

**WWW.AKOEDU.IR**

**اولین و با کیفیت ترین**

**کلاسی های vip کنکور**  
**آگادمی کنکور** در ایران



جهت دریافت برنامه ی شخصی سازی شده یک هفته ای رایگان کلیک کنید و یا به شماره ی ۰۹۰۲۵۶۴۶۲۳۴ عدد ۱ را ارسال کنید.

۰۰ تست هندسه ۲ دایره

۱ دو دایره  $C(O, 2R)$  و  $C'(O', R)$  در نقطه  $M$  مماس درون هستند. قطر  $MN$  را رسم می‌کنیم و از  $N$  واقع بر دایره بزرگ‌تر، مماس  $NT$  را بر دایره‌ی کوچک‌تر رسم می‌کنیم تا امتداد آن دایره بزرگ‌تر را در  $A$  قطع کند از  $M$  در دایره کوچک‌تر وتر  $MD$  را به موازات  $NA$  رسم می‌کنیم. مقدار  $MD$  چه ضریبی از  $R$  است؟

(۱)  $\frac{8\sqrt{2}}{3}$  (۲)  $\frac{4\sqrt{2}}{3}$  (۳)  $\frac{2}{3}$  (۴)  $\frac{1}{3}$

۲ دو دایره به شعاع‌های ۳ و ۴، مماس داخل هستند. طول بزرگ‌ترین وتر دایره‌ی بزرگ‌تر که بر دایره‌ی کوچک‌تر مماس می‌باشد، کدام است؟

(۱) ۶ (۲)  $3\sqrt{2}$  (۳)  $4\sqrt{2}$  (۴)  $4\sqrt{3}$

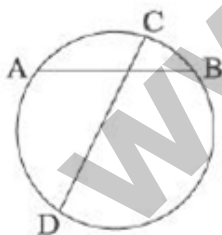
۳ در یک دوزنقه متساوی‌الساقین، دایره‌ای به شعاع ۹ واحد محاط شده است. اگر طول قاعده کوچک دوزنقه،  $\frac{27}{4}$  واحد باشد، فاصله نزدیک‌ترین نقاط دایره تا یک رأس قاعده بزرگ دوزنقه کدام است؟

(۱) ۶ (۲)  $3\sqrt{10} - 9$  (۳) ۹ (۴) ۱۲

۴ طول مماس مشترک خارجی دو دایره به شعاع‌های ۳ و ۷ واحد، برابر ۳ واحد است. این دو دایره نسبت به هم چگونه هستند؟

(۱) متخارج (۲) مماس خارج (۳) متقاطع (۴) مماس درون

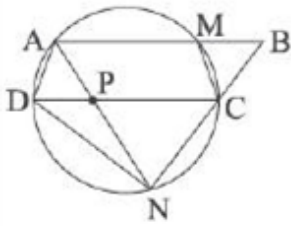
۵ در شکل زیر، وتر  $CD$ ، وتر  $AB$  را به نسبت ۱ به ۲ و وتر  $AB$ ، وتر  $CD$  را به نسبت ۱ به ۴ تقسیم می‌کند، طول وتر  $CD$  چند برابر وتر  $AB$  است؟



(۱)  $\frac{5\sqrt{2}}{6}$  (۲)  $\frac{10}{3}$  (۳)  $\frac{5\sqrt{2}}{3}$  (۴)  $\frac{5}{6}$

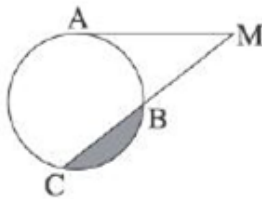


۶ در شکل زیر چهارضلعی ABCD متوازی الاضلاع است. کدام مثلث لزوماً متساوی الساقین نیست؟



- (۱)  $\triangle ABN$   
 (۲)  $\triangle ADP$   
 (۳)  $\triangle CDN$   
 (۴)  $\triangle BMC$

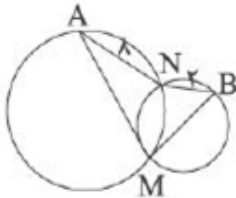
۷ در دایره زیر طول مماس MA برابر  $6\sqrt{5}$  است. اگر وتر BC با شعاع دایره برابر باشد و  $MB - BC = 2$ .



مساحت ناحیه رنگی کدام است؟

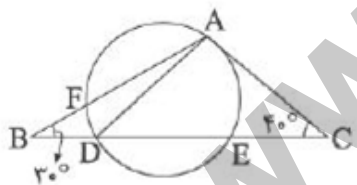
- (۱)  $25 \left( \frac{2\pi}{3} - \sqrt{3} \right)$   
 (۲)  $25 \left( \frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2} \right)$   
 (۳)  $16 \left( \frac{2\pi}{3} - \sqrt{3} \right)$   
 (۴)  $16 \left( \frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2} \right)$

۸ در شکل زیر AM بر دایره کوچکتر و BM بر دایره بزرگتر در نقطه M مماس هستند. نسبت طول این دو مماس کدام است؟



- (۱)  $2\sqrt{2}$   
 (۲) ۳  
 (۳) ۴  
 (۴) ۲

۹ در شکل زیر وترهای AF و DE از مرکز دایره به یک فاصله‌اند و CA بر دایره مماس است. تفاضل زوایای  $\hat{ADB}$



و  $\hat{ADE}$  چند درجه است؟

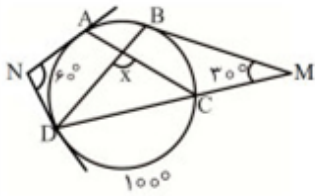
- (۱)  $110^\circ$   
 (۲)  $120^\circ$   
 (۳)  $100^\circ$   
 (۴)  $90^\circ$

۱۰ دو وتر موازی به طول‌های ۸ و ۱۲ واحد و به فاصله ۱۰ واحد از یکدیگر در یک دایره مفروض‌اند. شعاع دایره کدام است؟

- (۱) ۵  
 (۲)  $\sqrt{13}$   
 (۳) ۱۰  
 (۴)  $2\sqrt{13}$

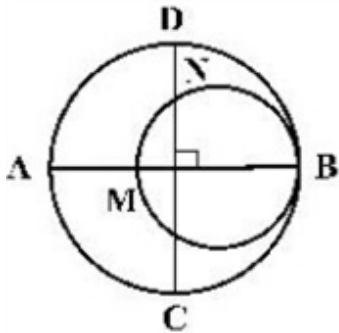
۱۱ اگر بتوان دایره‌ای رسم کرد که هر ۴ رأس چهارضلعی ABCD روی محیط آن باشند، کدام گزینه درباره‌ی چهارضلعی ABCD صحیح است؟

- (۱) زوایای روبه‌رو برابرند. (۲) اضلاع روبه‌رو برابرند. (۳) زوایای روبه‌رو مکمل‌اند. (۴) زوایای مجاور مکمل‌اند.



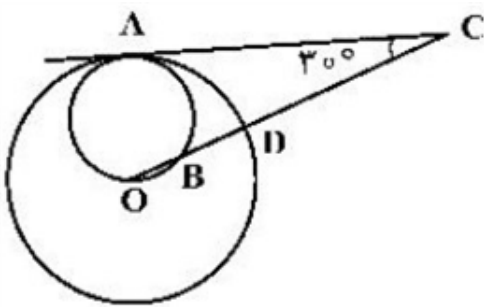
۱۲ در شکل زیر  $MB$ ،  $ND$  و  $NA$  مماس بر دایره هستند.  $X$  چند درجه است؟

- (۱) ۵۰
- (۲) ۶۰
- (۳) ۷۰
- (۴) ۸۰



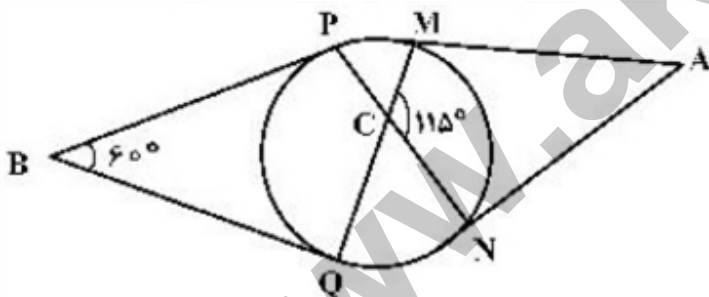
۱۳ در شکل زیر، دو دایره برهم مماس و قطرهای  $AB$  و  $CD$  از دایره بزرگتر بر هم عمود هستند. اگر  $AM = ۱۶$ ،  $DN = ۱۰$  باشد، شعاع دایره کوچکتر، کدام است؟

- (۱) ۱۲
- (۲) ۱۶
- (۳) ۱۷
- (۴) ۲۵



۱۴ در شکل زیر، پاره خط  $AC$  و دایره کوچک، در نقطه  $A$ ، بر دایره بزرگ به شعاع ۶ و مرکز  $O$  واقع بر محیط دایره کوچک مماس اند. طول پاره خط  $BD$ ، کدام است؟

- (۱) ۴
- (۲) ۳
- (۳)  $\sqrt{۶}$
- (۴) ۲

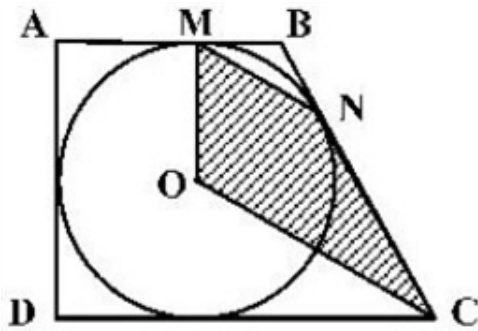


۱۵ پاره خط های  $AM$ ،  $AN$ ،  $BP$  و  $BQ$  مطابق شکل زیر بر دایره مماس اند. زاویه  $MAN$ ، به درجه، کدام است؟

- (۱) ۶۰
- (۲) ۶۵
- (۳) ۷۰
- (۴) ۷۵

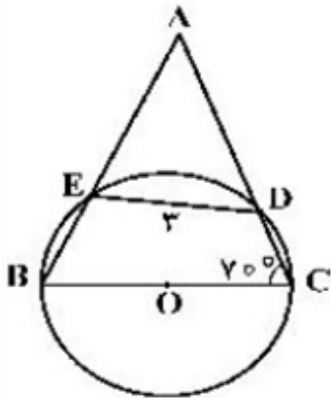
۱۶ فرض کنید طول خط مرکزین دو دایره با شعاع های  $a-۱$  و  $a^۲-۲$ ، برابر ۶ واحد باشد. اگر دو دایره فقط یک مماس مشترک داشته باشند، میانگین مقادیر ممکن برای  $a$ ، کدام است؟

- (۱) ۳
- (۲)  $\frac{۱۳}{۳}$
- (۳) ۶
- (۴) ۷



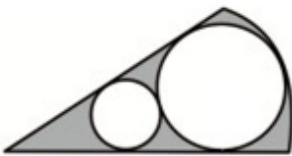
۱۷ مطابق شکل زیر دوزنقه‌ی قائم‌الزاویه ABCD بر دایره‌ای به شعاع ۳ محیط شده است. اگر زاویه‌ی  $\widehat{MBN} = 120^\circ$  باشد، مساحت چهارضلعی OMNC، کدام است؟

- (۱)  $\frac{27\sqrt{3}}{4}$   
 (۲)  $\frac{9\sqrt{3}}{2}$   
 (۳)  $\frac{27\sqrt{3}}{2}$   
 (۴)  $9\sqrt{3}$



۱۸ در شکل زیر شعاع دایره ۳ واحد است. اندازه‌ی کمان  $\widehat{EDC}$  به درجه، کدام است؟

- (۱) ۸۰  
 (۲) ۹۰  
 (۳) ۱۰۰  
 (۴) ۱۲۰



۱۹ در شکل زیر دو دایره مماس خارج و مماس بر دو ضلع قطاع  $60^\circ$  می‌باشند و یکی مماس بر کمان قطاع است. اگر شعاع دایره بزرگ‌تر برابر ۶ باشد، مساحت قسمت رنگی کدام است؟

- (۱)  $8\pi$   
 (۲)  $9\pi$   
 (۳)  $10\pi$   
 (۴)  $14\pi$

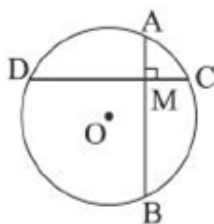
۲۰ در دایره‌ای به شعاع ۳۰، طول وتر AB برابر ۳۶ می‌باشد. اگر  $\cos 54^\circ = \frac{5}{6}$  باشد، طول کمان  $\widehat{AB}$  کدام است؟

- (۱)  $6\pi$   
 (۲)  $\frac{54\pi}{5}$   
 (۳)  $12\pi$   
 (۴)  $18\pi$

۲۱ از نقطه M با فاصله ۱۸ از مرکز دایره دو مماس بر آن رسم می‌کنیم. اگر فاصله نقاط تماس  $8\sqrt{5}$  باشد، شعاع دایره کدام است؟

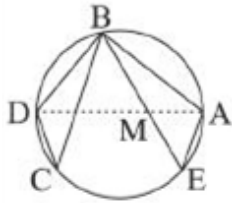
- (۱) ۱۵  
 (۲) ۱۲  
 (۳) ۱۰  
 (۴) ۹

۲۲ در دایره  $C(O, R)$  وتر AB که بر وتر CD عمود است، وتر CD را به نسبت ۱ به ۲ تقسیم کرده است. اگر  $AB = 11\text{cm}$  و  $CD = 9\text{cm}$  باشد، قطر دایره چه قدر است؟



- (۱)  $\sqrt{106}$   
 (۲)  $\sqrt{146}$   
 (۳)  $\sqrt{130}$   
 (۴)  $\sqrt{115}$

۲۳ در شکل زیر اگر  $BM = 3$  و  $AM = \frac{3}{2}$  و  $DC = AE$  و  $BD = \frac{5}{2}$  باشد، اندازه  $CD$  کدام است؟



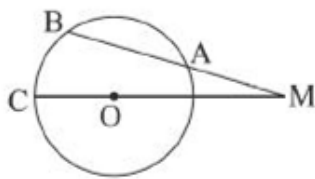
$\frac{5}{2}$  (۱)

$\frac{5}{3}$  (۲)

$\frac{5}{4}$  (۳)

۱ (۴)

۲۴ دایره  $C(O, R)$  مفروض است. از نقطه  $M$  خارج دایره خطی چنان رسم می‌کنیم که دایره را در نقاط  $A$  و  $B$  قطع کند. اگر  $MA = R$  و  $\widehat{BMC} = 20^\circ$  باشد، طول وتر  $BC$  چند برابر شعاع دایره است؟



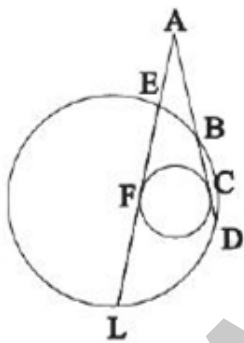
$\frac{3}{2}$  (۱)

۳ (۲)

$\frac{1}{2}$  (۳)

۱ (۴)

۲۵ از نقطه  $A$  دو مماس بر دایره کوچک‌تر رسم کرده‌ایم. اگر  $BC = 2CD = 2$ ،  $EF = 3$  و  $FL = 4$  باشد، مقدار  $AE$  کدام است؟



۳ (۱)

۲ (۲)

$1/5$  (۳)

$2/5$  (۴)

۲۶ در مثلث متساوی‌الساقین با اضلاع به طول صحیح، رابطه  $\frac{1}{r_a} + \frac{1}{r_b} + \frac{1}{r_c} = \frac{2}{3}$  برقرار می‌باشد. اگر مساحت مثلث برابر ۱۲ باشد، چند جواب برای اندازه طول ساق آن وجود دارد؟

۴ (۴)

۳ (۳)

۲ (۲)

۱ (۱)

۲۷ دو دایره به شعاع‌ها ۴ و ۸ واحد، در نقطه‌ی  $A$  مماس درونی هستند. وتر  $BC$  از دایره‌ی بزرگ، موازی خط‌المركزین و بر دایره‌ی کوچک در نقطه‌ی  $P$  مماس است. اندازه‌ی  $PB \times PC$  کدام است؟

۴۸ (۴)

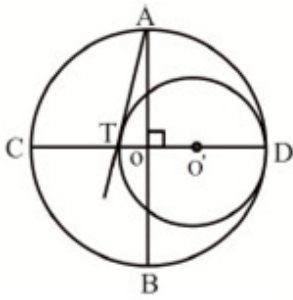
۳۶ (۳)

۳۲ (۲)

۲۴ (۱)

۲۸

در شکل مقابل  $C(O, R)$  و  $C'(O', \frac{2}{3}R)$  در نقطه  $D$  بر هم مماس داخلند.



$R$  چند برابر  $AT$  است؟

- (۱)  $\frac{\sqrt{6}}{2}$   
 (۲)  $\sqrt{2}$   
 (۳)  $\sqrt{3}$   
 (۴)  $\frac{3}{4}\sqrt{3}$

۲۹

در مثلث متساوی‌الساقین  $ABC$  خط گذرا بر رأس  $A$  قاعده‌ی  $BC$  و دایره‌ی محیطی مثلث را در  $D$  و  $E$  قطع می‌کند، اندازه‌ی  $AD \cdot AE$  برابر کدام است؟

- (۱)  $BD \cdot BC$  (۲)  $CD \cdot CB$  (۳)  $AC^2$  (۴)  $BC^2$

۳۰

در مثلث قائم‌الزاویه‌ای طول یک ضلع قائم ۸ شعاع دایره‌ی محاطی داخلی آن ۳ واحد است. اندازه‌ی وتر این مثلث کدام است؟

- (۱) ۱۵ (۲) ۱۶ (۳) ۱۷ (۴) ۱۸

۳۱

دوزنقه‌ی متساوی‌الساقین بر دایره‌ای به شعاع  $\sqrt{3}$  محیط است. اگر نسبت قاعده‌های این دوزنقه  $\frac{1}{3}$  باشد. مساحت آن

کدام است؟

- (۱)  $4\sqrt{3}$  (۲) ۸ (۳) ۱۲ (۴)  $8\sqrt{3}$

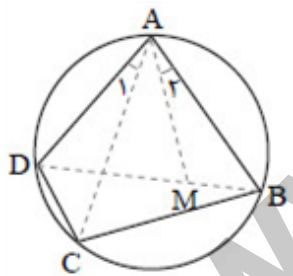
۳۲

در یک دوزنقه محیط بر دایره طول خط واصل بین وسط‌های دو ساق آن ۱۲ واحد است. محیط دوزنقه کدام است؟

- (۱) ۳۶ (۲) ۴۴ (۳) ۴۶ (۴) ۴۸

۳۳

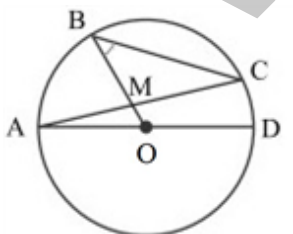
در شکل مقابل  $\widehat{A}_1 = \widehat{A}_2$  حاصل  $AD \cdot BC$  برابر کدام است؟



- (۱)  $DM \cdot AC$   
 (۲)  $BM \cdot AC$   
 (۳)  $AB \cdot CD$   
 (۴)  $BD \cdot BM$

۳۴

در شکل مقابل  $\widehat{AB} = 2\widehat{CD}$  و  $\widehat{AMB} = 100^\circ$  و  $O$  مرکز دایره می‌باشد.



اندازه‌ی زاویه‌ی  $\widehat{OBC}$  کدام است؟

- (۱)  $60^\circ$  (۲)  $65^\circ$   
 (۳)  $55^\circ$  (۴)  $50^\circ$

۳۵

مساحت دوازده‌ضلعی منتظم محاط در دایره‌ای به شعاع واحد، چه قدر است؟

- (۱) ۳ (۲) ۴ (۳) ۶ (۴) ۱۲

۳۶ دو دایره  $C_1$  و  $C_2$  در نقطه  $T$  مماس خارج اند و پاره خط  $T_1T_2$  مماس مشترک خارجی آنهاست؛ اندازه‌ی

زاویه  $T_1\hat{T}T_2$  چگونه وضعیتی دارد؟

(۱)  $T_1\hat{T}T_2 = 90^\circ$  (۲)  $T_1\hat{T}T_2 > 90^\circ$  (۳)  $T_1\hat{T}T_2 > 90^\circ$  (۴) گزینه‌های ۲ و ۳

۳۷ اگر در مثلث  $ABC$  مجموع دو زاویه  $\hat{A}$  و  $\hat{C}$  برابر  $120^\circ$  و پاره خط‌های  $AA'$ ،  $BB'$  و  $CC'$  ارتفاع‌های مثلث

باشند، بیش‌ترین اندازه‌ی زاویه  $CB'C'$  چند درجه است؟

(۱)  $120^\circ$  (۲)  $135^\circ$  (۳)  $60^\circ$  (۴)  $90^\circ$

۳۸ در مثلث  $ABC$ ، نیمساز زاویه  $A$  از محل تماس دایره محاطی داخل مثلث با ضلع  $BC$  می‌گذرد. نوع مثلث کدام است؟

(۱) قائم‌الزاویه (۲) متساوی‌الساقین (۳) متساوی‌الاضلاع (۴) نامشخص

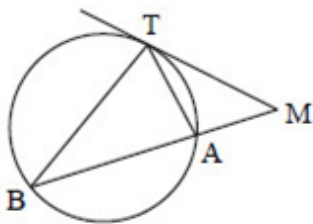
۳۹ در دایره‌ای به مرکز  $O$  و به شعاع  $6$  از نقطه  $M$  به فاصله  $2\sqrt{3}$  از مرکز دایره وتر  $AC$  را با کم‌ترین طول و وتر

$BD$  را با بیش‌ترین طول رسم کرده‌ایم. مساحت چهارضلعی  $ABCD$  کدام است؟

(۱)  $36$  (۲)  $8\sqrt{3}$  (۳)  $24\sqrt{2}$  (۴)  $24\sqrt{6}$

۴۰ طول مماس مشترک دو دایره‌ی متقاطع  $C(O, 2R)$  و  $C'(O', 2R)$  که وتر مشترک آنها  $2R$  باشد کدام است؟

(۱)  $R(\sqrt{6} + \sqrt{2})$  (۲)  $R\sqrt{6}$  (۳)  $R(\sqrt{6} - \sqrt{2})$  (۴)  $R(\sqrt{6} + \sqrt{2})$



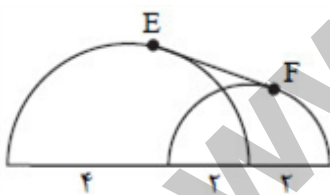
۴۱ از نقطه  $M$  خارج دایره  $C(O, R)$  مماس  $MT$  و قاطع  $MAB$  را مطابق

شکل بر دایره  $C$  رسم می‌کنیم. اگر  $AT = 2$  و  $BT = 4$  و  $MA = 1/5$  باشد.

طول  $AB$  کدام است؟

(۱)  $4$  (۲)  $4/5$

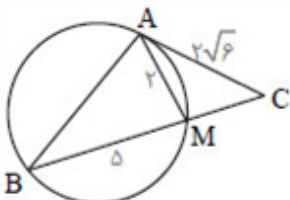
(۳)  $5$  (۴)  $5/5$



۴۲ در شکل مقابل  $EF$  بر هر دو نیم‌دایره مماس است. طول  $EF$  چه قدر است؟

(۱)  $2\sqrt{2}$  (۲)  $\sqrt{6}$

(۳)  $\sqrt{7}$  (۴)  $\sqrt{5}$

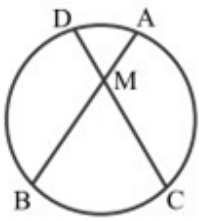


۴۳ در شکل مقابل،  $AC$  در نقطه  $A$  بر دایره مماس است. طول  $AB$  کدام است؟

(۱)  $\frac{4}{3}\sqrt{6}$  (۲)  $\frac{3}{4}\sqrt{6}$

(۳)  $3$  (۴)  $4\sqrt{6}$



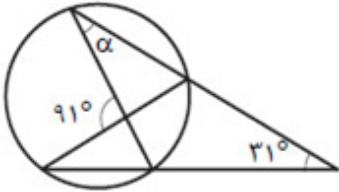


۴۴ در دایره‌ی  $C(O, R)$  وتر  $AB$  و وتر  $CD$  به طول ۹ سانتی‌متر را به نسبت ۱ به ۲ تقسیم کرده است. اگر  $AB = ۱۱$  آنگاه وتر  $AB$  را به چه نسبتی قطع می‌کند؟

- (۱)  $\frac{۳}{۴}$
- (۲)  $\frac{۱}{۹}$
- (۳)  $\frac{۲}{۹}$
- (۴)  $\frac{۲}{۳}$

۴۵ کدام یک از چهارضلعی‌های زیر محاطی نیست؟

- (۱) ذوزنقه‌ی متساوی‌الساقین
- (۲) مستطیل
- (۳) لوزی
- (۴) مربع



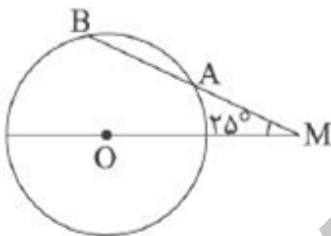
۴۶ در شکل مقابل اندازه‌ی زاویه‌ی  $\alpha$  کدام است؟

- (۱)  $۳۲^\circ$
- (۲)  $۳۰^\circ$
- (۳)  $۳۴^\circ$
- (۴)  $۳۶^\circ$

۴۷ اگر  $h_a$  و  $h_b$  و  $h_c$  سه ارتفاع مثلث  $ABC$  باشند و  $r$  شعاع دایره‌ی محاطی داخلی آن باشد، کدام رابطه درست است؟

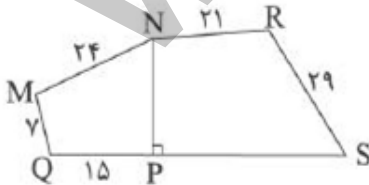
(۱)  $\frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c} = \frac{2}{r}$  (۲)  $h_a + h_b + h_c = \frac{1}{r}$  (۳)  $h_a + h_b + h_c = \frac{2}{r}$  (۴)  $\frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c} = \frac{1}{r}$

۴۸ دایره‌ی  $C(O, ۴)$  مفروض است. اگر  $MA = ۴$  باشد، آن‌گاه طول کمان  $AB$  چه قدر است؟



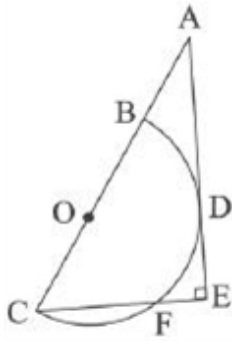
- (۱)  $\frac{20}{9}\pi$
- (۲)  $\frac{5}{3}\pi$
- (۳)  $\frac{10}{9}\pi$
- (۴)  $\frac{16}{9}\pi$

۴۹ در شکل زیر چهارضلعی  $NRSP$  محیطی و چهارضلعی  $MNPQ$  محاطی است. مساحت مثلث  $QNS$  برابر کدام است؟



- (۱) ۳۹۰
- (۲) ۴۲۰
- (۳) ۴۳۰
- (۴) ۴۵۰

۵۰ در شکل زیر  $AD$  بر نیم‌دایره به مرکز  $O$  و شعاع ۴ مماس است. اگر  $AB = 1$  باشد، مقدار  $DE$  چه قدر است؟



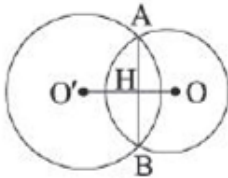
- (۱)  $1/2$   
 (۲)  $1/8$   
 (۳)  $2/4$   
 (۴)  $3/2$

۵۱ دوزنقه متساوی‌الساقینی به طول قاعده‌های ۶ و  $\frac{32}{3}$  واحد بر دایره‌ای محیط است. کوتاه‌ترین فاصله رأس دوزنقه تا نقاط

دایره چند واحد است؟

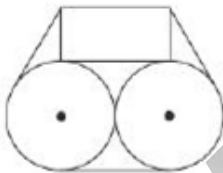
- (۱)  $\frac{1}{2}$   
 (۲)  $\frac{\sqrt{3}}{2}$   
 (۳) ۱  
 (۴)  $\sqrt{3}$

۵۲ در شکل زیر  $AB = 4$  و طول مماس مشترک خارجی دو دایره ۶ واحد است. اگر  $OH \times O'H = 5$  باشد، آن‌گاه حاصل ضرب شعاع‌های دو دایره کدام است؟



- (۱) ۱۴  
 (۲) ۱۵  
 (۳) ۱۶  
 (۴) ۱۷

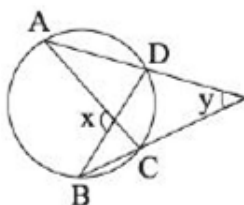
۵۳ در شکل زیر دو دایره با شعاع‌های مساوی  $r = \sqrt{3}$  مماس خارج هستند. روی این دایره‌ها مستطیلی قرار گرفته است که طول آن دو برابر عرضش است. اگر عرض این مستطیل با شعاع دایره‌ها برابر باشد، طول نخ‌کی که دورتادور شکل است چند برابر  $3 + 4\sqrt{3}$  می‌باشد؟ ( $\pi = 3$ )



- (۱) ۲  
 (۲) ۴  
 (۳) ۶  
 (۴) ۸

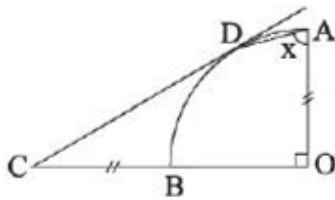
۵۴ در شکل زیر اندازه وترهای  $AD$  و  $BC$  به ترتیب  $R\sqrt{2}$  و  $R\sqrt{3}$  است. اگر اندازه کمان  $AB$ ،  $20^\circ$  درجه بیشتر از

اندازه کمان  $CD$  باشد، کدام است؟ ( $R$  شعاع دایره است).



