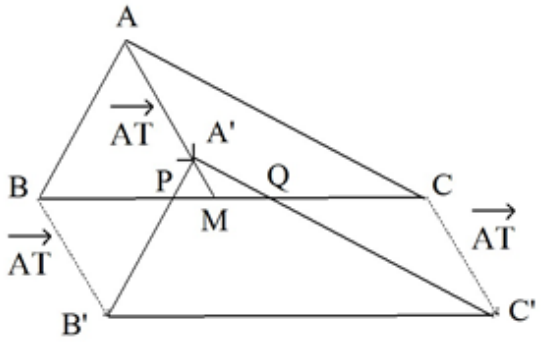
بازتاب نقطه‌ی $A(-۱ , ۳)$ نسبت به خط $x = ۳$ را نقطه‌ی $A'(۷ , ۳)$ می‌نامیم. از A' به B وصل می‌کنیم تا خط $x = ۳$ را در نقطه‌ی C قطع کند. چون AB ثابت است پس محیط ABC کمترین است. برای پیدا کردن مختصات نقطه‌ی C معادله خط $A'B$ را پیدا کرده با خط $x = ۳$ قطع می‌دهیم. داریم:

$$A'B : y = -\frac{۱}{۷}x + ۴ \xrightarrow{x = ۳} a = -\frac{۳}{۷} + ۴ = \frac{۲۵}{۷}$$

تلفن تماس: ۰۲۶۳۳۴۰۸۹۴۴

۲۳ گزینه ۱ پاسخ صحیح است. فرض کنید مثلث A'B'C' تصویر مثلث ABC تحت انتقال با بردار $\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{AT}$ باشد.

بنابر فرض سوال مساحت مثلث A'PQ مساوی $\frac{۱}{۱۶}$ مساحت مثلث ABC است داریم.

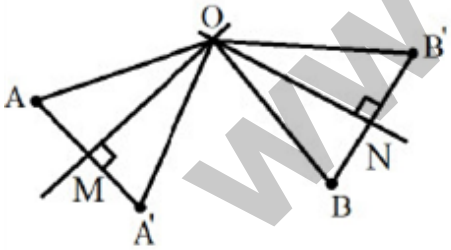


$$A'\overset{\triangle}{P}Q \sim A\overset{\triangle}{B}C \Rightarrow \frac{S_{A'PQ}}{S_{ABC}} = \left(\frac{A'M}{AM}\right)^{۲} \xrightarrow{\frac{S_{A'PQ}}{S_{ABC}} = \frac{۱}{۱۶}} \frac{A'M}{AM} = \frac{۱}{۴} \xrightarrow{\text{تفضیل از صورت}}$$

$$\frac{AA'}{AM} = \frac{۳}{۴} \xrightarrow{AM = \frac{BC}{۲} = \frac{۸}{۲} = ۴} \frac{AA'}{۴} = \frac{۳}{۴} \Rightarrow AA' = ۳$$

پس اندازه بردار $\overrightarrow{AT}$ برابر ۳ است.

۲۴ گزینه ۱ پاسخ صحیح است. محل برخورد عمودمنصف‌های AA' و BB' نقطه O است. اگر M و N وسط دو پاره‌خط باشند:



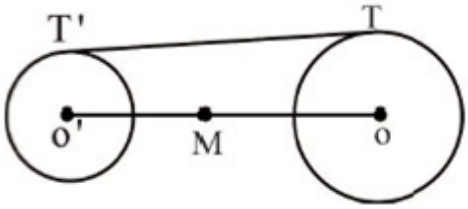
$$m_{AA'} = \frac{۲+۱}{-۵-۱} = -\frac{۱}{۲}\ ,\ m_{BB'} = \frac{۴-۱}{۳-۰} = ۱$$

$$,\ M(-۲\ ,\ ۰/۵)\ ,\ N(۱/۵\ ,\ ۲/۵)$$

$$\begin{matrix} AA' \text{ عمودمنصف} \\ BB' \text{ عمودمنصف} \end{matrix} \begin{cases} y = ۲x + ۴/۵ \\ y = -x + ۴ \end{cases} \Rightarrow O\left(-\frac{۱}{۶}, \frac{۲۵}{۶}\right) \Rightarrow y_O - x_O = \frac{۲۵}{۶} + \frac{۱}{۶} = \frac{۱۳}{۳}$$

تلفن تماس: ۰۲۶۳۳۴۰۸۹۴۴

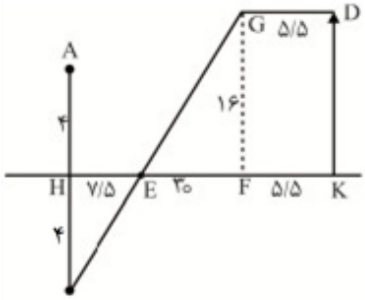
۲۵ گزینه ۴ پاسخ صحیح است. چون C' مجانس C با نسبت $-\frac{۱}{۲}$ است و $R = ۱۰$ پس $R' = ۵$ است. در ضمن تجانس معکوس است پس مرکز تجانس M بین دو دایره است. داریم:



$$O'M = \frac{۱}{۲} \times ۱۸ = ۹ \Rightarrow OO' = ۲۷$$

$$\Rightarrow TT' = \sqrt{۲۷^۲ - (۱۰ - ۵)^۲} = \sqrt{۷۰۴} = ۸\sqrt{۱۱}$$

۲۶ گزینه ۳ پاسخ صحیح است. به کمک راه حل هرون، در شکل زیر با توجه به دو مثلث متشابه داریم:



$$\frac{۴}{۱۶} = \frac{HE}{۳۷/۵ - HE}$$

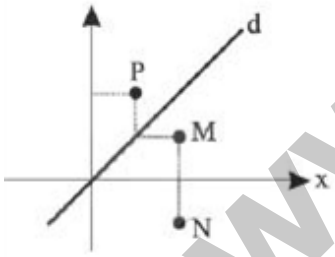
$$\Rightarrow HE = ۷/۵ \Rightarrow AE = \sqrt{۴^۲ + ۷/۵^۲} = ۸/۵$$

$$\Rightarrow EF = ۳۰ \Rightarrow GE = \sqrt{۳۰^۲ + ۱۶^۲} = ۳۴$$

پس کوتاه‌ترین مسیر برابر $۴۸ = ۵/۵ + ۳۴ + ۸/۵$ است.

۲۷ گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

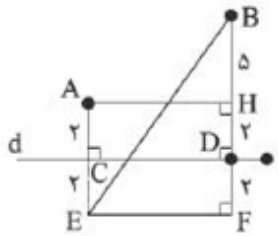
کافی است قرینه M را نسبت به محور x ها به‌دست آوریم: $N(۲,-۱)$، سپس قرینهٔ M را نسبت به d به‌دست آوریم: $P(۱,۲)$. خط PN محور x ها را در A و خط d را در B قطع می‌کند.



$$PN : y = -۳x + ۵ \xrightarrow{y = ۰} A\left(\frac{۵}{۳}, ۰\right)$$

۲۸ گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

همان‌طور که دیده‌اید برای پیدا کردن کوتاه‌ترین مسیر کافی است قرینهٔ A را نسبت به d پیدا کرده و سپس خط BE را رسم کنیم.



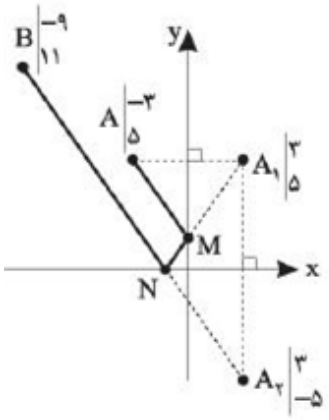
$$BE = ۱۵ \text{ و } BF = ۹ \Rightarrow EF = CD = AH = ۱۲$$

$$AB = \sqrt{AH^۲ + BH^۲} = \sqrt{۱۲^۲ + ۵^۲} = ۱۳$$

تلفن تماس: ۰۲۶۳۳۴۰۸۹۴۴

۲۹ گزینه ۳ پاسخ صحیح است. مطابق شکل طول مسیر AMNB برابر با طول $A_۲B$ خواهد بود.

$$A_۲B = \sqrt{(x_{A_۲} - x_B)^۲ + (y_{A_۲} - y_B)^۲} = \sqrt{۱۲^۲ + ۱۶^۲} = \sqrt{۴۰۰} = ۲۰$$



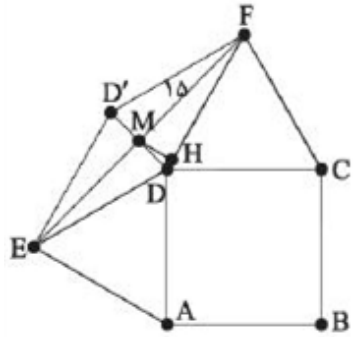
۳۰ گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

مانند سؤال کتاب درسی کافی است قرینهٔ نقطهٔ D را نسبت به خط EF رسم کنیم تا مساحت لوزی ED'FD به مساحت هشت‌ضلعی اضافه شود و این کار را برای رئوس A و B و C نیز تکرار کنیم.

$$E\hat{D}F = ۱۵۰ \Rightarrow E\hat{F}D = ۱۵$$

در مثلث قائم‌الزاویهٔ FMD، زاویهٔ F برابر ۱۵ درجه است.

پس ارتفاع وارد بر وتر در این نوع مثلث $\frac{۱}{۴}$ وتر است.



پس:

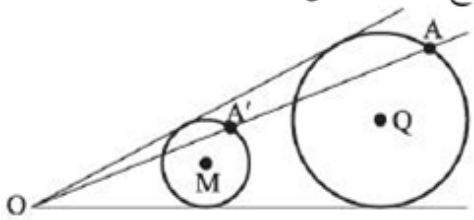
$$FD = ۴ \Rightarrow MH = ۱ \Rightarrow S_{\triangle FMD} = ۲$$

$$S_{ED'FD} = ۴S_{\triangle FMD} = ۸$$

و مساحتی که به هشت‌ضلعی اضافه می‌شود: $۸ \times ۴ = ۳۳$

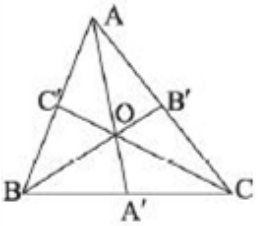
تلفن تماس: ۰۲۶۳۳۴۰۸۹۴۴

۳۱ گزینه ۴ پاسخ صحیح است. دایرهٔ پاسخ، مجانس هر دایره‌ای است که بر اضلاع زاویه مماس باشد.



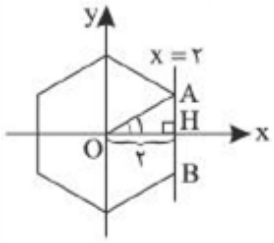
۳۲ گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

نقطهٔ O مرکز تجانس این تبدیل، محل همرسی میانه‌های مثلث است که همواره داخل مثلث قرار دارد.



$$\overrightarrow{OA'} = \frac{-۱}{۲}\overrightarrow{OA} \Rightarrow H_O^{-\frac{۱}{۲}}(A) = A'$$

۳۳ گزینه ۱ پاسخ صحیح است. با دوران خط $x = ۲$ با زاویه‌های داده شده، شش‌ضلعی منتظم ساخته می‌شود.



$$A\hat{O}B = ۶۰^\circ \Rightarrow \hat{O}_۱ = \frac{A\hat{O}B}{۲} = ۳۰^\circ$$

$$\tan\hat{O}_۱ = \frac{AH}{OH} \Rightarrow \tan ۳۰^\circ = \frac{AH}{۲} \Rightarrow AH = ۲ \times \frac{\sqrt{۳}}{۳} \Rightarrow AH = \frac{۲\sqrt{۳}}{۳} \Rightarrow AB = ۲AH = \frac{۴\sqrt{۳}}{۳}$$

$$\text{مساحت شش ضلعی منتظم به ضلع } a = \frac{۳\sqrt{۳}}{۲}a^۲ = \frac{۳\sqrt{۳}}{۲} \times \left(\frac{۴\sqrt{۳}}{۳}\right)^۲ = \frac{۳\sqrt{۳}}{۲} \times \frac{۱۶}{۳} \Rightarrow S = ۸\sqrt{۳}$$

۳۴ گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

بردار انتقالی که M را به N می‌برد همان است که A را به E می‌برد. این انتقال‌ها در کل A را ۶ واحد به سمت پایین و ۸ واحد به سمت راست می‌برند یعنی $\vec{V}(۸,-۶)$ که طول این بردار $\sqrt{۸^۲ + (-۶)^۲} = ۱۰$ است.

تلفن تماس: ۰۲۶۳۳۴۰۸۹۴۴

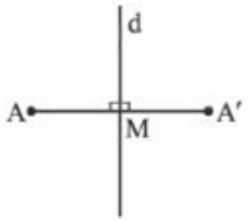
۳۵ گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

اگر A' بازتاب نقطهٔ A تحت محور بازتاب d باشد، محور بازتاب همان عمودمنصف پاره‌خط AA' است.

$$m_{AA'} = \frac{۳+۱}{۴-۲} = \frac{۴}{۲} = ۲$$

$$m_d = \frac{-۱}{m_{AA'}} = -\frac{۱}{۲}$$

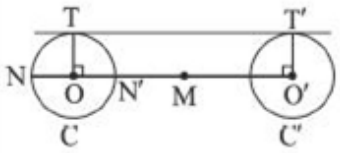
$$M = \frac{A + A'}{۲} = (۳,۱)$$



معادله خط d: $y - ۱ = -\frac{۱}{۲}(x - ۳) \Rightarrow y - ۱ = -\frac{۱}{۲}x + \frac{۳}{۲} \Rightarrow ۲y - ۲ = -x + ۳ \Rightarrow ۲y + x = ۵$

۳۶ گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

در دوران حول یک نقطه و زاویهٔ α طول پاره‌خطها و اندازهٔ شکل حفظ می‌شود. (طولپا)



اگر دایرهٔ C' دوران یافتهٔ دایرهٔ C حول نقطهٔ M و دوران ۱۸۰ باشد، داریم:

$$NN' = ۲R = MN - MN' = ۱۰ - ۴ = ۶ \Rightarrow R = ۳$$

$$OO' = ۲MO = ۲(MN' + R) = ۲(۴ + ۳) = ۱۴$$

وقتی دو دایره برابر باشند، طول مماس مشترک خارجی با طول خط‌المرکزین مساوی است.

۳۷ گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

ترکیب دو بازتاب نسبت به دو خط متقاطع دورانی با زاویهٔ معادل دو برابر زاویهٔ بین دو خط است، پس A'' دوران‌یافتهٔ A به مرکز O با زاویهٔ $۲ \times ۴۵^\circ = ۹۰^\circ$ است، بنابراین مثلث OAA'' قائم‌الزاویهٔ متساوی‌الساقین است. $(OA = OA'')$

$$OA = \sqrt{(x_A - x_O)^۲ + (y_A - y_O)^۲} = \sqrt{(-۱ - ۲)^۲ + (۱ + ۱)^۲} = \sqrt{۱۳}$$

$$O\overset{\triangle}{A}A'': AA''^۲ = OA^۲ + OA''^۲ = ۱۳ + ۱۳ = ۲۶ \Rightarrow AA'' = \sqrt{۲۶}$$

۳۸ گزینه ۱ پاسخ صحیح است. تبدیل انتقال شیب خط را حفظ می‌کند. پس $AB \parallel A'B'$ در نتیجه‌ی زاویه‌ی بین AB و تصویرش تحت انتقال با بردار W، صفر است.

۳۹ گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

دوران تبدیل ایزومتری است. پس مساحت چندضلعی اولیه با مساحت چند ضلعی تصویر برابر است.

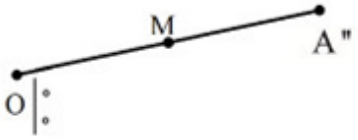
در این چندضلعی شبکه‌ای تعداد نقاط مرزی برابر $b = ۱۰$ و تعداد نقاط درونی برابر $i = ۹$ می‌باشد داریم:

$$s = \frac{b}{۲} + i - ۱ \Rightarrow s = \frac{۱۰}{۲} + ۹ - ۱ = ۱۳$$

تلفن تماس: ۰۲۶۳۳۴۰۸۹۴۴

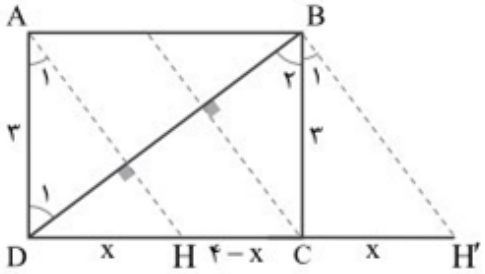
۴۰ گزینه ۴ پاسخ صحیح است. چون دو خط بر هم عمودند $(\alpha = ۹۰^\circ)$، دوران A به مرکز محل برخورد دو خط $M(۳ , ۵)$ و زاویه‌ی $۲\alpha = ۱۸۰^\circ$ می‌باشد، پس:

$$\left.\begin{array}{l} ۳x - y = ۴ \\ ۳y + x = ۱۸ \end{array}\right\} \Rightarrow M\Big|^{۳}_{۵} \Rightarrow$$



$$\Rightarrow A'' = ۲M - O = (۶ , ۱۰)$$

۴۱ گزینه ۱ پاسخ صحیح است. مثلث قائم‌الزاویه‌ی ADH را تحت بردار $\overrightarrow{DC}$ منتقل می‌کنیم تا به مثلث BCH' برسیم.



چون انتقال ایزومتری است پس دو مثلث ADH و BCH' همنهشت هستند. پس $\hat{A}_۱ = \hat{B}_۱$ در ضمن بنا بر قضیه‌ی خطوط موازی و مورب $\hat{D}_۱ = \hat{B}_۲$ و چون $\hat{A}_۱ + \hat{D}_۱ = ۹۰^\circ$ پس $\hat{B}_۱ + \hat{B}_۲ = ۹۰^\circ$ یعنی مثلث BDH' قائم‌الزاویه است. با فرض $DH = x$ نتیجه می‌گیریم $CH' = x$ و $CH = ۴ - x$ داریم:

$$\widehat{BDH'} : BC^۲ = DC \times CH' \Rightarrow ۳^۲ = ۴x \Rightarrow x = \frac{۹}{۴}$$

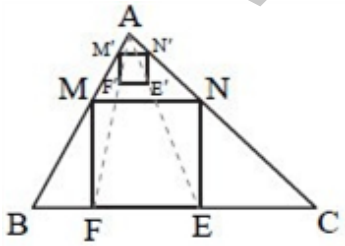
بنابراین:

$$\text{مساحت متوازی‌الاضلاع} = BC \times CH = ۳\left(۴ - \frac{۹}{۴}\right) = ۳\left(\frac{۷}{۴}\right) = \frac{۲۱}{۴} = ۵/۲۵$$

۴۲ گزینه ۴ پاسخ صحیح است. مجانس هر شکل با خودش متشابه است و نسبت مساحت‌های آن‌ها توان دوم نسبت تجانس است. پس مساحت تصویر این مربع $\frac{۹}{۴}$ برابر مساحت مربع اولیه است.

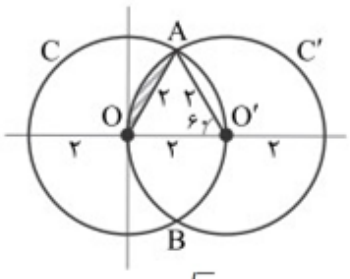
$$\text{مساحت تصویر} = \frac{۹}{۴}(۴)^۲ = ۳۶$$

۴۳ گزینه ۴ پاسخ صحیح است. برای رسم مربع محاط در مثلث ABC، ابتدا M'N' را به طور دلخواه موازی BC رسم می‌کنیم. سپس روی M'N' مربع M'N'E'F' را بنا می‌کنیم. از A به E' و F' وصل کرده امتداد می‌دهیم تا BC را در نقاط E و F قطع کنند. در E و F عمودهایی بر BC اخراج می‌کنیم تا اضلاع AC و AB را در N و M قطع کنند. در این صورت MNEF مجانس مربع M'N'E'P' به مرکز A با نسبت $\frac{AN}{AN'}$ است. و می‌دانیم مجانس هر شکل با خودش متشابه است.



پس MNEF نیز مربع است. پس برای رسم این مربع از تبدیل تجانس استفاده می‌شود.

۴۴ گزینه ۴ پاسخ صحیح است. مطابق شکل دایره‌ی C' انتقال‌یافته‌ی دایره‌ی C با بردار $\vec{V} = ۲\vec{i}$ که موازی محور xها می‌باشد، داریم:



$$\widehat{OO'A} : \overrightarrow{OO'} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{O'A} = ۲\vec{i} \Rightarrow S_{\widehat{OO'A}} = \frac{\sqrt{۳}}{۴}(۲)^۲ = \sqrt{۳}$$

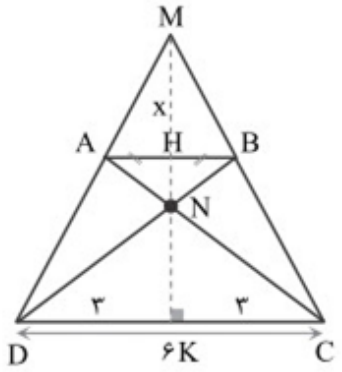
مساحت قطاع $O'OA = \frac{۱}{۶} \times \pi \times ۲^۲ = \frac{۲}{۳}\pi$

مساحت قسمت هاشورزده $= \frac{۲}{۳}\pi - \sqrt{۳}$

مساحت قسمت بین دو دایره $= ۴\left(\frac{۲}{۳}\pi - \sqrt{۳}\right) + ۲ \times \sqrt{۳} = \frac{۸}{۳}\pi - ۴\sqrt{۳} + ۲\sqrt{۳} = \frac{۸}{۳}\pi - ۲\sqrt{۳}$

تلفن تماس: ۰۲۶۳۳۴۰۸۹۴۴

۴۵ گزینه ۴ پاسخ صحیح است. مطابق شکل داریم:



$$AB \parallel CD \Leftrightarrow N\overset{\triangle}{A}B \sim N\overset{\triangle}{C}D$$
$$\Rightarrow \frac{NA}{NC} = \frac{NB}{ND} = \frac{AB}{CD} = \frac{۳}{۶} = \frac{۱}{۲}$$

در نتیجه AB در تجانس به مرکز N و ضریب $k_۱ = -۲$ بر CD تصویر می‌شود.