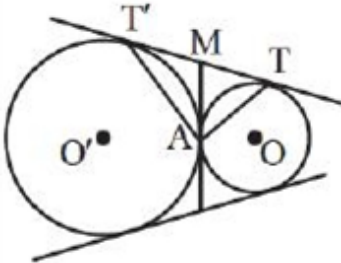
- (۱)  $7/5$   
 (۲) ۷  
 (۳)  $6/5$   
 (۴) ۶

۵۵ مطابق شکل، ربع دایره‌ای به مرکز  $O$  مفروض است. اگر  $BC = OA$  و  $CD$  بر دایره مماس باشد، اندازه زاویه  $x$  چند درجه است؟



- (۱) ۴۵  
(۲) ۶۰  
(۳) ۷۵  
(۴) ۷۰

۵۶ در شکل زیر دو دایره به شعاع‌های  $\frac{12}{5}$  و ۲ بر هم مماس شده‌اند. مساحت مثلث  $TAT'$  چه قدر است؟

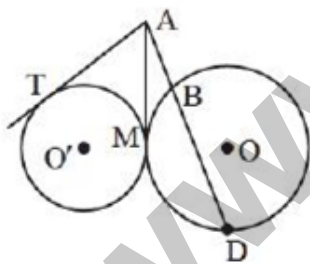


- (۱)  $\frac{500}{29}$   
(۲)  $\frac{400}{29}$   
(۳)  $\frac{250}{29}$   
(۴)  $\frac{200}{29}$

۵۷ دو دایره که شعاع یکی سه برابر دیگری است، متخارج از هم می‌باشند. اگر طول مماس مشترک داخلی و طول خط‌المركزین دو دایره به ترتیب ۱۴ و ۱۶ واحد باشند، طول شعاع دایره کوچک‌تر چه قدر است؟

- (۱)  $2\sqrt{15}$  (۲)  $\frac{\sqrt{15}}{2}$  (۳)  $\frac{\sqrt{15}}{8}$  (۴)  $3\sqrt{15}$

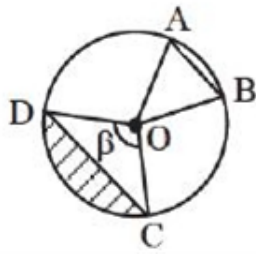
۵۸ در شکل زیر دو دایره  $C(O, 5)$  و  $C'(O', R')$  مماس بیرون از هم می‌باشند. از نقطه  $A$  خارج دو دایره، مماس  $AT$  بر دایره  $C'$  و مماس مشترک  $AM$  را رسم می‌کنیم. اگر از  $A$  قاطعی بر دایره  $C$  رسم کنیم که  $BD$  سه برابر  $AB$  باشد، به شرط آن‌که فاصله وتر  $BD$  از مرکز دایره  $C$ ، ۳ باشد، اندازه مماس  $AT$  چه قدر است؟



- (۱)  $\frac{8\sqrt{3}}{3}$   
(۲)  $\frac{4\sqrt{3}}{3}$   
(۳)  $\frac{16}{3}$   
(۴)  $\frac{8}{3}$

۵۹ در شکل زیر  $O$  مرکز دایره است و  $\widehat{AOB} = 30^\circ$ . اگر  $S_{\Delta AOB} = S_1$ ، مساحت قسمت هاشورزده برابر  $S_2$  و

$$\sqrt{3}S_1 + S_2 = \frac{\pi}{3}$$



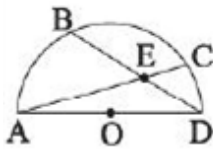
(۱)  $90^\circ$

(۲)  $120^\circ$

(۳)  $150^\circ$

(۴)  $180^\circ$

۶۰ شکل زیر نیم دایره‌ای به قطر  $AD$  است. اگر  $\widehat{AB} = \widehat{BC} = \widehat{CD}$ ، زاویه  $AEB$  کدام است؟



(۱)  $45^\circ$

(۲)  $50^\circ$

(۳)  $55^\circ$

(۴)  $60^\circ$

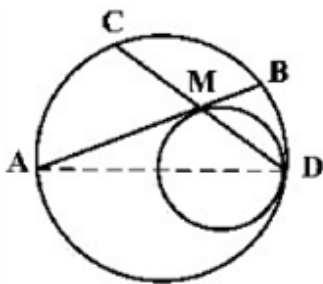
۶۱ در دو دایره‌ی متقاطع به مراکز  $O$  و  $O'$  و شعاع‌های  $6$  و  $8$  واحد فاصله‌ی نقطه‌ی تلاقی دو دایره از وسط  $OO'$ ، نصف  $OO'$  است. اندازه‌ی مماس مشترک خارجی چند واحد است؟

(۴)  $3\sqrt{2}$

(۳)  $4\sqrt{2}$

(۲)  $3\sqrt{6}$

(۱)  $4\sqrt{6}$



۶۲ در شکل زیر، دو دایره در نقطه‌ی  $D$  مماس داخلی و شعاع یکی با قطر دیگری، برابر است. وتر  $AB$  از دایره‌ی بزرگ‌تر بر دایره‌ی داخلی، در نقطه‌ی  $M$  مماس است. نسبت  $\frac{MC}{MB}$ ، کدام است؟

(۲)  $\frac{3}{2}$

(۱)  $\sqrt{2}$

(۴)  $2$

(۳)  $\sqrt{3}$

۶۳ یک ذوزنقه‌ی متساوی‌الساقین با طول قاعده‌های  $\frac{9}{4}$  و  $8$  واحد، بر دایره‌ای محیط شده است. فاصله‌ی دورترین نقاط

دایره، تا یک رأس قاعده‌ی بزرگ ذوزنقه، کدام است؟

(۴)  $\frac{7}{5}$

(۳)  $8$

(۲)  $3 + 4\sqrt{2}$

(۱)  $9$

۶۴ مساحت دایره‌ی محیطی هشت ضلعی منتظم به ضلع  $4$  کدام است؟

(۴)  $8\pi(2 + \sqrt{2})$

(۳)  $4\pi(2 + \sqrt{2})$

(۲)  $2\pi(2 + \sqrt{2})$

(۱)  $\pi(2 + \sqrt{2})$

۶۵ شعاع دایره‌ی محیطی مثلث  $ABC$  به اضلاع  $4$ ،  $13$  و  $15$  کدام است؟

(۴)  $\frac{1}{125}$

(۳)  $\frac{1}{75}$

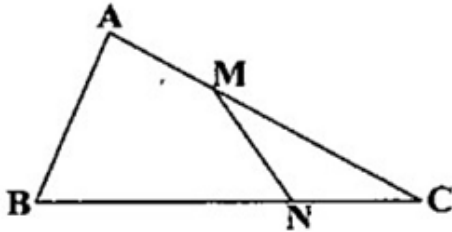
(۲)  $\frac{1}{5}$

(۱)  $\frac{1}{25}$

۶۶ یک مثلث بر دایره‌ای به شعاع ۲ محیط شده است. اگر شعاع‌های دایره‌های محاطی خارجی آن برابر ۲، ۴ و ۵ واحد باشند، مساحت مثلث کدام است؟

(۱)  $10\sqrt{\frac{2}{19}}$  (۲)  $15\sqrt{\frac{2}{19}}$  (۳)  $16\sqrt{\frac{2}{19}}$  (۴)  $20\sqrt{\frac{2}{19}}$

۶۷ در شکل زیر  $\frac{AM}{MC} = \frac{1}{2}$  و چهارضلعی ABNM محاطی است. اگر  $NC = 2$ ،  $BN = 4$  و  $\hat{C} = 30^\circ$  باشد، مساحت مثلث ABC کدام است؟



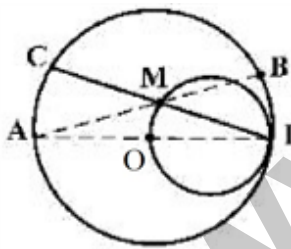
(۱) ۶  
(۲)  $9\frac{\sqrt{2}}{2}$   
(۳) ۹  
(۴)  $6\sqrt{2}$

۶۸ طول مماس مشترک داخلی و خارجی دو دایره که طول خط‌المركزین آنها ۲ برابر مجموع دو شعاع می‌باشد، به ترتیب برابر  $5\sqrt{3}$  و  $\sqrt{91}$  است. شعاع دایره کوچک‌تر کدام است؟

(۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

۶۹ دو دایره هم مرکز به شعاع‌های ۵ و ۶ را در نظر بگیرید. سینوس زاویه ظلی که رأس آن روی محیط دایره بزرگتر و یک ضلع آن مماس بر دایره کوچک‌تر باشد، کدام است؟

(۱)  $\frac{\sqrt{11}}{6}$  (۲)  $\frac{\sqrt{15}}{6}$  (۳)  $\frac{5}{6}$  (۴)  $\frac{\sqrt{15}}{5}$



۷۰ در شکل زیر، دو دایره به شعاع‌های ۲ و ۴ واحد، مماس داخل و طول کمان AC برابر  $\frac{4\pi}{3}$  است. حاصل  $MA \times MB$ ، کدام است؟

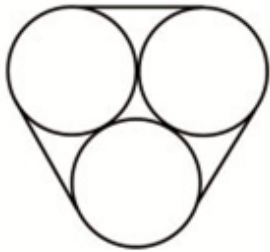
(۱) ۸ (۲) ۹ (۳) ۶ (۴) ۱۲

۷۱ یک دوزنقه‌ی متساوی‌الساقین با قاعده‌هایی به اندازه‌ی ۹ و ۱۶ واحد، بر دایره‌ای محیط شده است. فاصله‌ی نزدیک‌ترین نقاط دایره، تا یک رأس قاعده‌ی کوچک دوزنقه، کدام است؟

(۱)  $\frac{3}{2}$  (۲)  $\sqrt{3}$  (۳) ۲ (۴)  $\frac{5}{2}$

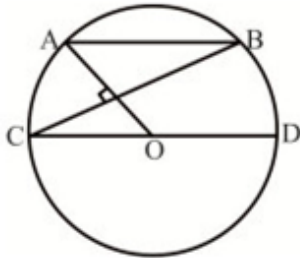
۷۲ شعاع دایره محاطی یک ۱۲ ضلعی منتظم به ضلع واحد تقریباً کدام است؟

(۱)  $1/5$  (۲) ۲ (۳)  $2/5$  (۴) ۳



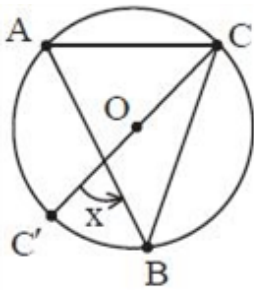
۷۳ در شکل زیر اگر شعاع سه دایره برابر ۲ و  $\pi \approx 3$  باشد، طول نخ‌ی که دور سه دایره وجود دارد، کدام است؟

- (۱) ۲۴  
(۲) ۲۵  
(۳) ۳۵  
(۴) ۳۶



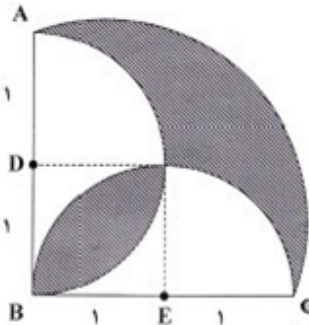
۷۴ در دایره  $C(O, 6)$  شکل زیر  $AB \parallel CD$  می‌باشد. طول وتر AB کدام است؟

- (۱) ۶  
(۲)  $6\sqrt{2}$   
(۳) ۳  
(۴)  $3\sqrt{2}$



۷۵ اگر در شکل مقابل نقطه O مرکز دایره و زوایای  $\hat{A} = 46^\circ$  و  $\hat{B} = 40^\circ$  باشند، اندازه زاویه X چند درجه است؟

- (۱)  $80^\circ$   
(۲)  $82^\circ$   
(۳)  $84^\circ$   
(۴)  $86^\circ$

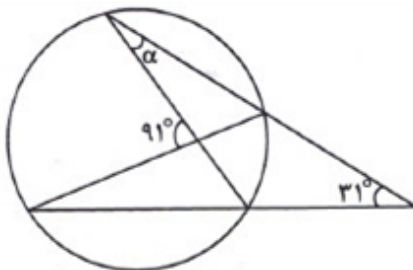


۷۶ دو نیم‌دایره به شعاع یک واحد به مراکز D و E و یک نیم‌دایره به شعاع دو واحد به مرکز B را در نظر بگیرید، مساحت قسمت هاشورزده چه قدر است؟

- (۱)  $2\pi + 2$   
(۲)  $\pi + 2$   
(۳)  $\pi - 2$   
(۴)  $2\pi - 2$

۷۷ برای یک دایره به شعاع ۶ واحد، اختلاف مساحت بین ۶ ضلعی منتظم محیطی و محاطی آن چند برابر  $\sqrt{3}$  است؟

- (۱) ۲۸  
(۲) ۲۴  
(۳) ۲۱  
(۴) ۱۸



۷۸ با توجه به اندازه‌ی زوایا در شکل، مقدار  $\alpha$  چند درجه است؟

- (۱) ۲۰  
(۲) ۲۵  
(۳) ۳۰  
(۴) ۳۵

۷۹ اگر در یک دایره مساحت مثلث متساوی الاضلاع محاطی آن برابر  $15\sqrt{3}$  باشد، مساحت شش ضلعی منتظم محاطی آن

کدام است؟

- (۱)  $5\sqrt{3}$  (۲)  $\frac{15}{2}\sqrt{3}$  (۳)  $30\sqrt{3}$  (۴)  $\frac{15}{4}\sqrt{3}$

۸۰ در مثلث متساوی الاضلاع ABC به ضلع  $\sqrt{3}$ ، اندازهی فاصلهی رأس a از مرکز دایرهی محاطی خارجی نظیر همان

رأس کدام است؟

- (۱)  $\frac{3}{2}$  (۲) ۳ (۳)  $\frac{2}{3}$  (۴)  $\frac{\sqrt{3}}{2}$

۸۱ اندازهی مماس مشترک خارجی دو دایرهی متخارج  $3\sqrt{7}$  و اندازهی مماس مشترک داخلی آنها  $\sqrt{15}$  و طول خط

المركزين آنها ۸ واحد است. حاصل ضرب شعاع‌های این دو دایره چه قدر است؟

- (۱) ۷ (۲) ۸ (۳) ۱۰ (۴) ۱۲

۸۲ اگر مساحت سه دایرهی محاطی خارجی یک مثلث  $4\pi$  و  $9\pi$  و  $36\pi$  باشد، محیط دایرهی محاطی داخلی این مثلث

کدام است؟

- (۱)  $\pi$  (۲)  $2\pi$  (۳)  $3\pi$  (۴)  $5\pi$

۸۳ اگر طول دو قاعده ذوزنقه‌ای که محیطی و محاطی است ریشه معادلهی  $4x^2 - 64x + 81 = 0$  باشد، مساحت

ذوزنقه کدام است؟

- (۱) ۲۴ (۲) ۲۷ (۳) ۳۰ (۴) ۳۶

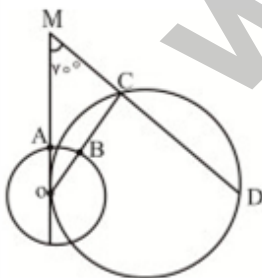
۸۴ دو دایره داریم، اگر بیشترین فاصله مرکز یک دایره از دایره دیگر به ترتیب ۲۶ و ۱۸ و طول مماس خارجی دو دایره

۱۵ باشد، مجموع طول خط‌المركزين و شعاع دو دایره چه قدر است؟

- (۱) ۲۵ (۲) ۲۶ (۳) ۲۷ (۴) ۲۸

۸۵ اگر شعاع دایره محیطی و محاطی داخلی مثلث قائم‌الزاویه‌ای به ترتیب ۱۰ و ۶ باشد، مساحت مثلث کدام است؟

- (۱) ۱۴۶ (۲) ۱۴۸ (۳) ۱۵۶ (۴) ۱۶۴



۸۶ در شکل زیر، اگر  $OM$  مماس بر دایره بزرگ‌تر،  $O$  مرکز دایره کوچک‌تر و

$CD = 100$  باشد،  $\widehat{AB}$  چند درجه است؟

(۱) ۲۵

(۲) ۳۰

(۳) ۳۵

(۴) ۴۰

۸۷ دایره‌ای از سه رأس مثلثی به اضلاع ۱،  $\frac{۰}{۹۶}$  و  $\frac{۰}{۲۸}$  می‌گذرد. مجموع فواصل مرکز دایره تا سه رأس مثلث کدام است؟

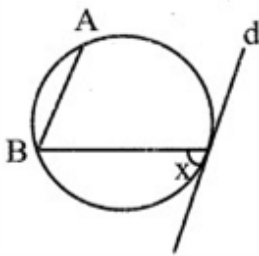
- (۱)  $\frac{۱}{۴}$  (۲)  $\frac{۱}{۵}$  (۳)  $\frac{۱}{۶}$  (۴)  $\frac{۲}{۱۲}$

۸۸ از نقطه‌ای که کمترین فاصله آن تا دایره‌ای به شعاع  $\frac{۴}{۵}$ ، برابر ۳ می‌باشد، مماسی رسم کرده‌ایم. طول مماس کدام است؟

- (۱)  $۳\sqrt{۳}$  (۲) ۶ (۳)  $۶\sqrt{۲}$  (۴)  $۶\sqrt{۳}$

۸۹ دایره‌ی  $C(O, R)$  مفروض است. از نقطه  $M$  در خارج از دایره، خطی چنان رسم کرده‌ایم که دایره را در دو نقطه  $A$  و  $B$  قطع کرده و  $MA = R$  است. قطری از دایره که  $MB$  را با زاویه  $۱۰^\circ$  قطع می‌کند،  $OB$  را با چه زاویه‌ای قطع می‌کند؟

- (۱)  $۱۴۰$  (۲)  $۱۵۰$  (۳)  $۱۶۰$  (۴)  $۱۷۰$



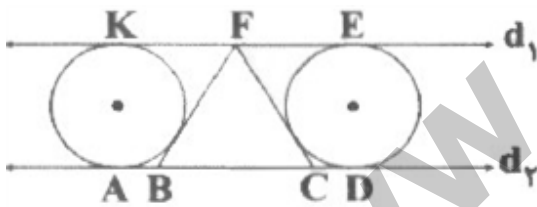
۹۰ در شکل زیر، خط  $d$  و پاره‌خط  $AB$  موازی هستند.

اگر  $AB = ۴۴^\circ$  باشد، آنگاه  $x$  چند درجه است؟

- (۱)  $۷۹$  (۲)  $۸۳$  (۳)  $۸۵$  (۴)  $۸۷$

۹۱ در دایره‌ای به شعاع  $۱۳$ ، از دو سر وترى به طول  $۱۰$ ، دو مماس رسم کرده‌ایم. سینوس زاویه بین دو مماس کدام است؟

- (۱)  $\frac{۱۲۰}{۱۶۹}$  (۲)  $\frac{۱۱۹}{۱۶۹}$  (۳)  $\frac{۱}{۱۶۹}$  (۴)  $\frac{۲۵}{۱۶۹}$



۹۲ با توجه به شکل زیر دو دایره با شعاع‌های یکسان رسم شده‌اند و دو خط  $d_1$  و  $d_2$  بر دو دایره مماس هستند و

$AD = ۱۵$  cm محیط مثلث  $FBC$  چند سانتی‌متر است؟

- (۱)  $۷۵$  (۲)  $۶۰$  (۳)  $۴۵$  (۴)  $۳۰$



۹۳ اگر در شکل زیر، مثلث  $MTS$  متساوی‌الاضلاع باشد، محیط این مثلث

چقدر است؟  $(SR = \frac{1}{۳}, TP = \frac{1}{۲}, SQ = \frac{1}{۲})$

- (۱)  $\frac{1}{۲}$  (۲) ۴ (۳) ۱ (۴) ۲

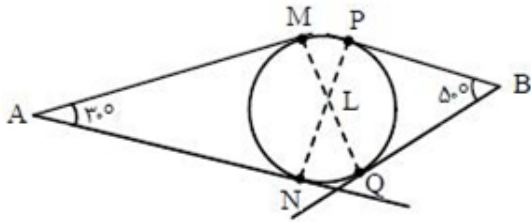
۹۴ فاصله نقطه  $M$  خارج از دایره از نزدیک‌ترین نقطه دایره  $C(O, ۳)$  برابر ۶ است. از  $M$  مماس بر دایره رسم می‌کنیم. اگر نقطه تماس  $T$  باشد فاصله  $T$  از  $MO$  چقدر است؟

- (۱)  $۲\sqrt{۲}$  (۲)  $۳\sqrt{۲}$  (۳)  $۲\sqrt{۳}$  (۴)  $۳\sqrt{۳}$

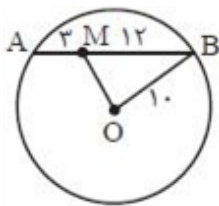


۹۵ دو دایره  $C_1$  و  $C_2$  مماس خارج‌اند. اگر اندازه شعاع دایره بزرگ‌تر ۳ برابر اندازه شعاع دایره کوچک‌تر باشد، در این صورت طول مماس مشترک خارج این دو دایره چند برابر شعاع دایره کوچک‌تر است؟  
 (۱)  $3\sqrt{2}$  (۲)  $2\sqrt{3}$  (۳)  $\sqrt{3}$  (۴)  $\sqrt{2}$

۹۶ در شکل زیر نقاط  $P, M, N, Q$  نقاط تماس با دایره هستند. اگر  $\hat{A} = 30^\circ$ ،  $\hat{B} = 50^\circ$  و  $ML = NL$  باشد، اندازه کمان  $QN$  چه قدر است؟



- (۱) ۳۰
- (۲) ۲۰
- (۳) ۴۰
- (۴) ۱۵

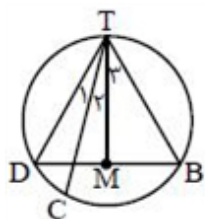


۹۷ در شکل مقابل نقطه  $O$  مرکز دایره می‌باشد. محیط مثلث  $OMB$  کدام است؟

- (۱) ۳۰
- (۲) ۲۷
- (۳) ۲۵
- (۴) ۳۵

۹۸ دایره‌ای به شعاع  $2\sqrt{3}$  در مثلث متساوی‌الاضلاعی محاط شده است. اندازه ارتفاع این مثلث کدام است؟

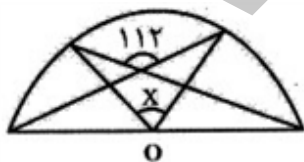
- (۱)  $6\sqrt{3}$
- (۲)  $4\sqrt{3}$
- (۳) ۱۲
- (۴) ۶



۹۹ در شکل مقابل  $\hat{T}_1 = \hat{T}_3$  می‌باشد. حاصل  $TM \cdot BC$  برابر با کدام گزینه است؟

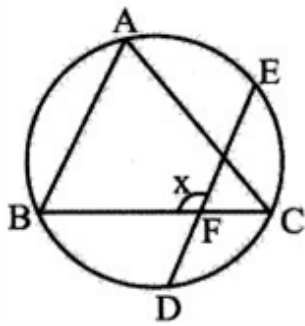
- (۱)  $TB \cdot BM$
- (۲)  $TD \cdot TB$
- (۳)  $BC \cdot TB$
- (۴)  $TB \cdot DM$

۱۰۰ دو دایره به شعاع واحد از مرکز یکدیگر می‌گذرند. مساحت ناحیه مشترک این دو دایره تقریباً کدام است؟  
 (۱)  $1/18$  (۲)  $1/23$  (۳)  $1/52$  (۴)  $1/57$



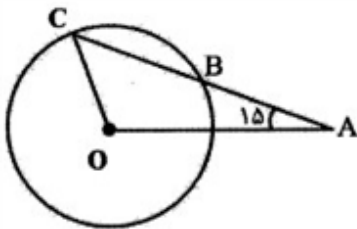
۱۰۱ در نیم دایره شکل زیر به مرکز  $O$ ، مقدار  $X$  چند درجه است؟

- (۱) ۴۰
- (۲) ۴۲
- (۳) ۴۴
- (۴) ۴۵



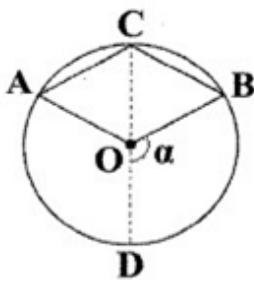
۱۰۲ در شکل زیر C وسط کمان DE و  $\hat{A} = 75^\circ$  است. X چند درجه است؟

- ۱۰۰ (۱)
- ۱۰۵ (۲)
- ۱۱۰ (۳)
- ۱۱۵ (۴)



۱۰۳ در شکل زیر، اگر O مرکز و شعاع دایره برابر ۱۰ و AB هم برابر ۱۰ باشد، طول AC تقریباً چقدر است؟

- ۱۸ (۱)
- ۲۰ (۲)
- ۲۷ (۴)
- ۲۵ (۳)

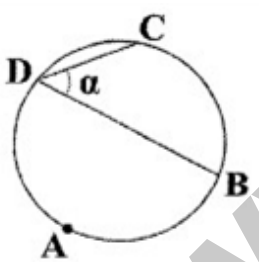


۱۰۴ چهارضلعی ACBO لوزی است. زاویه  $\alpha$  چقدر است؟ (O مرکز دایره است.)

- ۱۰۰° (۱)
- ۱۲۰° (۲)
- ۱۱۰° (۳)
- ۱۳۵° (۴)

۱۰۵ خط d بر دایره  $C(O, 12)$  مماس است. اگر فاصله O از d برابر  $2 + \frac{1}{m}$  باشد، مقدار m کدام است؟

- ۰/۱ (۱)
- ۰/۲ (۲)
- ۰/۵ (۳)
- ۹/۵ (۴)



۱۰۶ در دایره‌ی زیر پاره‌خط DC برابر شعاع دایره است. اگر  $\widehat{BC} = \widehat{AB} = \widehat{AD}$  باشد زاویه  $\alpha$  چقدر است؟

- ۵۵° (۱)
- ۶۵° (۲)
- ۶۰° (۳)
- ۵۰° (۴)

۱۰۷ M وسط ضلع BC از مثلث ABC می‌باشد.  $O_1$  مرکز دایره محیطی مثلث AMC می‌باشد. اگر

$$BO_1 = \sqrt{3}CO_1, \text{ آن‌گاه زاویه } \hat{BCO}_1 \text{ برابر است با:}$$

- ۴۵ (۱)
  - ۳۰ (۲)
  - ۶۰ (۳)
  - ۱۵ (۴)
- (۵) نمی‌توان محاسبه کرد.

۱۰۸ دایره محاطی داخلی مثلث ABC بر اضلاع BC و AB و AC به ترتیب در D و E و F مماس است. M وسط

AE می باشد. FM دایره محاطی داخلی مثلث را برای بار دوم در P قطع می کند، اگر  $\widehat{PAB} = \frac{\widehat{B} + \widehat{C}}{5}$ . آن گاه

$$\frac{\widehat{EDP}}{\widehat{FDP}} \text{ برابر است با:}$$

- (۱)  $\frac{3}{2}$  (۲)  $\frac{2}{3}$  (۳)  $\frac{2}{5}$  (۴)  $\frac{5}{2}$  (۵) ۱

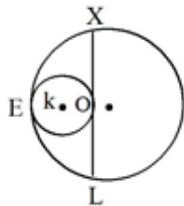
۱۰۹ در مثلث حاده الزویه  $\triangle ABC$ ، D و E و F به ترتیب پای ارتفاع های A و B و C می باشند. M و N و T به ترتیب

وسط های CE و BF و BC می باشند. اگر  $\widehat{NMA} = 50^\circ$ ، آن گاه  $\widehat{TAB}$  برابر است با:

- (۱) ۲۰ (۲) ۳۰ (۳) ۴۰ (۴) ۵۰ (۵) ۶۰

۱۱۰ در شکل زیر مساحت دایره به مرکز k برابر  $40\pi$  و XL بر دایره در O مماس است، همچنین دو دایره در E مماس

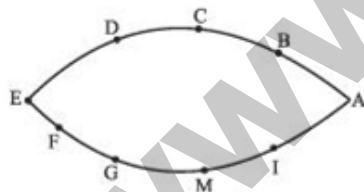
هستند. اگر حاصل ضرب شعاع دو دایره برابر ۱۴۰ باشد، طول XL چند است؟ (j مرکز دایره بزرگ و k مرکز دایره کوچک است.)



- (۱) ۱۰ (۲) ۲۰ (۳) ۶۰ (۴) ۳۰ (۵) ۴۰

۱۱۱ در شکل روبه رو نقطه های A, B, C, D, E با فاصله برابر روی کمانی از دایره قرار دارند و نقطه های

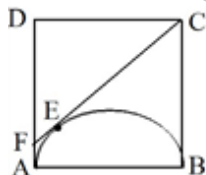
A, F, G, H, I با فاصله برابر روی کمانی از یک دایره دیگر به مرکز C قرار دارند. اگر  $\widehat{ABD} = 12^\circ$ ، از  $\widehat{AHG}$



چند است؟

- (۱)  $28^\circ$  (۲)  $40^\circ$  (۳)  $46^\circ$  (۴)  $12^\circ$  (۵)  $58^\circ$

۱۱۲ در شکل زیر ABCD مربعی به ضلع ۴ می باشد. اگر CF بر نیم دایره مماس باشد، طول CF چند است؟



- (۱)  $\frac{4}{2}$  (۲)  $\frac{11}{2}$  (۳) ۶ (۴) ۵ (۵)  $\frac{23}{4}$

- ۱۱۳ دایره‌های  $C_1, C_2$  در نقاط  $A$  و  $B$  هم‌دیگر را قطع می‌کند. مماس بر دایره  $C_1$  از  $A$  دایره  $C_2$  را در  $P$  و مماس از  $A$  بر دایره  $C_2$ ، دایره  $C_1$  را در  $Q$  قطع می‌کند. اگر  $PB = ۶۴۰, QB = ۱۰۰۰$ ، طول  $AB$  چند است؟
- (۱) ۸۱۰ (۲) ۹۰۰ (۳) ۸۰۰ (۴) ۴۸۰ (۵) ۷۲۰

- ۱۱۴ در چهارضلعی محاطی  $ABCD$  می‌دانیم:  $\widehat{BAC} = ۷۰^\circ, \widehat{ADB} = ۴۰^\circ, AD = ۴, BC = ۶$ ، طول  $AC$  کدام است؟

(۱)  $۳ + \sqrt{۵}$  (۲) ۶ (۳)  $\frac{۹\sqrt{۲}}{۲}$  (۴)  $۸ - \sqrt{۲}$  (۵) ۷

- ۱۱۵ نسبت مساحت‌های دو هشت‌ضلعی منتظم محاطی و محیطی یک دایره به شعاع  $r$  چقدر است؟

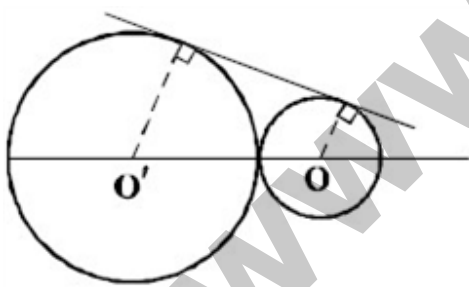
(۱)  $\frac{۲ + \sqrt{۲}}{۲}$  (۲)  $\frac{\sqrt{۲ + \sqrt{۲}}}{۲}$  (۳)  $\frac{۲ + \sqrt{۲}}{۴}$  (۴)  $\frac{۲ + \sqrt{۲}}{۸}$

- ۱۱۶ اندازه‌ی مماس مشترک خارجی دو دایره‌ی مماس بیرون، برابر ۴ است، اگر مجموع دو شعاع برابر ۵ باشد، مساحت دایره‌ی بزرگ‌تر چقدر است؟

(۱)  $۸\pi$  (۲)  $۴\pi$  (۳)  $\pi$  (۴)  $۱۶\pi$

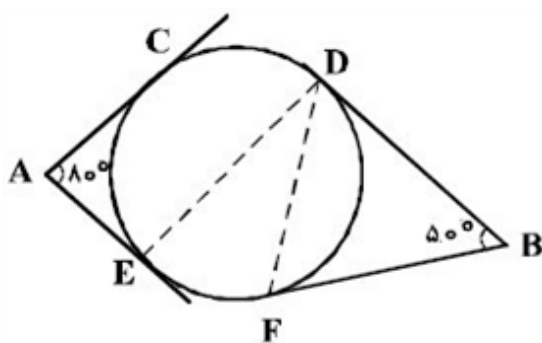
- ۱۱۷ در دو دایره به شعاع‌های ۲ و ۵ واحد، فاصله مرکزها ۹ واحد است. اندازه مماس مشترک داخلی آنها کدام است؟

(۱)  $۲\sqrt{۳}$  (۲)  $۳\sqrt{۲}$  (۳)  $۴\sqrt{۳}$  (۴)  $۴\sqrt{۲}$



- ۱۱۸ دو دایره به شعاع‌های ۹ و ۴ واحد مماس برهم‌اند. دایره به قطر  $OO'$  با مماس مشترک خارجی در نقطه‌ی  $M$  مشترک‌اند. فاصله‌ی  $M$  از نقطه‌ی تماس دو دایره، کدام است؟

(۱) ۶ (۲)  $۶/۵$  (۳) ۷ (۴)  $۷/۵$



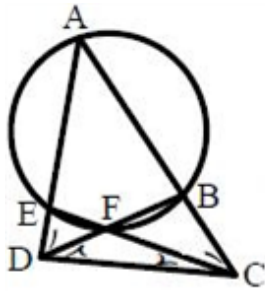
- ۱۱۹ در شکل زیر، اضلاع زاویه‌های  $A$  و  $B$  بر دایره مماس‌اند، اگر وتر  $CD$  برابر شعاع دایره باشد. زاویه‌ی  $\widehat{EDF}$  چند درجه است؟

(۱) ۲۵ (۲) ۳۰ (۳) ۳۵ (۴) ۴۰

۱۲۰ در یک دوزنقه‌ی متساوی‌الساقین، از برخورد نیم‌سازهای داخلی آن، دقیقاً کدام چهارضلعی، حاصل می‌شود؟  
 (۱) محاطی و محیطی (۲) فقط محاطی (۳) فقط محیطی (۴) نه محاطی و نه محیطی

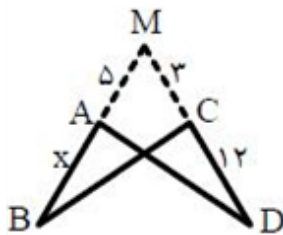
۱۲۱ در مثلث ABC با اضلاع  $AB = 5$  و  $AC = 7$  و  $BC = 8$  واحد، نیم‌ساز داخلی زاویه‌ی A، نیم‌سازهای زاویه‌ی داخلی و خارجی B را در O و O' قطع می‌کند. اندازه‌ی تصویر قائم OO'، بر روی BC، کدام است؟  
 (۱) ۱ (۲)  $1/5$  (۳) ۲ (۴)  $2/5$

۱۲۲ در یک چندضلعی محیطی به شعاع دایره‌ی محاطی ۲، اگر مجموع مساحت و مجذور محیط ۶۰۰ باشد، محیط این چندضلعی کدام است؟  
 (۱) ۲۴ (۲) ۱۲ (۳) ۳۶ (۴) ۱۸



۱۲۳ با توجه به شکل داریم:  $\hat{D}_1 = 2\hat{D}_2$ ,  $\hat{C}_1 = 2\hat{C}_2$  و F روی دایره قرار دارد. اندازه‌ی A کدام است؟  
 (۱)  $60^\circ$  (۲)  $45^\circ$  (۳)  $30^\circ$  (۴) اطلاعات کافی نیست.

۱۲۴ در شکل زیر AB و CD را امتداد دادیم تا در نقطه‌ی M متقاطع شوند. اگر  $\hat{A} = \hat{C}$  باشد، اندازه‌ی x کدام است؟



۱۲۵ اگر شعاع دایره‌ی محاطی یک لوزی برابر ۲ و یکی از قطرهای لوزی ۸ باشد، مساحت لوزی کدام است؟  
 (۱) ۳۲ (۲)  $\frac{32}{\sqrt{2}}$  (۳)  $\frac{32}{\sqrt{3}}$  (۴)  $\frac{32}{\sqrt{5}}$

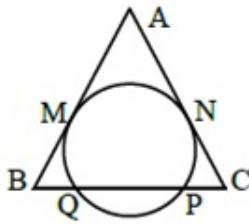
۱۲۶ در مثلثی با ابعاد ۱۰، ۱۰ و ۱۲ بزرگ‌ترین شعاع دایره‌ی محاطی خارجی کدام است؟  
 (۱) ۱۵ (۲) ۱۲ (۳) ۱۰ (۴) ۸

۱۲۷ اگر در یک مثلث شعاع‌های سه دایره‌ی محاطی خارجی برابر ۳۰، ۱۰ و ۱۵ باشد و اندازه‌ی دو ارتفاع ۱۵ و ۲۰ باشد، اندازه‌ی ارتفاع سوم مثلث کدام است؟  
 (۱) ۲۰ (۲) ۱۸ (۳) ۱۵ (۴) ۱۲

۱۲۸ دو دایره  $C(O, R)$  و  $C'(O', R')$  فقط سه مماس مشترک دارند. از هر یک از مرکز دایره‌ها به نقاط تماس مماس مشترک با دایره‌هایشان وصل می‌کنیم تا چهارضلعی با خط‌المركزین به‌وجود آید. اگر طول خط‌المركزین برابر ۸ و نسبت شعاع‌ها ۳ باشد، مساحت چهارضلعی کدام است؟

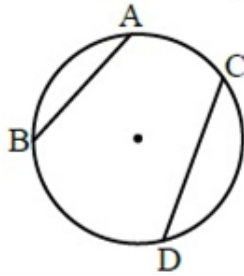
(۱)  $4\sqrt{3}$  (۲)  $6\sqrt{3}$  (۳)  $8\sqrt{3}$  (۴)  $16\sqrt{3}$

۱۲۹ در شکل زیر اضلاع  $AB$  و  $AC$  در نقاط  $M$  و  $N$  بر دایره مماس است و  $BC$  در نقاط  $P$  و  $Q$  دایره را قطع می‌کند. اگر  $BM = 4$ ،  $BQ = 2$ ،  $CP = 3$  باشد، اندازه  $CN$  کدام است؟



- (۱) ۳  
(۲)  $3\sqrt{3}$   
(۳) ۶  
(۴)  $\frac{8}{3}$

۱۳۰ در دایره‌ای دو وتر به طول‌های  $AB = 6$  و  $CD = 8$  مفروض است. اگر مجموع دو کمان  $AB$  و  $CD$  برابر  $180^\circ$  درجه باشد، شعاع دایره کدام است؟



- (۱) ۸  
(۲) ۴  
(۳) ۱۰  
(۴) ۵

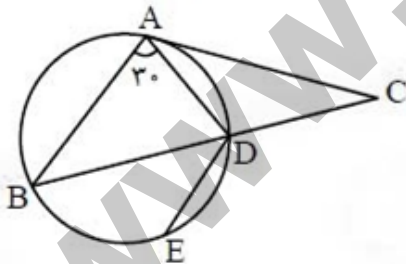
۱۳۱ وترى به طول ۱۲ در داخل دایره‌ای به شعاع ۱۰ رسم شده است. کمترین فاصله نقطه وسط کمان نظیر این وتر کدام است؟

- (۱) ۱  
(۲) ۳  
(۳)  $\frac{2}{5}$   
(۴) ۲

۱۳۲ در دایره‌ای به شعاع ۱۲، وترى به طول ۲۱ رسم شده است. نقطه‌ای روی این وتر از مرکز دایره به فاصله ۸ می‌باشد. این نقطه وتر را به چه نسبتی تقسیم می‌کند؟

- (۱)  $\frac{12}{5}$   
(۲)  $\frac{16}{5}$   
(۳)  $\frac{21}{5}$   
(۴)  $\frac{27}{5}$

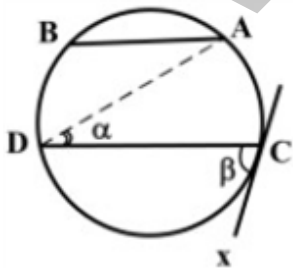
۱۳۳ در شکل زیر  $AC$  در نقطه  $A$  بر دایره مماس است و  $AB = AC$  و  $DE$  موازی  $AB$  می‌باشد، اگر  $\angle BAD = 30^\circ$



کمان  $BE$  چند درجه است؟

- (۱) ۵۰  
(۲) ۶۰  
(۳) ۱۰۰  
(۴) ۱۲۰

۱۳۴ در شکل زیر، وتر  $AB$  برابر شعاع دایره و  $AB \parallel CD$ ، زاویه‌ی  $\beta = 2\alpha$  و  $CX$  مماس بر دایره است. کمان  $BD$  چند درجه است؟



- (۱) ۵۰  
(۲) ۶۰  
(۳) ۷۰  
(۴) ۷۵

۱۳۵) یک دوزنقه متساوی‌الساقین به قاعده‌های ۷ و ۱۵ واحد بر دایره‌ای محیط است. کمترین فاصله رأس دوزنقه از نقاط دایره کدام است؟

(۱)  $2\sqrt{3}$  (۲)  $\frac{1}{2}(\sqrt{105} - \sqrt{77})$  (۳)  $\frac{3}{5}$  (۴)  $\frac{1}{2}(\sqrt{154} - \sqrt{105})$

۱۳۶) در یک چهارضلعی، اضلاع متوالی همچنین زاویه‌های متوالی، جملات متوالی از دو دنباله عددی‌اند. نوع چهارضلعی کدام است؟

(۱) محاطی و محیطی (۲) محیطی و غیرمحاطی (۳) محاطی و غیرمحیطی (۴) غیرمحاطی و غیرمحیطی

۱۳۷) در دایره‌ای، یک وتر به طول  $\sqrt{3}$  برابر شعاع آن رسم شده است. فاصله مرکز دایره از این وتر چند برابر بزرگترین وتر آن است؟

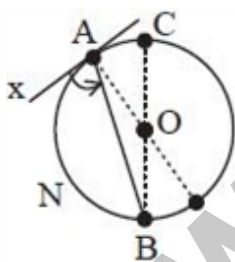
(۱)  $\frac{1}{4}$  (۲)  $\frac{1}{3}$  (۳)  $\frac{\sqrt{3}}{4}$  (۴)  $\frac{\sqrt{3}}{2}$

۱۳۸) اگر دو دایره C و C' در نقاط A و B متقاطع باشند و از نقطه A خط دلخواهی رسم کنیم تا دو دایره را در دو نقطه E و F قطع کند. با تغییر وضعیت خط EF (جابه‌جایی E و F)، اندازه زاویه  $\widehat{EBF}$  در کدام گزینه برقرار است؟

- (۱) با تغییر E و F، زاویه  $\widehat{EBF}$  افزایش می‌یابد.  
 (۲) با تغییر E و F، زاویه  $\widehat{EBF}$  کاهش می‌یابد.  
 (۳) با تغییر E و F، زاویه  $\widehat{EBF}$  گاهی افزایش و گاهی کاهش می‌یابد.  
 (۴) با تغییر E و F، زاویه  $\widehat{EBF}$  ثابت می‌ماند.

۱۳۹) در دایره C(O,R) وتر AB، وتر CD به طول ۹ سانتی‌متر را به نسبت ۱ به ۲ تقسیم کرده. اگر  $AB = 11 \text{ cm}$  باشد، آن‌گاه وتر CD، وتر AB را به چه نسبتی قطع می‌کند؟

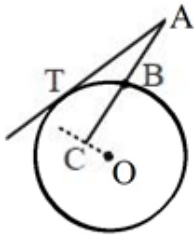
(۱) ۳ و ۴ (۲) ۵ و ۳ (۳) ۹ و ۲ (۴) ۱ و ۲



۱۴۰) در شکل مقابل نقطه O مرکز دایره و زاویه  $\widehat{XAB} = 70^\circ$ ، اندازه کمان AC چند درجه است؟

- (۱)  $70^\circ$   
 (۲)  $40^\circ$   
 (۳)  $35^\circ$   
 (۴)  $20^\circ$

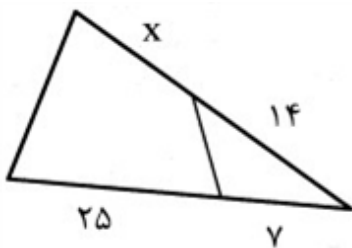
۱۴۱) در شکل زیر، O مرکز دایره و AT بر دایره مماس است. اگر  $OC = 2$ ،  $BC = 1$ ،  $AB = 4$  و  $AT = 6$  باشد، شعاع دایره کدام است؟



- (۱) ۲  
(۲)  $\frac{5}{2}$   
(۳)  $\sqrt{2}$   
(۴)  $2\sqrt{2}$

۱۴۲) از نقطه M خارج دایره، یک مماس و یک قاطع بر دایره رسم کرده‌ایم تا خط قاطع دایره را در نقاط A و B قطع کند. اگر طول مماس ۸ و فاصله نقاط قاطع با دایره تا نقطه تماس به ترتیب ۴ و ۶ باشد، آن گاه MA برابر کدام است؟

- (۱)  $\frac{18}{3}$  (۲)  $\frac{17}{3}$  (۳)  $\frac{16}{3}$  (۴)  $\frac{19}{3}$



۱۴۳) در شکل مقابل چهارضلعی قابل محاط در دایره است. اندازه X کدام است؟

- (۱) ۲  
(۲) ۳  
(۳) ۴  
(۴) ۵

۱۴۴) چهارضلعی ABCD محاط در دایره است. دو ضلع AB و DC در نقطه P متقاطع‌اند. زاویه P برابر  $25^\circ$  و زاویه بین دو قطر AC و BD برابر  $75^\circ$  است. زاویه DBP چند درجه است؟

- (۱) ۱۱۵ (۲) ۱۲۰ (۳) ۱۲۵ (۴) ۱۳۰

۱۴۵) از یک نقطه‌ی خارج دایره‌ای به شعاع ۴ واحد، دو مماس عمود بر هم بر دایره رسم می‌کنیم. مساحت ناحیه‌ی محدود بین این دو مماس و دایره چند واحد سطح است؟

- (۱)  $16 - 4\pi$  (۲)  $4 - 2\pi$  (۳)  $2 - \pi$  (۴)  $1 - \pi$

۱۴۶) در مثلثی زاویه  $\hat{A} = 60^\circ$  و  $c = 2b = 10$  است. مساحت ناحیه محدود به دایره‌های محیطی و محاطی داخلی این مثلث کدام است؟

- (۱)  $\frac{15\sqrt{3}}{4}\pi$  (۲)  $\frac{25\sqrt{3}}{4}\pi$  (۳)  $\frac{15\sqrt{3}}{2}\pi$  (۴)  $\frac{25\sqrt{3}}{2}\pi$

۱۴۷) در دو دایره هم مرکز به شعاع‌های ۳ و ۷ واحد، اندازه وترى از دایره بزرگ مماس بر دایره کوچک کدام است؟

- (۱)  $2\sqrt{10}$  (۲)  $4\sqrt{10}$  (۳)  $3\sqrt{5}$  (۴)  $5\sqrt{3}$

۱۴۸) در دایره‌ای به شعاع ۱۵، وترى به طول ۱۸ و عمود به شعاع رسم می‌کنیم. این وتر شعاع را به چه نسبتی تقسیم می‌کند؟

- (۱)  $\frac{1}{4}$  (۲)  $\frac{1}{3}$  (۳)  $\frac{2}{9}$  (۴)  $\frac{1}{5}$

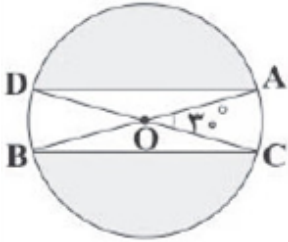


۱۴۹ نقاط  $A(4, 0)$ ،  $B(0, 2)$  و  $C(-4, -2)$  سه رأس مثلث  $ABC$  هستند. شعاع دایره‌ی محیطی این مثلث کدام است؟

- (۱)  $\frac{1}{3}\sqrt{175}$  (۲)  $\frac{3}{2}\sqrt{170}$  (۳)  $\frac{1}{3}\sqrt{170}$  (۴)  $\frac{3}{2}\sqrt{175}$

۱۵۰ در دایره‌ی  $C(O, 2\sqrt{3})$  وتر  $AB = 6$  رسم شده است.  $\widehat{AB}$  چند درجه است؟

- (۱)  $60^\circ$  (۲)  $120^\circ$  (۳)  $150^\circ$  (۴)  $160^\circ$

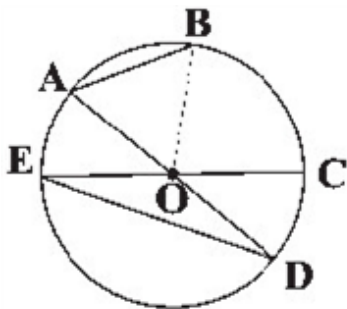


۱۵۱ مطابق شکل زیر دایره‌ی  $C(O, R)$  داده شده است. اگر قطرهای  $AB$  و  $CD$  دایره باشند، مساحت ناحیه‌ی رنگی کدام است؟

- (۱)  $\frac{R^2}{4}(\frac{\pi}{3} - 1)$  (۲)  $\frac{R^2}{2}(\frac{\pi}{3} - 1)$   
 (۳)  $\frac{R^2}{4}(\frac{5\pi}{3} - 1)$  (۴)  $\frac{R^2}{2}(\frac{5\pi}{3} - 1)$

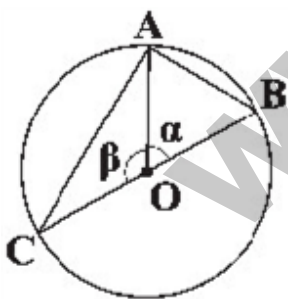
۱۵۲ در یک دوزنقه محاطی، اندازه زاویه بین هر قطر با قاعده بزرگتر آن،  $27^\circ$  درجه است. زاویه بین دو قطر این دوزنقه چند درجه است؟

- (۱)  $45^\circ$  (۲)  $54^\circ$  (۳)  $58^\circ$  (۴)  $62^\circ$



۱۵۳ در شکل زیر  $AB = OE$  است. اگر  $\widehat{BOC} = 80^\circ$  باشد،  $\widehat{ADE}$  چه قدر است؟ (O مرکز دایره است.)