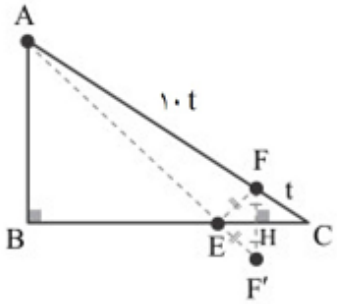
$$AB \parallel CD \Rightarrow M\overset{\triangle}{A}B \sim M\overset{\triangle}{C}D \Rightarrow \frac{MA}{MD} = \frac{MB}{MC} = \frac{AB}{CD} = \frac{۳}{۶} = \frac{۱}{۲}$$

در نتیجه AB در تجانس به مرکز M و ضریب $k_۲ = ۲$ بر CD تصویر می‌شود.

$$HK = ۵ , AB \parallel CD \Rightarrow \frac{x}{x+۵} = \frac{AB}{CD} = \frac{۱}{۲} \Rightarrow x = ۵ \quad , \quad \frac{NH}{NK} = \frac{\frac{۳}{۲}}{۳} = \frac{۱}{۲} \quad , \quad HK = ۵$$
$$\Rightarrow HN = \frac{NK}{۲} = \frac{۱}{۳} HK = \frac{۵}{۳} \Rightarrow MN = ۵ + \frac{۵}{۳} = \frac{۲۰}{۳}$$

تلفن تماس: ۰۲۶۳۳۴۰۸۹۴۴

۴۶ گزینه ۳ پاسخ صحیح است. اگر بازتاب F را نسبت به ضلع BC بیابیم و آن را F' نامگذاری کنیم، کمترین مسیر برابر اندازه‌ی AF' خواهد بود. چون بازتاب ایزومتری است پس FH = F'H و EH = HC. داریم:

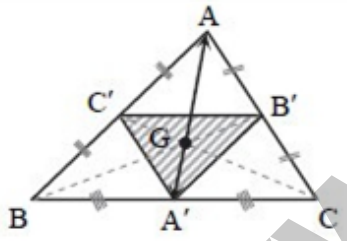


$$\left.\begin{array}{l} AB \parallel HF' \Rightarrow A\overset{\triangle}{B}E \sim E\overset{\triangle}{H}F' \Rightarrow \dfrac{EH}{BE} = \dfrac{HF'}{AB} \\ HF \parallel AB \Rightarrow \dfrac{HF}{AB} = \dfrac{FC}{AC} = \dfrac{t}{۱۱t} = \dfrac{۱}{۱۱} \end{array}\right\} \xrightarrow{HF = HF'} \dfrac{HF}{AB} = \dfrac{۱}{۱۱}$$

$$\left.\begin{array}{l} AB \parallel HF' \xrightarrow{\text{قضیه اساسی تشابه}} A\overset{\triangle}{B}E \sim E\overset{\triangle}{H}F' \Rightarrow \dfrac{EH}{BE} = \dfrac{HF'}{AB} \\ AB \parallel HF \xrightarrow{\text{تالس}} \dfrac{HF}{AB} = \dfrac{FC}{AC} = \dfrac{t}{۱۱t} = \dfrac{۱}{۱۱} \end{array}\right\} \xrightarrow{HF = HF'} \dfrac{EH}{BE} = \dfrac{۱}{۱۱}$$

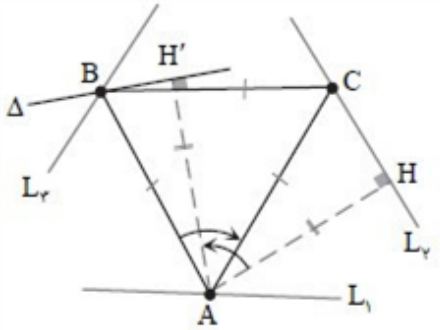
$$\Rightarrow \frac{\frac{EC}{۲}}{BE} = \frac{۱}{۱۱} \Rightarrow \frac{EC}{BE} = \frac{۲}{۱۱} \Rightarrow \frac{BE}{EC} = \frac{۱۱}{۲}$$

۴۷ گزینه ۲ پاسخ صحیح است. مثلث $A'\overset{\triangle}{B'}C'$ مثلث میانه‌ای $A\overset{\triangle}{B}C$ است؛ یعنی رئوس آن پای میانه های مثلث $A\overset{\triangle}{B}C$ می‌باشد؛ با توجه به هم‌رسی میانه‌ها و نسبت‌های ۱ به ۲ روی آن داریم:

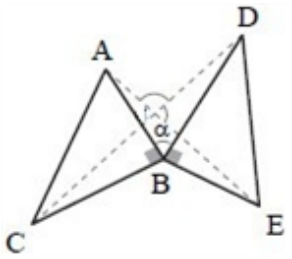


$$m_a \cap m_b \cap m_c = \{G\} \Rightarrow \frac{GA'}{GA} = \frac{۱}{۲} \Rightarrow \overrightarrow{GA'} = -\frac{۱}{۲}\overrightarrow{GA}$$

به همین ترتیب ثابت می‌شود $\overrightarrow{GB'} = -\frac{۱}{۲}\overrightarrow{GB}$ و $\overrightarrow{GC'} = -\frac{۱}{۲}\overrightarrow{GC}$ پس بنابر تعریف تجانس نتیجه می‌گیریم نقاط A' و B' و C' مجانس های نقاط A و B و C به مرکز G با نسبت $-\frac{۱}{۲}$ هستند، پس $A'\overset{\triangle}{B'}C'$ مجانس $A\overset{\triangle}{B}C$ به مرکز G با ضریب $-\frac{۱}{۲}$ است.

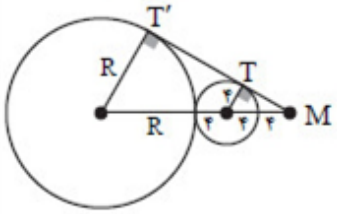


۴۸ گزینه ۳ پاسخ صحیح است. ابتدا نقطه‌ی A را روی خط $L_۱$ درنظر می‌گیریم؛ سپس خط $L_۲$ را به مرکز A با زاویه‌ی °۶۰ درجه دوران می‌دهیم تا $L_۳$ را در نقطه‌ای مانند B قطع کند، اگر نقطه‌ی B را به مرکز A با زاویه‌ی °۶۰- دوران دهیم، نقطه‌ی C روی $L_۲$ به دست می‌آید، مثلث $\overset{\triangle}{ABC}$ که حالت بسیاری می‌پذیرد. جواب مسأله است، زیرا با تغییر نقطه‌ی A روی خط $L_۱$ مثلث‌های دیگر با این شرایط به دست می‌آید.



۴۹ گزینه ۴ پاسخ صحیح است. بنابر تعریف دوران مثلث‌های ABC و BDE به اندازه‌ی $۹۰ + \alpha$ دوران‌یافته هم نسبت به مرکز B می‌باشند.
پس دو پاره‌خط DE و AC دوران هم به مرکز B و با زاویه‌ی $۹۰ + \alpha$ هستند. در ضمن دو پاره‌خط AE و DC نمی‌توانند دوران یک‌دیگر باشند نقاط E و D و هم‌چنین نقاط A و C از مرکز B به یک فاصله نیستند پس نمی‌توانند دوران یک‌دیگر باشند.

۵۰ گزینه ۲ پاسخ صحیح است. بنا بر فرض سؤال شکل مقابل را خواهیم داشت. با استفاده از قضیه‌ی تالس داریم:



$$\frac{۴}{R} = \frac{۸}{۱۲ + R} \Rightarrow ۲R = ۲ + R \Rightarrow R = ۱۲$$

پس نسبت تجانس دو دایره $\frac{R'}{R} = \frac{۴}{۱۲} = \frac{۱}{۳}$ است.

۵۱ گزینه ۲ پاسخ صحیح است. بازتاب C را نسبت به BD نقطه‌ی C' می‌نامیم و بازتاب E را نسبت به DF نقطه‌ی E' می‌نامیم. در این صورت محیط چندضلعی جدید یعنی ABC'DE'F مساوی محیط چندضلعی اولیه یعنی ABCDEF است ولی مساحت چندضلعی جدید به اندازه‌ی $۲S_{DEF} + ۲S_{BCD}$ افزایش می‌یابد.

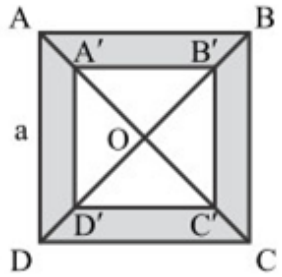
$$۲S_{DEF} = DE \times EF \sin ۳۰^\circ = ۳ \times ۴ \times \frac{۱}{۲} = ۶$$

$$۲S_{BCD} = BC \times CD \sin ۱۵۰^\circ = ۲ \times ۶ \times \frac{۱}{۲} = ۶$$

پس میزان افزایش مساحت برابر $۱۲ = ۶ + ۶$ است.

۵۲ گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

فرض کنیم مربع $A'B'C'D'$ مجانس مربع $ABCD$ به مرکز O با نسبت $\frac{۲}{۳}$ باشد. در این صورت داریم:



$$OA' = \frac{۲}{۳} OA = \frac{۲}{۳}\left(\frac{\sqrt{۲}}{۲} a\right) = \frac{\sqrt{۲}}{۳} a \Rightarrow A'C' = \frac{۲\sqrt{۲}}{۳} a$$

از طرف دیگر بنا بر فرض داریم:

$$\text{مساحت بین} = ۵ \Rightarrow \frac{۱}{۲} AC^۲ - \frac{۱}{۲} A'C'^۲ = ۵ \Rightarrow AC^۲ - A'C'^۲ = ۱۰$$

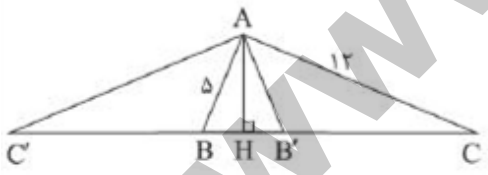
$$\Rightarrow \left(a\sqrt{۲}\right)^۲ - \left(\frac{۲\sqrt{۲}}{۳} a\right)^۲ = ۱۰ \Rightarrow ۲a^۲ - \frac{۸a^۲}{۹} = ۱۰$$

$$\Rightarrow \frac{۱۰a^۲}{۹} = ۱۰ \Rightarrow a^۲ = ۹ \Rightarrow a = ۳$$

پس محیط مربع اولیه برابر $۱۲ = ۳ \times ۴$ است.

۵۳ گزینه ۴ پاسخ صحیح است. مثلث با اضلاع ۵، ۱۲ و ۱۳ قائم‌الزاویه است زیرا $۱۳^۲ = ۱۲^۲ + ۵^۲$.

فرض کنید ABC مثلث مورد نظر بوده و $AB'C'$ بازتاب ABC نسبت به ارتفاع AH باشد. با استفاده از رابطه‌های طولی در مثلث قائم‌الزاویه داریم:

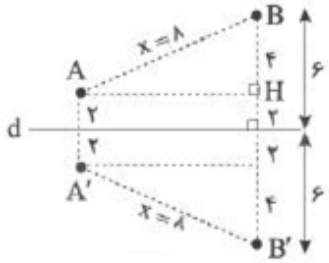


$$AB^۲ = BH \times BC \Rightarrow ۵^۲ = BH \times ۱۳ \Rightarrow BH = \frac{۲۵}{۱۳} \xrightarrow{BH = \frac{BB'}{۲}} BB' = \frac{۵۰}{۱۳}$$

چون دو مثلث ABB' و ABC دارای ارتفاع مشترک AH هستند، پس:

$$\frac{S_{\overset{\Delta}{ABB'}}}{S_{\overset{\Delta}{ABC}}} = \frac{BB'}{BC} = \frac{\frac{۵۰}{۱۳}}{۱۳} = \frac{۵۰}{۱۶۹}$$

۵۴ گزینه ۴ پاسخ صحیح است.



چون بازتاب طول‌پا است، پس $AB = A'B' = x$. این چهارضلعی ذوزنقهٔ متساوی‌الساقین محیطی است، پس:

$$۴ + ۱۲ = x + x \Rightarrow x = ۸$$

عمود AH را رسم می‌کنیم، در مثلث قائم‌الزاویهٔ AHB داریم:

$$AH^۲ = ۸^۲ - ۴^۲ \Rightarrow AH = ۴\sqrt{۳}$$

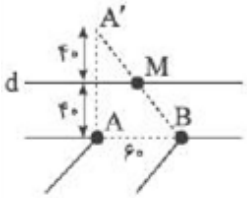
$$S_{AA'B'B} = \frac{(۴ + ۱۲)۴\sqrt{۳}}{۲} = ۳۲\sqrt{۳}$$

راه حل دوم: چون چهار ضلعی AA'B'B ذوزنقه متساوی‌الساقین محیطی با قاعده‌های ۴ و ۱۲ است داریم:

(میانگین هندسی دو قاعده)(میانگین حسابی دو قاعده) = مساحت ذوزنقه متساوی الساقین محیطی

$$= \left(\frac{۱۲ + ۴}{۲}\right)\left(\sqrt{۱۲ \times ۴}\right) = ۸ \times ۴\sqrt{۳} = ۳۲\sqrt{۳}$$

۵۵ گزینه ۲ پاسخ صحیح است. در شکل کوتاه‌ترین مسیر $AM + MB$ برابر با $A'B$ خواهد بود که A' بازتاب نقطهٔ A نسبت به خط d خواهد بود. در مثلث $AA'B$ داریم:

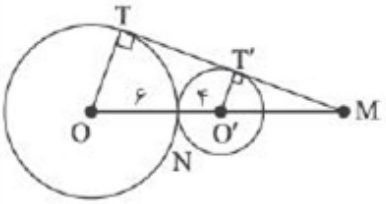


$$(AA')^۲ + AB^۲ = (A'B)^۲ \Rightarrow ۶۴۰۰ + ۳۶۰۰ = (A'B)^۲ \Rightarrow A'B = ۱۰۰$$

بنابراین کم‌ترین طول مسیر MABM برابر با ۱۶۰ = ۶۰ + ۱۰۰ متر به‌دست می‌آید.

تلفن تماس: ۰۲۶۳۳۴۰۸۹۴۴

۵۶ گزینه ۱ پاسخ صحیح است. چون طول خط‌المرکزین با مجموع طول شعاع‌های دو دایره برابر است، پس دو دایره مماس خارج هستند.



هم باید تجانس مستقیم را بررسی کنیم و هم تجانس معکوس:

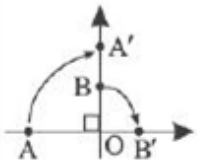
الف) در تجانس مستقیم به مرکز M و نسبت $\frac{۶}{۴}$ داریم:

$$\frac{MO}{MO'} = \frac{۶}{۴} \Rightarrow \frac{MO' + ۱۰}{MO'} = \frac{۶}{۴} \Rightarrow MO' = ۲۰$$

فاصلهٔ مرکز تجانس از مرکز دایرهٔ بزرگ‌تر برابر است با: $MO = MO' + ۱۰ = ۳۰$

ب) در تجانس معکوس به مرکز N، فاصلهٔ N تا O جواب سؤال است که برابر ۶ است.

۵۷ گزینه ۱ پاسخ صحیح است. تحت دوران حول مبدأ، به اندازهٔ °۹۰ در جهت عقربه‌های ساعت، تصویر نقاط A و B به‌صورت A' و B' خواهد بود. معادلهٔ خط A'B' را می‌نویسیم:



$$A' = \begin{bmatrix} ۰ \\ ۲ \end{bmatrix}, B' = \begin{bmatrix} ۱ \\ ۰ \end{bmatrix} \Rightarrow m_{A'B'} = \frac{۲}{-۱} = -۲ \Rightarrow y = -۲x + ۲$$

۵۸ گزینه ۳ پاسخ صحیح است. با توجه به قضیهٔ کتاب درسی، بازتاب طولپا است و مساحت هر شکل و تبدیل یافتهٔ آن در تبدیل طولپا، برابر است، پس برای حل این سؤال کافی است مساحت مثلث را به محیط آن تقسیم کنیم. اضلاع این مثلث، اعداد فیثاغورسی آشنایی هستند، پس مثلث، قائم‌الزاویه است و مساحت آن $S = \frac{۵ \times ۱۲}{۲} = ۲۰$ و محیط آن نیز برابر ۳۰ است، بنابراین نسبت مساحت به محیط مثلث، تصویر برابر یک است.

۵۹ گزینه ۲ پاسخ صحیح است. بررسی گزینه‌ها:

بازتاب نسبت به خط، بی‌شمار نقطهٔ ثابت دارد، پس گزینهٔ (۱) نادرست است.

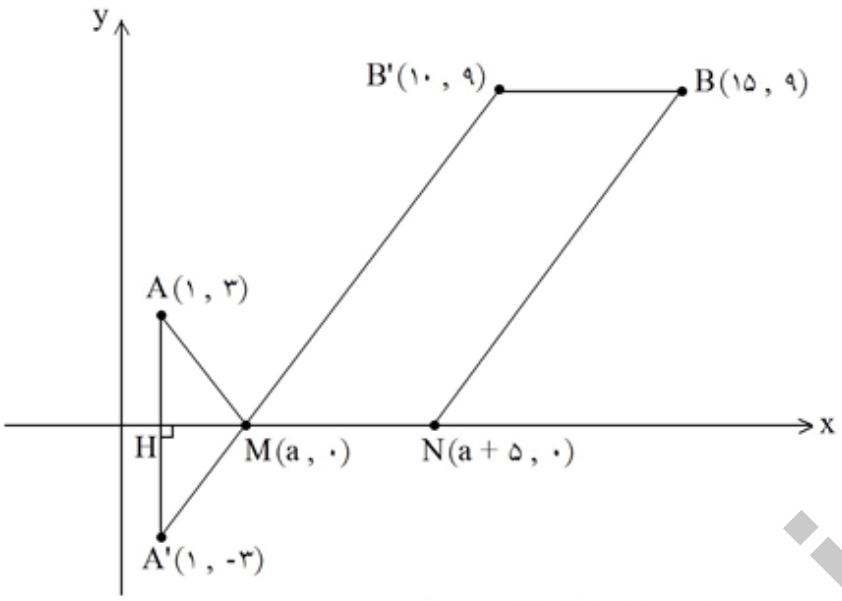
انتقال غیرهمانی نمی‌تواند نقطهٔ ثابت تبدیل داشته باشد زیرا موقعیت تمام نقاط را تغییر می‌دهد و هیچ نقطه‌ای بر خودش منطبق نمی‌شود، بنابراین گزینهٔ (۲) درست است.

تجانس در حالتی که $k = -۱$ باشد، اندازهٔ مساحت شکل را حفظ می‌کند، پس گزینهٔ (۳) نادرست است.

بازتاب نسبت به خط، تبدیل طولپاست و بی‌شمار نقطهٔ ثابت تبدیل دارد، بنابراین گزینهٔ (۴) نادرست است.

تلفن تماس: ۰۲۶۳۳۴۰۸۹۴۴

۶۰ گزینه ۳ پاسخ صحیح است.



با توجه به شکل و موقعیت نقاط A , B , M , N این سؤال همان مسئله جاده‌ی ساحلی است که می‌خواهیم از A به B برویم به طوری که MN = ۵ قسمتی از مسیر در ساحل رودخانه باشد.

برای تعیین مسیر مینیمم ابتدا B را به اندازه‌ی ۵ واحد در راستای محور xها به طرف A منتقل می‌کنیم تا به B' برسیم و بازتاب A را نسبت به محور xها نقطه‌ی A' می‌نامیم. از A' به B' وصل می‌کنیم تا محور xها در M قطع شود آن‌گاه مسیر AMNB مسیر مینیمم است و طول آن برابر A'B' + BB' است.

$$\begin{matrix} A'(۱ , -۳) \\ B'(۱۰ , ۹) \end{matrix} \Rightarrow A'B' = \sqrt{(۱۰ - ۱)^۲ + (۹ + ۳)^۲} = \sqrt{۸۱ + ۱۴۴} = \sqrt{۲۲۵} = ۱۵$$

مسیر مینیمم = A'B' + BB' = ۱۵ + ۵ = ۲۰

۶۱ گزینه ۲ پاسخ صحیح است. ابتدا یک نقطه‌ی دلخواه روی خط را به دست می‌آوریم سپس تصویر این یک نقطه را تحت تجانس گفته شده حساب می‌کنیم. سپس از نقطه‌ی تصویر، با شیب ۲- معادله‌ی خط را می‌نویسیم.

توجه کنید: تجانس شیب خط را حفظ می‌کند.

مرکز تجانس $O\ (۱,۳)$, $K = ۲$

نقطه $A\ (۰\ ,\ ۱)$ نقطه‌ی دلخواه روی خط می‌باشد.

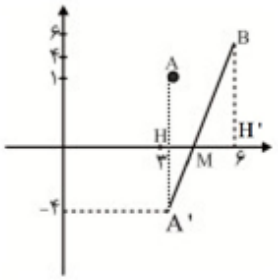
$$\overline{OA'} = K\overline{OA} \Rightarrow A' - O = K(A - O) \Rightarrow A' = KA + (۱ - K)O$$

$$A' = ۲(۰\ ,\ ۱) + (-۱)(۱\ ,\ ۳) = (-۱\ ,\ -۱)$$

معادله‌ی خط تصویر : $y + ۱ = -۲\ (x + ۱) \Rightarrow y + ۲x = -۳$

$$a = ۲\ ,\ b = -۳ \Rightarrow a + b = -۱$$

۶۲ گزینه ۴ پاسخ صحیح است. بنابر مسئله هرون، اگر A' بازتاب A نسبت به محور x ها باشد و $A'B$ محور x ها را در M قطع کند، آنگاه $MA + MB$ کمترین مقدار را دارد. حال خط AB را به دست آورده و با محور x ها قطع می‌دهیم تا نقطه‌ی M پیدا شود.



$$\begin{matrix} B(۶\ ,\ ۶) \\ A'(۳\ ,\ -۴) \end{matrix} \Rightarrow m_{A'B} = \frac{y_{A'} - y_B}{x_{A'} - x_B} = \frac{-۴ - ۶}{۳ - ۶} = \frac{۱۰}{۳} \Rightarrow y - ۶ = \frac{۱۰}{۳}(x - ۶)$$

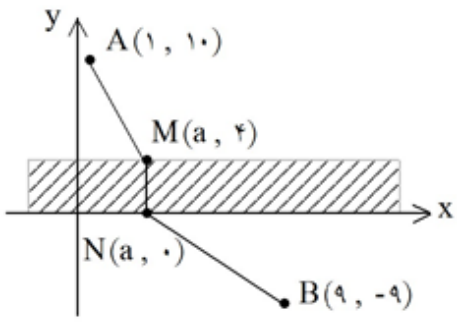
$$\xrightarrow{y = ۰} -۶ = \frac{۱۰}{۳}(x - ۶) \Rightarrow x = ۴/۲$$

راه دوم:

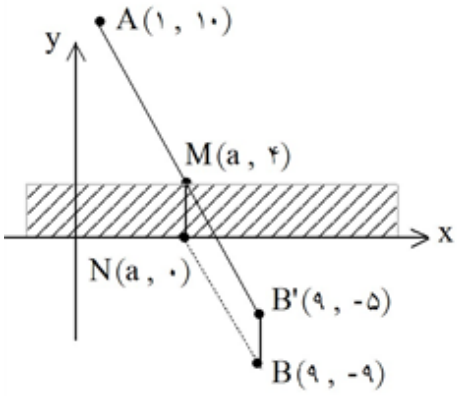
دو مثلث قائم‌الزاویه‌ی $A'MH$ و BMH' متشابهند. داریم:

$$\frac{A'H}{BH'} = \frac{MH}{MH'} \Rightarrow \frac{۴}{۶} = \frac{x_M - ۳}{۶ - x_M} \Rightarrow x_M = ۳ + ۱/۲ = ۴/۲$$

تلفن تماس: ۰۲۶۳۳۴۰۸۹۴۴



۶۳ گزینه ۱ پاسخ صحیح است. با توجه به شکل پاره‌خط MN موازی محور yها است. پس طول مینیمم خط شکسته AMNB همان مسئله رودخانه است که می‌خواهیم پلی در مسیر آن حداث کنیم (شکل را ببینید)
در این صورت باید نقطه‌ی B را در راستای محور yها به اندازه‌ی ۴ واحد (طول MN) انتقال دهیم تا به B' برسیم و از B' به A وصل کرده تا M به دست آید. سپس عمود MN مسیر مینیمم AMNB را ایجاد می‌کند. طول این مسیر برابر AB' + MN یعنی AB' + ۴ است.



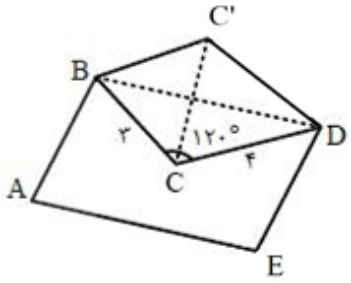
$$AB' = \sqrt{(۹-۱)^۲ + (۱۰+۵)^۲} = \sqrt{۶۴ + ۲۲۵}$$
$$= \sqrt{۲۸۹} = ۱۷$$

پس طول مسیر مینیمم مساوی ۲۱ = ۴ + ۱۷ است.

۶۴ گزینه ۴ پاسخ صحیح است.
تجانس و بازتاب ۳ ویژگی بالا را دارا هستند تجانس اندازه زاویه، شیب خط و جهت شکل را حفظ می‌کند. بازتاب، طول پاره‌خط اندازه زاویه و مساحت شکل را حفظ می‌کند.

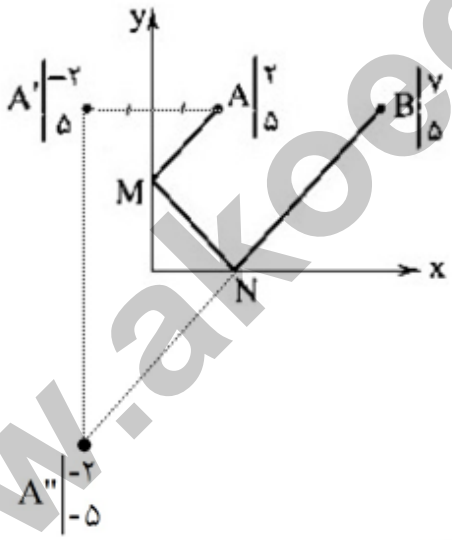
تلفن تماس: ۰۲۶۳۳۴۰۸۹۴۴

۶۵ گزینه ۴ پاسخ صحیح است. از B به D وصل می‌کنیم و BD را به عنوان محور بازتاب در نظر گرفته و بازتاب C را نسبت به آن، 'C می‌نامیم. محیط ABCDE با محیط ABC'DE برابر است و مساحت آن به اندازهٔ مساحت چهارضلعی یعنی BCDC' بیش‌تر است که دو برابر مساحت مثلث BCD است.



میزان افزایش مساحت $= ۲S_{BCD} = ۳ \times ۴ \times \sin ۱۲۰^\circ = ۱۲ \times \frac{\sqrt{۳}}{۲} = ۶\sqrt{۳}$

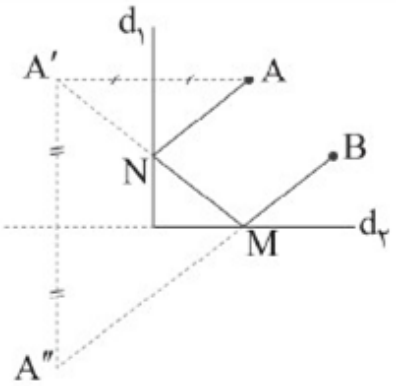
۶۶ گزینه ۱ پاسخ صحیح است.



مسیر AMNB همان طول پاره‌خط A"B است.

$$A"B = \sqrt{(۷+۲)^۲ + (۵+۵)^۲} = \sqrt{۸۱ + ۱۰۰} = \sqrt{۱۸۱}$$

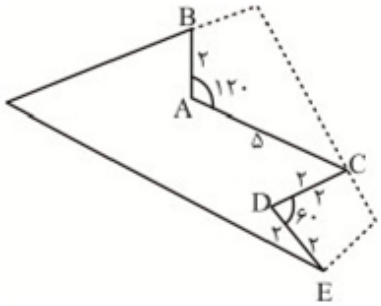
تلفن تماس: ۰۲۶۳۳۴۰۸۹۴۴



۶۷ گزینه ۴ پاسخ صحیح است. برای یافتن کوتاه‌ترین مسیر باید دو بار از تبدیل بازتاب استفاده کرد. (مطابق شکل)

ابتدا بازتاب نقطه‌ی A را نسبت به خط d_1 می‌یابیم (A'). سپس بازتاب نقطه‌ی A' را نسبت به خط d_2 می‌یابیم. (A").

۶۸ گزینه ۱ پاسخ صحیح است.



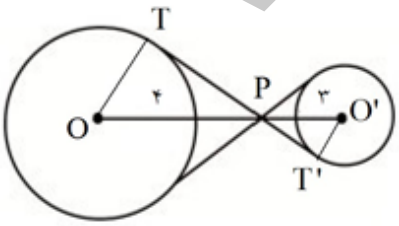
به کمک بازتاب مساحت قسمت‌های فرو رفته را افزایش می‌دهیم بنابراین به اندازه دو برابر مجموع مساحت دو مثلث $\widehat{ABC}$ و $\widehat{CDE}$ به مساحت افزوده می‌شود.

$$\text{مساحت افزایش‌یافته} = ۲(S_{ABC} + S_{CDE})$$

$$= ۲\left(\frac{۱}{۲}\times ۲\times ۵\times \sin ۱۲۰ + \frac{۱}{۲}\times ۲\times ۲\times \sin ۶۰\right) = ۵\sqrt{۳} + ۲\sqrt{۳} = ۷\sqrt{۳}$$

۶۹ گزینه ۴ پاسخ صحیح است. ترکیب دو بازتاب با دو محور متقاطع که با هم زاویه θ می‌سازند یک دوران با زاویه ۲θ است. پس جواب دوران می‌باشد.

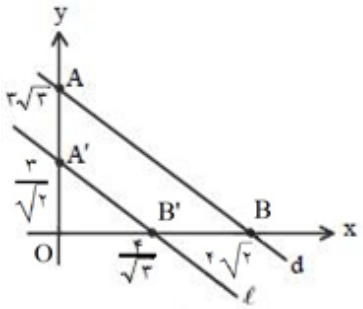
۷۰ گزینه ۴ پاسخ صحیح است. نقطه تلاقی مماس مشترک‌های داخلی با خط‌المرکزین، مرکز تجانس معکوس دو دایره است. با توجه به شکل با فرض $PO' = x$ پس $PO = ۱۴ - x$ داریم:



$$OT \parallel O'T' \Rightarrow \frac{O'P}{OP} = \frac{O'T'}{OT} \Rightarrow \frac{x}{۱۴ - x} = \frac{۳}{۴} \Rightarrow \frac{x}{۱۴} = \frac{۳}{۷} \Rightarrow x = ۶$$

تلفن تماس: ۰۲۶۳۳۴۰۸۹۴۴

۷۱ گزینه ۱ پاسخ صحیح است. از آن‌جا که l مجانس خط d به مرکز O و نسبت $\frac{\sqrt{۶}}{۶}$ است، داریم:

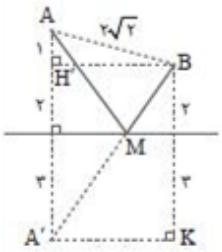


$$OA' = ۳\sqrt{۳} \times \frac{\sqrt{۶}}{۶} = \frac{۳}{\sqrt{۲}} \quad \text{و} \quad OB' = ۴\sqrt{۲} \times \frac{\sqrt{۶}}{۶} = \frac{۴}{\sqrt{۳}}$$

$$\text{مساحت مورد نظر} = S_{OAB} - S_{OA'B'}$$

$$= \frac{۱}{۲}\left(۳\sqrt{۳} \times ۴\sqrt{۲} - \frac{۳}{\sqrt{۲}} \times \frac{۴}{\sqrt{۳}}\right) = ۶\sqrt{۶} - \frac{۶}{\sqrt{۶}} = ۵\sqrt{۶}$$

۷۲ گزینه ۲ پاسخ صحیح است. برای این منظور A' بازتاب A نسبت به خط d را به B وصل می‌کنیم. مسیر AMB کوتاه‌ترین مسیر است. برای محاسبهٔ طول این مسیر داریم:



$$AH'B: BH'^{۲} = \left(۲\sqrt{۲}\right)^{۲} - ۱^{۲} = ۷ \Rightarrow A'K^{۲} = ۷$$

$$A'BK: A'B^{۲} = BK^{۲} + A'K^{۲}$$

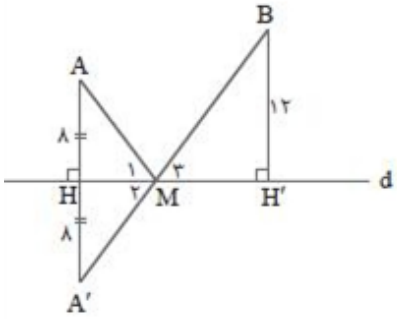
$$\Rightarrow A'B^{۲} = ۵^{۲} + ۷ = ۲۵ + ۷ = ۳۲ \Rightarrow A'B = ۴\sqrt{۲}$$

$$\text{مسیر } AMB = AM + MB = A'M + MB = A'B = ۴\sqrt{۲}$$

۷۳ گزینه ۴ پاسخ صحیح است. در وضعیت‌های متقاطع، مماس داخل، متداخل و هم‌مرکز، مرکز تجانس غیرمستقیم داخل دایرهٔ کوچک‌تر قرار دارد.

تلفن تماس: ۰۲۶۳۳۴۰۸۹۴۴

۷۴ گزینه ۲ پاسخ صحیح است. برای پیدا کردن M باید ابتدا بازتاب A را نسبت به خط d پیدا کنیم و آن را A' بنامیم و از A' به B وصل کنیم. برخورد این خط با d همان نقطهٔ M است. در مثلث متساوی‌الساقین MAA'، MH ارتفاع است، بنابراین MH نیمساز است، داریم:



$$\begin{cases} M_۱ = M_۲ \\ M_۱ = M_۳ \end{cases} \Rightarrow M_۲ = M_۳$$

در نتیجه مثلث‌های MAH و MBH' متشابه هستند.

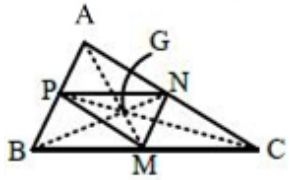
$$\hat{M}_۱ = \hat{M}_۳ , \hat{H} = \hat{H}' = ۹۰^\circ \Rightarrow \frac{AH}{BH'} = \frac{HM}{H'M}$$

فرض کنیم $MH = x$، بنابراین: $H'M = ۱۵ - x$.

$$\Rightarrow \frac{۸}{۱۲} = \frac{x}{۱۵ - x} \Rightarrow ۱۰ - ۸x = ۱۲x \Rightarrow ۲۰x = ۱۲۰ \Rightarrow x = ۶$$

$$\Rightarrow AM^۲ = ۶^۲ + ۸^۲ = ۱۰۰ \Rightarrow AM = ۱۰$$

۷۵ گزینه ۳ پاسخ صحیح است. با توجه به این‌که نقطهٔ همرسی میانه‌ها، میانه‌ها را به نسبت ۱ به ۲ قطع می‌کند، داریم:



$$AG = ۲GM , BG = ۲GN , CG = ۲GP$$

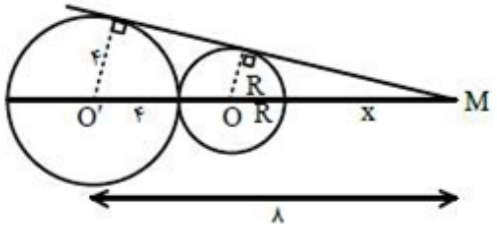
از طرفی اضلاع دو مثلث نظیربه‌نظیر موازیند، بنابراین دو مثلث طبق شکل مجانس معکوس هستند با مرکز تجانس G.

۷۶ گزینه ۳ پاسخ صحیح است. در تجانس طول با ضریب نسبت تجانس تغییر می‌کند، بنابراین شعاع دایرهٔ C' برابر است با $R' = ۳R = ۳ \times ۱ = ۳$، در نتیجه:

طول مماس مشترک خارجی: $TT' = \sqrt{d^۲ - (R - R')^۲} = \sqrt{(۲\sqrt{۵})^۲ - (۱ - ۳)^۲} = \sqrt{۲۰ - ۴} = ۴$

۷۷ گزینه ۲ پاسخ صحیح است. مطابق شکل‌های زیر دو حالت در نظر می‌گیریم:

الف) حالتی که $k > ۱$ باشد:

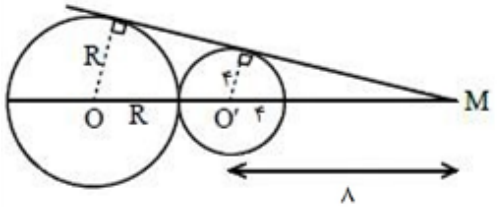


$$x + ۲R + ۴ = ۸ \quad (I)$$

$$\frac{۴}{R} = \frac{۸}{x + R} \Rightarrow ۴x + ۴R = ۸R \Rightarrow x = R \quad (II)$$

$$(I) \text{ و } (II) \Rightarrow ۳x = ۴ \Rightarrow x = \frac{۴}{۳} \Rightarrow k = \frac{۴}{\frac{۴}{۳}} = ۳$$

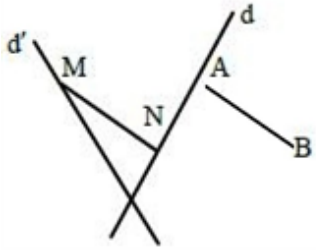
ب) حالتی که $k < ۱$ باشد:



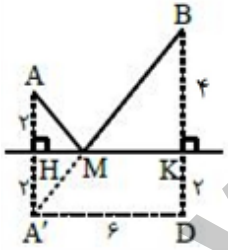
$$\frac{R}{۴} = \frac{۸ + R + ۴}{۸} \Rightarrow R = ۱۲$$

$$k = \frac{۴}{۱۲} = \frac{۱}{۳}$$

۷۸ گزینه ۲ پاسخ صحیح است. فرض می‌کنیم MN پاره‌خطی باشد که موازی و مساوی AB بوده و دو سر آن بر روی خط d و d' است، در این‌صورت N انتقال‌یافتهٔ نقطهٔ M با بردار $\overrightarrow{AB}$ خواهد بود، بنابراین برای رسم MN از تبدیل انتقال باید استفاده کرد.



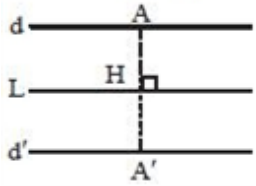
۷۹ گزینه ۴ پاسخ صحیح است. می‌دانیم در این وضعیت مطابق شکل، کوتاه‌ترین مسیر AMB است به‌طوری که A' بازتاب A نسبت به d می‌باشد.



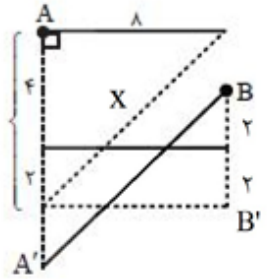
$$A'BD: A'B^۲ = BD^۲ + DA'^۲ \Rightarrow A'B = \sqrt{۳۶ + ۳۶} = ۶\sqrt{۲}$$

$$\Rightarrow A'M + MB = ۶\sqrt{۲} \Rightarrow AM + MB = ۶\sqrt{۲}$$

۸۰ گزینه ۳ پاسخ صحیح است. با توجه به شکل در نظر می‌گیریم خط d و تبدیل‌یافتهٔ آن یعنی خط d' را داشته باشیم. اگر خطی را موازی با این دو خط که از هر دو خط d و d' به یک فاصله باشد در نظر بگیریم (مانند L)، خط L محور بازتاب این دو خط است، بنابراین در این حالت که تبدیل را بازتاب در نظر بگیریم، این تبدیل منحصر به فرد است.

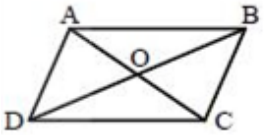


۸۱ گزینه ۳ پاسخ صحیح است. طبق شکل زیر با استفاده از مسئله هرون طول $A'B$ کوتاه‌ترین مسیر است. مسلماً $A'B$ در شکل برابر x است. حال با استفاده از قضیهٔ فیثاغورس:



$$\text{طول کوتاه ترین مسیر} = \sqrt{۶^۲ + ۸^۲} = ۱۰$$

۸۲ گزینه ۲ پاسخ صحیح است. نقطهٔ تقاطع قطرها را به عنوان مرکز تجانس در نظر می‌گیریم (نقطهٔ O). اگر $k = -۱$ در نظر بگیریم: (تجانس D)

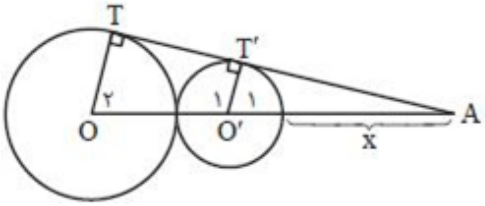


$$\left.\begin{array}{l} OA = OC \Rightarrow D(A) = C \\ OB = OD \Rightarrow D(B) = D \end{array}\right\} \Rightarrow D(\overset{\triangle}{AOB}) = D(\overset{\triangle}{COD})$$

$$\Rightarrow \overset{\triangle}{AOB} \cong \overset{\triangle}{COD} \Rightarrow AB = CD \text{ و } AD = CD$$

بنابراین این چهارضلعی متوازی‌الاضلاع است.

۸۳ گزینه ۲ پاسخ صحیح است. تقاطع خط‌المرکزین و مماس مشترک خارجی دو دایره، مرکز تجانس مستقیم آن‌ها است، بنابراین در شکل زیر داریم:

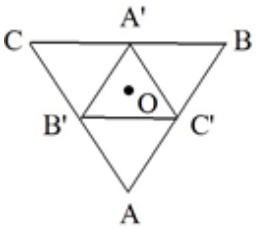


A مرکز تجانس است در نتیجه:

$$\left.\begin{array}{l} OT \perp AT \\ O'T' \perp AT \end{array}\right\} \Rightarrow OT \parallel O'T' \xrightarrow[\overset{\triangle}{OAT}]{\text{تالس در مثلث}} \frac{O'A}{OA} = \frac{O'T'}{OT}$$

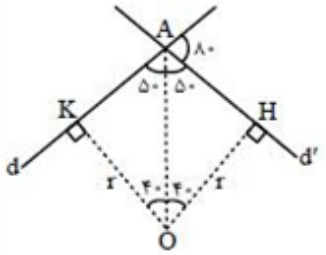
$$\Rightarrow \frac{x + ۱}{x + ۴} = \frac{۱}{۲} \Rightarrow x = ۲ \Rightarrow OA = x + ۱ = ۳$$

۸۴ گزینه ۳ پاسخ صحیح است. در واقع صورت سؤال تجانس مثلث $A'B'C'$ با نسبت $k = -۲$ را می‌خواهد.



$$OA = -۲(OA')$$
$$OB = -۲(OB')$$
$$OC = -۲(OC')$$

۸۵ گزینه ۳ پاسخ صحیح است. مطابق شکل اگر O مرکز دوران باشد، آن‌گاه داریم:



$$\begin{cases} OH = OK = r & \text{(شعاع دوران)} \\ K\hat{O}H = ۸۰^\circ & \text{(زاویه دوران)} \end{cases} \Rightarrow O\hat{A}H = O\hat{A}K = ۵۰^\circ$$

۸۶ گزینه ۳ پاسخ صحیح است. بازتاب و دوران در حالت کلی شیب خط را حفظ نمی‌کنند، اما انتقال شیب خط را حفظ می‌کند.

۸۷ گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

$L: ۲x + y = ۱ \Rightarrow m = -۲$

$d: x - ۲y = ۳ \Rightarrow m' = \frac{۱}{۲}$

چون $mm' = -۱$، پس دو خط L و d بر هم عمودند، بنابراین تصویر L روی d بر خودش منطبق می‌شود، پس داریم:

$$L': ۲x + y = ۱ \xrightarrow{\text{روی L است. (a,b)}} ۲a + b = ۱ \Rightarrow b = ۱ - ۲a \Rightarrow A(a, ۱ - ۲a)$$

$$\text{فاصله نقطه A از خط d} = \frac{|a - ۲(۱ - ۲a) - ۳|}{\sqrt{۱ + ۴}} = \frac{|۵a - ۵|}{\sqrt{۵}} = ۳\sqrt{۵} \Rightarrow ۵a - ۵ = \pm ۱۵ \Rightarrow$$

$a = ۴ \Rightarrow b = -۷ \Rightarrow a + b = -۳$

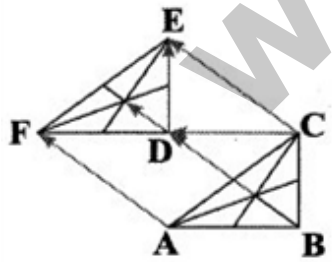
یا

$a = -۲ \Rightarrow b = ۵ \Rightarrow a + b = ۳$

پس کم‌ترین مقدار $a + b$ مساوی ۳- است.