- (۱)  $15^\circ$  (۲)  $25^\circ$  (۳)  $20^\circ$  (۴)  $30^\circ$



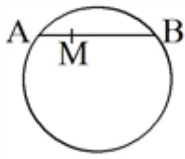
۱۵۴ در شکل زیر  $\widehat{AB} = 60^\circ$  و  $AB = 10$  می‌باشد. با فرض این که  $BC$  قطر و O مرکز دایره باشد، اندازه‌ی  $AC$  چه قدر است؟

- (۱) ۱۰ (۲)  $10\sqrt{5}$  (۳)  $10\sqrt{3}$  (۴) ۲۰

۱۵۵ اندازه‌ی مماس مشترک دو دایره‌ی مماس برون،  $\sqrt{2}$  برابر شعاع دایره‌ی بزرگتر است. نسبت شعاع‌ها چه قدر است؟

- (۱) ۲ (۲)  $\sqrt{2}$  (۳)  $2\sqrt{2}$  (۴)  $\frac{1}{\sqrt{2}}$

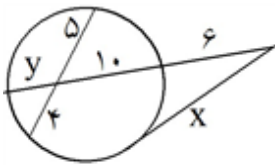
۱۵۶ در چهارضلعی محاطی ABCD داریم  $\hat{A} = \hat{C} = \hat{B} - 60^\circ$ . زاویه  $\hat{D}$  چند درجه است؟  
 ۲۰ (۱)      ۳۰ (۲)      ۴۰ (۳)      ۵۰ (۴)



۱۵۷ وتر AB به طول ۸ توسط نقطه‌ی M به دو قسمت با نسبت ۱ به ۳ تقسیم شده است.

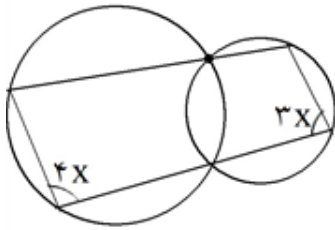
اندازه‌ی کوچک‌ترین وتر گذرنده از M در این دایره برابر کدام است؟

- ۴ (۱)  
 $2\sqrt{3}$  (۲)  
 ۶ (۴)  
 $4\sqrt{3}$  (۳)



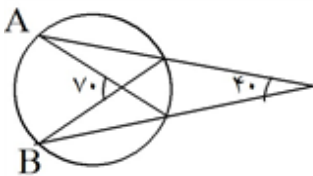
۱۵۸ در شکل مقابل X برابر کدام است؟

- $2\sqrt{6}$  (۱)  
 $2\sqrt{3}$  (۲)  
 $6\sqrt{3}$  (۳)  
 $4\sqrt{3}$  (۴)



۱۵۹ در شکل مقابل اندازه‌ی زاویه‌ی X برابر کدام است؟

- $\frac{180}{7}$  (۱)  
 ۳۰ (۲)  
 $\frac{90}{7}$  (۳)  
 ۴۰ (۴)

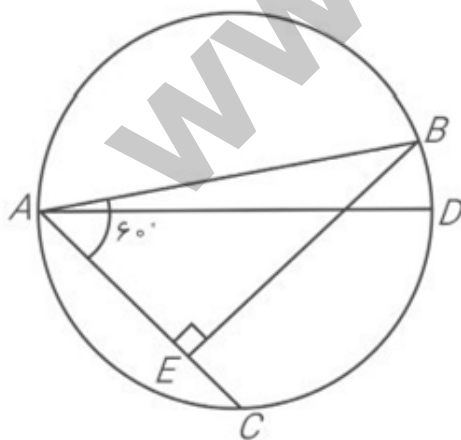


۱۶۰ در شکل مقابل اندازه‌ی کمان AB برابر کدام است؟

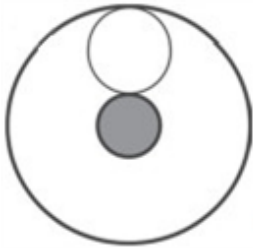
- ۱۴۰ (۲)  
 ۱۱۰ (۱)  
 ۱۲۰ (۴)  
 ۱۰۰ (۳)

۱۶۱ در شکل، وترهای AB و AC را در دایره‌ای به قطر AD کشیده‌ایم. می‌دانیم که  $\hat{BAC} = 60^\circ$ ،  $BE \perp AC$ .

طول وتر BD چقدر است؟  $AB = 24\text{cm}$  و  $EC = 3\text{cm}$ .



- $\sqrt{3}$  (۱)  
 ۲ (۲)  
 ۳ (۳)  
 $2\sqrt{3}$  (۴)  
 $3\sqrt{2}$  (۵)



۱۶۲ دو دایره هم‌مرکز به شعاع‌های ۱ و ۹ حلقه تشکیل داده‌اند. می‌خواهیم در داخل حلقه  $\pi$  دایره قرار بدهیم که همپوشانی ندارند و هر کدامشان به هر دو دایره حلقه مماس هستند (در شکل، مثالی با  $\pi = 1$  و شعاع‌هایی غیر از فرض مسئله می‌بینید). بزرگ‌ترین مقدار  $\pi$  چیست؟

- ۱ (۱)      ۲ (۲)      ۳ (۳)      ۴ (۴)      ۵ (۵)

۱۶۳ دو دایره به شعاع‌های ۴ و ۹ واحد مماس خارجی هستند. اندازه مماس مشترک خارجی آن دو کدام است؟

- ۱ (۷/۵)      ۲ (۸)      ۳ (۱۰)      ۴ (۱۲)

۱۶۴ در داخل دایره دو وتر  $AB = 22$  و  $CD = 18$  متقاطع‌اند. اگر  $AB$  وتر  $CD$  را به نسبت ۱ و ۲ قطع کند، آنگاه  $CD$  وتر  $AB$  را به کدام نسبت قطع می‌کند؟

- ۱ (۲ و ۵)      ۲ (۴ و ۷)      ۳ (۲ و ۹)      ۴ (۳ و ۸)

۱۶۵ در دو دایره به مرکزهای  $O$  و  $O'$  شعاع‌های ۳ و ۵ واحد و  $OO' = 8$  مماس مشترک‌های داخلی و خارجی در نقطه  $M$  متقاطع‌اند زاویه  $\widehat{OMO'}$  چند درجه است؟

- ۱ (۴۵)      ۲ (۶۰)      ۳ (۷۵)      ۴ (۹۰)

۱۶۶ دایره گذرا از سه نقطه  $(-3, 0)$  و  $(7, 0)$  و  $(0, 5)$  محور  $Y$  را در نقطه دیگری با کدام عرض قطع می‌کند؟

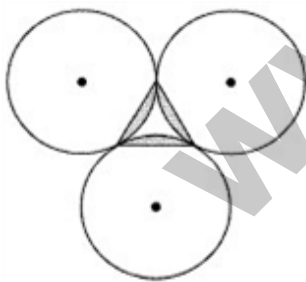
- ۱ (۲/۱-)      ۲ (۴/۳-)      ۳ (۶/۳-)      ۴ (۲/۴-)

۱۶۷ پاره‌خط  $AB = 4$  مفروض است. شعاع دایره‌ای که از نقاط  $A$  و  $B$  می‌گذرد و فاصله‌ی مرکز آن تا پاره‌خط  $AB$  برابر ۲ می‌باشد، کدام است؟

- ۱ ( $2\sqrt{2}$ )      ۲ ( $2\sqrt{3}$ )      ۳ ( $\sqrt{2}$ )      ۴ ( $\sqrt{3}$ )

۱۶۸ در دایره‌ی  $C(O, 5)$  نقطه‌ی  $A$  به فاصله‌ی ۳ از مرکز دایره قرار دارد. اندازه‌ی بلندترین وتر گذرنده از نقطه‌ی  $A$  کدام است؟

- ۱ (۵)      ۲ (۱۰)      ۳ (۸)      ۴ (۴)



۱۶۹ در شکل زیر، سه دایره به شعاع‌های برابر ۶، دو به دو بر هم مماس‌اند. مساحت قسمت رنگی کدام است؟

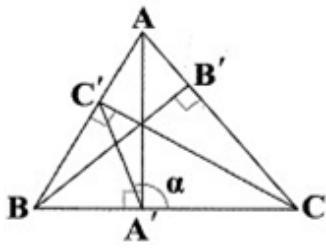
- ۱ ( $6\pi - 6\pi\sqrt{3}$ )      ۲ ( $6\pi - 9\sqrt{3}$ )  
۳ ( $18\pi - 27\sqrt{3}$ )      ۴ ( $24\pi - 27\sqrt{3}$ )

۱۷۰ در مثلث  $ABC$ ، اگر  $O$  مرکز دایره‌ی محاطی داخلی و  $O_A, O_B, O_C$  مراکز دایره‌های محاطی خارجی رو به

رأس‌های به ترتیب  $A, B$  و  $C$  باشند، آنگاه  $\frac{AO}{AO_A} + \frac{BO}{BO_B} + \frac{CO}{CO_C}$  کدام است؟

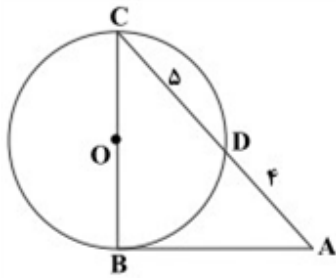
- ۱ ( $\frac{r_a + r_b + r_c}{r}$ )      ۲ ( $\frac{r}{r_a + r_b + r_c}$ )      ۳ (۱)      ۴ ( $\frac{r_a r_b + r_b r_c + r_c r_a}{r_a + r_b + r_c}$ )

- ۱۷۱) در مثلث  $ABC$ ،  $c = 3$ ،  $b = 4$  و  $a = 5$  می‌باشد. اگر نقطه‌ی  $K$ ، محل برخورد دایره‌ی محاطی داخلی با ضلع  $a$  و نقطه‌ی  $K'$  محل برخورد دایره‌ی محاطی خارجی رو به رأس  $A$  با ضلع  $a$  باشد، طول  $KK'$  کدام است؟
- ۱ (۱)      ۲ (۲)      ۳ (۳)      ۴ (۴)



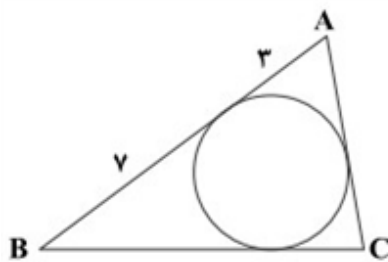
- ۱۷۲) در مثلث  $ABC$  هستند. اگر  $\hat{A} = 70^\circ$  باشد، اندازه‌ی زاویه‌ی  $\alpha$  کدام است؟

- ۱ (۱)  $130^\circ$       ۲ (۲)  $120^\circ$   
۳ (۳)  $110^\circ$       ۴ (۴)  $100^\circ$



- ۱۷۳) در شکل مقابل، خط  $AB$  بر دایره‌ای به قطر  $BC$  مماس است. اگر  $AD = 4$  و  $CD = 5$ ، شعاع دایره چند برابر  $\sqrt{5}$  است؟

- ۱ (۱)  $\frac{1}{2}$       ۲ (۲)  $\frac{1}{4}$   
۳ (۳)  $\frac{3}{4}$       ۴ (۴)  $\frac{3}{2}$

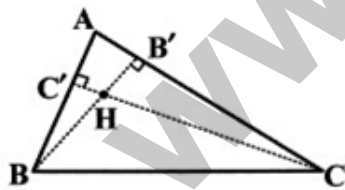


- ۱۷۴) در شکل مقابل، اگر  $BC = 9$ ، طول  $AC$  کدام است؟

- ۱ (۱) ۷  
۲ (۲) ۵  
۳ (۳) ۶  
۴ (۴) ۴

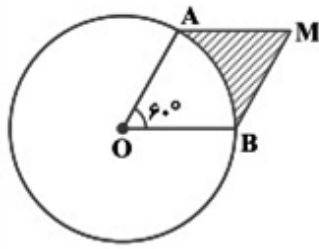
- ۱۷۵) مثلثی با دو ضلع  $AB = 13$ ،  $AC = 9$  بر دایره‌ای محیط است. اگر طول قطعه مماس که از رأس  $A$  بر دایره رسم شود برابر ۶ واحد باشد، طول ضلع سوم مثلث کدام است؟
- ۱ (۱) ۸      ۲ (۲) ۱۰      ۳ (۳) ۱۱      ۴ (۴) ۱۲

- ۱۷۶) در مثلث  $ABC$ ، ارتفاع‌های  $BB'$  و  $CC'$  در  $H$  متقاطع‌اند. اگر  $CB' = 5$ ،  $AB' = 2$  و  $CH = \frac{5}{6}$  باشد، فاصله  $H$  از ضلع  $AB$  کدام است؟



- ۱ (۱)  $\frac{1}{5}$   
۲ (۲)  $\frac{1}{65}$   
۳ (۳)  $\frac{1}{75}$   
۴ (۴) ۱

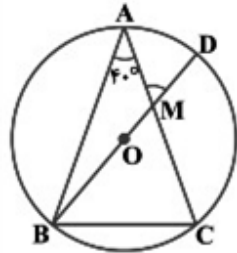
۱۷۷ دایره‌ی  $C(O, R)$  و لوزی OAMB مفروض است. مساحت قسمت هاشورخورده تقریباً چه مضرب‌ی از  $R^2$  است؟



$(\sqrt{3} \approx 1/7)$

- ۰/۵ (۱)
- ۰/۳۳ (۲)
- ۰/۲۵ (۳)
- ۰/۶۶ (۴)

۱۷۸ در شکل مقابل مثلث ABC متساوی‌الساقین است ( $AB = AC$ ). اندازه‌ی کمان AD چند درجه است؟ (O مرکز دایره است.)



- ۴۵ (۱)
- ۵۰ (۲)
- ۴۰ (۳)
- ۵۵ (۴)

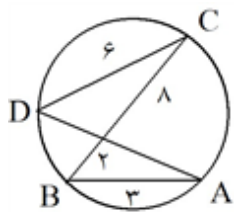
۱۷۹ از دو نقطه به فاصله‌ی ۷، چند دایره به شعاع ۳ می‌گذرد؟

- ۱ (۱)
- ۲ (۲)
- ۳ حداکثر (۳)
- ۴ صفر (۴)

۱۸۰ مثلثی با دو ضلع  $AB = ۱۳$ ،  $AC = ۹$  بر دایره‌ای محیط است. اگر طول قطعه مماس که از رأس A بر دایره رسم می‌شود برابر ۶ واحد باشد، طول ضلع سوم مثلث کدام است؟

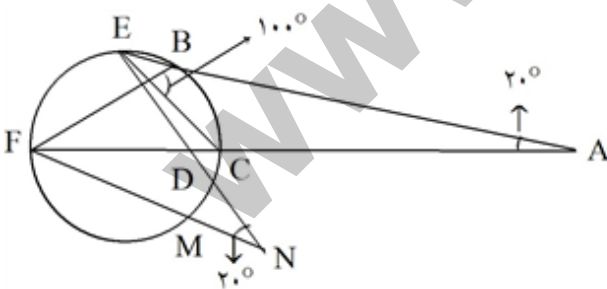
- ۸ (۱)
- ۱۰ (۲)
- ۱۱ (۳)
- ۱۲ (۴)

۱۸۱ در شکل زیر، اندازه‌ی وتر AD کدام است؟



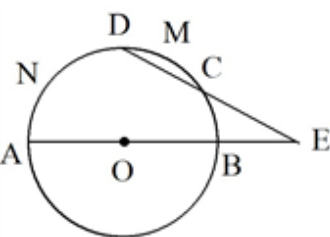
- ۸ (۱)
- ۷ (۲)
- ۶ (۳)
- ۹ (۴)

۱۸۲ اندازه‌ی  $\widehat{MD}$  چند درجه است؟



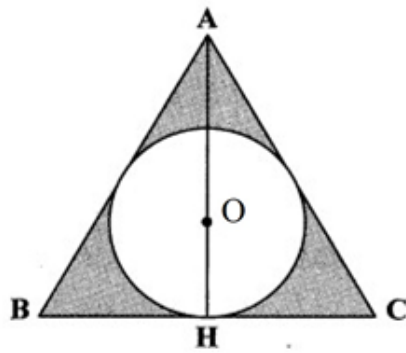
- ۴۰ (۱)
- ۶۰ (۲)
- ۸۰ (۳)
- ۱۰۰ (۴)

۱۸۳ در شکل زیر O مرکز دایره،  $\widehat{DMC} = ۳۰^\circ$  و  $\widehat{E} = ۳۰^\circ$  است. اندازه‌ی  $\widehat{AND}$  چند درجه است؟



- ۱۰۵ (۱)
- ۹۵ (۲)
- ۸۵ (۳)
- ۱۱۵ (۴)

۱۸۴ در شکل زیر، در مثلث متساوی الساقین  $\triangle ABC$ ،  $AH = 12$ ،  $BC = 10$  و نقطه  $O$  مرکز دایره محاطی مثلث است.



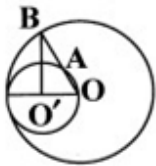
مساحت ناحیه هاشور خورده کدام است؟

(۱)  $\frac{10}{9}(18 - 5\pi)$

(۲)  $\frac{10}{9}(21 - 10\pi)$

(۳)  $\frac{20}{9}(21 - 10\pi)$

(۴)  $\frac{20}{9}(27 - 5\pi)$



۱۸۵ در دو دایره به مرکزهای  $O$  و  $O'$  اگر  $\widehat{O'} = 90^\circ$  باشد کمان  $OA$  چند درجه است؟

(۱) ۳۰

(۲) ۴۵

(۳) ۶۰

(۴) ۷۵

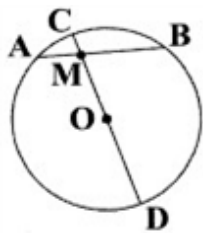
۱۸۶ طول وتری از دایره به قطر ۱۲ واحد برابر شعاع آن است مساحت قطعه‌ای از دایره محدود به این وتر و کمان آن کدام است؟

(۱)  $6\pi - 9\sqrt{3}$

(۲)  $6\pi - 8\sqrt{3}$

(۳)  $3(\pi - \sqrt{3})$

(۴)  $2(2\pi - \sqrt{3})$



۱۸۷ اگر  $AM = 2\text{ cm}$ ،  $BM = 4/5\text{ cm}$  و شعاع دایره  $5\text{ cm}$  باشد،

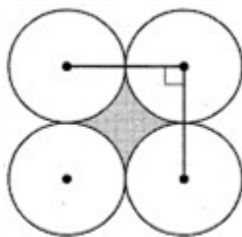
مطلوبست محاسبه‌ی  $\frac{CM}{DM}$  (O مرکز دایره است).

(۱)  $\frac{1}{9}$

(۲) ۹

(۳)  $\frac{1}{3}$

(۴) ۳



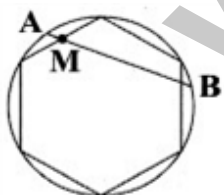
۱۸۸ مساحت ناحیه‌ی رنگی چند سانتی‌متر مربع است؟ (شعاع دایره‌ها برابر با  $4\text{ cm}$  است.)

(۱)  $16 - 4\pi$

(۲)  $64 - 4\pi$

(۳)  $16\pi - 16$

(۴)  $64 - 16\pi$



۱۸۹ اگر  $AM = 2\text{ cm}$ ،  $AB = 10\text{ cm}$  و نقطه‌ی  $M$  وسط ضلع شش‌ضلعی منتظم باشد،

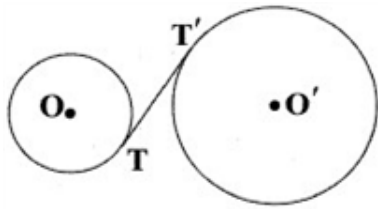
مطلوب است محیط شش‌ضلعی منتظم:

(۱) ۱۵

(۲) ۲۴

(۳) ۳۰

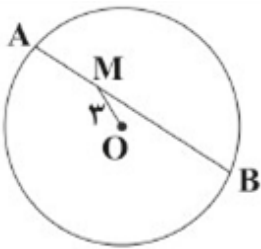
(۴) ۴۸



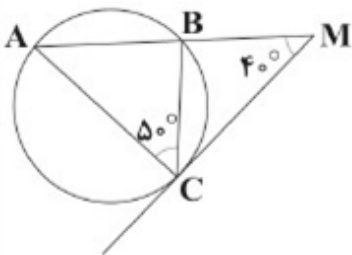
190. دو دایره  $C$  و  $C'$  مشترک به  $TT'$  مماس است. اگر شعاع دایره‌ها به ترتیب  $3\text{cm}$  و  $5\text{cm}$  و فاصله‌ی دو دایره از یکدیگر  $10\text{cm}$  باشد، آن‌گاه طول  $O'T$  چند سانتی‌متر است؟
- (1)  $6$  (2)  $\sqrt{45}$  (3)  $\sqrt{61}$  (4)  $\sqrt{70}$



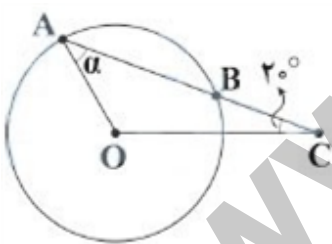
191. اگر محیط پنج‌ضلعی محیطی زیر  $16\text{cm}$  و شعاع دایره‌ی محاطی آن  $2\text{cm}$  باشد، آن‌گاه مساحت ناحیه‌ی رنگی کدام است؟
- (1)  $16 - 4\pi$  (2)  $32 - 4\pi$  (3)  $16$  (4)  $32$



192. در شکل زیر اگر شعاع دایره  $10\text{cm}$  و  $OM = 3\text{cm}$  باشد، آن‌گاه  $AM \times MB$  کدام است؟
- (1)  $91$  (2)  $109$  (3)  $49$  (4)  $80$

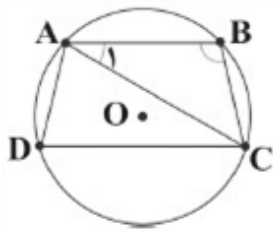


193. در صورتی که خط  $MC$  بر دایره مماس باشد، اندازه‌ی  $\widehat{AC}$  چند درجه است؟
- (1)  $150$  (2)  $160$  (3)  $170$  (4)  $195$



194. دایره‌ی  $C(O, R = 2\text{cm})$  مفروض است. اگر  $BC = 2\text{cm}$  و  $\widehat{BCO} = 20^\circ$  باشد، آن‌گاه اندازه‌ی زاویه‌ی  $\alpha$  کدام است؟
- (1)  $30^\circ$  (2)  $40^\circ$  (3)  $60^\circ$  (4)  $80^\circ$

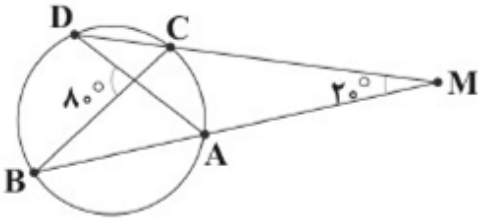
195. وتر  $AB$  از یک دایره به شعاع  $r$  مفروض است.  $k$  نقطه روی محیط دایره وجود دارند که از وتر  $AB$  به فاصله‌ی  $l$  می‌باشند.  $k$  چند مقدار طبیعی می‌تواند اختیار کند؟ ( $AB$  بزرگ‌ترین وتر نیست.)
- (1)  $1$  (2)  $2$  (3)  $3$  (4)  $4$



196 در شکل زیر  $AB \parallel CD$  و  $\hat{B} - \hat{A}_1 = 60^\circ$  اگر  $DC = 2\sqrt{3}$ ، آن‌گاه

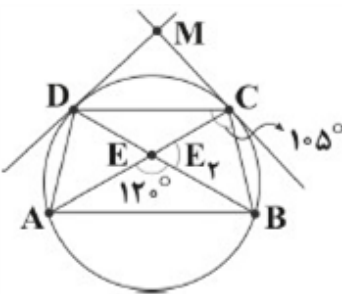
طول کمان DC کدام است؟

- (1)  $\frac{4\pi}{3}$
- (2)  $\frac{2\pi}{3}$
- (3)  $\frac{8\pi}{3}$
- (4)  $\frac{\pi}{3}$



197 با توجه به شکل، اندازهی  $\hat{BCM}$  چند درجه است؟

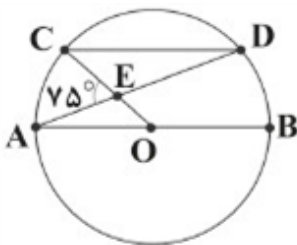
- (1)  $100^\circ$
- (2)  $160^\circ$
- (3)  $150^\circ$
- (4)  $130^\circ$



198 در شکل زیر ABCD ذوزنقه است. اگر زاویهی بین دو قطر آن  $120^\circ$  و

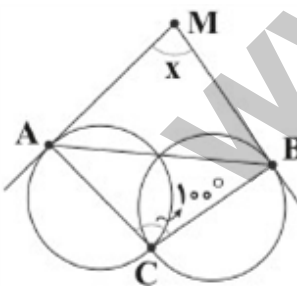
$\hat{C} = 105^\circ$  باشد، اندازهی  $\hat{DMC}$  کدام است؟ (MC و MD بر دایره مماس هستند.)

- (1)  $150^\circ$
- (2)  $90^\circ$
- (3)  $135^\circ$
- (4)  $120^\circ$



199 در شکل زیر،  $CD \parallel AB$ ، مساحت قطاع COA کدام است؟ (R شعاع دایره است.)