۸۸ گزینه ۳ پاسخ صحیح است. مثلث‌های ABC و FDE با هم هم‌نهشت‌اند و اضلاع آن‌ها با موازی است، پس می‌توان گفت که مثلث FDE حاصل انتقال مثلث ABC، نخست تحت $\overrightarrow{CD}$ و سپس تحت $\overrightarrow{DE}$ است. بنابراین محل تقاطع نیمسازهای $\widehat{ABC}$ نیز به همین صورت (با بردار $\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DE} = \overrightarrow{CE}$) انتقال پیدا می‌کند.

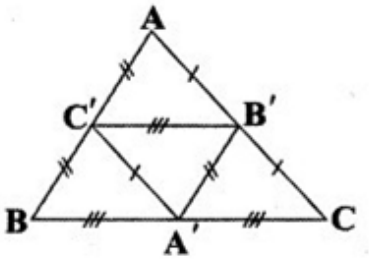
در نتیجه، محل تقاطع نیمسازهای $\widehat{ABC}$ به اندازه‌ی $|\overrightarrow{CE}|$ منتقل می‌شود.



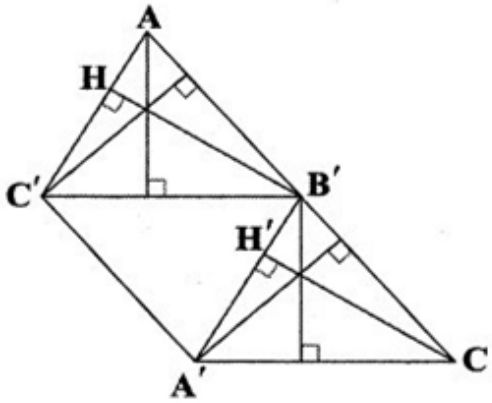
$|\overrightarrow{CE}| = ۵$

۸۹ گزینه ۲ پاسخ صحیح است. می‌دانیم که مثلث‌های $AB'C'$ و $B'CA'$ با هم هم‌نهشت‌اند، زیرا $AB' = B'C$، $AC' = B'A'$ و $B'C' = CA'$

در نتیجه می‌توان فرض کرد که مثلث $B'A'C$ انتقال‌یافته‌ی مثلث $AB'C'$، توسط $\overrightarrow{AB'}$ است (تبدیل T).



اگر یک مثلث انتقال پیدا کند، محل برخورد ارتفاع‌های آن نیز به همان نحو انتقال پیدا می‌کند، پس:

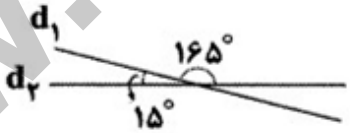


$$\Rightarrow \overrightarrow{HH'} = \overrightarrow{AB'} \Rightarrow HH' = \frac{AC}{۲} = ۴$$

۹۰ گزینه ۴ پاسخ صحیح است. می‌دانیم ترکیب دو بازتاب متوالی نسبت به دو خط متقاطع، معادل یک دوران با زاویه‌ی ۲ برابر زاویه‌ی بین دو خط متقاطع و به مرکز نقطه‌ی تقاطع دو خط است. طبق شکل نقاط A و B به اندازه‌ی ۳۰ درجه دوران پیدا کرده‌اند.

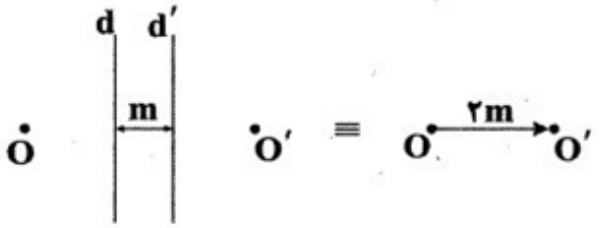
در نتیجه اگر زاویه‌ی بین ۲ خط α باشد، داریم: $۲\alpha = ۳۰ \Rightarrow \alpha = ۱۵$

اما زاویه‌ی بین ۲ خط، مکمل ۱۵ درجه نیز می‌تواند باشد، در نتیجه $۱۸۰^\circ - ۱۵^\circ = ۱۶۵^\circ$ نیز می‌تواند جواب باشد.



تلفن تماس: ۰۲۶۳۳۴۰۸۹۴۴

۹۱ گزینه ۴ پاسخ صحیح است. می‌دانیم که اگر یک نقطه را نسبت به دو خط موازی d و d'، به طور متوالی بازتاب کنیم این نقطه به اندازه‌ی ۲m انتقال می‌یابد که m فاصله‌ی ۲ خط می‌باشد (بردار انتقال، عمود بر راستای دو خط و به سمت خط دوم است).



در نتیجه، بازتاب متوالی نسبت به خطوط d_1 و d_2، یک انتقال به اندازه‌ی ۲ = (۵/۲۱ - ۶/۲۱) × ۲ واحد و بازتاب متوالی نسبت به d_3 و d_4.

یک انتقال به اندازه‌ی ۴ = (۱۰/۱۲۱ - ۱۲/۱۲۱)۲ واحد است.

⇐ فاصله‌ی OO' برابر با ۶ واحد است.

۹۲ گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

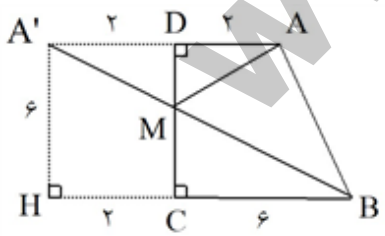
$$k = ۲ \Rightarrow \frac{S_{\overset{\triangle}{AMN}}}{S_{\overset{\triangle}{MCQ}}} = ۴ \Rightarrow S_{\overset{\triangle}{AMN}} = ۴S_{\overset{\triangle}{MCQ}}$$

مساحت متوازی‌الاضلاع برابر با $\frac{۸}{۳}$ است، داریم:

$$\Rightarrow S_{\overset{\triangle}{ABC}} - SMNBQ = S_{\overset{\triangle}{AMN}} + S_{\overset{\triangle}{MCQ}} = ۶ - \frac{۸}{۳} = \frac{۱۰}{۳}$$

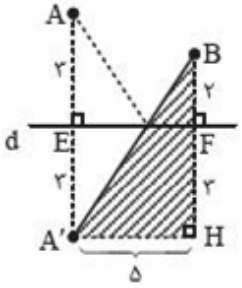
$$\Rightarrow ۴S_{\overset{\triangle}{MCQ}} + S_{\overset{\triangle}{MCQ}} = \frac{۱۰}{۳} \Rightarrow S_{\overset{\triangle}{MCQ}} = \frac{۲}{۳}$$

۹۳ گزینه ۱ پاسخ صحیح است. بازتاب نقطه‌ی A را نسبت به DC نقطه‌ی A' می‌نامیم، از A' به B وصل می‌کنیم تا DC را در نقطه‌ی M قطع کند. در این صورت AMB کوتاه‌ترین مسیر است یعنی مقدار MA + MB کم‌ترین است و چون بازتاب ایزومتری است MA + MB برابر A'B است. مطابق شکل در مثلث قائم‌الزاویه‌ی A'HB می‌توان طول A'B را به دست آورد.



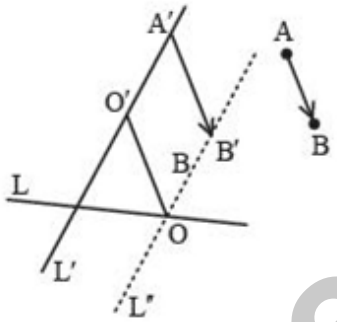
$$\overset{\triangle}{A'HB} : A'B^۲ = A'H^۲ + BH^۲ = ۸^۲ + ۶^۲ = ۱۰۰ \Rightarrow A'B = ۱۰$$

۹۴ گزینه ۲ پاسخ صحیح است. در این پدیده بایستی تصویر A نسبت به d را به نقطهٔ B وصل کنیم (از 'A به B)، سپس از 'A خطی به امتداد BF عمود کنیم:

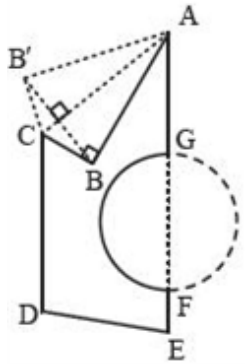


$$|A'B|^۲ = ۵^۲ + ۵^۲ = ۲۵ + ۲۵ \Rightarrow |A'B|^۲ = ۲۵ \times ۲ = ۵\sqrt{۲}$$

۹۵ گزینه ۴ پاسخ صحیح است. خط 'L را تحت بردار AB منتقل می‌کنیم تا به خط "L برسیم. فرض کنید خط "L خط L را در نقطه‌ی O قطع کند. از O خطی موازی AB رسم کنیم تا خط 'L را در نقطهٔ 'O قطع کند. در این صورت پاره‌خط 'OO جواب مسأله است.

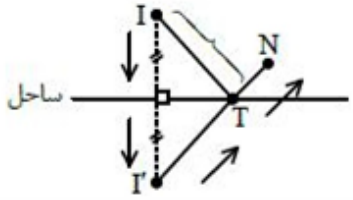


۹۶ گزینه ۴ پاسخ صحیح است. برای افزایش مساحت بدون تغییر محیط باید بازتاب B را نسبت به محور AC و بازتاب نیم‌دایره را نسبت به قطر GF به‌دست آوریم، بنابراین مقدار افزایش مساحت برابر است با:

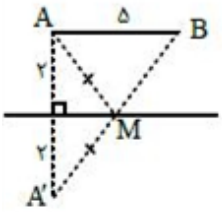


$$۲S_{ABC} + S_{\text{دایره}} = ۲ \times \frac{۱}{۲} \times ۲ \times ۶ + ۱۶\pi$$
$$= ۱۲ + ۱۶\pi = ۴(۳ + ۴\pi)$$

۹۷ گزینه ۲ پاسخ صحیح است. باید نقطه‌ای به‌جای I بیابیم که با نقاط T و N خط راست یعنی کم‌ترین مسیر را بسازند، برای این موضوع بازتاب یا قرینهٔ I نسبت به ساحل رودخانه جواب است یعنی I را بازتاب (قرینه) کرده، نقطه 'I به‌دست می‌آید، خطی که از 'I به N وصل می‌شود و ساحل را قطع می‌کند، جواب مسئله به روش بازتاب محوری می‌باشد.



۹۸ گزینه ۱ پاسخ صحیح است. مطابق شکل بازتاب نقطهٔ A نسبت به خط d را 'A می‌نامیم. از 'A به B وصل می‌کنیم، محل برخورد 'A'B با خط d نقطهٔ M می‌باشد که در این وضعیت محیط مثلث MAB کم‌ترین محیط است، داریم:



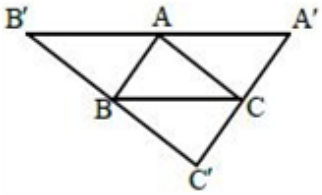
$$AA'B: A'B^{۲} = ۴^{۲} + ۵^{۲} = ۱۶ + ۲۵ = ۴۱ \Rightarrow A'B = \sqrt{۴۱}$$

$$\Rightarrow A'M + MB = \sqrt{۴۱} \Rightarrow AM + MB = \sqrt{۴۱}$$

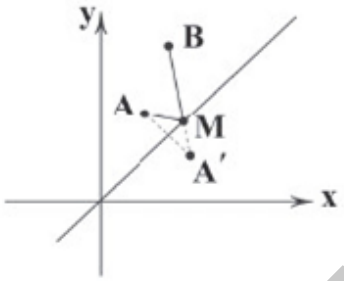
$$\text{محیط مثلث } AMB = AB + AM + MB = ۵ + \sqrt{۴۱}$$

۹۹ گزینه ۲ پاسخ صحیح است. دوران با زاویهٔ °۲۹۷۰ در جهت خلاف حرکت عقربه‌های ساعت معادل °۹۰ + (°۳۶۰ × ۸) یعنی °۹۰ در جهت خلاف حرکت عقربه‌های ساعت است که این دوران در گزینه (۲) آمده است.

۱۰۰ گزینه ۳ پاسخ صحیح است. انتقال، شیب خطوط را حفظ می‌کند، هم‌چنین طولپاست، پس چهارضلعی AA'CB و BB'AC متوازی‌الاضلاع می‌باشند یعنی AA' = BC و AB' = BC، بنابراین A'B' = ۲BC. به همین ترتیب می‌توان نتیجه گرفت سایر اضلاع مثلث A'B'C' دو برابر اضلاع مقابل خود در مثلث ABC می‌باشد، بنابراین مساحت مثلث A'B'C' چهار برابر مساحت مثلث ABC است.



۱۰۱ گزینه ۱ پاسخ صحیح است. به کمک خواص بازتاب، مسئله را حل می‌کنیم. 'A قرینه‌ی A نسبت به خط y = x است، پس 'A(۴ , ۲) خواهد بود. حال معادله‌ی خط 'A'B را می‌نویسیم و با y = x قطع می‌دهیم.



$$A'B: y - ۲ = \frac{۷ - ۳}{۳ - ۴}(x - ۴) \Rightarrow y = ۲ = -۵x + ۲۰$$

$$\xrightarrow{y = x} ۶x = ۲۲ \Rightarrow x = \frac{۱۱}{۳} \Rightarrow M\left(\frac{۱۱}{۳}, \frac{۱۱}{۳}\right)$$

$$\Rightarrow OM = \sqrt{\left(\frac{۱۱}{۳}\right)^{۲} + \left(\frac{۱۱}{۳}\right)^{۲}} = \sqrt{۲\left(\frac{۱۱}{۳}\right)^{۲}} = \frac{۱۱}{۳}\sqrt{۲}$$

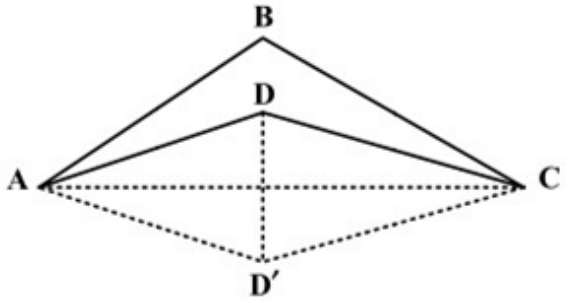
۱۰۲ گزینه ۱ پاسخ صحیح است. سطح مقطع حاصل، دایره‌ای است به شعاع r، پس:

$$\pi r^{۲} = ۱۶\pi \Rightarrow r = ۴$$

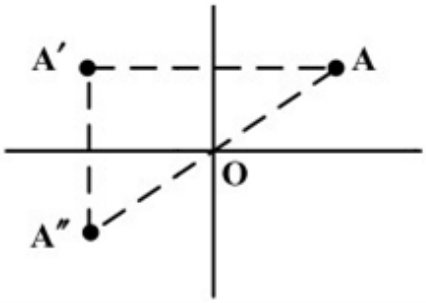
اگر ارتفاع استوانه را ۳h درنظر بگیریم، آن‌گاه AB = ۲h و AC = h خواهد بود.

$$V = \pi r^{۲} \times ۳h = ۳\pi \times ۴^{۲} \times h = ۴۸\pi h = ۴۸\pi \Rightarrow h = ۱ \Rightarrow AB = ۲$$

۱۰۳ گزینه ۴ پاسخ صحیح است. در چهارضلعی گوژ ABCD بازتاب رأس D را نسبت خط AC نقطه 'D می‌نامیم چهارضلعی محدب 'ABCD هم محیط با چهارضلعی کوژ است.



۱۰۴ گزینه ۲ پاسخ صحیح است.



با توجه به شکل $OA = OA''$ و $A\hat{O}A''$ پس تبدیل تقارن دورانی است.

۱۰۵ گزینه ۱ پاسخ صحیح است. تبدیلات دوران - انتقال - بازتاب فاصله‌ها را حفظ می‌کنند پس طولپا هستند ولی تجانس اندازه شکل را تغییر می‌دهد.

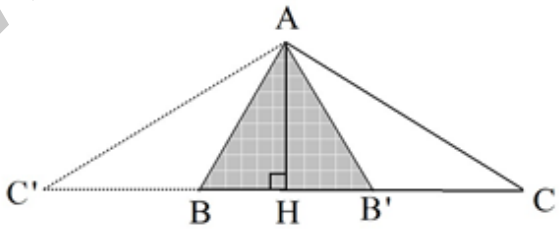
۱۰۶ گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

در دو بازتاب که دو محور بازتاب موازی و فاصله آن‌ها d باشد، تبدیل انتقال با برداری به طول ۲d، عمود بر محور بازتاب رخ می‌دهد.

در دو بازتاب که زاویه بین دو محور بازتاب α باشد، تبدیل دوران به مرکز محل برخورد دو محور و زاویه دوران ۲α رخ می‌دهد.

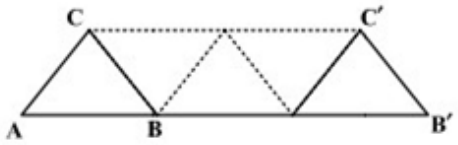
هر تبدیل طولپا، اندازه زاویه را حفظ می‌کند ولی هر تبدیل که اندازه زاویه را حفظ کند را نمی‌توان گفت که طولپاست، مثل تبدیل تجانس.

۱۰۷ گزینه ۴ پاسخ صحیح است. مثلث ABC با اضلاع ۳ و ۴ و ۵ قائم‌الزاویه است. در شکل $\overset{\triangle}{AB'C'}$ بازتاب ABC نسبت به ارتفاع AH است. داریم:

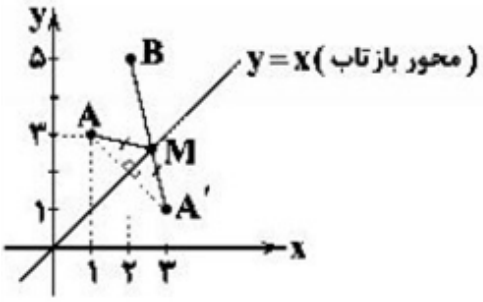


$$\frac{S_{ABB'}}{S_{ABC}} = \frac{\frac{۱}{۲}AH \times BB'}{\frac{۱}{۲}AH \times BC} = \frac{BB'}{BC} = \frac{۲BH}{BC} = \frac{۲BH \times BC}{BC^{۲}} = \frac{۲AB^{۲}}{BC^{۲}} = \frac{۲ \times ۳^{۲}}{۵^{۲}} = \frac{۱۸}{۲۵} = ۷۲\%$$

۱۰۸ گزینه ۳ پاسخ صحیح است.
با توجه به شکل انتقال مساحت ذوزنقه ACC'B' ۵ برابر مساحت مثلث ABC است.



۱۰۹ گزینه ۳ پاسخ صحیح است. اگر خط $y = x$ را محور بازتاب درنظر بگیریم، آن‌گاه مطلوب مسئله، یافتن کوتاه‌ترین مسیر است که برای یافتن آن به کمک روش هرون، ابتدا قرینه‌ی نقطه‌ی A را نسبت به خط $y = x$ می‌یابیم که برابر است با $A'(۳ , ۱)$، حال فاصله‌ی A'B همان طول کوتاه‌ترین مسیر است.



$$MA + MB = MA' + MB = A'B$$
$$= \sqrt{(۲ - ۳)^۲ + (۵ - ۱)^۲} = \sqrt{۱۷}$$

۱۱۰ گزینه ۴ پاسخ صحیح است. توجه داشته باشید اگر A' و B' مجانس‌های نقاط A و B تحت تجانس به مرکز O و نسبت k باشند، آن‌گاه پاره‌خط‌های AA' و BB' (یا امتداد آن‌ها) ، در مرکز تجانس به هم می‌رسند (متقاطع‌اند).

معادله خط AA' : $y - ۳ = \left(\frac{۶ - ۳}{۲ + ۱}\right)(x + ۱) \Rightarrow y = x + ۴$

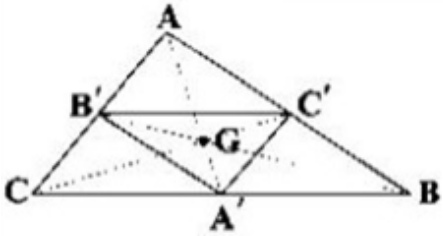
معادله خط BB' : $y - ۳ = \left(\frac{۶ - ۳}{۶ - ۱}\right)(x - ۱) \Rightarrow ۵y - ۳x = ۱۲$

نقطه‌ی تقاطع دو خط، مرکز تجانس است.

$$\begin{cases} y - x = ۴ \\ ۵y - ۳x = ۱۲ \end{cases} \Rightarrow x = -۴ , y = ۰ \Rightarrow \text{مرکز تجانس } O = (-۴ , ۰)$$

تلفن تماس: ۰۲۶۳۳۴۰۸۹۴۴

۱۱۱ گزینه ۲ پاسخ صحیح است. 'A وسط BC، 'B وسط AC و 'C وسط AB قرار دارد. با توجه به خاصیت مرکز ثقل می‌دانیم که $GA' = \frac{۱}{۲}GA$ هم‌چنین نقطه‌ی G بین A و 'A قرار دارد، پس نقطه‌ی 'A مجانس نقطه‌ی A به مرکز تجانس G و نسبت تجانس $k = -\frac{۱}{۲}$ است. همین مطلب در مورد نقاط 'B و 'C نیز صدق می‌کند. با توجه به ویژگی تجانس، مساحت مثلث 'A'B'C، $\frac{۱}{۴}$ مساحت مثلث ABC است.



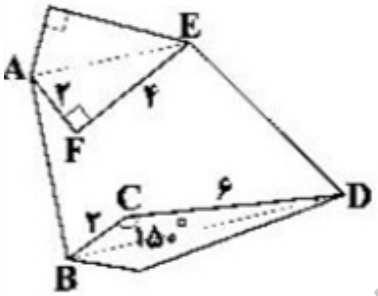
$$S_{\overset{\Delta}{ABC}} = S_{\overset{\Delta}{A'B'C'}} + \frac{۳}{۲}$$

$$S_{\overset{\Delta}{ABC}} = \frac{۱}{۴}S_{\overset{\Delta}{ABC}} + \frac{۳}{۲}$$

$$\frac{۳}{۴}S_{\overset{\Delta}{ABC}} = \frac{۳}{۲} \Rightarrow S_{\overset{\Delta}{ABC}} = ۲$$

۱۱۲ گزینه ۱ پاسخ صحیح است. انتقال با بردار صفر، دوران °۳۶۰ و تجانس با نسبت $k = ۱$ تبدیل‌های همانی هستند، اما تجانس با نسبت $k = -۱$ تبدیل همانی نیست.

۱۱۳ گزینه ۱ پاسخ صحیح است. دو برابر قسمت‌های رنگی به سطح زمین اضافه می‌شود.



$$S_۱ = \frac{۱}{۲} \times ۲ \times ۴ = ۴$$

$$S_۲ = \frac{۱}{۲} \times ۲ \times ۶ \times \sin ۱۵۰° = ۳$$

پس مساحت ماکزیمم برابر با $S = ۲(۴ + ۳) + ۲۶ = ۱۴ + ۲۶ = ۴۰$ خواهد بود.

۱۱۴ گزینه ۳ پاسخ صحیح است. اگر شکلی دو محور تقارن عمود بر هم داشته باشد، نقطه تلاقی آن دو محور، مرکز تقارن آن است.

۱۱۵ گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

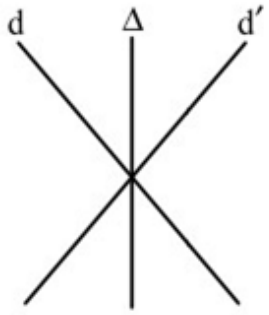
در دو بازتاب که دو محور بازتاب موازی و فاصله آن‌ها d باشد، تبدیل انتقال با برداری به طول ۲d، عمود بر محور بازتاب رخ می‌دهد.

در دو بازتاب که زاویه بین دو محور بازتاب α باشد، تبدیل دوران به مرکز محل برخورد دو محور و زاویه درون 2α رخ می‌دهد.

هر تبدیل طولپا، اندازه زاویه را حفظ می‌کند ولی هر تبدیل که اندازه زاویه را حفظ کند را نمی‌توان گفت که طولپاست، مثل تبدیل تجانس.

۱۱۶ گزینه ۲ پاسخ صحیح است. دو خط متقاطع نسبت به نیمسازهای دو زاویه مجانب خود بازتاب یکدیگرند. پس به ۲ طریق.

۱۱۷ گزینه ۱ پاسخ صحیح است. اگر d و Δ متقاطع باشند، بازتاب، شیب خط را حفظ نمی‌کند.



۱۱۸ گزینه ۴ پاسخ صحیح است. تبدیل ایزومتری، تبدیلی است که در آن فاصله‌ی بین هر دو نقطه در شکل اولیه با فاصله‌ی تصاویر آن‌ها برابر است. برای مثال نقاط (۱ , ۱) و (۰ , ۰) را در ۴ تبدیل قرار می‌دهیم و تک تک گزینه ها را بررسی می‌کنیم:

شکل اولیه $\begin{cases}(0,0)\\(1,1)\end{cases} \Rightarrow$ فاصله ی نقاط $=\sqrt{2}$

۱) $\begin{cases}T(0,0)=(0,0)\\T(1,1)=\pm\sqrt{2}(2,0)\end{cases} \Rightarrow$ فاصله نقاط $=2\sqrt{2}$

۲) $\begin{cases}T(0,0)=(0,0)\\T(1,1)=\pm\frac{3}{\sqrt{2}}(2,0)\end{cases} \Rightarrow$ فاصله نقاط $=3\sqrt{2}$

۳) $\begin{cases}T(0,0)=(0,0)\\T(1,1)=\pm(2,0)\end{cases} \Rightarrow$ فاصله نقاط $=2$

۴) $\begin{cases}T(0,0)=(0,0)\\T(1,1)=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}(2,0)=\pm(\sqrt{2},0)\end{cases} \Rightarrow$ فاصله نقاط $=\sqrt{2}$

۱۱۹ گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

با جای‌گذاری نقطه‌ی A در تبدیل $T(x , y) = (x - ۲ , y + ۱)$، به نقطه‌ی B می‌رسیم.

با جای‌گذاری نقطه‌ی B در تبدیل $T(x , y) = (x + ۲ , y - ۱)$، به نقطه‌ی A می‌رسیم، زیرا:

$$\begin{cases} T(A) = T(۱ , ۷) = (-۱ , ۸) = B \ ✓ \\ T'(B) = T'(-۱ , ۸) = (۱ , ۷) = A \ ✓ \end{cases}$$

بررسی سایر گزینه‌ها:

۲) $\begin{cases} T(A) = T(۱ , ۷) = (۳ , ۶) \neq B \ \times \\ T'(B) = T'(-۱ , ۸) = (-۳ , ۹) \neq A \ \times \end{cases}$

۳) $\begin{cases} T(A) = T(۱ , ۷) = (-۲ , ۹) \neq B \ \times \\ T'(B) = T'(-۱ , ۸) = (-۳ , ۹) \neq A \ \times \end{cases}$

۴) $\begin{cases} T(A) = T(۱ , ۷) = (-۱ , ۸) = B \ ✓ \\ T'(B) = T'(-۱ , ۸) = (-۴ , ۱۰) \neq A \ \times \end{cases}$

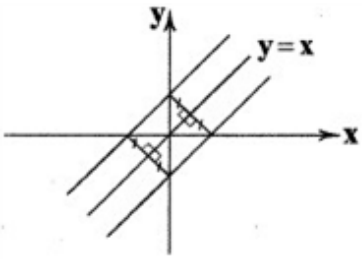
۱۲۰ گزینه ۲ پاسخ صحیح است. محور بازتاب عمودمنصف AB است، پس تصویر نقطه‌ی A منطبق بر B و تصویر نقطه‌ی B منطبق بر A خواهد بود و در نتیجه پاره‌خط AB و تصویر آن، برهم منطبق‌اند. بررسی سایر گزینه‌ها:

۱) در تبدیل دوران، اندازه‌ی پاره‌خط ثابت می‌ماند.

۳) انتقال نقطه‌ی ثابت ندارد، زیرا تمام نقاط به اندازه‌ی بردار انتقال جابه‌جا می‌شود.

۴) در بازتاب جهت شکل قرینه می‌شود.

۱۲۱ گزینه ۱ پاسخ صحیح است. تبدیل گزینه‌ی اول در شرایط خاصی که خط موردنظر موازی نیمساز ربع اول و سوم $(y = x)$، یا عمود بر آن باشد، شیب خط را حفظ می‌کند.



در واقع تبدیل $T(x , y) = (y , x)$، معادل بازتاب نسبت به خط $x = y$ است، در نتیجه هر خطی که با خط $y = x$ موازی باشد، شیب آن حفظ خواهد شد. اگر عمود باشد، تصویرش بر خودش منطبق می‌شود.

بررسی سایر گزینه‌ها:

۲) در بازتاب چون جهت شکل تغییر می‌کند، نمی‌تواند ترکیب چند انتقال باشد.

۳) دو دایره‌ی متقاطع، ۲ محور تقارن دارد.

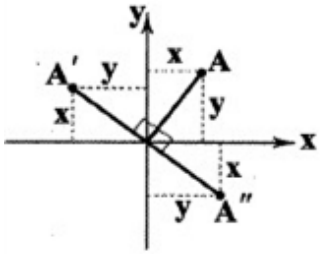
۴) دوران، همواره یک تبدیل ایزومتری است.

۱۲۲ گزینه ۲ پاسخ صحیح است. اگر به تعداد زوج مرتبه عمل بازتاب با محورهای موازی را انجام دهیم، شکل تغییر جهت نمی‌دهد و صرفاً انتقال می‌یابد و چون فاصله‌ی بین محورهای بازتاب موجود است و جهت انتقال در جهت عمود بر محورها است، پس اندازه‌ی بردار انتقال ۲nm واحد و جهت آن عمود بر محورهای موازی است.

تلفن تماس: ۰۲۶۳۳۴۰۸۹۴۴

۱۲۳ گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

نکته: دوران نقطه‌ای مانند $A(x , y)$ با زاویه‌ی ۹۰°، حول مبدأ به صورت زیر است:



در خلاف جهت عقربه های ساعت : $T_۱(x , y) = (-y , x) = A'$

در جهت عقربه های ساعت : $T_۲(x , y) = (y , -x) = A''$

حال تبدیل‌های مسئله را به‌ترتیب روی نقطه‌ی A انجام می‌دهیم تا به نقطه‌ی C برسیم:

$$A = (۳ , ۴) \xrightarrow{T_۱} T_۱(۳ , ۴) = (-۴ , ۳) \xrightarrow[\vec{B} = (۲ , ۲) \text{ بردار}]{\text{انتقال تحت}} (-۴ + ۲ , ۳ + ۲) = (-۲ , ۵)$$

$$\xrightarrow{T_۲} T_۲(-۲ , ۵) = (۵ , ۲) = C$$

$$\text{فاصله‌ی A و C} = |AC| = \sqrt{(x_C - x_A)^۲ + (y_C - y_A)^۲} = \sqrt{۲^۲ + ۲^۲} = ۲\sqrt{۲}$$

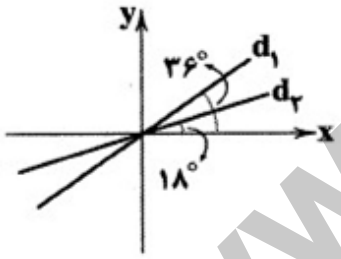
۱۲۴ گزینه ۴ پاسخ صحیح است. از دوران یک نیم‌دایره حول قطرش، یک کره‌ی کامل پدید می‌آید.

۱۲۵ گزینه ۱ پاسخ صحیح است. می‌دانیم $tg(\alpha) = Cotg(۹۰^\circ - \alpha)$

$d_۱ : y - Cotg(۵۴)x \Rightarrow d_۱ : y = tg(۳۶)x$

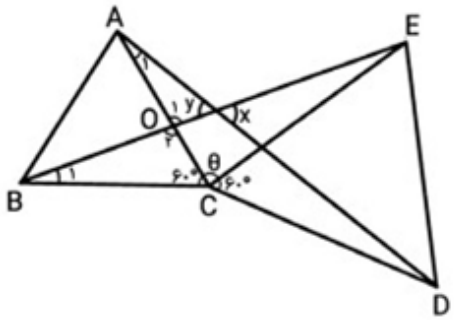
$d_۲ : y = Cotg(۷۲)x \Rightarrow d_۲ : y = tg(۱۸)x$

$\Rightarrow$



چون $d_۲$ نیمساز زاویه‌ی بین $d_۱$ و محور x هاست، در نتیجه بازتاب خط $d_۱$ نسبت به $d_۲$، محور x یا همان خط $y = ۰$ است.

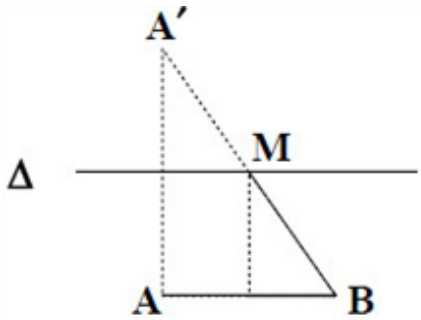
۱۲۶ گزینه ۲ پاسخ صحیح است.



$$\begin{cases} B\hat{C}E = A\hat{C}D = ۶۰^\circ + \theta \\ BC = AC \\ CE = CD \end{cases} \Rightarrow \overset{\triangle}{ACD} \text{ هم نهشت با } B\hat{C}E$$

$$\begin{matrix} \hat{A}_۱ = \hat{B}_۱ \\ \hat{O}_۱ = \hat{O}_۲ \end{matrix} \Rightarrow \hat{y} = ۶۰^\circ \Rightarrow \hat{x} = ۶۰^\circ$$

۱۲۷ گزینه ۲ پاسخ صحیح است.



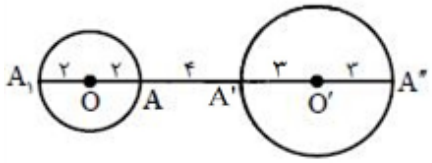
بازتاب A نسبت به خط Δ نقطه A' است.

$$MA + MB = BA' = \sqrt{۶۰^۲ + ۳۲^۲} = ۴\sqrt{۱۵^۲ + ۸^۲}$$

پس $MA + MB = ۶۸$ در نتیجه محیط مثلث MAB برابر است با:

$۶۸ + ۶۰ = ۱۲۸$

۱۲۸ گزینه ۲ پاسخ صحیح است. مطابق شکل داریم:

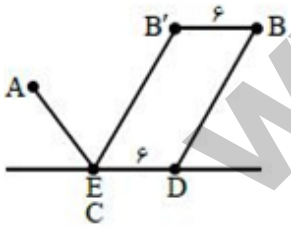


$$OO' = ۹ + ۲ + AA' + ۳ \Rightarrow AA' = ۴$$

بردار مورد نظر به دو صورت ممکن است:

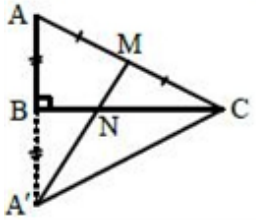
AA' بردار $= ۴$, $A_۱A''$ بردار $= ۱۴$

۱۲۹ گزینه ۱ پاسخ صحیح است. می‌دانیم برای این‌که طول مسیر ACDB کوتاه‌ترین مقدار ممکن باشد باید ابتدا نقطهٔ B را موازی با راستای رودخانه به اندازهٔ ۶ و به طرف A انتقال می‌دهیم تا نقطهٔ B' و با استفاده از مسئلهٔ هرون برای نقاط A و B'، نقطهٔ E را می‌یابیم و E همان نقطهٔ C مطلوب است و داریم:



$$\text{طول مسیر } ACDB = \text{طول مسیر } AEB' + ۶ = ۱۳ + ۶ = ۱۹$$

۱۳۰ گزینه ۲ پاسخ صحیح است. AM ثابت است، پس برای این‌که محیط مثلث NAM کم‌ترین مقدار شود باید NA + NM کم‌ترین مقدار شود و این همان مسئلهٔ هرون است و می‌دانیم برای این‌که AN + MN کم‌ترین مقدار شود باید ابتدا بازتاب A نسبت به خط BC را بیابیم و آن را A' بنامیم و از A' به M وصل کنیم. برخورد این خط و BC همان نقطهٔ مطلوب N است. در مثلث ACA'، A'M و CB میانه هستند و N نقطهٔ برخورد میانه‌ها است، پس:



$$\frac{CN}{BN} = ۲$$

۱۳۱ گزینه ۲ پاسخ صحیح است. مجانس شیب خط را حفظ می‌کند. پس کافی است مجانس یک نقطه دلخواه $A(۰ , ۲)$ از خط مفروض تعیین شود.

می‌دانیم $\overline{OA'} = -\frac{۳}{۲}\overline{OA}$ با تصویر بر محورها داریم:

$$x - ۲ = \frac{-۳}{۲}(۰ - ۲) \ , \ y - ۴ = \frac{-۳}{۲}(۲ - ۴) \Rightarrow A'(۵ , ۷)$$

معادله تصویر مجانس $y - ۷ = \frac{-۳}{۴}(x - ۵)$ که عرض از مبدأ آن ۱۰/۷۵ است.

۱۳۲ گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

۱۳۳ گزینه ۲ پاسخ صحیح است. همه موارد به جز مورد ب یکسان می‌باشند.

۱۳۴ گزینه ۴ پاسخ صحیح است. برای به دست آوردن مختصات نقطه M داریم:

$$M\left|\begin{array}{l}\frac{-۲ + ۱}{۲} = -\frac{۱}{۲}\\ \frac{۱ - ۳}{۲} = -۱\end{array}\right.$$

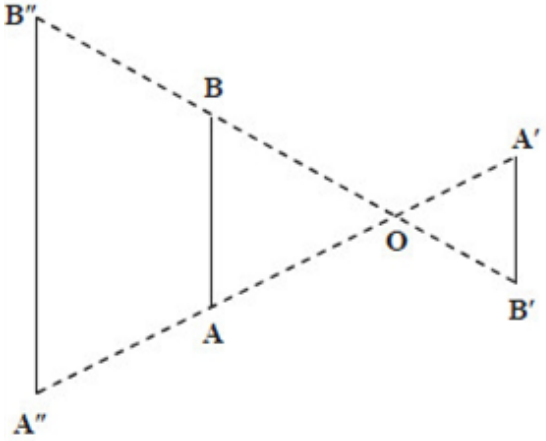
مختصات نقطه بازتاب $(۲ , ۱)$ برابر (x , y) است. در نتیجه داریم:

$$M\left|\begin{array}{l}\frac{x + ۲}{۲} = -\frac{۱}{۲}\\ \frac{y + ۱}{۲} = -۱\end{array}\right. \qquad x = y = -۳$$

۱۳۵ گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

تلفن تماس: ۰۲۶۳۳۴۰۸۹۴۴

۱۳۶ گزینه ۲ پاسخ صحیح است.



$$\frac{OB'}{OB} = \frac{۱}{۲}$$

$$\frac{OB''}{OB} = \frac{۲OB + OB'}{OB} = \frac{۵}{۲} = k$$

$$\frac{A''B''}{A'B'} = \frac{\frac{A''B''}{AB}}{\frac{A'B'}{AB}} = \frac{\frac{۵}{۲}}{\frac{۱}{۲}} = ۵$$

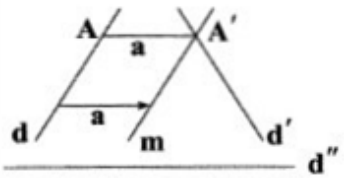
۱۳۷ گزینه ۱ پاسخ صحیح است. نقطه ثابت تبدیل نقطه برخورد خط با محور بازتاب است.

$$\begin{cases} y - ۲x = ۱ \\ ۲y + x = ۲ \end{cases} \quad \begin{cases} y - ۲x = ۱ \\ ۴y + ۲x = ۴ \end{cases} \quad \begin{matrix} y = ۱ \\ x = ۰ \end{matrix}$$

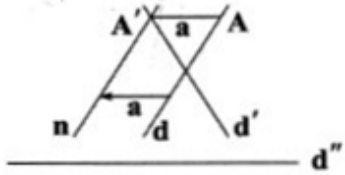
نقطه موردنظر $(۰ , ۱)$ می‌باشد.

۱۳۸ گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

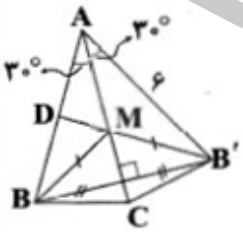
۱۳۹ گزینه ۲ پاسخ صحیح است. مطابق شکل سه خط دوبه‌دو ناموازی d ، d' و d'' مفروض‌اند. خط d را تحت انتقال با بردار به طول a و موازی d'' در جهت راست تصویر می‌کنیم. خط m به دست می‌آید. نقطه‌ی تلاقی خط d' و خط m را A' می‌نامیم. از A' خطی موازی d'' رسم می‌کنیم و نقطه‌ی تلاقی آن با خط d را A می‌نامیم. پاره‌خط AA' جواب است.



مساله دارای جواب دیگر نیز می‌باشد اگر خط d را تحت انتقال با بردار به طول a و موازی خط d'' در جهت چپ تصویر کنیم، خط n به دست می‌آید. نقطه‌ی تلاقی خط d' و خط n را A' می‌نامیم و از A' خطی موازی d'' رسم می‌کنیم و نقطه‌ی تلاقی آن با خط d را A می‌نامیم. پاره‌خط AA' جواب است.

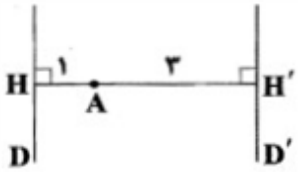


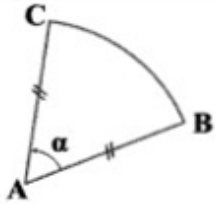
۱۴۰ گزینه ۳ پاسخ صحیح است. تصویر B را در بازتاب نسبت به محور AC ، B' می‌نامیم. نقطه‌ی تلاقی B'D و ساق AC را M می‌نامیم. کم‌ترین مقدار مطلوب برای NB + ND، مطابق شکل MD + MB است که این مقدار با طول پاره‌خط B'D برابر است. اما مثلث ABB' متساوی‌الاضلاع به ضلع ۶ است. پس B'D ارتفاع این مثلث می‌باشد و مقدار آن برابر است با:



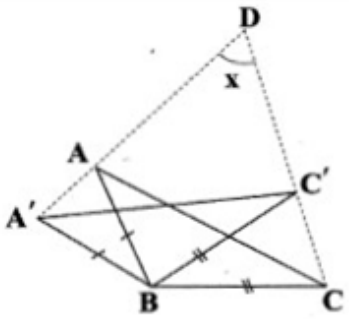
$$B'D = \frac{\sqrt{۳}}{۲}AB = \frac{\sqrt{۳}}{۲} \times ۶ = ۳\sqrt{۳}$$

۱۴۱ گزینه ۲ پاسخ صحیح است. نقطه‌ی A بین دو خط D و D' قرار دارد، پس می‌توانیم بگوییم D و D' تصویر هم در تجانس به مرکز A و نسبت ۳- یا $-\frac{۱}{۳}$ هستند.





۱۴۲ گزینه ۱ پاسخ صحیح است. تنها نقطه‌ای که در یک دوران، تصویرش خودش می‌باشد مرکز دوران است. پس نقطه‌ی A مرکز دوران داده شده می‌باشد و چون C تصویر B در این دوران است، پس بنا به تعریف $AB = AC$ است.