- (1)  $\frac{7}{24}\pi R^2$
- (2)  $\frac{5}{24}\pi R^2$
- (3)  $\frac{5}{36}\pi R^2$
- (4)  $\frac{7}{48}\pi R^2$



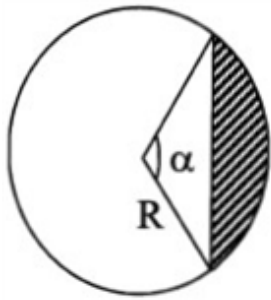
200 در شکل زیر، اگر MA و MB بر دایره‌ها مماس باشند، اندازهی زاویهی X کدام است؟ ( $C = 100^\circ$ )

- (1)  $80^\circ$
- (2)  $90^\circ$
- (3)  $100^\circ$
- (4)  $110^\circ$

201 از نقطه A دو خط مماس بر دایره به شعاع R رسم شده است. نقاط تماس محیط دایره را به نسبت 3 به 5 تقسیم کرده‌اند. زاویه A چند درجه است؟

- (1) 30
- (2) 45
- (3) 60
- (4) 90





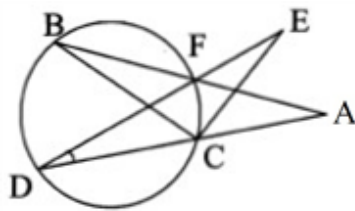
۲۰۲ مساحت قسمت رنگ شده کدام است؟

$$\frac{R^2}{2}(\alpha + \sin \alpha) \quad (1)$$

$$\frac{R^2}{2}(\alpha - \sin \alpha) \quad (2)$$

$$\frac{R^2}{2}(\alpha + \cos \alpha) \quad (3)$$

$$\frac{R^2}{2}(\alpha - \cos \alpha) \quad (4)$$



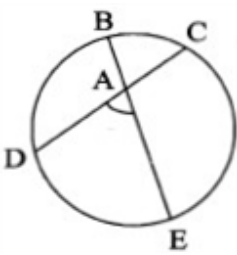
۲۰۳ در شکل مقابل داریم  $AC = BC$  و  $CD = CE$  و  $\hat{D} = 25^\circ$ ، اندازه کمان BF کدام است؟

$$100^\circ \quad (1)$$

$$110^\circ \quad (2)$$

$$120^\circ \quad (3)$$

$$130^\circ \quad (4)$$



۲۰۴ با توجه به شکل برای اثبات عبارت « $\hat{A} = \frac{\widehat{DE} + \widehat{BC}}{2}$ »، از کدام قضیه استفاده نمی‌شود؟

- (۱) اندازه زاویه محاطی برابر نصف کمان روبه‌روی آن است.
- (۲) دو وتر از یک دایره موازی‌اند، اگر و تنها اگر کمان‌های محدود بین آن‌ها مساوی باشد.
- (۳) دو زاویه متقابل راس با هم برابرند.
- (۴) اگر خطی دو خط موازی را قطع کند، چهار زاویه حاده و چهار زاویه منفرجه برابر ایجاد می‌کند.

۲۰۵ اندازه ضلع یک n ضلعی با شعاع دایره محیطی آن برابر است. n کدام است؟

$$12 \quad (4)$$

$$10 \quad (3)$$

$$8 \quad (2)$$

$$6 \quad (1)$$

۲۰۶ از نقطه D وسط ضلع BC از مثلث ABC پاره‌خط AD را رسم می‌کنیم. شعاع دایره محاطی مثلث ABD و ACD برابر است. نوع مثلث ABC کدام است؟

(۴) نامشخص

(۳) متساوی‌الاضلاع

(۲) متساوی‌الساقین

(۱) قائم‌الزاویه

۲۰۷ دوزنقه متساوی‌الساقینی بر دایره‌ای به شعاع ۳ محیط است. اگر محیط دوزنقه برابر ۴۸ باشد، مساحت آن کدام است؟

$$84 \quad (4)$$

$$72 \quad (3)$$

$$42 \quad (2)$$

$$36 \quad (1)$$

۲۰۸ قطر AC از چهارضلعی ABCD، از مرکز دایره محیطی آن می‌گذرد. اگر  $AB = CD$  باشد، چهارضلعی ABCD کدام است؟

(۴) لوزی

(۳) مربع

(۲) مستطیل

(۱) متوازی‌الاضلاع

۲۰۹ مراکز دواير محاطی خارجی یک مثلث متساوی‌الاضلاع به ضلع ۶ را به هم وصل می‌کنیم. محیط مثلث حاصل کدام است؟

- ۱۸ (۱)      ۳۶ (۲)      ۷۲ (۳)      ۴۸ (۴)

۲۱۰ هر دو ضلع مجاور یک پنج‌متنظم محیطی دایره را به دو کمان تقسیم می‌کنند. اندازه کمان کوچک‌تر کدام است؟

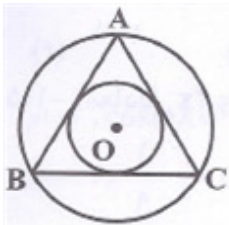
- ۷۲ (۱)      ۵۴ (۲)      ۴۵ (۳)      ۳۶ (۴)

۲۱۱ اندازه اضلاع مثلثی برابر با ۱۳، ۱۳ و ۱۰ می‌باشند. دایره محاطی خارجی نظیر رأس با زاویه کوچک‌تر بر امتداد دو ضلع مجاور همین رأس به ترتیب در نقاط E و F مماس است. اندازه EF کدام است؟

- ۱۲/۸۴ (۱)      ۱۳/۱۴ (۲)      ۱۳/۵ (۳)      ۱۳/۸۴ (۴)

۲۱۲ شعاع دایره محاطی داخلی مثلث متساوی‌الاضلاع ABC برابر با  $\frac{3}{4}$  است. اندازه محیط دایره محاطی خارجی نظیر رأس A، کدام است؟

- ۹π (۱)      ۶π (۲)       $\frac{9}{4}\pi$  (۳)      ۳π (۴)



۲۱۳ در شکل روبه‌رو مثلث ABC متساوی‌الاضلاع است. نسبت مساحت دایره بزرگ‌تر به مساحت دایره کوچک‌تر، کدام است؟

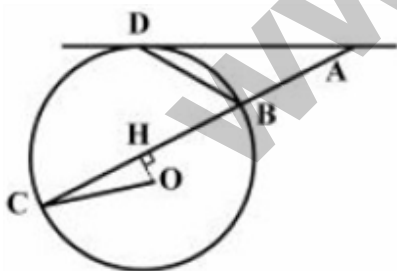
- ۲ (۱)      ۳ (۲)      ۴ (۳)      ۶ (۴)

۲۱۴ شعاع دایره محیطی یک مثلث متساوی‌الساقین برابر ۵ است. اگر طول ساق مثلث برابر ۸ باشد، محیط مثلث کدام است؟

- ۱۵/۳۶ (۱)      ۲۰/۸ (۲)      ۲۵/۶ (۳)      ۳۰/۷۲ (۴)

۲۱۵ دو دایره به شعاع ۴ و ۸ واحد، در نقطه‌ی D مماس درونی هستند. وتر BC از دایره‌ی بزرگ، موازی خط‌المركزین و بر دایره کوچک در نقطه‌ی P مماس است. اندازه  $PB \times PC$  کدام است؟

- ۲۴ (۱)      ۳۲ (۲)      ۳۶ (۳)      ۴۸ (۴)



۲۱۶ در شکل زیر، AD مماس بر دایره به مرکز O و OH عمود بر AC است. اگر  $\widehat{DBC} = 2\widehat{DAC}$  باشد، زاویه‌ی  $\widehat{COH}$  چند برابر زاویه  $\widehat{DAC}$  است؟

- ۲/۵ (۱)      ۳ (۲)      ۳/۵ (۳)      ۴ (۴)

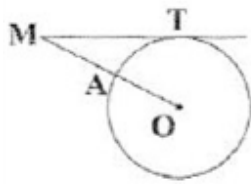
۲۱۷ در مثلث ABC،  $\widehat{A} = 60^\circ$  و  $BC = 6$  می‌باشد. شعاع دایره‌ی محیطی مثلث کدام است؟

- ۲√۳ (۱)      ۳√۲ (۲)      ۴ (۳)      ۳ (۴)

۲۱۸ دوزنقه‌ای به طول قاعده‌های ۴ و ۵، هم محیطی و هم محاطی است. مساحت دوزنقه کدام است؟

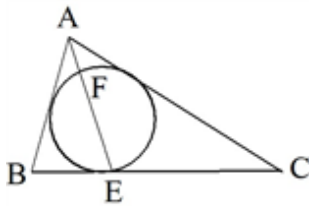
- (۱)  $2\sqrt{5}$  (۲)  $\frac{9}{2}$  (۳)  $4\sqrt{5}$  (۴)  $9\sqrt{5}$

۲۱۹ در شکل زیر،  $MT$  بر دایره مماس،  $MT = 3\sqrt{2}$  و  $MA = 2$  است. شعاع دایره کدام است؟



- (۱) ۷ (۲)  $\frac{3}{5}$  (۳) ۲ (۴) ۵

۲۲۰ در مثلث  $ABC$ ، مطابق شکل زیر اندازه‌ی اضلاع  $AB = 5$ ،  $AC = 8$  و  $BC = 7$  است.



اگر  $E$  نقطه‌ی تماس دایره‌ی محاطی داخلی مثلث با ضلع  $BC$  و  $F$  نقطه‌ی تلاقی  $AE$  با دایره باشد، آن‌گاه  $AE \times AF$  کدام است؟

- (۱)  $5/76$  (۲)  $12/25$  (۳)  $6/25$  (۴) ۹

۲۲۱ اندازه‌ی دو زاویه‌ی مقابل یک چهارضلعی محاطی  $X$  و  $6a$  و اندازه‌های دو زاویه‌ی دیگر  $3a$  و  $5a$  است. مقدار  $X$  چند درجه است؟

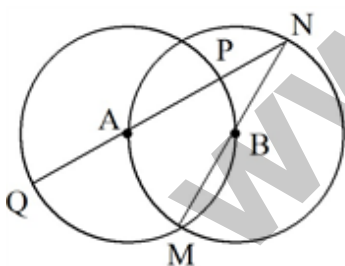
- (۱) ۳۶ (۲) ۲۰ (۳) ۴۸ (۴) ۴۵

۲۲۲ از نقطه‌ی  $M$  خارج دایره‌ی  $C(O, R)$  دو مماس  $MT$  و  $MT'$  را بر دایره رسم می‌کنیم. اگر  $R = 3$  و  $OM = 9$  باشد، آن‌گاه مساحت چهارضلعی  $MTOT'$  کدام است؟

- (۱)  $15\sqrt{2}$  (۲) ۲۷ (۳) ۳۰ (۴)  $18\sqrt{2}$

۲۲۳ اندازه‌ی شعاع‌های دو دایره ۳ و ۱۱ و طول خط‌المركزین آن‌ها ۱۷ است. یک مماس مشترک خارجی این دو دایره را رسم می‌کنیم. مساحت مثلث حاصل از وصل نقاط تماس و وسط خط‌المركزین دو دایره، کدام است؟

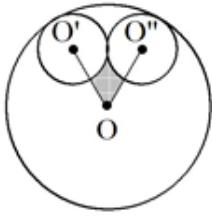
- (۱) ۴۸ (۲) ۵۰ (۳)  $52/5$  (۴)  $54/5$



۲۲۴ در شکل زیر،  $A$  و  $B$  مراکز دو دایره هستند. حاصل  $\frac{NQ}{MN}$  کدام است؟

- (۱)  $\frac{3\sqrt{3}}{2}$  (۲)  $\frac{\sqrt{3}+1}{2}$  (۳)  $\frac{2+\sqrt{3}}{3}$  (۴)  $\sqrt{3}$

۲۲۵ در شکل زیر، دایره‌ها دویسه دو مماس و شعاع دایره‌های کوچک، برابر واحد هستند. اگر شعاع دایره‌ی بزرگ سه برابر شعاع دایره‌های کوچک و  $O'$  و  $O''$  مراکز دایره‌ها باشند، آن‌گاه مساحت ناحیه‌ی رنگی کدام است؟



(۱)  $\sqrt{3} - \frac{\pi}{3}$

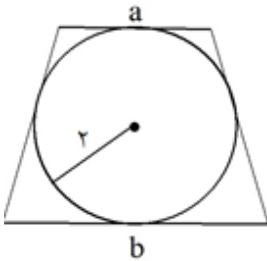
(۲)  $\sqrt{3} - \frac{\pi}{6}$

(۳)  $2\sqrt{3} - \frac{\pi}{3}$

(۴)  $2\sqrt{3} - \frac{\pi}{6}$

۲۲۶ در مثلث ABC اگر  $BC = 10$  و  $\hat{A} = 120^\circ$ ، شعاع دایره‌ی محیطی مثلث چند برابر  $\frac{\sqrt{3}}{3}$  است؟

(۱) ۵ (۲) ۱۰ (۳) ۲۰ (۴) ۱۵



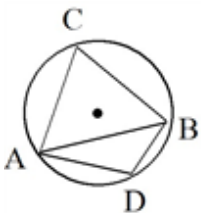
۲۲۷ یک دوزنقه‌ی متساوی‌الساقین بر دایره‌ای به شعاع ۲ واحد، محیط است. اگر مساحت دوزنقه ۲۴ واحد مربع باشد، طول ساق آن کدام است؟

(۱) ۳

(۲) ۹

(۳) ۶

(۴) ۱۲



۲۲۸ در شکل زیر، شعاع دایره برابر  $2\sqrt{3}$  و  $\hat{D} = 2\hat{C}$  است، طول پاره‌خط AB کدام است؟

(۱) ۳

(۲)  $4\sqrt{3}$

(۳)  $2\sqrt{3}$

(۴) ۶

۲۲۹ کدام یک از گزینه‌های زیر همواره نمی‌تواند چندضلعی محیطی دایره باشد؟

(۱) مثلث

(۲) مربع

(۳) دوزنقه

(۴) لوزی

۲۳۰ شعاع هر دایره‌ی محاطی خارجی یک مثلث متساوی‌الاضلاع چند برابر طول ضلع مثلث است؟

(۱)  $\frac{\sqrt{3}}{2}$

(۲)  $\frac{\sqrt{3}}{8}$

(۳)  $\frac{\sqrt{3}}{4}$

(۴)  $\sqrt{3}$

۲۳۱ کدام یک از گزاره‌های زیر صحیح است؟

(۱) نقطه‌ی هم‌رسی سه نیمساز یک مثلث، مرکز دایره‌ی محیطی آن مثلث است.

(۲) هر مثلث هم محیطی و هم محاطی است.

(۳) هر چندضلعی هم محیطی و هم محاطی است.

(۴) نقطه‌ی هم‌رسی سه عمود منصف یک مثلث، مرکز دایره‌ی محاطی آن مثلث است.

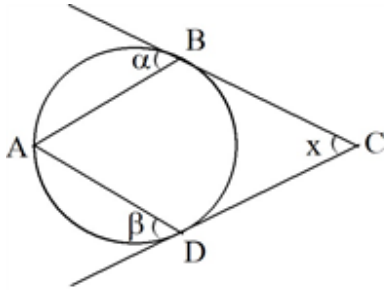
۲۳۲ یک مثلث با اضلاع ۱۰، ۶ و ۸ واحد در دایره‌ای به شعاع ۵ واحد محاط شده است. فاصله‌ی مرکز دایره از ضلع متوسط مثلث کدام است؟

۳ (۴)

$\sqrt{41}$  (۳)

۵ (۲)

$\sqrt{20}$  (۱)



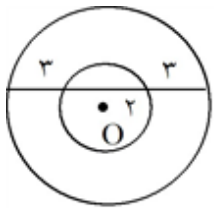
۲۳۳ در شکل زیر، BC و CD بر دایره مماس هستند. مقدار x برحسب  $\alpha$  و  $\beta$  کدام است؟

$\alpha + \beta$  (۱)

$2\alpha + 2\beta - 180^\circ$  (۲)

$360^\circ - \alpha - \beta$  (۳)

$180^\circ - \frac{\alpha + \beta}{2}$  (۴)



۲۳۴ در شکل زیر، دو دایره هم‌مرکز هستند. با توجه به شکل، مساحت ناحیه‌ی بین دو دایره کدام است؟

$16\pi$  (۱)

$12\pi$  (۲)

$18\pi$  (۳)

$15\pi$  (۴)

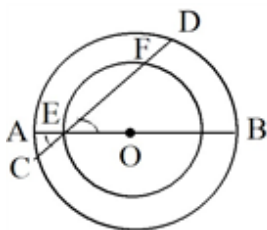
۲۳۵ دو دایره‌ی  $C(O, 14)$  و  $C'(O', 2)$  با طول خط‌المرکزین ۲۰ مفروض‌اند. اگر M وسط مماس مشترک خارجی دو دایره باشد، آن‌گاه فاصله‌ی M تا خط‌المرکزین دو دایره کدام است؟

$7/2$  (۴)

$6/4$  (۳)

$4/8$  (۲)

$5/4$  (۱)



۲۳۶ در دو دایره‌ی هم‌مرکز، قطر AB از دایره‌ی بزرگ، دایره‌ی کوچک را در نقطه‌ی E قطع کرده است. وتر CD از دایره‌ی بزرگ نیز دایره‌ی کوچک را در نقاط E و F قطع می‌کند

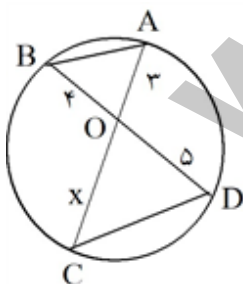
به‌طوری‌که  $\widehat{AC} + \widehat{EF} = 104^\circ$ . اندازه‌ی کمان BD چند درجه است؟

۸۶ (۲)

۸۴ (۱)

۷۶ (۴)

۸۲ (۳)



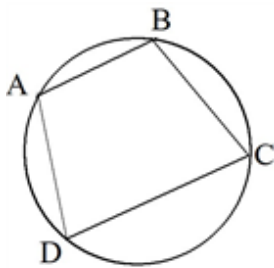
۲۳۷ در شکل زیر، مقدار x کدام است؟

$\frac{2}{3}$  (۱)

$\frac{3}{4}$  (۲)

$\frac{1}{3}$  (۳)

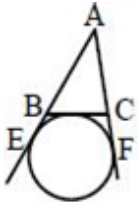
$\frac{1}{4}$  (۴)



۲۳۸ در شکل زیر،  $\frac{AB}{CD} = \frac{3}{5}$  است. اگر امتداد اضلاع AD و BC در M متقاطع باشند،

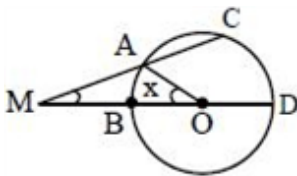
مساحت چهارضلعی ABCD چند درصد مساحت مثلث MCD است؟

- (۱) ۴۸  
(۲) ۶۴  
(۳) ۶۰  
(۴) ۷۵



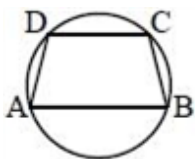
۲۳۹ در شکل مقابل اگر محیط مثلث برابر  $2 - 3m$  و  $AE = 14$  باشد، مقدار m کدام است؟

- (۱) ۸  
(۲) ۹  
(۳) ۱۰  
(۴) ۱۲



۲۴۰ در شکل مقابل اگر  $AC = \sqrt{2}R$  و  $\hat{M} = 20^\circ$  باشد، اندازه زاویه x کدام است؟

- (۱) ۱۵  
(۲) ۲۰  
(۳) ۲۵  
(۴) ۳۰



۲۴۱ در شکل مقابل، ABCD دوزنقه است. اگر  $\hat{A} = 75^\circ$  و  $\widehat{CD} = 90^\circ$  باشد، زاویه بین دو

قطر دوزنقه چه قدر است؟

- (۱) ۱۱۰  
(۲) ۱۱۵  
(۳) ۱۲۰  
(۴) ۱۳۵

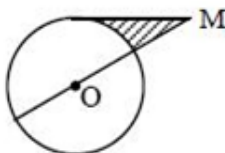
۲۴۲ بر دایره‌هایی به شعاع ۷ و ۱۲ هیچ مماس مشترکی نمی‌توان رسم کرد. طول خط‌المركزین این دو دایره چند عدد طبیعی می‌تواند باشد؟

- (۱) ۳  
(۲) ۴  
(۳) ۵  
(۴) ۶

۲۴۳ دایره‌های  $C(O, 6)$  و  $C'(O', 5)$  و  $OO' = 5$  یک‌دیگر را در نقاط M و N قطع می‌کنند. طول پاره‌خط MN کدام است؟

- (۱)  $\frac{6}{8}$   
(۲)  $\frac{8}{4}$   
(۳)  $\frac{9}{6}$   
(۴)  $\frac{10}{2}$

۲۴۴ در شکل زیر از نقطه M مماس بر دایره‌ای به شعاع ۶ رسم کرده‌ایم. اگر فاصله M تا مرکز دایره ۱۲ باشد، مساحت ناحیه هاشورخورده کدام است؟



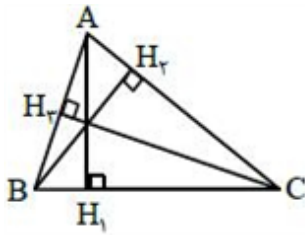
- (۱)  $6(3\sqrt{3} - \pi)$   
(۲)  $3(3\sqrt{3} - \pi)$   
(۳)  $6(6\sqrt{3} - \pi)$   
(۴)  $3(6\sqrt{3} - \pi)$

۲۴۵ دایره‌های  $C_1(O, x-2)$  و  $C_2(O, x+3)$  دارای سه مماس مشترک‌اند. اگر طول خط‌المركزین این دو دایره  $3x - 6$  باشد، شعاع دایره بزرگ‌تر کدام است؟

- ۵ (۱) ۷ (۲) ۹ (۳) ۱۰ (۴)

۲۴۶ اگر بین شعاع‌های دو دایره و  $d$  طول خط‌المركزین روابط  $r_1 + r_2 = \frac{rd}{4}$  و  $r_1 - r_2 = \frac{d}{4}$  برقرار باشد، شعاع کوچک‌ترین دایره‌ای که بر هر دو دایره مماس است، چه قدر است؟

- $\frac{d}{4}$  (۱)  $\frac{d}{16}$  (۲)  $\frac{d}{2}$  (۳)  $\frac{d}{8}$  (۴)



۲۴۷ در مثلث ABC ارتفاع‌های  $AH_1$ ،  $BH_2$  و  $CH_3$  در نقطه O هم‌رسند.

در این شکل چند چهارضلعی محاطی وجود دارد؟

- ۳ (۱) ۴ (۲) ۶ (۳) ۸ (۴)

۲۴۸ دوزنقه‌ای در داخل یک دایره به شعاع ۱۰ محاط می‌باشد. اگر طول قاعده کوچک دوزنقه ۱۲ و قاعده بزرگ آن از مرکز دایره بگذرد، مساحت دوزنقه کدام است؟

- $60\sqrt{2}$  (۱) ۱۲۸ (۲)  $60\sqrt{3}$  (۳) ۱۲۴ (۴)

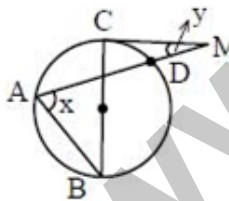


۲۴۹ ضلع BC از مثلث ABC با قطر DE موازی است. اگر زاویه  $\hat{P}_1 = 40^\circ$  باشد،

زاویه A کدام است؟

- ۳۰ (۱) ۳۵ (۲) ۴۰ (۳) ۵۰ (۴)

۲۵۰ در شکل زیر پاره‌خط MC بر دایره مماس است. وتر AB برابر شعاع و وتر BC برابر قطر دایره می‌باشد. کدام یک از گزینه‌های زیر همواره صحیح است؟



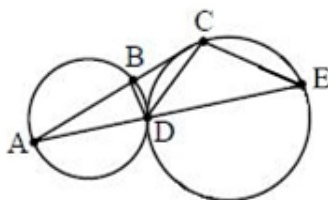
$$x = 2y \quad (1)$$

$$x - y = 30 \quad (2)$$

$$x + y = 90 \quad (3)$$

$$2x = 3y \quad (4)$$

۲۵۱ دو دایره زیر در نقطه D مماس خارج می‌باشند و AC بر دایره بزرگ مماس است. نسبت  $\frac{BD}{CD}$  برابر کدام گزینه



است؟

$$\frac{AD}{AE} \quad (2)$$

$$\frac{AC}{AE} \quad (1)$$

$$\frac{BC}{CE} \quad (4)$$

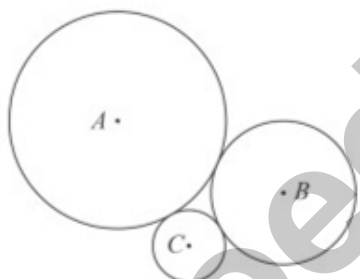
$$\frac{AB}{BC} \quad (3)$$

۲۵۲ در شکل، شش ضلعی منتظمی به ضلع واحد را نشان داده‌ایم و گل با قطاع‌های دایره‌های واحد به مرکز رأس‌های شش ضلعی درست شده است. مساحت گل چه قدر است؟



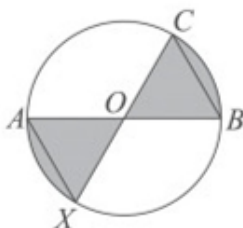
- (۱)  $\frac{\pi}{2}$  (۲)  $\frac{2\pi}{3}$  (۳)  $2\sqrt{3} - \pi$  (۴)  $\frac{\pi}{2} + \sqrt{3}$  (۵)  $2\pi - 3\sqrt{3}$

۲۵۳ در شکل، شعاع دایره‌های به مرکز A، B و C که دوه‌دو مماس خارج هستند به ترتیب برابر است با ۳، ۲ و ۱. مساحت مثلث ABC چه قدر است؟



- (۱) ۶ (۲)  $4\sqrt{3}$  (۳)  $3\sqrt{2}$  (۴) ۹ (۵)  $2\sqrt{6}$

۲۵۴ در شکل، O مرکز دایره است و قطرهای AB و CX را طوری انتخاب کرده‌ایم که  $OB = BC$ . چه کسری از دایره خاکستری شده است؟



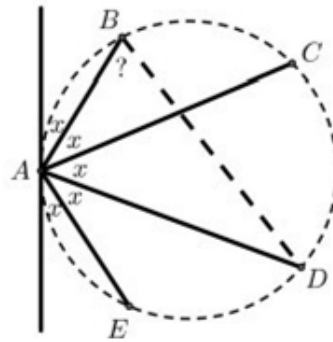
- (۱)  $\frac{2}{5}$  (۲)  $\frac{1}{3}$  (۳)  $\frac{2}{5}$  (۴)  $\frac{3}{8}$  (۵)  $\frac{4}{11}$



۲۵۵) چهارضلعی‌ای بر دایره‌ای محیط است. نسبت محیط چهارضلعی به محیط دایره برابر  $\frac{4}{3}$  است. نسبت مساحت چهارضلعی به مساحت دایره چقدر است؟

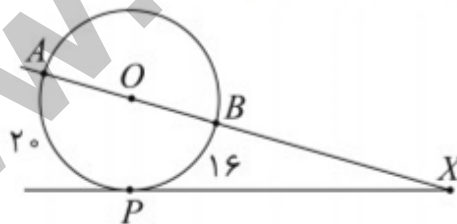
- (۱)  $\frac{4}{\pi}$       (۲)  $\frac{3\sqrt{2}}{\pi}$       (۳)  $\frac{16}{9}$       (۴)  $\frac{\pi}{3}$       (۵)  $\frac{4}{3}$