۱۴۳ گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

بنا به فرض $\widehat{ABC} = ۱۱۴^\circ$ و $\widehat{CBC'} = \widehat{ABA'} = ۳۴^\circ$. در مثلث‌های متساوی‌الساقین ABA' و BCC' نتیجه می‌شود:

$$\widehat{BA'A} = \frac{۱۸۰^\circ - ۳۴^\circ}{۲} = \frac{۱۴۶^\circ}{۲} = ۷۳^\circ \Rightarrow \widehat{DA'B} = ۷۳^\circ$$

$$\widehat{BCC'} = \frac{۱۸۰^\circ - ۳۴^\circ}{۲} = ۷۳^\circ \Rightarrow B\hat{C}D = ۷۳^\circ$$

و نهایتاً در چهارضلعی $BCDA'$ داریم:

$$x + \widehat{DA'B} + \widehat{A'BC} + \widehat{BCD} = ۳۶۰^\circ$$
$$x + ۷۳^\circ + ۳۴^\circ + ۱۱۴^\circ + ۷۳^\circ = ۳۶۰^\circ \Rightarrow x = ۶۶^\circ$$

۱۴۴ گزینه ۲ پاسخ صحیح است. تبدیل یافته‌ی نقطه‌ی دلخواه (x , y) تحت تجانسی به مرکز $(۱ , ۲)$ و ضریب $\frac{۳}{۲}$ به راحتی چنین است:

$$\begin{cases} x' - ۲ = \frac{۳}{۲}(x - ۲) \\ y' - ۱ = \frac{۳}{۲}(y - ۱) \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} x' = \frac{۳}{۲}x - ۱ \\ y' = \frac{۳}{۲}y - \frac{۱}{۲} \end{matrix}$$

از این دو معادله، x و y را محاسبه کرده در معادله خط جای‌گذاری می‌کنیم:

$$\begin{matrix} x = \frac{۲}{۳}(x' + ۱) \\ y = \frac{۲}{۳}\left(y' + \frac{۱}{۲}\right) \end{matrix} \xrightarrow{۲y + x = ۶} \frac{۴}{۳}\left(y' + \frac{۱}{۲}\right) + \frac{۲}{۳}(x' + ۱) = ۶$$

$$\Rightarrow \frac{۴}{۳}y' + \frac{۲}{۳}x' + \frac{۴}{۳} = ۶ \Rightarrow ۴y' + ۲x' + ۴ = ۱۸ \Rightarrow ۴y' + ۲x' = ۱۴ \Rightarrow ۲y' + x' = ۷$$

۱۴۵ گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

نکته: $y = -x$ نیمساز ربع دوم و چهارم است و می‌دانیم که ضابطه‌ی بازتاب نسبت به نیمساز ربع دوم و چهارم برابر است با:

$$A(x , y) \rightarrow A'(-y , -x)$$

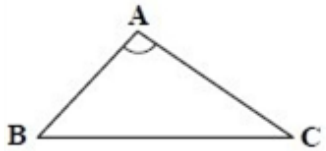
حالا دو نقطه از خط مورد نظر $(\Delta : ۲y + x = ۶)$ انتخاب می‌کنیم: $A(۶ , ۰) , B(۰ , ۳)$ بنابراین:

$$A'(۰ , -۶) \ , \ B'(-۳ , ۰)$$

لذا:

$$m_{\Delta'} = \frac{-۶ - ۰}{۰ - (-۳)} = -۲ \rightarrow \Delta' : (y - ۰) = -۲(x - (-۳)) \rightarrow \Delta' : y + ۲x = -۶$$

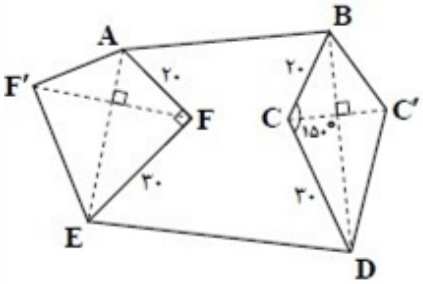
۱۴۶ گزینه ۳ پاسخ صحیح است. نکته (مسائل هم‌پیرامونی یا هم‌محیطی): به کمک بازتاب می‌توانیم با ثابت نگه داشتن محیط و تعداد اضلاع شکل، مساحت آن را افزایش دهیم. برای این کار کافی است اگر دو ضلع XY و YZ باعث تقعر چندضلعی می‌شوند، آن‌ها را نسبت به XZ بازتاب (قرینه) کنیم.



$$S = \frac{۱}{۲} AB \times AC \times \sin \widehat{A}$$

ابتدا با بازتاب نسبت محورهای AE و BD مطابق شکل، بدون آنکه محیط و تعداد اضلاع شکل تغییر کند مساحت آن را افزایش می‌دهیم.

بازتاب ایزومتری است، پس:



$$\begin{cases} S_{AFEF'} = ۲S_{AEF} = ۲ \times \frac{۱}{۲} \times ۲۰ \times ۳۰ \times \sin ۹۰° = ۶۰۰ \\ S_{BC'DC} = ۲S_{BCD} = ۲ \times \frac{۱}{۲} \times ۲۰ \times ۳۰ \times \sin ۱۵۰° = ۳۰۰ \end{cases}$$

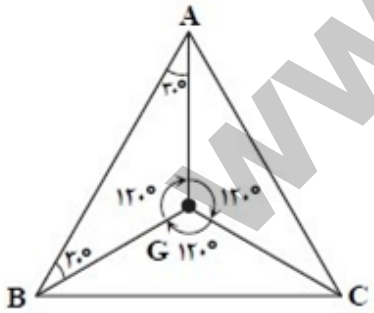
بنابراین میزان افزایش مساحت برابر است با: $S = ۶۰۰ + ۳۰۰ = ۹۰۰$

۱۴۷ گزینه ۲ پاسخ صحیح است. نکته: دوران به مرکز نقطهٔ ثابت O و زاویهٔ α، تبدیلی از صفحه است که در آن اگر A' تصویر نقطهٔ A باشد داریم:

$$OA = OA' \quad , \quad \widehat{AOA'} = \alpha$$

نکته: در مثلث متساوی‌الاضلاع، نیمساز، ارتفاع، عمودمنصف و میانهٔ نظیر یک ضلع، بر هم منطبق‌اند.

در مثلث متساوی‌الاضلاع، نقطهٔ برخورد میانه‌ها همان نقطهٔ برخورد نیمسازهاست. پس:



$$\widehat{GAB} = \widehat{GBA} = \frac{۶۰°}{۲} = ۳۰°$$

بنابراین $\widehat{AGB} = ۱۸۰° - ۳۰° - ۳۰° = ۱۲۰°$، به‌طور مشابه نتیجه می‌شود:

$$\widehat{AGC} = \widehat{BGC} = ۱۲۰°$$

با توجه به شکل، در دوران به مرکز G و زاویهٔ ۱۲۰°، هر رأس مثلث، دوران یافتهٔ رأس دیگر است. پس با دوران ۱۲۰° به مرکز G، مثلث ABC بر خودش منطبق می‌شود.

بنابراین گزینهٔ ۲ پاسخ است.

۱۴۸ گزینه ۴ پاسخ صحیح است. A را تحت انتقال با $\vec{v}$ (برداری موازی خط d ، به طول ۶ و در جهت B) تصویر می‌کنیم، نقطه‌ی A' به دست می‌آید. قرینه‌ی A' را نسبت به خط d ، A" می‌نامیم و نقطه‌ی تلاقی خط d و پاره‌خط A"B را D می‌نامیم. سپس CD را برابر ۶ روی خط d جدا می‌کنیم، نقطه‌ی C به دست می‌آید. مسیر ACDB کوتاه‌ترین است و طول آن به شرح زیر به دست می‌آید:

$AC + CD + BD = A'D + CD + BD = A''D + BD + CD = A''B + CD$

و $EF = ۱۴$ (فرض)

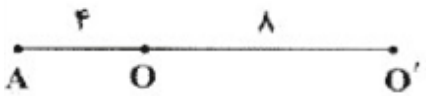
$A''B^۲ = A''K^۲ + BK^۲ = HF^۲ + (BF + FK)^۲ = (EF - EH)^۲ + (EF + FK)^۲$

$= (۱۴ - ۶)^۲ + (۱۰ + ۵)^۲ \Rightarrow A''B^۲ = ۸^۲ + ۱۵^۲ = ۲۸۹ \Rightarrow A''B = ۱۷$

$\Rightarrow$ طول مسیر ACDB : $AC + CD + BD = A''B + CD = ۱۷ + ۶ = ۲۳$

۱۴۹ گزینه ۳ پاسخ صحیح است. بازتاب نسبت به یک نقطه یک تبدیل ایزومتری است که شیب خط را حفظ می‌کند و هر تبدیل ایزومتری اندازه‌ی زاویه را حفظ می‌کند، اما بازتاب نسبت به یک نقطه لزوماً جهت شکل را حفظ نمی‌کند.

۱۵۰ گزینه ۲ پاسخ صحیح است. مطابق شکل، O' تصویر O در تجانس به مرکز A و نسبت تجانس $k = ۳$ است، بنابراین $O'A = ۳OA = ۳ \times ۴ = ۱۲$. پس طول خط المرکزین دو دایره برابر $OO' = ۸$ می‌باشد. از طرفی شعاع دایره‌ی (C') برابر $R' = ۳R = ۳ \times ۳ = ۹$ است. در نتیجه داریم:



$$\underbrace{R' - R}_{۹ - ۳ = ۶} < \underbrace{OO'}_{۸} < \underbrace{R' + R}_{۹ + ۳ = ۱۲}$$

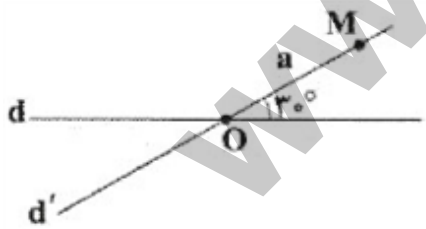
بنابراین دو دایره‌ی (C) و (C') متقاطع‌اند.

۱۵۱ گزینه ۳ پاسخ صحیح است. می‌دانیم که در تجانس، نسبت مساحت تصویر به مساحت شکل اولیه، برابر با توان دوم نسبت تجانس است. پس با فرض این‌که A'B'C' تصویر ABC باشند، داریم:

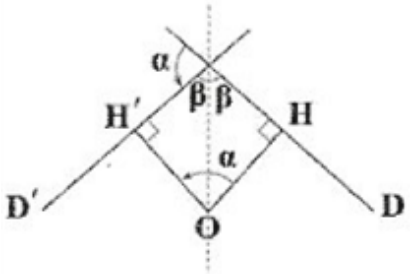
$$\frac{S(A'B'C)}{S(ABC)} = k^۲ \Rightarrow \frac{۵۰}{۱۲۸} = k^۲ \Rightarrow k^۲ = \frac{۲۵}{۶۴} \Rightarrow k = \pm\frac{۵}{۸}$$

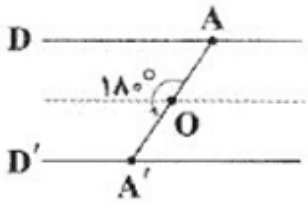
اندازه‌ی تصویر پاره‌خط در تجانس $= |k| \times$ طول پاره خط $= \frac{۵}{۸} \times ۱۲ = \frac{۱۵}{۲} = ۷/۵$

۱۵۲ گزینه ۱ پاسخ صحیح است. ترکیب دو بازتاب با محورهای متقاطع، همواره یک دوران به مرکز O و زاویه‌ی $۲\alpha = ۲ \times ۳۰^\circ = ۶۰^\circ$ است. پس حاصل $S_{d'} o S_d(M)$ نقطه‌ی M' است که از دوران M حول O و با زاویه‌ی ۶۰° به دست می‌آید. چون دوران ایزومتری است، پس فاصله‌ی M' از O همان a است.

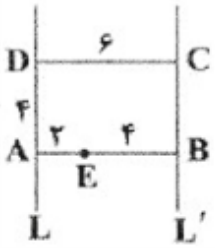


۱۵۳ گزینه ۳ پاسخ صحیح است. اگر دو خط متقاطع باشند، هر نقطه روی نیم‌ساز زاویه‌ی بین دو خط مانند O ، مرکز دورانی است که در آن D' تصویر خط D است و اگر دو خط D و D' موازی باشند، آن‌گاه D' در بی‌شمار دوران به زاویه‌ی °۱۸۰ تصویر خط D است و مرکز این دوران‌ها روی خطی موازی و متساوی‌الفاصله از خطوط D و D' قرار دارند.

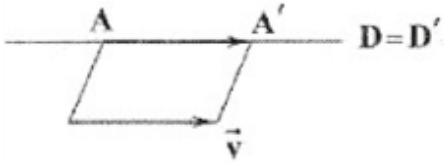




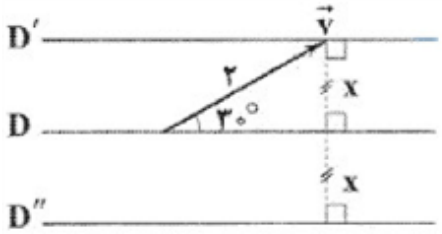
۱۵۴ گزینه ۳ پاسخ صحیح است. می‌دانیم ترکیب دو بازتاب با محورهای موازی یک انتقال است که طول بردار آن دو برابر فاصله‌ی دو محور است. اگر E را در بازتاب به محور L تصویر کنیم و نقطه‌ی حاصل را در بازتاب به محور L' تصویر کنیم، نقطه‌ی E' به دست می‌آید، پس فاصله‌ی E و E' دو برابر فاصله‌ی دو خط L و L' یعنی ۱۲ است.



۱۵۵ گزینه ۲ پاسخ صحیح است. در انتقال یک خط اگر بردار انتقال موازی خط مفروض باشد، آن‌گاه تصویر خط بر خودش منطبق است.



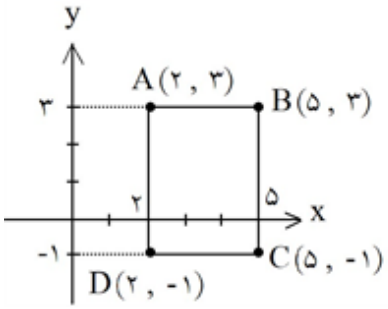
۱۵۶ گزینه ۲ پاسخ صحیح است. مطابق شکل، خط D' تصویر خط D تحت انتقال با بردار $\vec{v}$ می‌باشد و D'' تصویر D' تحت بازتاب نسبت به محور D است. برای محاسبه‌ی فاصله‌ی D' و D'' کافی است x را در مثلث قائم‌الزاویه روی شکل بیابیم.



چون ضلع روبه‌رو به زاویه‌ی °۳۰ نصف وتر است، پس $x = \frac{۲}{۲} = ۱$ و در نتیجه $۲x = ۲$ است.

۱۵۷ گزینه ۴ پاسخ صحیح است. تبدیل همانی تبدیلی است که تصویر هر نقطه از صفحه مانند نقطه‌ی A ، خود نقطه‌ی A باشد، پس بازتاب هیچ‌گاه نمی‌تواند یک تبدیل همانی باشد.
در حالت کلی، تجانس و دوران نیز یک تبدیل همانی نیستند. اما دوران تحت زاویه‌ی ۳۶۰ درجه با هر مرکزی، تبدیلی است که هر نقطه از صفحه را به خود نقطه تصویر می‌کند.

۱۵۸ گزینه ۴ پاسخ صحیح است. چون دوران یک تبدیل ایزومتری است، لذا مساحت تصویر تحت دوران تغییر نمی‌کند. اما در تجانس با نسبت تجانس k، مساحت تصویر به مساحت شکل برابر $k^۲$ است.
با رسم چهارضلعی ABCD مطابق شکل، مشاهده می‌شود که چهارضلعی ABCD یک مستطیل به طول ۴ و عرض ۳ است بنابراین:



$$S_{ABCD} = ۳ \times ۴ = ۱۲$$

$$\Rightarrow \frac{S_{A'B'C'D'}}{S_{ABCD}} = \frac{S_{A'B'C'D'}}{۱۲} = k^۲ = \left(\frac{۳}{۴}\right)^۲ = \frac{۹}{۱۶}$$

$$\Rightarrow S_{A'B'C'D'} = ۱۲ \times \frac{۹}{۱۶} = \frac{۲۷}{۴}$$

۱۵۹ گزینه ۲ پاسخ صحیح است. به طور کلی در تبدیل تجانس، نسبت مساحت تصویر به مساحت شکل، برابر مربع نسبت تجانس است، بنابراین داریم:

$$\frac{S'}{S} = k^۲ \Rightarrow \frac{S'}{S} = \frac{\pi R^۲}{\pi r^۲} = \left(\frac{R}{r}\right)^۲ = \left(\frac{\frac{\sqrt{۳}}{۲}\cancel{r}}{\cancel{r}}\right) = \frac{۳}{۴} \Rightarrow k^۲ = \frac{۳}{۴} \Rightarrow k = \pm\frac{\sqrt{۳}}{۲}$$

که با توجه به گزینه‌ها $k = \frac{\sqrt{۳}}{۲}$ صحیح است.

۱۶۰ گزینه ۳ پاسخ صحیح است. با توجه به تعریف دوران، مرکز دوران از دو نقطه‌ی A و A' به یک فاصله است، بنابراین روی عمودمنصف پاره‌خط AA' قرار دارد. داریم:

$$m_{AA'} = \frac{y_A - y_{A'}}{x_A - x_{A'}} = \frac{-۱ - ۲}{۲ - (-۴)} = \frac{-۳}{۶} = -\frac{۱}{۲}$$

بنابراین شیب خط عمودمنصف برابر ۲ است. از طرفی نقطه‌ی وسط پاره‌خط AA' در معادله‌ی عمودمنصف صدق می‌کند:

$$M = \frac{A + A'}{۲} = \left(\frac{۲ + (-۴)}{۲}, \frac{-۱ + ۲}{۲}\right) = \left(-۱ , \frac{۱}{۲}\right) \Rightarrow \text{معادله عمودمنصف}: y - \frac{۱}{۲} = ۲(x - (-۱))$$

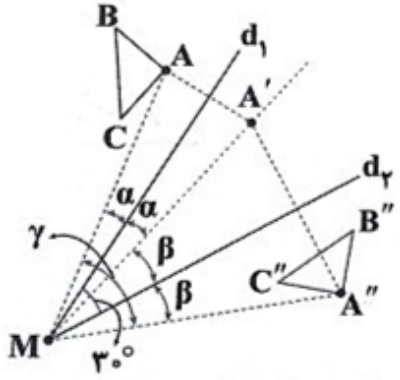
$$\Rightarrow y = ۲x + \frac{۵}{۲}$$

با توجه به گزینه‌ها تنها نقطه‌ی $\left(-۲ , \frac{-۳}{۲}\right)$ در معادله‌ی فوق صدق می‌کند.

۱۶۱ گزینه ۱ پاسخ صحیح است. دوران تبدیلی است که موقعیت شکل را تغییر می‌دهد، بنابراین گزینه‌ی اول از ویژگی‌های دوران نیست. دوران یک تبدیل ایزومتری است که شیب خط را حفظ نمی‌کند و همچنین هر تبدیل ایزومتری اندازه‌ی زاویه‌ها را حفظ می‌کند، بنابراین گزینه‌های ۲، ۳ و ۴ از ویژگی‌های دوران هستند.

تلفن تماس: ۰۲۶۳۳۴۰۸۹۴۴

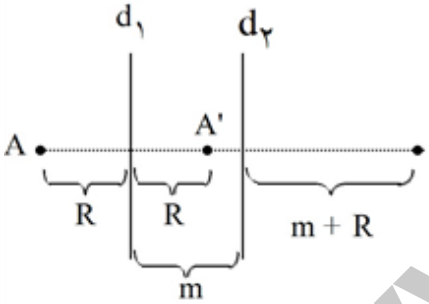
۱۶۲ گزینه ۲ پاسخ صحیح است. با توجه به شکل زیر، رأس "A در مثلث "A"B"C ، دوران‌یافته‌ی رأس A در مثلث ABC ، به مرکز M و زاویه‌ی γ است و روابط زیر نیز برقرار هستند:



$\alpha + \beta = ۳۰^\circ$

$\gamma = ۲\alpha + ۲\beta = ۲(\alpha + \beta) = ۲ \times ۳۰^\circ = ۶۰^\circ \Rightarrow \gamma = ۶۰^\circ$

۱۶۳ گزینه ۱ پاسخ صحیح است. با توجه به اطلاعات مسئله می‌توان شکل زیر را رسم کرد.
با توجه به شکل و ویژگی‌های بازتاب به وضوح روابط زیر برقرار هستند:



$AA' = ۲R$

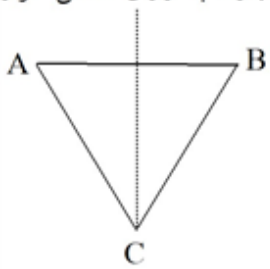
$A"AA" = ۲(m + R) = ۲m + ۲R$

$A'A" = AA" - AA' = ۲m + ۲R - ۲R = ۲m \Rightarrow A'A" = ۲M$

۱۶۴ گزینه ۴ پاسخ صحیح است. در حالت کلی بازتاب تحت یک خط شیب خط را حفظ نمی‌کند، بنابراین گزینه‌ی ۴ صحیح نیست و پاسخ سؤال است.

۱۶۵ گزینه ۲ پاسخ صحیح است. از $T(C) = C$ نتیجه می‌شود که رأس C نقطه‌ی ثابت تبدیل است، بنابراین این تبدیل یک انتقال نیست. از طرفی چون تبدیل‌یافته‌ی راس A ، رأس B است و برعکس، بنابراین این تبدیل یک دوران نیز نمی‌تواند باشد.

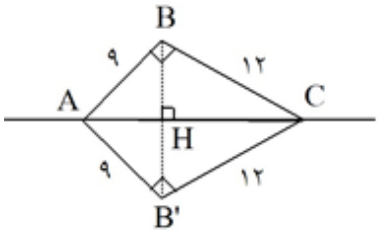
در تبدیل بازتاب تحت یک نقطه هم، زمانی تبدیل دارای نقطه‌ی ثابت خواهد بود که نقطه‌ی بازتاب روی شکل قرار گیرد و نقطه‌ی ثابت همان نقطه‌ی بازتاب خواهد بود. حال اگر رأس C نقطه‌ی بازتاب باشد، تبدیل‌یافته‌ی رأس A تحت این نقطه رأس B نخواهد شد، بنابراین این تبدیل بازتاب تحت یک نقطه نیست.



با توجه به شکل مقابل، این تبدیل یک بازتاب تحت خط عمودمنصف ضلع AB مثلث است و چون مثلث متساوی‌الاضلاع است، عمود منصف هر ضلع از رأس مقابل آن عبور می‌کند، بنابراین رأس C نقطه‌ی ثابت این تبدیل است.

۱۶۶ گزینه ۴ پاسخ صحیح است. بازتاب تحت یک نقطه شیب خط را حفظ می‌کند، بنابراین با توجه به این‌که خطوط با شیب یکسان، زوایای یکسانی نسبت به محورها دارند، نتیجه می‌گیریم که بازتاب تحت یک نقطه، زاویه‌ی خطوط نسبت به محورها را حفظ می‌کند.

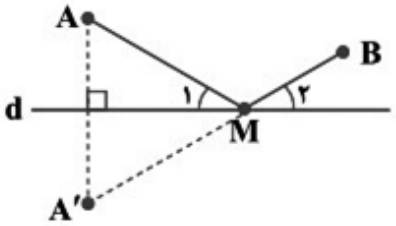
۱۶۷ گزینه ۴ پاسخ صحیح است. مطابق شکل، تصویر مثلث قائم‌الزوایه‌ی ABC تحت بازتاب نسبت به خط شامل AC، مثلث قائم‌الزاویه‌ی AB'C است. فاصله‌ی دورترین رأس‌های آن‌ها طول پاره‌خط BB' است که دو برابر ارتفاع وارد بر وتر مثلث ABC می‌باشد و به شرح زیر به دست می‌آید:



$$S_{\overset{\Delta}{ABC}} = \frac{۱}{۲}BH + AC = \frac{۱}{۲}AB \times BC \Rightarrow BH \times \sqrt{۹^۲ + ۱۲^۲}$$

$$= ۹ \times ۱۲ \Rightarrow BH = \frac{۹ \times ۱۲}{۱۵} = \frac{۳۶}{۵} = ۷/۲ \Rightarrow BB' = ۲BH = ۱۴/۴$$

۱۶۸ گزینه ۴ پاسخ صحیح است.



نکته (مسئلهٔ هرون برای پیدا کردن کوتاه‌ترین مسیر): در شکل روبه‌رو برای به‌دست آوردن محل نقطهٔ M روی خط d به‌طوری که AM + MB کمترین مقدار ممکن باشد، ابتدا بازتاب A را نسبت به خط d به‌دست می‌آوریم و آن را A' می‌نامیم. خط فرضی A'B، خط d را در یک نقطه قطع می‌کند. این نقطه، همان نقطهٔ M موردنظر است. در این‌صورت، زاویه‌های $\widehat{M}_۱$ و $\widehat{M}_۲$ با یکدیگر برابرند.

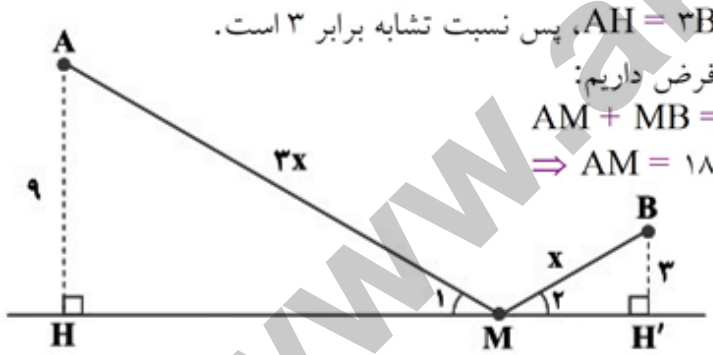
نکته: در مثلث قائم‌الزاویه، ضلع روبه‌رو به زاویهٔ ۳۰° نصف وتر است.

با توجه به مسئلهٔ هرون می‌دانیم $\widehat{M}_۱ = \widehat{M}_۲$. از طرفی $\widehat{H} = \widehat{H'} = ۹۰°$، پس دو مثلث AMH و BMH' بنا به حالت تساوی دو زاویه با یکدیگر متشابه‌اند. چون AH = ۳BH'، پس نسبت تشابه برابر ۳ است.

اگر فرض کنیم BM = x، آن‌گاه AM = ۳x. طبق فرض داریم:

$$AM + MB = ۲۴ \Rightarrow x + ۳x = ۲۴ \Rightarrow ۴x = ۲۴ \Rightarrow x = ۶$$

$$\Rightarrow AM = ۱۸ \text{ و } BM = ۶$$



بنابراین در مثلث قائم‌الزاویه AMH، اندازهٔ ضلع AH نصف اندازهٔ وتر AM است، پس:

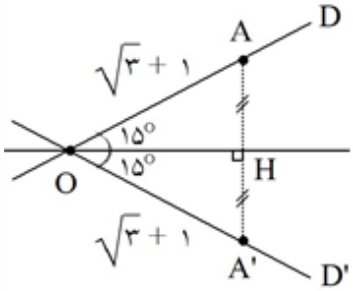
$$\widehat{M}_۱ = ۳۰°$$

در نتیجه:

$$M\widehat{A}H = ۱۸۰° - \widehat{H} - \widehat{M}_۱ = ۶۰°$$

تلفن تماس: ۰۲۶۳۳۴۰۸۹۴۴

۱۶۹ گزینه ۳ پاسخ صحیح است. می‌دانیم $\sin ۱۵^\circ = \frac{\sqrt{۶}-\sqrt{۲}}{۴}$ است. پس در مثلث قائم‌الزاویه AOH داریم:

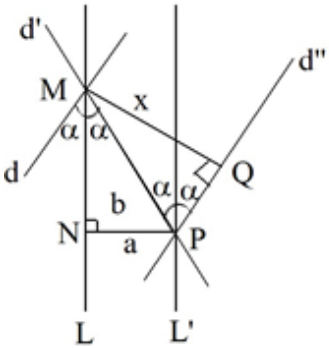


$$\sin ۱۵^\circ = \frac{AH}{OA} \Rightarrow \frac{\sqrt{۶}-\sqrt{۲}}{۴} = \frac{AH}{\sqrt{۳}+۱}$$

$$\Rightarrow AH = \frac{\sqrt{۲}(\sqrt{۳}-۱)(\sqrt{۳}+۱)}{۴} = \frac{۲\sqrt{۲}}{۴} = \frac{\sqrt{۲}}{۲}$$

$$\Rightarrow AA' = ۲AH = \sqrt{۲}$$

۱۷۰ گزینه ۳ پاسخ صحیح است. مسئله را به طور کلی حل کرده، سپس $a = ۶\sqrt{۳}$ و $\alpha = ۳۰^\circ$ را جایگزین می‌کنیم. در مثلث‌های قائم‌الزاویه MNP و MPQ داریم:



$$\left.\begin{array}{l} \sin\alpha = \frac{NP}{MP} \Rightarrow a = b\sin\alpha \\ \sin ۲\alpha = \frac{MQ}{MP} \Rightarrow x = b\sin ۲\alpha \end{array}\right\}$$

$$\xrightarrow{\text{تقسیم}} \frac{x}{a} = \frac{\sin ۲a}{\sin\alpha} \Rightarrow x = a \times \frac{۲\sin\alpha\cos\alpha}{\sin\alpha}$$

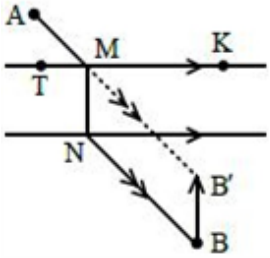
$$\Rightarrow x = ۲a\cos\alpha = ۲\times ۶\sqrt{۳}\times\cos ۳۰^\circ = ۱۲\sqrt{۳}\times\frac{\sqrt{۳}}{۲} = ۶\times ۳ = ۱۸$$

۱۷۱ گزینه ۴ پاسخ صحیح است. به کمک اتحاد مثلثاتی $tg ۲\alpha = \frac{۲tg\alpha}{۱-tg^۲\alpha}$ داریم:

$$tg ۲\alpha = \frac{۲tg\alpha}{۱-tg^۲\alpha} \xrightarrow{tg\alpha = \frac{۲}{۳}} tg ۲\alpha = \frac{۲\times\frac{۲}{۳}}{۱-\frac{۴}{۹}} = \frac{۴\times ۳}{۹-۴} = \frac{۱۲}{۵} = ۲/۴$$

تلفن تماس: ۰۲۶۳۳۴۰۸۹۴۴

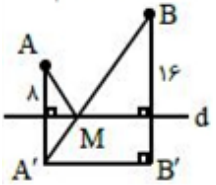
۱۷۲ گزینه ۱ پاسخ صحیح است. می‌دانیم برای این‌که مسیر AMNB کوتاه‌ترین مسیر ممکن باشد، باید ابتدا نقطهٔ B را با بردار $\overrightarrow{MN}$ انتقال دهیم تا B' به‌دست آید و سپس از A به B' وصل کنیم تا M به‌دست آید، در نتیجه N نیز مشخص می‌شود و مسیر به‌دست می‌آید. حال با استفاده از خواص انتقال داریم: $NB \parallel MB'$، در نتیجه:



$$A\hat{M}N = B\hat{N}M \Rightarrow A\hat{M}N = \frac{۲۵۰^\circ}{۲} = ۱۲۵^\circ$$

$$\Rightarrow A\hat{M}T = ۱۲۵^\circ - ۹۰^\circ = ۳۵^\circ \Rightarrow A\hat{M}K = ۱۴۵^\circ$$

۱۷۳ گزینه ۳ پاسخ صحیح است. می‌دانیم برای پیدا کردن M باید ابتدا بازتاب A را نسبت به خط d پیدا کنیم و آن را A' بنامیم و از A' به B وصل کنیم. برخورد این خط با d همان نقطهٔ M است. حال با توجه به قضیهٔ فیثاغورس داریم:



$$A'B^۲ = A'B'^۲ + BB'^۲$$

$$= ۱۰^۲ + (۸ + ۱۶)^۲ = ۱۰^۲ + ۲۴^۲ = ۲^۲(۵^۲ + ۱۲^۲) = ۲^۲ \times ۱۳^۲$$

$$\Rightarrow A'B = ۲۶ \Rightarrow MA + MB = ۲۶$$

۱۷۴ گزینه ۳ پاسخ صحیح است. تبدیل T را تبدیل همانی گوییم، هرگاه به ازای هر نقطهٔ A از صفحهٔ P داشته باشیم، $T(A) = A$ یعنی در تبدیل همانی هر نقطهٔ صفحه را به خود آن نقطه نظیر می‌کنیم، در نتیجه هر تبدیلی همانی طولپاست. (جملهٔ اول درست است.)

بازتاب یک خط نسبت به خودش همانی است.

تجانس با نسبت $K = ۱$ تبدیل همانی است. (جملهٔ سوم نادرست است.)

یعنی دو مورد درست هستند.

۱۷۵ گزینه ۱ پاسخ صحیح است. تجانس شیب خط را حفظ می‌کند.

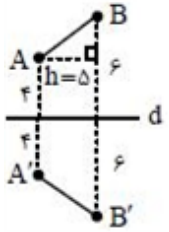
۱۷۶ گزینه ۴ پاسخ صحیح است. مجانس مربع تحت تجانس با نسبت k مربعی متشابه با آن است و نسبت تشابه آن‌ها برابر $|k|$ است، بنابراین نسبت مساحت‌های آن‌ها برابر $k^۲$ است. به عبارت دیگر مساحت تصویر مربع تحت تجانس با نسبت k مساوی $k^۲$ برابر مساحت مربع اولیه است، بنابراین:

$$\text{مساحت تصویر مربع} = k^۲(\text{مساحت مربع اولیه}) = \left(-\frac{۱}{۳}\right)^۲ \times ۴^۲ = \frac{۱۶}{۹}$$

۱۷۷ گزینه ۳ پاسخ صحیح است. می‌دانیم دوران یک تبدیل طولپاست، بنابراین در اثر دوران مساحت مثلث تغییری نمی‌کند، پس:

$$S = \frac{\sqrt{۳}}{۴}a^۲ = \frac{\sqrt{۳}}{۴}(۴)^۲ = ۴\sqrt{۳}$$

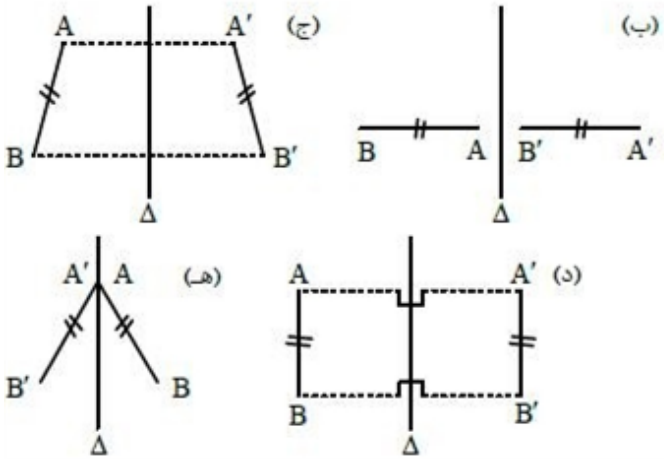
۱۷۸ گزینه ۳ پاسخ صحیح است. مطابق شکل اگر 'A و 'B قرینهٔ نقاط A و B باشد، از بازتاب این نقاط یک ذوزنقهٔ متساوی‌الساقین به‌وجود می‌آید که مساحت آن برابر است با:



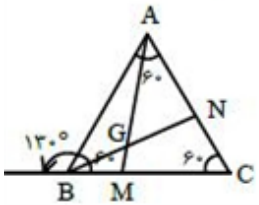
$$S = \frac{h(AA' + BB')}{۲} = \frac{۵(۱۲ + ۸)}{۲} = \frac{۵ \times ۲۰}{۲} = ۵۰$$

۱۷۹ گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

۱۸۰ گزینه ۴ پاسخ صحیح است.



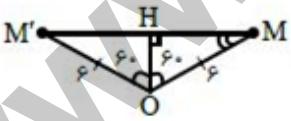
۱۸۱ گزینه ۳ پاسخ صحیح است. اگر مرکز دوران در شکل اول باشد، حتماً در شکل دوران‌یافته نیز حضور دارد.



۱۸۲ گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$OM = OM' = ۶$

$M'\hat{O}M = ۱۲۰$

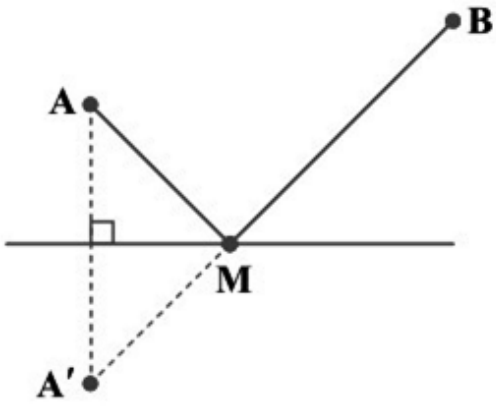


چون مثلث متساوی‌الساقین می‌باشد، پس ارتفاع نیمساز نیز می‌باشد:

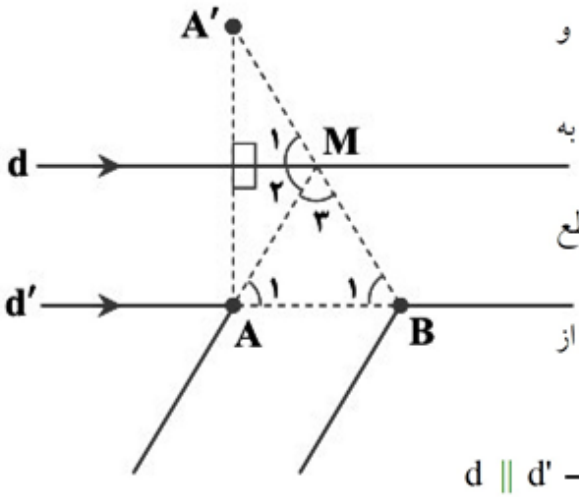
$$\hat{M} = ۳۰ \Rightarrow OH = \frac{۱}{۲}OM = ۳$$

۱۸۳ گزینه ۲ پاسخ صحیح است. مرکز بازتاب روی محور بازتاب قرار دارد و محور بازتاب، نیمساز زاویه‌ای که از خط و تصویر به‌دست می‌آید، می‌باشد، پس روی نیمساز زاویهٔ A قرار دارد، بنابراین مرکز دایرهٔ محاطی داخلی می‌باشد.

تلفن تماس: ۰۲۶۳۳۴۰۸۹۴۴



۱۸۴ گزینه ۳ پاسخ صحیح است. نکته (مسئلهٔ هرون برای پیدا کردن کوتاه‌ترین مسیر): در شکل روبه‌رو برای به‌دست آوردن محل نقطهٔ M روی خط d به‌طوری که AM + MB کمترین مقدار ممکن باشد، ابتدا بازتاب A نسبت به خط d را به‌دست می‌آوریم و آن را A' می‌نامیم. خط فرضی A'B، خط d را در یک نقطه قطع می‌کند. این نقطه همان نقطهٔ M موردنظر است.



نکته: اگر بازتاب نقطهٔ A نسبت به خط d نقطهٔ A' باشد و $A \neq A'$، آنگاه d عمودمنصف AA' است.

مطابق شکل ابتدا طبق مسئلهٔ هرون، بازتاب نقطهٔ A را نسبت به سطح بالایی رودخانه پیدا می‌کنیم و A' می‌نامیم. سپس از A' به B وصل می‌کنیم تا سطح بالایی رودخانه را در M قطع کند. نقطهٔ M همان نقطهٔ موردنظر است.

چون A' بازتاب A نسبت به d است، پس: $\widehat{M}_1 = \widehat{M}_2$ از طرفی با استفادهٔ از قضیهٔ خطوط موازی داریم:

$$d \parallel d' \xrightarrow{\text{مورب } AM} \widehat{M}_2 = \widehat{A}_1 \qquad \widehat{M}_1 = \widehat{M}_2 \longrightarrow \widehat{A}_1 = \widehat{B}_1$$

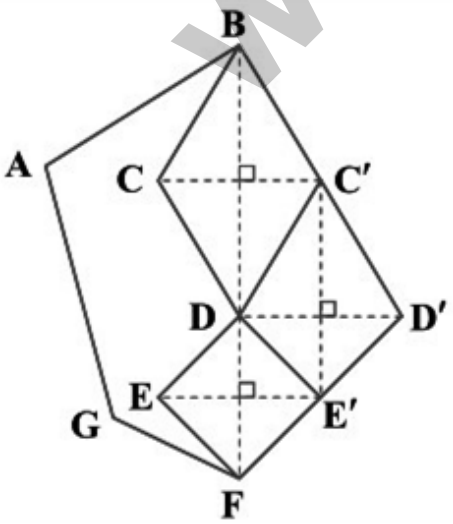
$$d \parallel d' \xrightarrow{\text{مورب } BM} \widehat{M}_1 = \widehat{B}_1$$

بنابراین مثلث MAB در رأس M متساوی‌الساقین است.

دقت کنید برای اینکه $\overset{\triangle}{MAB}$ متساوی‌الاضلاع باشد باید داشته باشیم $\widehat{M}_3 = 60^\circ$، ولی الزاماً این‌طور نیست.

همچنین برای اینکه $\overset{\triangle}{MAB}$ قائم‌الزاویه باشد $\widehat{M}_3 = 90^\circ$، ولی الزاماً این طور نیست.

بنابراین فقط می‌توان نتیجه گرفت $\overset{\triangle}{MAB}$ متساوی‌الساقین است.



۱۸۵ گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

نکته (مسائل هم‌پیرامونی یا هم‌محیطی): به‌کمک بازتاب می‌توانیم با ثابت نگاه داشتن محیط و تعداد اضلاع شکل، مساحت شکل را افزایش دهیم. برای این کار کافی است اگر دو ضلع مانند XY و YZ باعث تقعر چندضلعی می‌شوند، نسبت به خط XZ بازتاب (قرینه) شوند.

مطابق شکل، تحت بازتاب نسبت به خطوط BD، DF و C'E'، هفت‌ضلعی ABCDEFG به هفت‌ضلعی ABC'D'E'FG تبدیل می‌شود که محیط و تعداد ضلع‌های آن برابر ABCDEFG است، ولی مساحت آن افزایش یافته است. بنابراین به ۳ بازتاب نیاز داریم.

۱۸۶ گزینه ۲ پاسخ صحیح است. نکته: در تجانس به مرکز O و نسبت k، نقطهٔ M' را مجانس نقطهٔ M گوییم هرگاه:

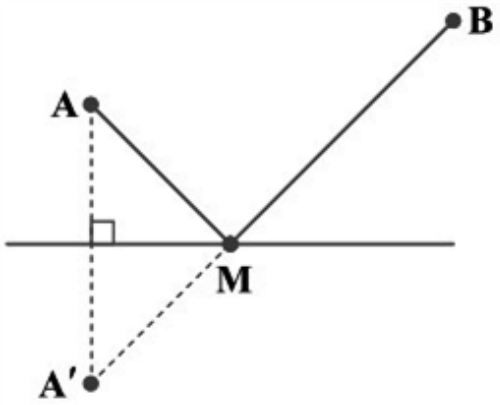
۱) سه نقطهٔ M، O و M' روی یک خط راست باشند. ۲) $OM' = |k| . OM$

۳) اگر $k > ۰$، آنگاه M و M' در یک طرف O قرار دارند.
اگر $k < ۰$، آنگاه M و M' در طرفین O قرار دارند.

با توجه به نکتهٔ بالا داریم:

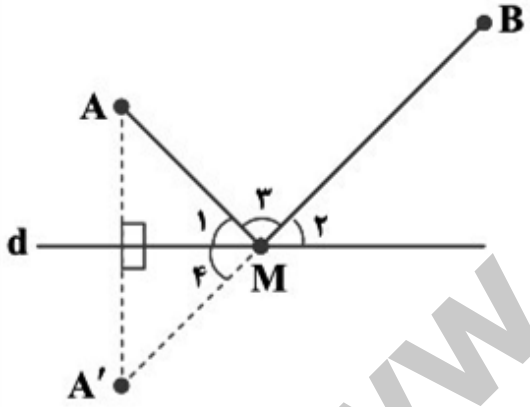
$$OM' = \frac{۵}{۳} OM \Rightarrow OM' = \frac{۵}{۳} \times ۱۲ = ۲۰ \Rightarrow MM' = OM' - OM = ۲۰ - ۱۲ = ۸$$

۱۸۷ گزینه ۴ پاسخ صحیح است.



نکته (مسئلهٔ هرون برای پیدا کردن کوتاه‌ترین مسیر): در شکل روبه‌رو برای به‌دست آوردن محل نقطهٔ M روی خط d به‌طوری که $AM + MB$ کمترین مقدار ممکن باشد، ابتدا بازتاب A نسبت به خط d را به‌دست می‌آوریم و آن را A' می‌نامیم. خط فرضی A'B، خط d را در یک نقطه قطع می‌کند. این نقطه همان نقطهٔ M موردنظر است.

نکته: اگر بازتاب نقطهٔ A نسبت به خط d نقطهٔ A' باشد و $A \neq A'$، آنگاه d عمود منصف AA' است.