۲۵۶) سارا نقطه‌ی A را روی دایره انتخاب کرد و مماس بر دایره را در آن نقطه کشید، و بعد نقطه‌های B و C و D و E را طوری روی دایره انتخاب کرد که اندازه‌ی همه‌ی زاویه‌هایی که با X مشخص شده‌اند با هم برابر باشد (توجه کنید که شکل ممکن است دقیق نباشد). اندازه‌ی زاویه‌ی ABD چقدر است؟



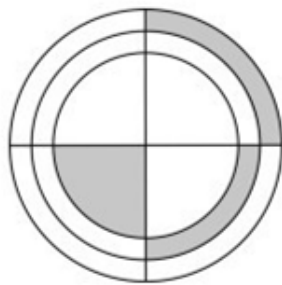
- (۱)  $66^\circ$       (۲)  $70/5^\circ$       (۳)  $72^\circ$       (۴)  $75^\circ$       (۵)  $77/5^\circ$

۲۵۷) در شکل، طول کمان AP برابر ۲۰ و طول کمان BP برابر ۱۶ است. اندازه‌ی زاویه‌ی AXP چقدر است؟



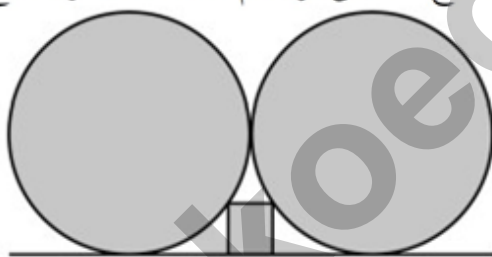
- (۱)  $30^\circ$       (۲)  $24^\circ$       (۳)  $18^\circ$       (۴)  $15^\circ$       (۵)  $10^\circ$

۲۵۸ در شکل زیر، سه دایره‌ی هم‌مرکز و دو قطر عمود بر هم از آن‌ها رسم شده است. می‌دانیم شعاع دایره‌ی کوچک‌تر ۱ سانتی‌متر است. همچنین مساحت سه ناحیه‌ی خاکستری با هم برابر است. حاصل ضرب شعاع سه دایره برابر چه عددی است؟



- (۱)  $\sqrt{6}$       (۲) ۳      (۳)  $\frac{3\sqrt{3}}{2}$       (۴)  $2\sqrt{2}$       (۵) ۶

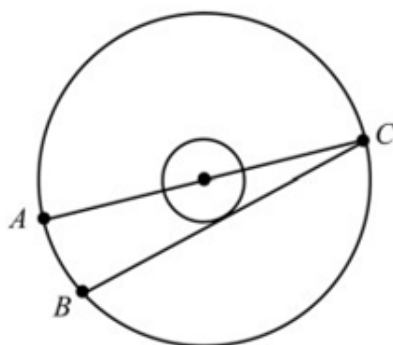
۲۵۹ در شکل زیر، یک مربع و دو دایره به شعاع ۱ سانتی‌متر رسم شده است. طول ضلع مربع چند سانتی‌متر است؟



- (۱)  $\frac{2}{5}$       (۲)  $\frac{1}{4}$       (۳)  $\frac{1}{\sqrt{2}}$       (۴)  $\frac{1}{5}$       (۵)  $\frac{1}{2}$

۲۶۰

نسبت شعاع‌های دو دایره‌ی هم‌مرکز زیر، برابر  $\frac{1}{3}$  است.  $AC$  قطر دایره‌ی بزرگ‌تر، و  $BC$  وترى از دایره‌ی بزرگ‌تر است که به دایره‌ی کوچک‌تر مماس شده است. اگر طول  $AB$  برابر ۱۲ سانتی‌متر باشد، شعاع دایره‌ی بزرگ‌تر چند سانتی‌متر است؟



۲۶ (۵)

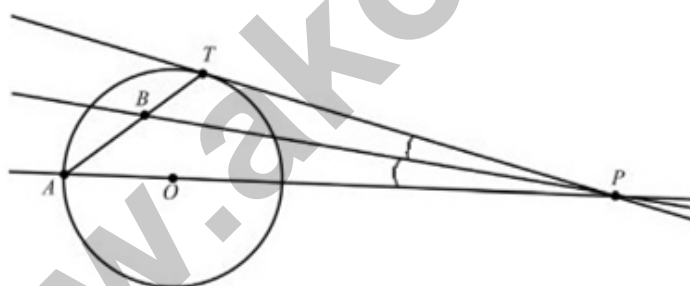
۲۴ (۴)

۲۱ (۳)

۱۸ (۲)

۱۳ (۱)

۲۶۱ در شکل زیر،  $PT$  بر دایره‌ی به مرکز  $O$  مماس است و  $BP$  نیمساز زاویه‌ی  $TPA$  است. اندازه‌ی زاویه‌ی  $TBP$  کدام است؟

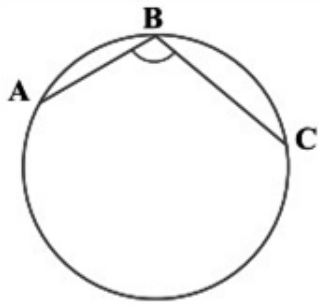
۵) به مکان  $P$  بستگی دارد.۴)  $75^\circ$ ۳)  $60^\circ$ ۲)  $45^\circ$ ۱)  $30^\circ$ 

۲۶۲ دو دایره  $C(O, 5)$  و  $C'(O', 3)$  مماس داخلی‌اند. اندازه‌ی وترى از دایره بزرگ‌تر که بر دایره‌ی کوچک‌تر مماس است و بر  $OO'$  عمود است کدام است؟

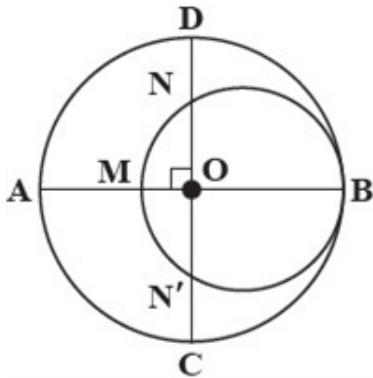
۴)  $4\sqrt{6}$ ۳)  $2\sqrt{6}$ ۲)  $2\sqrt{3}$ ۱)  $\sqrt{6}$ 

۲۶۳ مساحت قطاعی از دایره  $C(O, 5)$  به زاویه‌ی مرکزی  $90^\circ$  کدام است؟

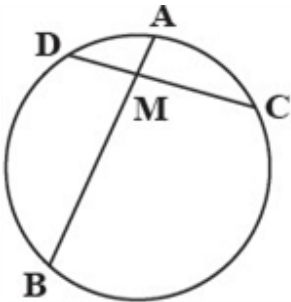
۴)  $5\pi$ ۳)  $6/25\pi$ ۲)  $6\pi$ ۱)  $5/25\pi$



- ۲۶۴ در شکل زیر،  $AB$  یکی از اضلاع ۱۲ ضلعی منتظم و  $BC$  یکی از اضلاع ۱۰ ضلعی منتظم محاط در دایره است. اندازه زاویه  $B$  کدام است؟
- (۱)  $145^\circ$
  - (۲)  $146^\circ$
  - (۳)  $147^\circ$
  - (۴)  $148^\circ$

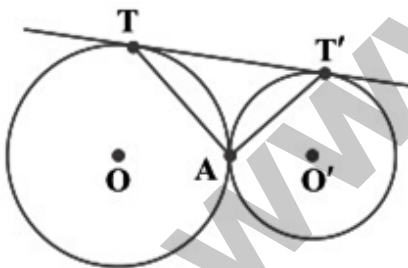


- ۲۶۵ در شکل روبه‌رو، اگر  $AM = 16$  و  $ND = 10$ ، شعاع دایره کوچکتر چقدر است؟
- (۱) ۲۵
  - (۲) ۲۰
  - (۳) ۱۷
  - (۴) ۱۳

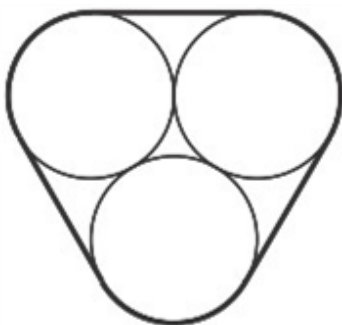


- ۲۶۶ در شکل روبه‌رو  $AB = 11$  و  $CD = 9$ ، اگر وتر  $AB$ ، وتر  $CD$  را به نسبت ۱ به ۲ تقسیم کرده باشد، وتر  $CD$  وتر  $AB$  را به چه نسبتی قطع کرده است؟
- (۱) ۲ به ۹
  - (۲) ۳ به ۵
  - (۳) ۱ به ۲
  - (۴) ۲ به ۳

- ۲۶۷ یک ذوزنقه متساوی‌الساقین با اندازه ساق ۸ بر دایره‌ای به شعاع ۳ محیط است. مساحت این ذوزنقه کدام است؟
- (۱) ۳۶
  - (۲) ۴۲
  - (۳) ۳۲
  - (۴) ۴۸



- ۲۶۸ در شکل مقابل دو دایره در نقطه  $A$  مماس خارجند و  $T$  و  $T'$  نقاط تماس مماس مشترک خارجی دو دایره با آنهاست. اندازه زاویه  $A$  چقدر است؟
- (۱)  $75^\circ$
  - (۲)  $60^\circ$
  - (۳)  $90^\circ$
  - (۴)  $50^\circ$



- ۲۶۹ مطابق شکل، سه دیسک برابر به شعاع ۴، توسط یک تسمه احاطه شده‌اند. اگر طول تسمه برابر  $X + Y\pi$  باشد، آن‌گاه  $X - Y$  کدام است؟
- (۱) ۳۲
  - (۲) ۲۰
  - (۳) ۱۶
  - (۴) ۲۴

۲۷۰ در مثلثی با اضلاع ۶، ۸ و ۱۰ اندازه شعاع دایره محاطی داخلی کدام است؟

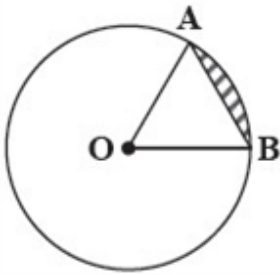
- ۱ (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴)

۲۷۱ در مثلث متساوی‌الاضلاع به ضلع  $8\sqrt{3}$  شعاع دایره محاطی خارجی کدام است؟

- ۸ (۱) ۱۲ (۲) ۹ (۳) ۱۵ (۴)

۲۷۲ در دایره  $C(O, R)$  اگر  $\widehat{AB} = 60^\circ$  و  $AB = 10$ ، فاصله مرکز دایره از وتر  $AB$  چند برابر  $\sqrt{3}$  است؟

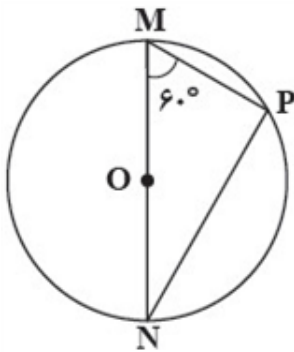
- ۵ (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴)



۲۷۳ در دایره  $C(O, 6)$  مثلث  $OAB$  متساوی‌الاضلاع است. مساحت قسمت

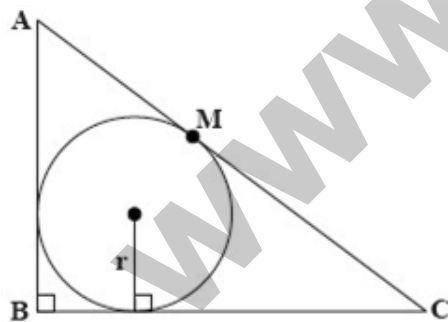
هاشورخورده تقریباً چقدر است؟  $(\sqrt{3} \approx 1/7, \pi \approx 3/14)$

- ۲ (۱) ۳/۵ (۲) ۵ (۳) ۷/۵ (۴)



۲۷۴ در دایره  $C(O, \sqrt{3})$  شکل مقابل، طول وتر  $PN$  چقدر است؟

- ۲ (۱)  $2\sqrt{3}$  (۲)  $3\sqrt{2}$  (۳) ۳ (۴) ۴



۲۷۵ در شکل زیر شعاع دایره محاطی مثلث قائم‌الزاویه  $ABC$  برابر ۱

است. اگر  $AM = 2$  باشد، محیط مثلث کدام است؟

- ۱۸ (۱) ۱۰ (۲) ۱۲ (۳) ۱۶ (۴)

۲۷۶ دایره  $C(O, 6)$  مفروض است. خط  $\Delta$  به فاصله ۲ از نقطه  $O$  قرار دارد. چند نقطه روی محیط دایره  $C$

وجود دارد که فاصله اش از خط  $\Delta$  برابر ۴ باشد؟

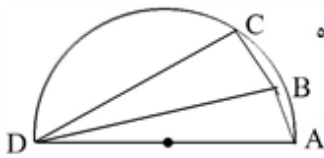
- ۲ (۱) ۳ (۲) ۴ (۳) ۴ (۴) صفر

۲۷۷ نقطه  $P$  خارج دایره‌ای به شعاع ۵ واحد است. اگر نزدیک‌ترین نقطه از دایره تا نقطه  $P$  برابر ۶ واحد و قاطع  $PAB$

نسبت به دایره طوری رسم شده باشد که  $AB = PA - 4$ ، اندازه  $AB$  کدام است؟

- ۴ (۱) ۵ (۲) ۶ (۳) ۷ (۴)

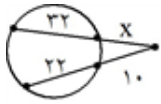
۲۷۸



چهارضلعی ABCD مطابق شکل زیر در نیم‌دایره‌ای به قطر  $AD = 6$  محاط شده است. اگر طول هر دو ضلع AB و BC برابر ۲ باشد، طول ضلع CD کدام است؟

- (۱)  $4\sqrt{3}$   
 (۲)  $\sqrt{17}$   
 (۳)  $\frac{7}{2}$   
 (۴)  $\frac{14}{3}$

۲۷۹



در شکل مقابل مقدار X کدام است؟

- (۱) ۷  
 (۲) ۸  
 (۳) ۹  
 (۴) ۱۲

۲۸۰

در چهارضلعی محیطی اندازه سه ضلع متوالی ۹، ۷، ۵ واحد است. ضلع چهارم چند واحد است؟

- (۱) ۸  
 (۲) ۷  
 (۳) ۴  
 (۴) ۶

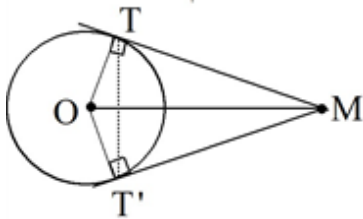
۲۸۱

از نقطه A دو مماس AB و AC بر دایره رسم شده است. اگر نسبت دو قطعه کمان‌های جدا شده از دایره  $\frac{3}{5}$  باشد، زاویه BAC چند درجه است؟

- (۱) ۳۰  
 (۲)  $37/5$   
 (۳) ۴۵  
 (۴)  $62/5$

۲۸۲

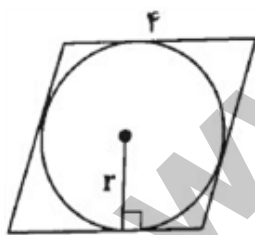
دایره‌ی  $(O, 4)$  و نقطه‌ی M به فاصله‌ی ۸ از نقطه‌ی O مفروض هستند. طول پاره‌خط  $TT'$ ، کدام است؟



- (۱)  $4\sqrt{3}$   
 (۲) ۴  
 (۳)  $8\sqrt{3}$   
 (۴) ۸

۲۸۳

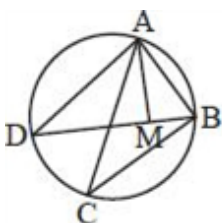
دایره‌ای به شعاع  $r = 3$  در یک لوزی به ضلع ۴ محاط است. مساحت این لوزی کدام است؟



- (۱) ۱۲  
 (۲) ۲۴  
 (۳) ۲۰  
 (۴) ۱۸

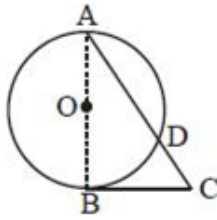
۲۸۴

در دایره‌ی شکل مقابل  $\widehat{DAC} = \widehat{BAM}$ ، حاصل  $AD \times BC$  برابر کدام است؟



- (۱)  $BM \times AC$   
 (۲)  $BD \times MB$   
 (۳)  $AB \times DC$   
 (۴)  $MD \times AC$

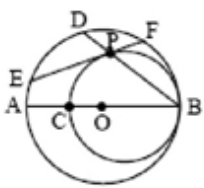
۲۸۵ در شکل روبه‌رو پاره‌خط BC مماس بر دایره، زاویه  $\hat{C} = 60^\circ$  و اندازهی CD برابر  $\sqrt{3}$  واحد می‌باشند. اندازهی قطر دایره چه قدر است؟



- (۱) ۶  
(۲)  $3\sqrt{3}$   
(۳) ۸  
(۴)  $4\sqrt{3}$

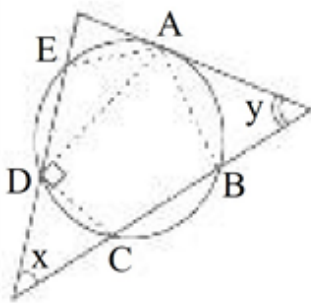
۲۸۶ طول مماس مشترک خارجی دو دایره برابر ۷ واحد و اندازهی خط‌المركزین ۹ واحد است، شعاع دایره‌ی بزرگ‌تر چه قدر از شعاع دایره‌ی کوچک‌تر بیش‌تر است؟

- (۱)  $3\sqrt{2}$  (۲)  $4\sqrt{2}$  (۳)  $3\sqrt{3}$  (۴)  $4\sqrt{3}$



۲۸۷ در شکل مقابل نقطه‌ی C وسط شعاع OA و دو دایره مماسند و EF مماس بر دایره‌ی کوچک‌تر. اگر  $EP = \frac{3}{2}PF = 15$  باشد، مقدار DP کدام است؟

- (۱)  $5\sqrt{2}$  (۲)  $5\sqrt{3}$   
(۳)  $2\sqrt{5}$  (۴)  $3\sqrt{5}$

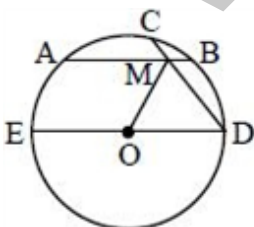


۲۸۸ در شکل مقابل  $y + 2x$  کدام است اگر بدانیم  $AB = BC$  و  $AE = DE = DC$ ؟

- (۱)  $90^\circ$  (۲)  $120^\circ$   
(۳)  $165^\circ$  (۴)  $135^\circ$

۲۸۹ از نقطه‌ی M خارج دایره‌ی  $C(O, 2)$  مماس به طول  $\sqrt{12}$  وارد بر دایره رسم می‌کنیم. فاصله‌ی M از دورترین نقطه‌ی دایره کدام است؟

- (۱) ۲ (۲) ۴ (۳) ۶ (۴) ۳



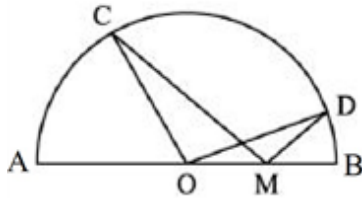
۲۹۰ در شکل مقابل، نقطه‌ی O مرکز دایره است. اگر  $AB = CD$ ،

$AB \parallel DE$  و  $\hat{MOD} = 70^\circ$  باشد، کمان BC کدام است؟

- (۱) ۴۰ (۲) ۷۰  
(۳) ۵۰ (۴) ۶۰

۲۹۱

در شکل زیر،  $O$  مرکز نیم‌دایره و  $M$  روی قطر است. نقاط  $C$  و  $D$  چنان بر روی نیم‌دایره انتخاب شده‌اند که  $\widehat{OCM} = \widehat{ODM} = 20^\circ$ . اگر  $\widehat{AC} = 50^\circ$  باشد، اندازه‌ی کمان  $DB$  چه قدر است؟



- (۱)  $10^\circ$   
(۲)  $15^\circ$   
(۳)  $20^\circ$   
(۴)  $25^\circ$

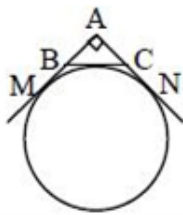
۲۹۲

سه دایره‌ی  $C(O, R)$ ،  $C'(O', R')$ ،  $C''(O'', R'')$  مفروض‌اند. اگر  $OO' = R - R'$  و  $OO'' = R - R''$  باشد، بیش‌ترین اندازه برای  $O'O''$  به کدام گزینه نزدیک‌تر است؟

- (۱)  $2R - (R' + R'')$  (۲)  $R' - R''$  (۳)  $2R - (R' - R'')$  (۴)  $R' + R''$

۲۹۳

مثلث قائم‌الزاویه‌ی  $ABC$  ( $A = 90^\circ$ ) با مساحت  $S = 5$  بر دایره‌ای به شعاع  $R = 3$  مماس شده است. طول وتر  $BC$  کدام است؟



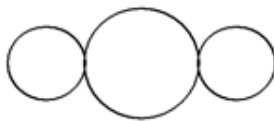
- (۱) ۳  
(۲)  $\frac{3}{2}$   
(۳) ۲  
(۴)  $\frac{2}{3}$

۲۹۴

اگر دایره‌ی محاطی داخلی یک مثلث بر دایره‌ی محاطی خارجی آن مماس باشد، آن مثلث حتماً: (۱) متساوی‌الاضلاع است. (۲) متساوی‌الساقین است. (۳) قائم‌الزاویه است. (۴) حاده زاویه است.

۲۹۵

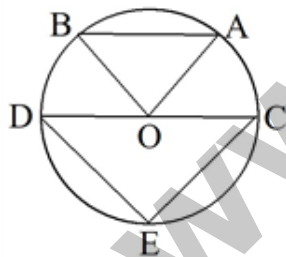
سه دایره مطابق شکل بر هم مماس‌اند، مرکزهای آن‌ها در امتداد هم و دایره‌ی میانی بزرگ‌تر از دو دایره‌ی کناری است. تعداد نقاط تقاطع یک خط در حالت‌های مختلف با مجموعه‌ی فوق کدام گزینه است؟



- (۱)  $\{1, 2, 4, 6\}$  (۲)  $\{0, 1, 2, 4, 6\}$   
(۳)  $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$  (۴)  $\{0, 1, 2, 3, 4, 6, 8\}$

۲۹۶

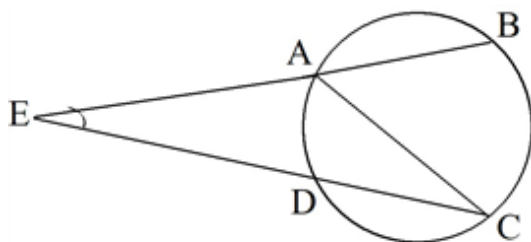
در دایره زیر به مرکز  $O$ ، کمان  $\widehat{AB}$  برابر  $90^\circ$  درجه است. اگر  $\widehat{DE} = \widehat{EC}$  باشد، مساحت مثلث  $OAB$  چند برابر مساحت مثلث  $CED$  است؟



- (۱)  $\frac{1}{2}$   
(۲)  $\frac{1}{4}$   
(۳)  $\frac{\sqrt{2}}{2}$   
(۴)  $\frac{\sqrt{3}}{4}$

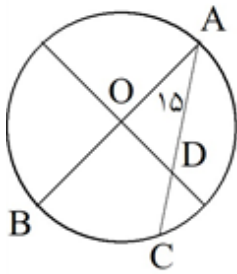
۲۹۷

در شکل زیر  $\widehat{E} = 20^\circ$  و کمان‌های  $\widehat{AB}$ ،  $\widehat{BC}$  و  $\widehat{CD}$  برابرند. اندازه  $\widehat{ACD}$  کدام است؟



- (۱) ۱۵  
(۲) ۲۵  
(۳) ۳۰  
(۴) ۴۵





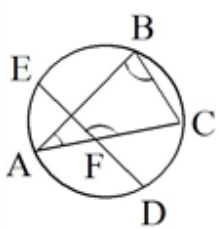
۲۹۸ در شکل زیر دو قطر دایره بر هم عمود است. نسبت  $\frac{AD}{DC}$  کدام است؟

$$\frac{2\sqrt{3}}{3} \quad (2)$$

$$\frac{\sqrt{5}}{2} \quad (4)$$

$$\frac{3\sqrt{2}}{2} \quad (1)$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2} \quad (3)$$



۲۹۹ در شکل زیر رأس A وسط کمان ED و  $\widehat{BC} = 80^\circ$  است. اندازه  $\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{F}$  کدام است؟

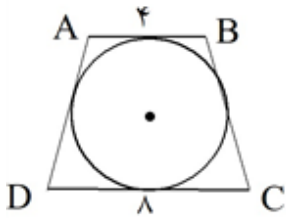
$$180 \quad (1)$$

$$195 \quad (2)$$

$$220 \quad (3)$$

$$260 \quad (4)$$

۳۰۰ در شکل زیر، دوزنقه متساوی الساقین ABCD بر دایره محیط شده است. مساحت آن کدام است؟



$$24\sqrt{2} \quad (1)$$

$$12\sqrt{3} \quad (2)$$

$$12\sqrt{2} \quad (3)$$

$$6\sqrt{3} \quad (4)$$

۳۰۱ چهارضلعی محاطی ABCD مفروض است. ضلع DC از طرف C تا نقطه E امتداد دارد. اگر  $\widehat{CDA} = 83$  و

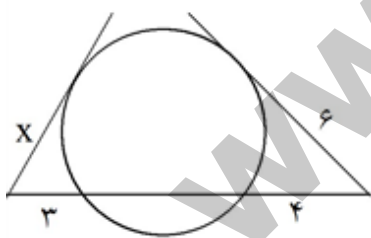
$\widehat{DAB} = 57$  باشد، اندازه  $\widehat{ECB}$  چند درجه است؟

$$87 \quad (4)$$

$$83 \quad (3)$$

$$57 \quad (2)$$

$$55 \quad (1)$$



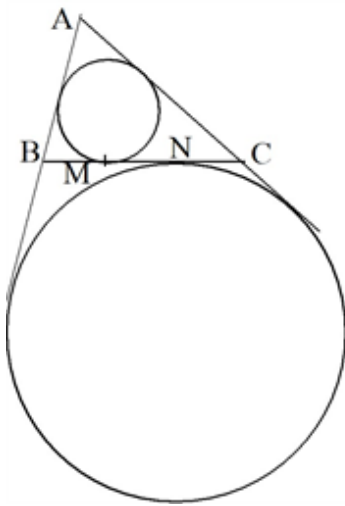
۳۰۲ در شکل مقابل طول X کدام است؟

$$2\sqrt{6} \quad (1)$$

$$3\sqrt{2} \quad (2)$$

$$3\sqrt{5} \quad (3)$$

$$4\sqrt{2} \quad (4)$$



۳۰۳ در مثلث  $\triangle ABC$  دو دایره محاطی داخلی و خارجی را بنا بر شکل زیر رسم کرده‌ایم. اگر  $AB = 5$ ،  $AC = 7$  و  $BC = 10$  باشد طول  $MN$  کدام است؟

۳ (۱)

۲ (۲)

۷ (۳)

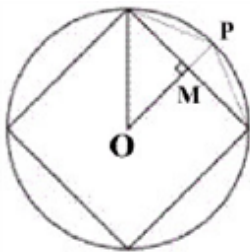
۶ (۴)

۳۰۴ دو وتر  $AM$  و  $BN$  از دایره به قطر  $AB$ ، یکدیگر را در نقطه  $P$  داخل دایره قطع کرده‌اند، به طوری که  $MP = 2$ ،  $AP = 10$  و  $PN = 5$  است. شعاع دایره کدام است؟

 $\sqrt{39}$  (۴)

۱۲ (۳)

۶ (۲)

 $\sqrt{156}$  (۱)

۳۰۵ در شکل زیر مربعی در یک دایره محاط شده است.