با توجه به نکات بالا، در شکل مقابل چون A' بازتاب A نسبت به d است داریم:

$$(*) \ \widehat{M_۱} = \widehat{M_۴}$$

از طرفی $\widehat{M_۲}$ و $\widehat{M_۴}$ متقابل به رأس‌اند، پس:

$$(**) \ \widehat{M_۲} = \widehat{M_۴}$$

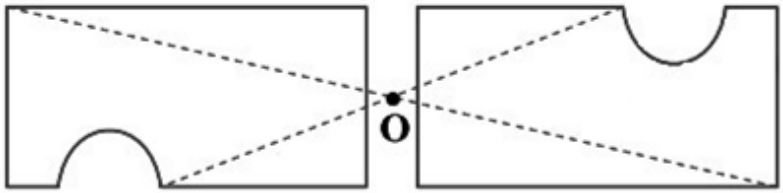
از (*) و (**) داریم:

$$\widehat{M_۱} = \widehat{M_۲}$$

۱۸۸ گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

نکته: دوران به مرکز نقطهٔ ثابت O و زاویهٔ α، تبدیلی از صفحه است که در آن اگر نقطهٔ A' تصویر نقطهٔ A باشد، آنگاه: $A\widehat{O}A' = \alpha \ , \ OA = OA'$

مطابق شکل در دوران به مرکز O و زاویهٔ °۱۸۰، شکل (۱) به شکل (۲) تصویر می‌شود. بنابراین گزینهٔ ۱ پاسخ است.

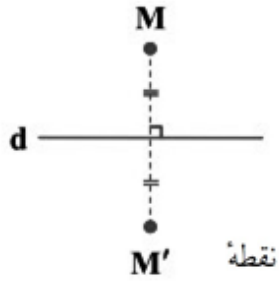


(۱) (۲)

تلفن تماس: ۰۲۶۳۳۴۰۸۹۴۴

۱۸۹ گزینه ۳ پاسخ صحیح است. نکته: تجانس شیب خط اندازهٔ زاویه و جهت شکل را حفظ می‌کند.
نکته: تجانس در حالت کلی طولپا نیست، فقط در حالتی که نسبت تجانس $k = \pm ۱$ باشد، تجانس طولپا است.
با توجه به نکات بالا، گزینهٔ ۳ پاسخ است.

۱۹۰ گزینه ۴ پاسخ صحیح است.
نکته: بازتاب، یک تبدیل طولپا است.



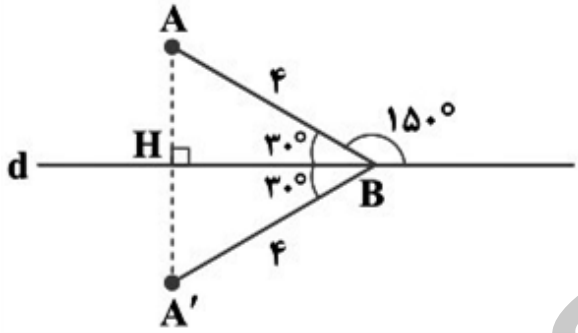
نکته: مساحت مثلث متساوی‌الاضلاع به ضلع a برابر است با: $S = \frac{a^۲\sqrt{۳}}{۴}$

نکته: برای به‌دست آوردن تصویر هر نقطه در صفحه، تحت بازتاب نسبت به خط d، از نقطهٔ مفروض بر خط d عمود کرده و به اندازهٔ خودش امتداد می‌دهیم تا نقطهٔ تصویر به‌دست آید.
در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABH، ضلع AH روبه‌رو به زاویهٔ °۳۰ است، پس اندازهٔ آن نصف اندازهٔ وتر است یعنی:

$$AH = \frac{AB}{۲} = ۲$$

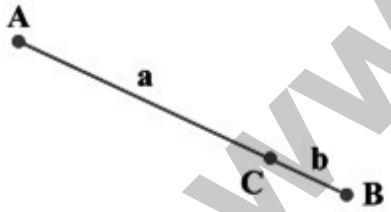
به همین ترتیب در مثلث قائم‌الزاویهٔ A'BH داریم: $A'H = \frac{A'B}{۲} = ۲$

پس مثلث BAA' یک مثلث متساوی‌الاضلاع به ضلع ۴ است، بنابراین مساحت آن برابر است با:

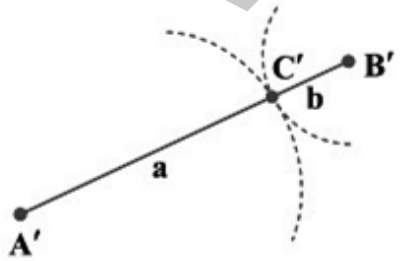


$$S_{BAA'} = \frac{a^۲\sqrt{۳}}{۴} = \frac{۱۶\sqrt{۳}}{۴} = ۴\sqrt{۳}$$

۱۹۱ گزینه ۱ پاسخ صحیح است.
نکته: تبدیل‌هایی که طول پاره‌خط را حفظ می‌کنند، تبدیلات طولپا (ایزومتری) نامیده می‌شوند.
مطابق شکل، اگر $AC = a$ و $BC = b$، با توجه به طولپا بودن تبدیل T باید داشته باشیم:



$$B'C' = b \ , \ A'C' = a$$

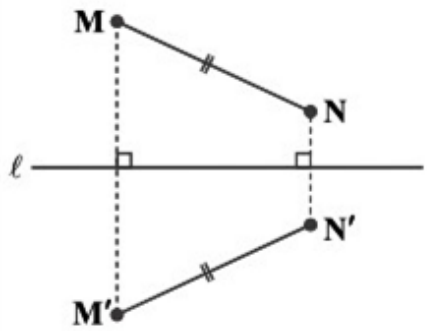


پس از A' به شعاع a و از B' به شعاع b کمان می‌زنیم.
چون $A'B' = a + b$، این دو کمان در یک نقطه روی پاره‌خط A'B' بر یکدیگر مماس می‌شوند. این نقطهٔ تماس همان نقطهٔ C است.

۱۹۲ گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

نکته: اگر M' بازتاب نقطهٔ M نسبت به خط l باشد، آنگاه: $MM' \perp l$

نکته: بازتاب طولپا (ایزومتری) است. به‌عبارتی اگر M' و N' به‌ترتیب بازتاب نقاط M و N باشند، آنگاه: $MN = M'N'$



$$\begin{cases} MM' \perp l \\ NN' \perp l \end{cases} \Rightarrow MM' \parallel NN' \xrightarrow{MN \nparallel M'N'} \text{MNN'M' یک ذوزنقه است} \quad (۱)$$

چون بازتاب طولپا است، پس: $MN = M'N'$ (۲)

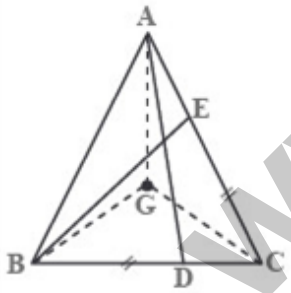
از (۱) و (۲) نتیجه می‌گیریم MNN'M' یک ذوزنقهٔ متساوی‌الساقین است.

۱۹۳ گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

نکته: تبدیل‌هایی که طول پاره‌خط را حفظ می‌کنند، تبدیلات طولپا (ایزومتری) نامیده می‌شوند. به عبارت دیگر اگر داشته باشیم $T(A) = A'$ و $T(B) = B'$، آن‌گاه داریم: $AB = A'B'$

با توجه به نکتهٔ بالا، گزینهٔ ۴ پاسخ است.

۱۹۴ گزینه ۴ پاسخ صحیح است. اگر G مرکز ثقل $\overset{\triangle}{ABC}$ باشد، داریم:



$$B\hat{G}C = C\hat{G}A = A\hat{G}B = ۱۲۰^\circ$$

در دوران ۱۲۰° به مرکز G ، نقطه‌ی B به C و نقطه‌ی C به A تصویر می‌شود؛ پس BC به CA تصویر می‌شود.

طبق فرض $CE = BD$ است، پس در همین دوران، D به E تصویر می‌شود. بنابراین AD به BE تصویر می‌شود، یعنی AD و BE دوران‌یافته‌ی یک‌دیگر در دوران ۱۲۰° هستند.

۱۹۵ گزینه‌ی ۱ پاسخ صحیح است. دایره‌ی C را حول O به اندازه‌ی ۹۰° دوران می‌دهیم تا دایره‌ی C' را در نقطه‌ی A قطع کند. سپس نقطه‌ی A را -۹۰° دوران می‌دهیم تا نقطه‌ی B بر روی دایره‌ی C (که همان نقطه‌ایست که دوران یافته‌ی آن A شده‌بود) به‌دست آید.

چون شعاع دوران در اثنای دوران ثابت است $(OA=OB)$ و زاویه‌ی دوران ۹۰° است. مثلث ABC همان مثلث قائم‌الزاویه متساوی‌الساقین است که دو رأس آن هرکدام روی یکی از C و C' قرار گرفته‌اند.

۱۹۶ گزینه‌ی ۱ پاسخ صحیح است. به روش تبدیل دوران دو مربع دورانی از هم‌اند که بدین صورت داریم:

$$\begin{cases} G \xrightarrow{R^{A}_{۹۰^\circ}} E \\ D \xrightarrow{R^{A}_{۹۰^\circ}} B \end{cases} \Rightarrow GD \xrightarrow{R^{A}_{۹۰^\circ}} EB$$

پس GD و EB دوران یک‌دیگراند. با توجه به قضیه‌ی: «اگر دو خط، دورانی از هم باشند، زاویه‌ی بین آن‌ها همان زاویه‌ی دوران است.»، داریم:

$E\hat{O}G = ۹۰^\circ$

۱۹۷ گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$\Delta ADO : \angle O_۱ = ۱۸۰ - ۲ \times ۷۰^\circ = ۴۰^\circ$

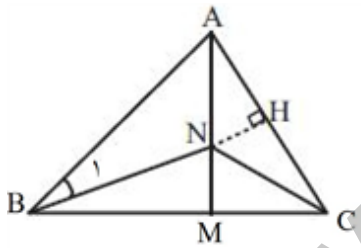
$\Delta BCO : \angle O_۲ = ۴۰^\circ$

$\Rightarrow D = R^{۴۰^\circ}_{O}(A)\ ,\ B = R^{۴۰^\circ}_{O}(C) \Rightarrow DB = R^{۴۰^\circ}_{O}(AC)$

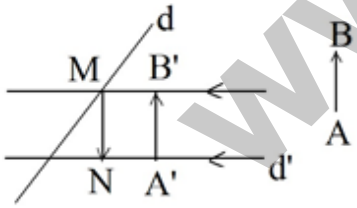
پس قطر BD دوران یافته قطر AC حول نقطه‌ی O با زاویه‌ی $۴۰^\circ +$ است و می‌دانیم زاویه‌ی بین دو خط دوران یافته با زاویه‌ی دوران برابر است.

۱۹۸ گزینه‌ی ۲ پاسخ صحیح است. دو مثلث $O\overset{\triangle}{A}E$ و $O\overset{\triangle}{C}D$ مساویند پس $OE = OD$ و از طرفی $A\overset{\triangle}{O}C = ۱۲۰$ پس $E\overset{\triangle}{O}D = ۱۲۰$ بنابراین گزینه‌های ۱ و ۳ و ۴ درست هستند و در نتیجه گزینه‌ی ۲ غلط می‌باشد.

۱۹۹ گزینه‌ی ۴ پاسخ صحیح است. طبق تعریف دوران، مشخص است که مثلث BMN پس از دوران به شکل AMC خواهد بود. پس: $B\hat{M}N = A\hat{M}C = ۹۰^\circ$ یعنی زاویه‌ی دوران برابر ۹۰° است و بنابراین BN و AC که دوران یافته‌ی هم هستند بر هم عمود خواهند بود. پس: $\hat{A} + \hat{B}_۱ = ۹۰^\circ$ و در نتیجه: $\hat{A} = ۷۵^\circ$.



۲۰۰ گزینه‌ی ۲ پاسخ صحیح است. مطابق شکل یک نقطه از خط d' مثل A' را با بردار AB انتقال می‌دهیم تا به نقطه‌ی B' برسیم و از آن‌جا خطی موازی d' رسم می‌کنیم تا خط d را درنقطه‌ی M قطع کند. حال نقطه‌ی M را با بردار BA انتقال می‌دهیم تا نقطه‌ی N واقع برخط d' حاصل می‌شود. اکنون پاره خط MN همان پاره‌خطی است که دو سر آن روی دو خط متقاطع d و d' واقع است و موازی و مساوی AB نیز می‌باشد (زیرا چهارضلعی MB' A'N متوازی الاضلاع است). توجه کنید که دوران ممکن است شیب خط و تجانس ممکن است طول پاره‌خطها را تغییر دهد و به همین دلیل گزینه‌های ۳ و ۴ از ابتدا به راحتی حذف می‌شوند.



تلفن تماس: ۰۲۶۳۳۴۰۸۹۴۴

۱	۱	۲	۳	**۴**
۲	۱	۲	۳	**۴**
۳	۱	۲	**۳**	۴
۴	۱	۲	۳	**۴**
۵	۱	۲	**۳**	۴
۶	۱	۲	**۳**	۴
۷	۱	۲	**۳**	۴
۸	**۱**	۲	۳	۴
۹	۱	۲	**۳**	۴
۱۰	۱	۲	**۳**	۴
۱۱	**۱**	۲	۳	۴
۱۲	۱	۲	**۳**	۴
۱۳	۱	۲	**۳**	۴
۱۴	۱	۲	**۳**	۴
۱۵	۱	**۲**	۳	۴
۱۶	۱	۲	**۳**	۴
۱۷	۱	۲	۳	**۴**
۱۸	۱	**۲**	۳	۴
۱۹	۱	**۲**	۳	۴
۲۰	**۱**	۲	۳	۴
۲۱	۱	۲	**۳**	۴
۲۲	۱	**۲**	۳	۴
۲۳	۱	۲	۳	**۴**
۲۴	**۱**	۲	۳	۴
۲۵	۱	۲	۳	**۴**
۲۶	۱	۲	**۳**	۴
۲۷	۱	۲	**۳**	۴
۲۸	۱	۲	۳	**۴**
۲۹	۱	۲	**۳**	۴
۳۰	۱	۲	۳	**۴**
۳۱	۱	۲	۳	**۴**
۳۲	۱	۲	**۳**	۴

۳۳	**۱**	۲	۳	۴
۳۴	**۱**	۲	۳	۴
۳۵	**۱**	۲	۳	۴
۳۶	۱	۲	۳	**۴**
۳۷	۱	۲	**۳**	۴
۳۸	**۱**	۲	۳	۴
۳۹	**۱**	۲	۳	۴
۴۰	۱	۲	۳	**۴**
۴۱	**۱**	۲	۳	۴
۴۲	۱	۲	۳	**۴**
۴۳	۱	۲	۳	**۴**
۴۴	۱	۲	۳	**۴**
۴۵	۱	۲	۳	**۴**
۴۶	۱	۲	**۳**	۴
۴۷	۱	**۲**	۳	۴
۴۸	۱	۲	**۳**	۴
۴۹	۱	۲	۳	**۴**
۵۰	۱	**۲**	۳	۴
۵۱	۱	**۲**	۳	۴
۵۲	۱	۲	۳	**۴**
۵۳	۱	۲	۳	**۴**
۵۴	۱	۲	۳	**۴**
۵۵	۱	**۲**	۳	۴
۵۶	**۱**	۲	۳	۴
۵۷	**۱**	۲	۳	۴
۵۸	۱	۲	**۳**	۴
۵۹	۱	**۲**	۳	۴
۶۰	۱	۲	**۳**	۴
۶۱	۱	**۲**	۳	۴
۶۲	۱	۲	۳	**۴**
۶۳	**۱**	۲	۳	۴
۶۴	۱	۲	۳	**۴**

۶۵	۱	۲	۳	**۴**
۶۶	**۱**	۲	۳	۴
۶۷	۱	۲	۳	**۴**
۶۸	**۱**	۲	۳	۴
۶۹	۱	۲	۳	**۴**
۷۰	۱	۲	۳	**۴**
۷۱	**۱**	۲	۳	۴
۷۲	۱	**۲**	۳	۴
۷۳	۱	۲	۳	**۴**
۷۴	۱	**۲**	۳	۴
۷۵	۱	۲	**۳**	۴
۷۶	۱	۲	**۳**	۴
۷۷	۱	**۲**	۳	۴
۷۸	۱	**۲**	۳	۴
۷۹	۱	۲	۳	**۴**
۸۰	۱	۲	**۳**	۴
۸۱	۱	۲	**۳**	۴
۸۲	۱	**۲**	۳	۴
۸۳	۱	**۲**	۳	۴
۸۴	۱	۲	**۳**	۴
۸۵	۱	۲	**۳**	۴
۸۶	۱	۲	**۳**	۴
۸۷	۱	۲	۳	**۴**
۸۸	۱	۲	**۳**	۴
۸۹	۱	**۲**	۳	۴
۹۰	۱	۲	۳	**۴**
۹۱	۱	۲	۳	**۴**
۹۲	**۱**	۲	۳	۴
۹۳	**۱**	۲	۳	۴
۹۴	۱	**۲**	۳	۴
۹۵	۱	۲	۳	**۴**
۹۶	۱	۲	۳	**۴**

۹۷	۱	**۲**	۳	۴
۹۸	**۱**	۲	۳	۴
۹۹	۱	**۲**	۳	۴
۱۰۰	۱	۲	**۳**	۴
۱۰۱	**۱**	۲	۳	۴
۱۰۲	**۱**	۲	۳	۴
۱۰۳	۱	۲	۳	**۴**
۱۰۴	۱	**۲**	۳	۴
۱۰۵	**۱**	۲	۳	۴
۱۰۶	۱	۲	۳	**۴**
۱۰۷	۱	۲	۳	**۴**
۱۰۸	۱	۲	**۳**	۴
۱۰۹	۱	۲	**۳**	۴
۱۱۰	۱	۲	۳	**۴**
۱۱۱	۱	**۲**	۳	۴
۱۱۲	**۱**	۲	۳	۴
۱۱۳	**۱**	۲	۳	۴
۱۱۴	۱	۲	**۳**	۴
۱۱۵	۱	۲	۳	**۴**
۱۱۶	۱	**۲**	۳	۴
۱۱۷	**۱**	۲	۳	۴
۱۱۸	۱	۲	۳	**۴**
۱۱۹	**۱**	۲	۳	۴
۱۲۰	۱	**۲**	۳	۴
۱۲۱	**۱**	۲	۳	۴
۱۲۲	۱	**۲**	۳	۴
۱۲۳	۱	**۲**	۳	۴
۱۲۴	۱	۲	۳	**۴**
۱۲۵	**۱**	۲	۳	۴
۱۲۶	۱	**۲**	۳	۴
۱۲۷	۱	**۲**	۳	۴
۱۲۸	۱	**۲**	۳	۴

تلفن تماس: ۰۲۶۳۳۴۰۸۹۴۴

۱۲۹	**۱**	۲	۳	۴
۱۳۰	۱	**۲**	۳	۴
۱۳۱	۱	**۲**	۳	۴
۱۳۲	۱	۲	۳	**۴**
۱۳۳	۱	**۲**	۳	۴
۱۳۴	۱	۲	۳	**۴**
۱۳۵	۱	۲	**۳**	۴
۱۳۶	۱	**۲**	۳	۴
۱۳۷	**۱**	۲	۳	۴
۱۳۸	۱	۲	۳	**۴**
۱۳۹	۱	**۲**	۳	۴
۱۴۰	۱	۲	**۳**	۴
۱۴۱	۱	**۲**	۳	۴
۱۴۲	**۱**	۲	۳	۴
۱۴۳	۱	۲	۳	**۴**
۱۴۴	۱	**۲**	۳	۴
۱۴۵	**۱**	۲	۳	۴
۱۴۶	۱	۲	**۳**	۴
۱۴۷	۱	**۲**	۳	۴
۱۴۸	۱	۲	۳	**۴**
۱۴۹	۱	۲	**۳**	۴
۱۵۰	۱	**۲**	۳	۴
۱۵۱	۱	۲	**۳**	۴
۱۵۲	**۱**	۲	۳	۴
۱۵۳	۱	۲	**۳**	۴
۱۵۴	۱	۲	**۳**	۴
۱۵۵	۱	**۲**	۳	۴
۱۵۶	۱	**۲**	۳	۴
۱۵۷	۱	۲	۳	**۴**
۱۵۸	۱	۲	۳	**۴**
۱۵۹	۱	**۲**	۳	۴
۱۶۰	۱	۲	**۳**	۴

۱۶۱	**۱**	۲	۳	۴
۱۶۲	۱	**۲**	۳	۴
۱۶۳	**۱**	۲	۳	۴
۱۶۴	۱	۲	۳	**۴**
۱۶۵	۱	**۲**	۳	۴
۱۶۶	۱	۲	۳	**۴**
۱۶۷	۱	۲	۳	**۴**
۱۶۸	۱	۲	۳	**۴**
۱۶۹	۱	۲	**۳**	۴
۱۷۰	۱	۲	**۳**	۴
۱۷۱	۱	۲	۳	**۴**
۱۷۲	**۱**	۲	۳	۴
۱۷۳	۱	۲	**۳**	۴
۱۷۴	۱	۲	**۳**	۴
۱۷۵	**۱**	۲	۳	۴
۱۷۶	۱	۲	۳	**۴**
۱۷۷	۱	۲	**۳**	۴
۱۷۸	۱	۲	**۳**	۴
۱۷۹	۱	**۲**	۳	۴
۱۸۰	۱	۲	۳	**۴**
۱۸۱	۱	۲	**۳**	۴
۱۸۲	۱	**۲**	۳	۴
۱۸۳	۱	**۲**	۳	۴
۱۸۴	۱	۲	**۳**	۴
۱۸۵	۱	۲	**۳**	۴
۱۸۶	۱	**۲**	۳	۴
۱۸۷	۱	۲	۳	**۴**
۱۸۸	**۱**	۲	۳	۴
۱۸۹	۱	۲	**۳**	۴
۱۹۰	۱	۲	۳	**۴**
۱۹۱	**۱**	۲	۳	۴
۱۹۲	۱	۲	**۳**	۴

۱۹۳	۱	۲	۳	**۴**
۱۹۴	۱	۲	۳	**۴**
۱۹۵	**۱**	۲	۳	۴
۱۹۶	**۱**	۲	۳	۴
۱۹۷	۱	۲	**۳**	۴
۱۹۸	۱	**۲**	۳	۴
۱۹۹	۱	۲	۳	**۴**
۲۰۰	۱	**۲**	۳	۴

تلفن تماس: ۰۲۶۳۳۴۰۸۹۴۴