اگر طول پاره‌خط  $MP$  برابر  $3 - 3\sqrt{2}$  باشد، شعاع دایره کدام است؟

 $\sqrt{3}$  (۲) $\sqrt{2}$  (۱) $3\sqrt{2}$  (۴) $2\sqrt{3}$  (۳)

۳۰۶ در یک مثلث متساوی الساقین به قاعده ۱۰ واحد اندازه شعاع دایره محاطی  $\frac{10}{3}$  واحد است. طول ساق مثلث کدام است؟

۱۳ (۱۴)

۱۲ (۳)

۱۱ (۲)

۹ (۱)

۳۰۷ دو قطر  $AB$  و  $CD$  از دایره‌ای بر هم عموداند. وتر  $AM$  قطر  $CD$  را در  $N$  قطع کرده اگر  $MB = 2\alpha$  باشد، نسبت  $\frac{NM}{NA}$  برابر کدام است؟

 $2\cos^2 \alpha$  (۴) $2\sin^2 \alpha$  (۳) $\sin 2\alpha$  (۲) $\cos 2\alpha$  (۱)

۳۰۸ شعاع دایره محیطی مثلث  $ABC$  برابر ۶ واحد است. اگر دو ضلع  $AB = 8$ ،  $AC = 9$  واحد باشد، ارتفاع  $AH$  چند واحد است؟

۶ (۴)

۷/۵ (۳)

۵ (۲)

۴/۵ (۱)

۳۰۹ مربع  $ABCD$  به ضلع ۴ واحد، مفروض است. شعاع دایره‌ی گذرا بر دو رأس  $A$  و  $B$  و مماس بر ضلع  $CD$  کدام است؟

۳ (۴)

 $2\sqrt{2}$  (۳)

۲/۵ (۲)

۲/۲۵ (۱)

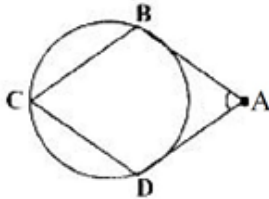
۳۱۰ در یک دوزنقه محیط بر دایره، طول خط واصل بین وسط‌های دو ساق آن ۱۲ واحد است. محیط دوزنقه، کدام است؟

- (۱) ۳۶ (۲) ۴۴ (۳) ۴۶ (۴) ۴۸

۳۱۱ در مربعی به ضلع ۲ واحد، دایره‌ای به مرکز یک رأس آن و شعاع  $\frac{2}{5}$  واحد، دو ضلع مربع را قطع می‌کند. فاصله نزدیک‌ترین رأس مربع تا نقطه تقاطع، کدام است؟

- (۱)  $\frac{1}{4}$  (۲)  $\frac{1}{2}$  (۳)  $\frac{\sqrt{2}}{2}$  (۴)  $\frac{\sqrt{3}}{2}$

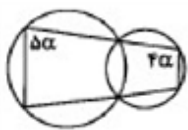
۳۱۲ اگر اضلاع AB و AD از لوزی ABCD بر دایره‌ای مماس باشند و رأس C روی دایره قرار داشته باشد، زاویه‌ی A چند درجه است؟



- (۱) ۶۰ (۲) ۳۰ (۳) ۴۵ (۴) ۷۵

۳۱۳ رأس A از مثلث متساوی‌الاضلاع ABC روی یک دایره واقع است و ضلع BC در نقطه‌ی T بر دایره مماس است به طوری که:  $BT = 4CT$  اگر دایره، اضلاع AB و AC را به ترتیب در D و E قطع کند، در این صورت BD چند برابر CE است؟

- (۱) ۸ (۲) ۲ (۳) ۴ (۴) ۱۶



۳۱۴ در شکل داده شده، اندازه‌ی  $\alpha$  کدام است؟

- (۱)  $10^\circ$  (۲)  $15^\circ$  (۳)  $20^\circ$  (۴)  $25^\circ$

۳۱۵ فاصله‌ی نزدیک‌ترین نقطه‌ی دایره‌ای تا نقطه‌ی A، چهار برابر شعاع دایره است. طول مماس مرسوم از نقطه‌ی A بر دایره چند برابر شعاع دایره است؟

- (۱)  $2\sqrt{2}$  (۲)  $2\sqrt{6}$  (۳)  $\sqrt{15}$  (۴)  $6\sqrt{2}$

۳۱۶ از نقطه‌ی P یک مماس و یک قاطع نسبت به دایره‌ای رسم شده است. طول مماس برابر ۶ و اندازه وتر بر روی قاطع ۴ واحد است. فاصله‌ی نقطه P تا انتهای قاطع کدام است؟

- (۱)  $2 + 2\sqrt{6}$  (۲)  $1 + 2\sqrt{7}$  (۳)  $2 + 2\sqrt{10}$  (۴)  $1 + 2\sqrt{11}$

۳۱۷ دو دایره به شعاع‌های ۵ و ۲ واحد مماس خارج هستند. فاصله‌ی نقطه تلاقی مماس مشترک‌های داخلی و خارجی این دو دایره از نقطه تماس آن دو کدام است؟

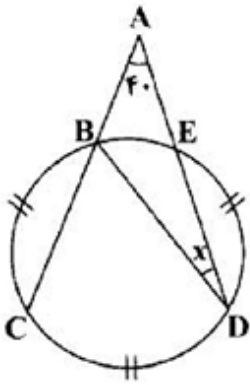
- (۱)  $2\sqrt{3}$  (۲)  $\sqrt{8}$  (۳)  $\sqrt{10}$  (۴) ۳

۳۱۸ در مثلث متساوی‌الاضلاع به طول ضلع  $2\sqrt{3}$ ، فاصله‌ی مرکزهای دو دایره محاطی خارجی و محیطی آن کدام است؟

- (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴) ۵

۳۱۹

در شکل روبه‌رو  $\widehat{BC} = \widehat{CD} = \widehat{DE}$ . زاویه‌ی  $X$  چند درجه است؟

(۱)  $10^\circ$ (۲)  $15^\circ$ (۳)  $20^\circ$ (۴)  $30^\circ$ 

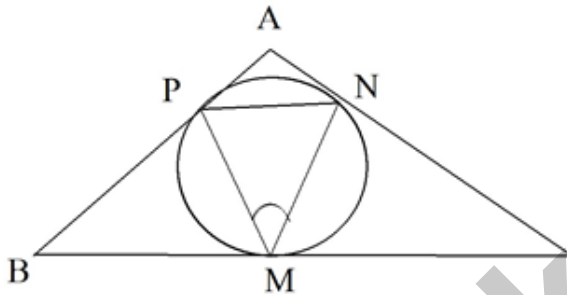
۳۲۰ شعاع دایره‌ی محاطی خارجی مثلث متساوی‌الاضلاعی به ضلع  $\sqrt{3}$  برابر است با:

(۴)  $2\sqrt{3}$ 

(۳) ۳

(۲)  $\frac{3}{2}$ (۱)  $\frac{\sqrt{3}}{2}$ 

۳۲۱ در شکل زیر دایره‌ی محاطی مثلث در نقاط M و N و P بر اضلاع مماس می‌باشد. زاویه‌ی M از این مثلث برحسب زوایای مثلث ABC کدام است؟

(۱)  $\hat{A}$ (۲)  $90 - \frac{\hat{A}}{2}$ (۳)  $\frac{\hat{A}}{2}$ (۴)  $\frac{\hat{B}-\hat{C}}{2}$ 

۳۲۲ در نیم‌دایره‌ای به قطر ۲ واحد مربعی محاط شده است. به طوری که ضلع مربع عمود بر قطر نیم‌دایره است. قطر این مربع کدام است؟

(۴)  $\frac{3\sqrt{5}}{5}$ (۳)  $\frac{3\sqrt{2}}{4}$ (۲)  $\frac{2\sqrt{10}}{5}$ (۱)  $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ 

۳۲۳ به قطر وتر مثلث قائم‌الزاویه با اضلاع قائم ۱ و ۳ واحد نیم‌دایره‌ای رسم شده است. در داخل نیم‌دایره مربعی محاط می‌کنیم که یک ضلع آن بر روی وتر مثلث مذکور باشد، قطر این مربع چند واحد است؟

(۴)  $2\sqrt{2}$ (۳)  $\sqrt{2}$ 

(۲) ۳

(۱) ۲

۳۲۴ دو دایره که شعاع یکی چهار برابر دیگری است مماس برونی هستند. اگر طول مماس مشترک دو دایره برابر ۳۶ باشد طول خط‌المركزین آنها کدام است؟

(۴) ۶۰

(۳) ۴۵

(۲) ۴۰

(۱) ۳۶

۳۲۵ دوزنقه‌ای با اندازه‌ی قاعده‌های ۶ و ۸ در دایره‌ای به شعاع ۵ محاط است. مساحت این دوزنقه کدام می‌تواند باشد؟

(۴) ۲۱

(۳) ۷

(۲)  $2\sqrt{7}$ 

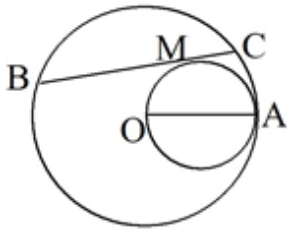
(۱) ۱۴

۳۲۶ در مثلثی به اضلاع ۱۴، ۹، ۷ واحد فاصله رأس زاویه کوچک‌تر مثلث از نقطه‌ی تماس دایره‌ی محاطی داخل آن کدام است؟

- ۹ (۱)      ۸ (۲)      ۷ (۳)      ۶ (۴)

۳۲۷ دو دایره به شعاع‌های ۵ و ۷ و فاصله مرکزها ۱۴ واحد مفروض است. طول کوچک‌ترین پاره‌خطی که دو سر آن بر روی هریک از این دو دایره باشد کدام است؟

- ۴ (۱)      ۳ (۲)      ۲/۵ (۳)      ۲ (۴)



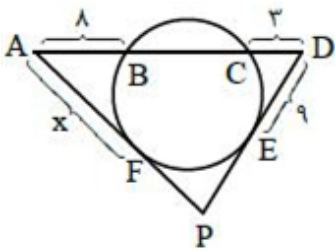
۳۲۸ در دایره‌ای به شعاع OA وتر BC مماس بر دایره‌ای به قطر OA رسم شده است.

مقدار  $MB \times MC$  برابر کدام است؟

- $MA^2$  (۲)       $MO^2$  (۱)  
 $MA \cdot MO$  (۴)       $OA^2$  (۳)

۳۲۹ دو دایره متقاطع در نقطه‌ی A مشترک‌اند. خط‌گذرا بر A دو دایره‌ی مفروض را در B و C قطع می‌کند. مماس‌ها بر هر دایره در B و C در نقطه‌ی M متقاطع‌اند. در مثلث MBC با چرخش خط قاطع، کدام جزء ثابت می‌ماند؟

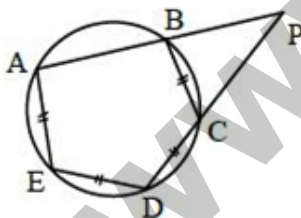
- MA (۱)      محیط (۲)      مساحت (۳)      زاویه  $\widehat{BMC}$  (۴)



۳۳۰ در شکل مقابل مقدار X کدام است؟

- $2\sqrt{6}$  (۱)  
 $4\sqrt{6}$  (۲)  
 $8\sqrt{5}$  (۳)  
 ۱۶ (۴)

۳۳۱ در شکل مقابل می‌دانیم:  $\widehat{ED} = \alpha$  و  $\widehat{AB} = 3\alpha + 10$  و  $AE = DC = BC = ED$  مقدار زاویه‌ی P چه قدر است؟

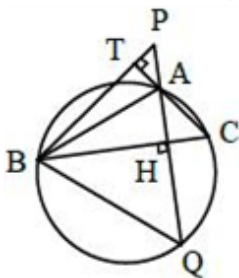


- $25^\circ$  (۱)  
 $45^\circ$  (۲)  
 $50^\circ$  (۳)  
 $20^\circ$  (۴)

۳۳۲ در شکل مقابل نقطه‌ی P محل برخورد دو ارتفاع AH و BT از مثلث ABC است.

کدام گزینه لزوماً درست نیست؟

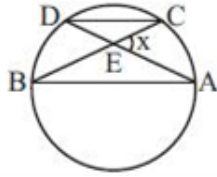
- $\widehat{P} = \widehat{C}$  (۱)  
 $\widehat{P} = \widehat{Q}$  (۲)  
 $PH = QH$  (۳)  
 $AH = AP$  (۴)



۳۳۳ دایره‌ی  $C(O, 10)$  و نقطه‌ی  $A$  به فاصله‌ی ۱۲ از مرکز دایره مفروض‌اند. از نقطه‌ی  $A$  دو خط رسم کرده‌ایم که در دایره‌ی  $C$  وترهای به طول مساوی ۱۶ ایجاد کرده‌اند. زاویه‌ی بین دو خط کدام است؟

- (۱) ۳۰ (۲) ۴۵ (۳) ۶۰ (۴) ۹۰

۳۳۴ در دایره‌ی مقابل وتر  $DC$  را موازی قطر  $AB$  رسم کرده‌ایم. نسبت مساحت مثلث  $ECD$  به مساحت مثلث  $EAB$  کدام است؟



- (۱)  $\sin x$  (۲)  $\cos x$   
(۳)  $\cos^2 x$  (۴)  $\sin^2 x$

۳۳۵ چهار ضلعی با اضلاع متوالی  $a, 7, 4, 5$  واحد بر دایره‌ای محیط است.  $a$  کدام است؟

- (۱) ۸ (۲) ۶ (۳) ۵ (۴) ۳

۳۳۶ در دایره‌ای به شعاع ۶ واحد، وتر  $AB = 7$  رسم شده است. اگر  $AB$  را به اندازه ۸ واحد تا نقطه  $M$  امتداد دهیم، فاصله  $M$  تا نزدیک‌ترین نقطه دایره کدام است؟

- (۱)  $3(\sqrt{15} - 2)$  (۲)  $2(\sqrt{37} - 3)$  (۳)  $2(\sqrt{39} - 3)$  (۴)  $3(\sqrt{26} - 2)$

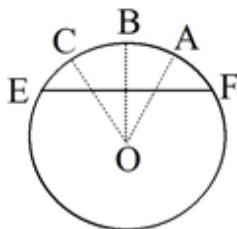
۳۳۷ در دایره‌ای فاصله مرکز تا وتر  $AB$  برابر نصف شعاع آن است. اندازه کمان  $AB$  چند درجه است؟

- (۱) ۶۰ (۲) ۷۵ (۳) ۱۲۰ (۴) ۱۳۵

۳۳۸ نقطه‌ی  $A$  به فاصله‌ی ۳ واحد از نزدیک‌ترین نقطه‌ی دایره به شعاع  $4/5$  واحد قرار دارد. از نقطه‌ی  $A$  مماس بر دایره رسم شده است. محیط مثلث، با رأس‌های  $A$  و نقطه‌ی تماس و مرکز دایره کدام است؟

- (۱) ۲۰ (۲) ۱۸ (۳) ۱۵ (۴) ۱۲

۳۳۹ اگر  $\hat{A}OB = \alpha$  و  $\hat{B}OC = \beta$  باشد در دایره به شعاع واحد اندازه  $EF$  برابر کدام است؟

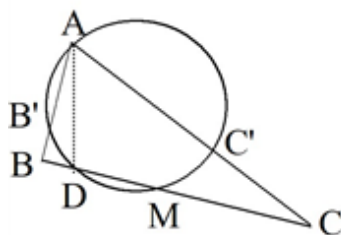


- (۱)  $2 \cos(\alpha + \beta)$  (۲)  $2 \sin(\alpha + \beta)$   
(۳)  $\sin(\alpha + \beta)$  (۴)  $\cos(\alpha + \beta)$

۳۴۰ دو دایره به شعاع‌های ۲ و ۴ واحد مماس درونی هستند طول وتری از دایره بزرگ مماس بر دایره کوچک موازی خط‌المركزین کدام است؟

- (۱) ۴ (۲)  $4\sqrt{2}$  (۳)  $4\sqrt{3}$  (۴) ۶

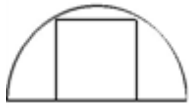
۳۴۱ در مثلث  $ABC$  نقطه‌ی  $M$  وسط ضلع  $AB$  و  $AD$  نیمساز زاویه‌ی  $A$  است. دایره‌ی



محیطی مثلث  $ADM$  رسم شده است. نسبت  $\frac{BB'}{CC'}$ ، برابر کدام است؟

- (۱)  $\frac{AB}{AC}$  (۲)  $\frac{DB}{DM}$   
(۳)  $\frac{AB'}{AC'}$  (۴)  $\frac{AB}{AC}$

- ۳۴۲ در مثلث متساوی‌الساقین  $ABC$  ( $AB = AC$ ) نقطه‌ی  $O$  در امتداد  $AC$ ، مرکز دایره‌ای است که در نقطه‌ی  $B$  بر ضلع  $AB$  مماس است. امتداد  $BC$  این دایره را در  $D$  قطع کرده است. مثلث  $OCD$  چگونه است؟  
 (۱) متساوی‌الساقین  
 (۲) قائم‌الزاویه  
 (۳) قائم‌الزاویه و متساوی‌الساقین  
 (۴) غیرمشخص



۴۵ (۴)

۳۰ (۳)

۲۵ (۲)

۲۴ (۱)

- ۳۴۳ مساحت مربع محاط در نیم‌دایره به قطر ۱۵ واحد کدام است؟

- ۳۴۴ دو دایره به شعاع‌های ۴ و  $\frac{6}{5}$  واحد مماس داخلی‌اند. از مرکز دایره کوچکتر عمودی بر خط‌المركزین اخراج می‌کنیم تا هر دو دایره را در یک سمت در نقاط  $A, B$  قطع کند  $AB$  چقدر است؟  
 (۱)  $\frac{1}{5}$   
 (۲) ۲  
 (۳)  $\frac{2}{5}$   
 (۴) ۳

- ۳۴۵ در چهار ضلعی محاطی  $ABCD$  نقطه  $P$  محل برخورد اقطار است  $PA = PC = ۱۲$ ،  $PB = ۸$  اندازه  $PD$  کدام است؟  
 (۱) ۱۴  
 (۲) ۱۶  
 (۳) ۱۸  
 (۴) ۲۰

- ۳۴۶ در دو دایره متقاطع به مراکز  $O$  و  $O'$  و شعاع‌های ۳ و ۴ واحد، فاصله نقطه تلاقی دو دایره از وسط  $OO'$  برابر  $\frac{1}{4}OO'$  می‌باشد. اندازه مماس مشترک محدود به دو نقطه تماس این دو دایره چند واحد است؟  
 (۱) ۴  
 (۲)  $2\sqrt{5}$   
 (۳)  $2\sqrt{6}$   
 (۴) ۵

- ۳۴۷ در مثلث قائم‌الزاویه‌ای طول اضلاع قائم ۱۲ و ۵ واحد است. اندازه‌ی بزرگ‌ترین قطعه‌ی مماس محدود رأس و دایره‌ی محاطی داخل آن کدام است؟  
 (۱) ۸  
 (۲) ۹  
 (۳) ۱۰  
 (۴) ۱۱

- ۳۴۸ در یک هشت‌ضلعی منتظم به ضلع ۶ وسط اضلاع را یک در میان به هم وصل می‌کنیم، مساحت مربع حاصل چه قدر است؟  
 (۱)  $۱۰۸ + ۶\sqrt{۲}$   
 (۲)  $۵۴ + ۳۶\sqrt{۲}$   
 (۳)  $۲۷ + ۱۸\sqrt{۲}$   
 (۴)  $۵۴ + ۶\sqrt{۲}$

- ۳۴۹ دو دایره به شعاع‌های  $r_1 = ۴$ ،  $r_2 = ۶$  و طول خط‌المركزین ۱۲ مفروض‌اند. طول مماس مشترک داخل آن‌ها چه قدر است؟  
 (۱)  $2\sqrt{۳۱}$   
 (۲)  $\sqrt{۱۱}$   
 (۳)  $\sqrt{۶۱}$   
 (۴)  $2\sqrt{۱۱}$

- ۳۵۰ در یک شش‌ضلعی منتظم به ضلع ۳ اوساط اضلاع را متوالیاً به هم وصل می‌کنیم تا شش‌ضلعی منتظم دیگری به دست آید، مساحت شش‌ضلعی حاصل چه قدر است؟  
 (۱)  $\frac{۸۱\sqrt{۳}}{۴}$   
 (۲)  $\frac{۲۷\sqrt{۳}}{۴}$   
 (۳)  $\frac{۲۷\sqrt{۳}}{۸}$   
 (۴)  $\frac{۸۱\sqrt{۳}}{۸}$

۳۵۱ در دو دایره به شعاع‌های  $R_1$  و  $R_2$  و طول خط‌المركزین  $d$  روابط  $R_1 + 2R_2 = \frac{11}{6}d$  و  $3R_1 + 2R_2 = 4d$  برقرار است، چند خط وجود دارد که بر هر دو دایره مماس است؟

- (۱) صفر (۲) ۱ (۳) ۴ (۴) ۲

۳۵۲ در دو دایره به شعاع‌های ۲ و ۳، طول خط‌المركزین  $\sqrt{5}$  است، چند خط می‌توان رسم کرد که به هر دو دایره مماس باشد؟

- (۱) صفر (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) ۴

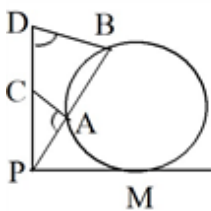
۳۵۳ دایره‌ی محاطی داخلی یک مثلث به طول اضلاع ۱۳ و ۹ و ۸ در نقطه‌ی تماس، کوچک‌ترین ضلع را به ۲ قطعه تقسیم می‌کند. نسبت آن دو قطعه کدام است؟



- (۱)  $\frac{1}{3}$  (۲)  $\frac{2}{5}$  (۳)  $\frac{3}{7}$  (۴)  $\frac{2}{3}$

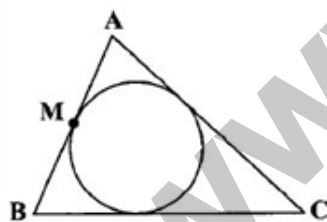
۳۵۴ در یک مستطیل به طول ۱۳ و عرض ۶ واحد، دایره‌ای به قطر طول مستطیل، ضلع مقابل آن را در دو نقطه‌ی M و N قطع می‌کند، فاصله‌ی این دو نقطه چند واحد است؟

- (۱) ۴ (۲)  $2\sqrt{6}$  (۳) ۵ (۴)  $4\sqrt{2}$



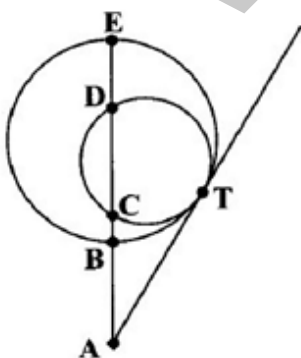
۳۵۵ در شکل مقابل  $\widehat{PAC} = \widehat{PDB}$ ،  $PC = 9$  و  $CD = 7$ ، اندازه‌ی مماس PM چه قدر است؟

- (۱) ۸ (۲)  $6\sqrt{2}$  (۳) ۱۰ (۴) ۱۲



۳۵۶ در شکل زیر محیط مثلث ۲۰ و طول ضلع  $BC = 8$  است، طول AM برابر است با:

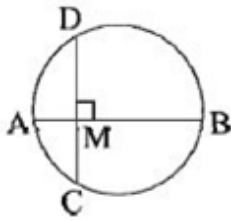
- (۱) ۴ (۲) ۳ (۳) ۵ (۴) ۲



۳۵۷ در شکل مقابل AT در نقطه‌ی T بر هر دو دایره مماس است. اگر  $AB = 5$  و  $AD = 11$  و  $CE = 9$  باشد، آن‌گاه اندازه‌ی AC برابر کدام است؟

- (۱) ۷ (۲)  $7/5$  (۳) ۸ (۴)  $8/5$

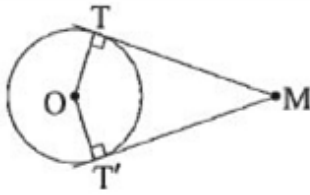




۳۵۸ در شکل روبه‌رو،  $AM = 2$ ،  $BM = 6$  و  $CM = 3$  است.

طول قطر دایره کدام است؟

- (۱)  $\sqrt{63}$  (۲)  $\sqrt{65}$   
 (۳)  $\sqrt{68}$  (۴)  $\sqrt{70}$



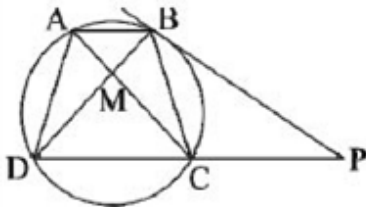
۳۵۹ در شکل مقابل  $MT$  و  $MT'$  مماس بر دایره‌اند. اگر شعاع دایره برابر  $2\sqrt{3}$  و

$OM = 6$  باشد، اندازه  $TT'$  چه قدر است؟

- (۱)  $2\sqrt{2}$  (۲)  $2\sqrt{3}$   
 (۳)  $4\sqrt{3}$  (۴)  $4\sqrt{2}$

۳۶۰ مساحت ناحیه‌ی بین دو دایره‌ی هم‌مرکز  $25\pi$  است. طول وترى از دایره‌ی بزرگ‌تر که بر دایره‌ی کوچک‌تر مماس باشد، کدام است؟

- (۱)  $10\sqrt{2}$  (۲) ۱۰ (۳)  $5\sqrt{2}$  (۴) ۵



۳۶۱ در شکل روبه‌رو در ذوزنقه‌ی  $ABCD$ ،  $AB = 4$ ،  $AM = 3$ ،  $CM = 6$  و

$PC = 2$  است. طول مماس  $PB$  کدام است؟

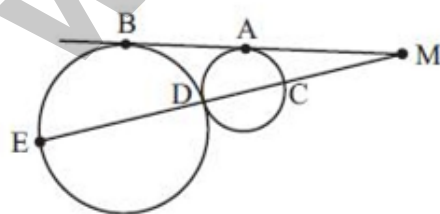
- (۱) ۲ (۲) ۳  
 (۳)  $2\sqrt{5}$  (۴)  $3\sqrt{5}$

۳۶۲ در دو دایره‌ی  $C(O, 3)$  و  $C'(O', 1)$ ، نقطه‌ی  $O$  روی دایره‌ی  $C'$  قرار دارد. چند وتر به طول  $2\sqrt{5}$  از دایره‌ی

بزرگ‌تر وجود دارد که بر دایره‌ی کوچک‌تر مماس است؟

- (۱) هیچ (۲) یک (۳) دو (۴) سه

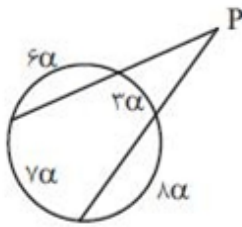
۳۶۳ در شکل مقابل اگر  $2MC = 6DC = 3DE$  باشد، حاصل  $\frac{MA}{AB}$  کدام است؟ (خط  $MB$  بر دو دایره‌ی مماس



خارج، مماس است.)

- (۱)  $2\sqrt{2} - 1$  (۲)  $\sqrt{2} + 1$   
 (۳)  $\sqrt{3} + 1$  (۴)  $2\sqrt{3} - 1$

۳۶۴ زاویه  $P$  در شکل مقابل چند درجه است؟

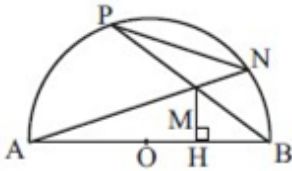


- (۱)  $18^\circ$
- (۲)  $45^\circ$
- (۳)  $15^\circ$
- (۴)  $30^\circ$

۳۶۵ طول پاره‌خط واصل مرکز دو دایره‌ی مماس داخلی  $C(O, 5)$  و  $C'(O', 8)$  کدام است؟

- (۱)  $6/5$
- (۲)  $1/5$
- (۳)  $13$
- (۴)  $3$

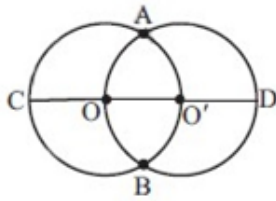
۳۶۶ در نیم‌دایره‌ی شکل مقابل به مرکز  $O$ ، می‌دانیم:  $MH \perp AB$  و  $MH = MN$ . اگر



زاویه‌ی بین  $MH$  و  $MN$  برابر  $118^\circ$  باشد، زاویه‌ی بین امتداد وتر  $PN$  و امتداد قطر  $AB$  کدام است؟

- (۱)  $8^\circ$
- (۲)  $6^\circ$
- (۳)  $3^\circ$
- (۴)  $4^\circ$

۳۶۷ در شکل مقابل هر دایره از مرکز دیگری گذشته است. اگر مساحت چهارضلعی  $ADBC$  برابر  $18\sqrt{3}$  باشد، شعاع دو دایره کدام است؟

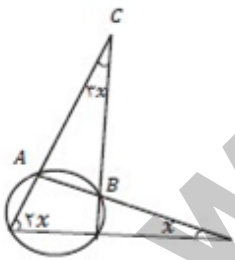


- (۱)  $\frac{3\sqrt{2}}{2}$
- (۲)  $\sqrt{3}$
- (۳)  $3\sqrt{2}$
- (۴)  $2\sqrt{3}$

۳۶۸ طول مماس مشترک دو دایره‌ی مماس خارج با شعاع‌های  $R$  و  $r$  کدام است؟

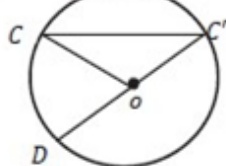
- (۱)  $rR$
- (۲)  $2rR$
- (۳)  $\sqrt{3r}R$
- (۴)  $\sqrt{10}R$

۳۶۹ در شکل زیر مقدار  $X$  کدام است؟



- (۱)  $19/5$
- (۲)  $22/5$
- (۳)  $20/5$
- (۴)  $21/5$

۳۷۰ وتر  $CC'$  و قطر  $C'D$  در دایره‌ی  $(O)$  مفروض است. اگر خط  $yk \parallel cc'$  بر  $k$  و  $y$  مماس در  $A$  شود و  $\widehat{C'OC} = 120^\circ$  باشد مطلوب است زاویه‌ی  $\widehat{kAD}$ ؟



- (۱)  $60^\circ$
- (۲)  $120^\circ$
- (۳)  $30^\circ$
- (۴)  $90^\circ$

۳۷۱) در یک شش ضلعی منتظم قطر دایره محاطی چند برابر شعاع دایره محیطی است؟

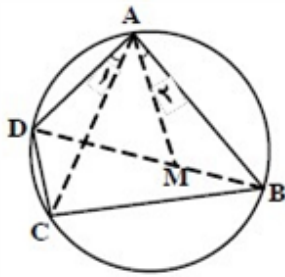
- (۱)  $\sqrt{3}$  (۲)  $\frac{\sqrt{3}}{2}$  (۳)  $\frac{1}{2}$  (۴) ۱

۳۷۲) دوزنقه‌ی متساوی‌الساقین بر یک دایره محیط است اگر حاصل ضرب دو قاعده‌ی این دوزنقه ۱۶ باشد آن‌گاه مساحت دایره کدام است؟

- (۱)  $4\pi$  (۲)  $8\pi$  (۳)  $12\pi$  (۴)  $16\pi$

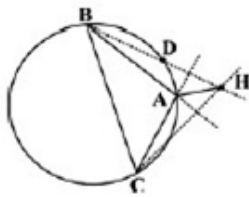
۳۷۳) طول‌های دو ضلع قائم یک مثلث قائم‌الزاویه ۵ و ۱۲ است. شعاع دایره محیطی این مثلث کدام است؟

- (۱) ۱۳ (۲)  $\frac{6}{5}$  (۳) ۱۵ (۴)  $\frac{7}{5}$



۳۷۴) در شکل مقابل  $\hat{A}_1 = \hat{A}_2$ ، حاصل  $AD \cdot BC$  برابر کدام است؟

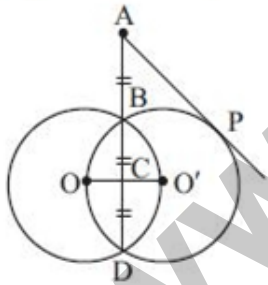
- (۱)  $DM \cdot AC$   
(۲)  $BM \cdot AC$   
(۳)  $AB \cdot CD$   
(۴)  $BD \cdot BM$



۳۷۵) در شکل روبه‌رو نقطه‌ی H محل تلاقی ارتفاعات مثلث ABC است، زاویه‌ی  $\hat{AHD}$  با کدام زاویه برابر است؟

- (۱)  $\hat{DAE}$  (۲)  $\hat{ABC}$   
(۳)  $\hat{ADH}$  (۴)  $\hat{AHC}$

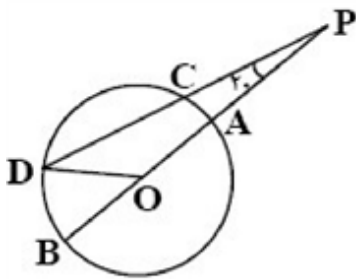
۳۷۶) در شکل مقابل دو دایره به شعاع  $\sqrt{3}$  از مرکز یک‌دیگر گذشته‌اند. اگر  $AB = BC = CD$  باشد، طول مماس از A بر دایره چه قدر است؟



- (۱)  $\frac{3\sqrt{3}}{4}$  (۲)  $\frac{3\sqrt{2}}{2}$   
(۳)  $\frac{3\sqrt{3}}{2}$  (۴)  $\frac{3\sqrt{2}}{4}$

۳۷۷) دایره‌ی  $C(O, R)$  و دایره‌ی  $C'(O', \frac{3}{4}R)$  مماس داخلی‌اند. بزرگ‌ترین وتر دایره‌ی C که بر دایره‌ی C' مماس است چه طولی دارد؟

- (۱)  $\frac{\sqrt{2}}{2}R$  (۲)  $\sqrt{2}R$  (۳)  $\frac{\sqrt{3}}{2}R$  (۴)  $\sqrt{3}R$



۳۷۸ در شکل مقابل قطر  $AB$  دایره و  $\hat{P} = 20$  می‌باشد. اگر  $\widehat{CD} = 90$  باشد

اندازه‌ی  $\angle DOA$  کدام است؟

(۱) ۱۱۵

(۲) ۱۱۰

(۳) ۱۲۰

(۴) ۱۰۰

۳۷۹ یک ذوزنقه متساوی‌الساقین بر دایره‌ای به شعاع  $R = 4$  محیط است، اگر طول ساق ذوزنقه ۹ باشد، مساحت ذوزنقه کدام است؟

(۴) ۳۶

(۳) ۷۲

(۲) ۸۱

(۱) ۱۶۲

۳۸۰ در دایره‌ای به قطر  $AB = 10$  واحد وتر  $AC = 8$  واحد، قطر عمود بر  $AB$  وتر  $AC$  را در  $D$  قطع می‌کند. اندازه‌ی  $AD$  چند واحد است؟

(۴)  $5/75$

(۳)  $6/25$

(۲)  $6/5$

(۱)  $5/5$

۳۸۱ در دو دایره مماس بر هم طول مماس مشترک خارجی آن‌ها  $\sqrt{2}$  برابر شعاع دایره بزرگ‌تر است. نسبت شعاع‌های این دو دایره کدام است؟

(۴)  $3/4$

(۳)  $2/3$

(۲)  $\frac{\sqrt{2}}{2}$

(۱)  $1/2$

۳۸۲ در مثلثی به طول اضلاع ۹ و ۹ و ۱۰ واحد، شعاع دایره محاطی آن چند واحد است؟

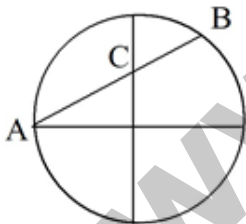
(۴)  $\frac{5\sqrt{14}}{7}$

(۳)  $\frac{4\sqrt{10}}{5}$

(۲)  $\frac{4\sqrt{5}}{3}$

(۱)  $\frac{3\sqrt{7}}{4}$

۳۸۳ در شکل روبه‌رو دو قطر دایره بر هم عمودند. اگر  $AB$  مساوی  $1/6$  برابر شعاع دایره باشد، اندازه‌ی  $AC$  چند برابر شعاع دایره است؟



(۲)  $6/5$

(۱)  $4/3$

(۴)  $9/8$

(۳)  $5/4$

۳۸۴ در داخل یک نیم‌دایره به قطر ۴ واحد بزرگ‌ترین ذوزنقه با زاویه‌ی  $60^\circ$  قرار دارد، مساحت ذوزنقه کدام است؟

(۴) ۶

(۳)  $4\sqrt{3}$

(۲)  $3\sqrt{3}$

(۱)  $2\sqrt{3}$

۳۸۵ در یک چهارضلعی محیطی مجموع دو ضلع غیرمجاور برابر ۱۸ و محیط دایره محاطی آن  $15/7$  واحد است، مساحت این چهارضلعی کدام است؟

(۴) ۴۵

(۳) ۴۲

(۲) ۳۸

(۱) ۳۶

۳۸۶ دو دایره به شعاع‌های ۴ و  $\frac{10}{5}$  واحد مماس برون‌اند. از مرکز دایره کوچک‌تر، مماس بر دایره بزرگ‌تر رسم می‌کنیم. طول این قطعه مماس چقدر است؟

- ۸ (۱)  $4\sqrt{5}$  (۲)  $4\sqrt{6}$  (۳) ۱۰ (۴)

۳۸۷ نقطه‌ی  $M$  خارج دایره‌ی  $C(O, R)$  است، اگر فاصله‌های دورترین و نزدیک‌ترین نقاط دایره از نقطه‌ی  $M$ ، به ترتیب ۱۶ و ۴ باشند، اندازه‌ی مماسی که از  $M$  بر این دایره رسم می‌شود، کدام است؟

- ۸ (۱) ۶ (۲) ۹ (۳) ۱۲ (۴)

۳۸۸ در مثلث متساوی‌الاضلاع به طول ضلع  $\sqrt{3}$  فاصله مرکزهای دو دایره محاطی خارجی و محیطی آن کدام است؟

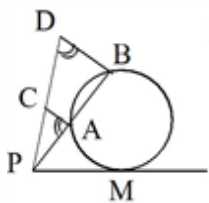
- $\frac{2}{3}$  (۱)  $\frac{5}{2}$  (۲) ۲ (۳) ۳ (۴)

۳۸۹ در مثلثی به اضلاع ۱۰ و ۱۳ و ۱۳ واحد، شعاع دایره محاطی چند واحد است؟

- $\frac{2}{6}$  (۱)  $\frac{46}{13}$  (۲)  $\frac{45}{13}$  (۳)  $\frac{10}{3}$  (۴)

۳۹۰ مساحت مثلث متساوی‌الاضلاع  $3\sqrt{3}$  واحد مربع است شعاع دایره محاطی داخلی این مثلث کدام است؟

- $\sqrt{3}$  (۱)  $\frac{3}{4}$  (۲) ۱ (۳)  $\frac{3}{2}$  (۴)



۳۹۱ در شکل مقابل،  $\widehat{PAC} = \widehat{PDB}$ ،  $PC = 9$ ،  $CD = 7$ ، اندازه‌ی مماس  $PM$  چه قدر است؟

- ۸ (۱)  $6\sqrt{2}$  (۲) ۱۲ (۴) ۱۰ (۳)

۳۹۲ دایره‌ی  $C(O, 4)$  مفروض است. اگر از نقطه‌ی مفروض  $A$  خارج دایره بتوان دو مماس عمود بر هم، بر دایره رسم کرد. نزدیک‌ترین فاصله‌ی نقطه‌ی  $A$  از نقاط دایره کدام است؟

- $\frac{4}{\sqrt{2}-1}$  (۱)  $4(\sqrt{2}+1)$  (۲)  $\frac{4}{\sqrt{2}+1}$  (۳)  $2(\sqrt{2}-1)$  (۴)

۳۹۳ در چهار ضلعی محاطی  $ABCD$ ، اگر  $\widehat{B} + \widehat{C} = 85^\circ$  و  $\widehat{B} + \widehat{A} = 145^\circ$  باشد، زاویه‌ی  $\widehat{B}$  چند درجه است؟

- ۶۵ (۱) ۴۵ (۲) ۲۵ (۳) ۱۵ (۴)

۳۹۴ اضلاع مثلثی با اندازه‌های ۸، ۱۱ و ۱۵ متناسب‌اند. دایره‌ی محاطی داخلی، ضلع بزرگ‌تر را به چه نسبتی تقسیم می‌کند؟

- $\frac{2}{3}$  (۱)  $\frac{3}{5}$  (۲)  $\frac{3}{7}$  (۳)  $\frac{4}{7}$  (۴)

۳۹۵ در دایره‌ای به شعاع ۴ واحد یک مربع محاط و مربع دیگری محیط شده است، مساحت محدود به این دو مربع چقدر است؟

- (۱) ۲۴ (۲) ۳۰ (۳) ۳۲ (۴) ۳۶

۳۹۶ روی دایره‌ای به قطر  $AB$  و به مرکز  $O$ ، نقطه‌ی  $C$  طوری قرار دارد که زاویه‌ی  $\widehat{BOC}$  برابر  $60^\circ$  است. اگر قطر دایره ۵ سانتی‌متر باشد، طول وتر  $AC$ ، برحسب سانتی‌متر کدام است؟

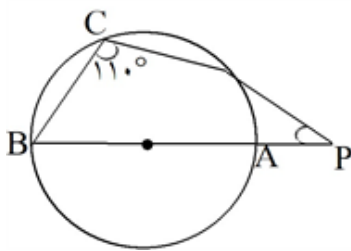
- (۱) ۳ (۲)  $\frac{5\sqrt{2}}{2}$  (۳)  $\frac{5\sqrt{3}}{2}$  (۴)  $3\sqrt{3}$

۳۹۷ نسبت مساحت ۶ ضلعی منتظم محیطی به مساحت ۶ ضلعی منتظم محاط در یک دایره چه قدر است؟

- (۱)  $\frac{5}{3}$  (۲)  $\frac{6}{5}$  (۳)  $\frac{4}{3}$  (۴)  $\frac{4}{5}$

۳۹۸ دو دایره مساوی به شعاع ۵ متخارج‌اند. اگر طول مماس مشترک داخلی آن‌ها برابر  $4\sqrt{6}$  باشد، اندازه خط‌المركزین کدام است؟

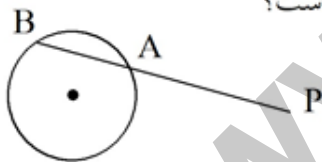
- (۱) ۱۲ (۲) ۱۴ (۳) ۱۶ (۴) ۱۵



۳۹۹ در شکل داده شده اگر  $AB$  قطر دایره و  $\widehat{C} = 110^\circ$  باشد، آن‌گاه زاویه  $\widehat{P}$  چقدر است؟

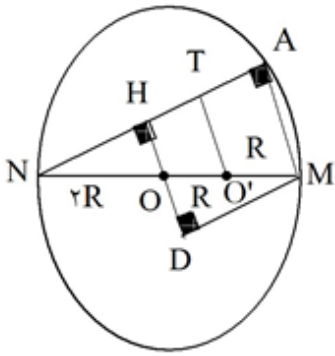
- (۱)  $50^\circ$  (۲)  $60^\circ$  (۳)  $45^\circ$  (۴)  $55^\circ$

۴۰۰ فاصله‌ی نقطه‌ی  $P$  تا دورترین نقاط یک دایره سه برابر شعاع دایره است. از این نقطه قاطع  $PAB$  نسبت به دایره رسم شده است. اگر کمان  $AB$  برابر  $60^\circ$  درجه باشد، اندازه‌ی  $PA$  چند برابر شعاع دایره است؟



- (۱)  $\frac{1}{2}(\sqrt{11}-1)$  (۲)  $\frac{1}{2}(\sqrt{13}-1)$  (۳)  $(\sqrt{11}-2)$  (۴)  $(\sqrt{13}-2)$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. طبق روابط طولی دایره داریم:



$$NT^2 = NO \times NM$$

$$NT^2 = 2R \times 4R \Rightarrow NT = 2\sqrt{2}R \quad (1)$$

OH عمود بر NA را رسم می‌کنیم و مسلماً شعاع O'T هم بر NA عمود است، پس:

$$NH = \frac{1}{2}AN$$

$$\triangle NTO' : OH \parallel O'T \xrightarrow{\text{تالس}} \frac{NH}{NT} = \frac{NO}{NO'} = \frac{2R}{3R} = \frac{2}{3} \quad (\text{در دایره‌ی بزرگ‌تر})$$

$$\xrightarrow{(1)} \frac{NH}{2\sqrt{2}R} = \frac{2}{3} \Rightarrow NH = \frac{4\sqrt{2}}{3}R \Rightarrow AN = 2NH = \frac{8\sqrt{2}}{3}R$$

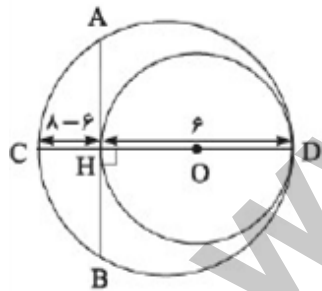
دو مثلث قائم‌الزاویه  $\triangle ANM$  و  $\triangle MOD$  به حالت دو زاویه متشابه‌اند، زیرا:

$$(\hat{N} = \hat{M}, \hat{A} = \hat{D} = 90^\circ) \xrightarrow{\text{(زز)}} \triangle ANM \sim \triangle MOD \Rightarrow$$

$$\frac{OM}{MN} = \frac{MD}{AN} \Rightarrow \frac{2R}{\frac{8\sqrt{2}}{3}R} = \frac{MD}{\frac{8\sqrt{2}}{3}R} \Rightarrow MD = \frac{4\sqrt{2}}{3}R$$

گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

بزرگ‌ترین وتر دایره‌ی بزرگ‌تر که بر دایره‌ی کوچک‌تر مماس است، وتری است که به مرکز آن نزدیک‌تر باشد، پس AB بلندترین وتر می‌باشد. با استفاده از رابطه‌ی طولی در دایره می‌نویسیم:

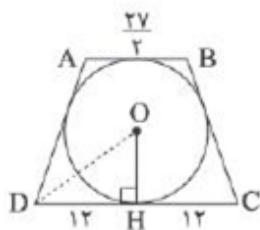


$$CH \times HD = AH \times HB \xrightarrow{AH = HB} CH \times HD = AH^2$$

$$\xrightarrow{HD = 6, CH = 2} 2 \times 6 = AH^2 = 2\sqrt{3} \Rightarrow AB = 4\sqrt{3}$$

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. ۳

در دوزنقه متساوی الساقین محیطی، ارتفاع دوزنقه یا قطر دایره محاطی، واسطه هندسی بین قاعده‌ها است.



$$(2r)^2 = AB \times CD \Rightarrow 18^2 = \frac{27}{2} \times CD \Rightarrow CD = 24$$

طبق قضیه فیثاغورس در مثلث OHD داریم:

$$OH^2 + DH^2 = OD^2 \Rightarrow 9^2 + 12^2 = OD^2 \Rightarrow OD = 15$$

فاصله نزدیک‌ترین نقاط دایره تا رأس D برابر است با:

$$OD - r = 15 - 9 = 6$$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. ۴

$$\text{طول مماس مشترک خارجی} = \sqrt{d^2 - (R - R')^2} \Rightarrow 3 = \sqrt{d^2 - (7 - 3)^2} \Rightarrow 9 = d^2 - 16 \Rightarrow d = 5$$

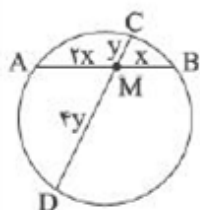
$$|3 - 7| < 5 < 3 + 7 \Rightarrow |R - R'| < d < R + R'$$

پس این دو دایره متقاطع‌اند.

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. ۵

طول MB را x می‌نامیم پس MA = 2x. همچنین طول MC = y می‌نامیم پس MD = 2y.

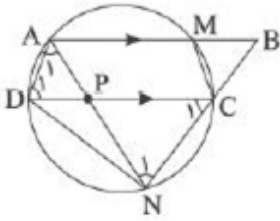
$$MA \times MB = MC \times MD \Rightarrow 2x^2 = 2y^2 \Rightarrow x = \sqrt{2}y$$



$$\frac{CD}{AB} = \frac{5y}{2x} = \frac{5y}{2\sqrt{2}y} = \frac{5\sqrt{2}}{2}$$



گزینه ۳ پاسخ صحیح است. بررسی سایر گزینه‌ها:  
گزینه (۱):



$$\left. \begin{array}{l} \hat{N}_1 = \frac{1}{2} \widehat{AC} \\ \hat{D}_1 = \frac{1}{2} \widehat{AC} \end{array} \right\} \Rightarrow \hat{N}_1 = \hat{D}_1$$

$$\left. \begin{array}{l} \Rightarrow \hat{B} = \hat{N}_1 \Rightarrow \triangle ABN: \text{متساوی الساقین} \\ ABCD: \text{متوازی الاضلاع} \Rightarrow \hat{B} = \hat{D}_1 \end{array} \right\}$$

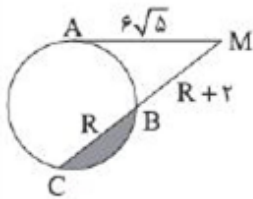
گزینه (۲):

$$\left. \begin{array}{l} \hat{A}_1 = \hat{C}_1 = \frac{1}{2} \widehat{ND} \\ AB \parallel CD \Rightarrow \hat{C}_1 = \hat{D}_1 \end{array} \right\} \Rightarrow \hat{A}_1 = \hat{D}_1 \Rightarrow \triangle ADP \text{ متساوی الساقین}$$

گزینه (۴):

$$\left. \begin{array}{l} AM \parallel CD \Rightarrow \widehat{AD} = \widehat{MC} \Rightarrow AD = MC \\ ABCD: \text{متوازی الاضلاع} \Rightarrow AD = BC \end{array} \right\} \Rightarrow MC = BC \Rightarrow \triangle BMC: \text{متساوی الساقین}$$

متساوی الساقین بودن مثلث CDN قابل اثبات نیست و با مثال نقض رد می‌شود.



$$MB - BC = 2 \xrightarrow{BC=R} MB = R + 2$$

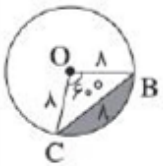
مطابق روابط طولی در دایره داریم:

$$MA^2 = MB \times MC \Rightarrow 180 = (R + 2)(2R + 2)$$

$$\Rightarrow 2R^2 + 6R - 176 = 0 \Rightarrow R^2 + 3R - 88 = 0$$

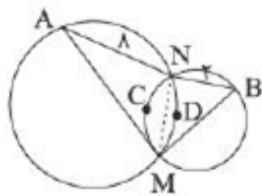
$$\Rightarrow (R + 11)(R - 8) = 0 \xrightarrow{R > 0} R = 8$$

چون مثلث OBC متساوی الاضلاع است داریم:



$$S_{\text{رنگی}} = S_{\text{قطاع}} - S_{\Delta OBC} = \frac{60}{360} \times \pi \times 8^2 - \frac{\sqrt{3}}{4} \times 8^2 = \frac{32\pi}{3} - 16\sqrt{3}$$

زاویه  $\widehat{NMA}$  در دایره کوچک ظلی است پس:



$$\widehat{NMA} = \frac{1}{2} \widehat{MCN}$$

$$\widehat{B} = \frac{1}{2} \widehat{MCN} \Rightarrow \widehat{B} = \widehat{NMA}$$

به طریق مشابه:

$$\widehat{NMB} = \frac{1}{2} \widehat{MDN}$$

$$\widehat{A} = \frac{1}{2} \widehat{MDN} \Rightarrow \widehat{A} = \widehat{NMB}$$

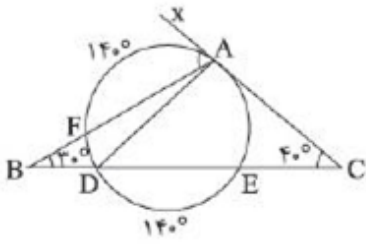
پس مثلث‌های AMN و BMN به حالت برابری دو زاویه، متشابه هستند و داریم:

$$\Delta AMN \sim \Delta BMN \Rightarrow \frac{AN}{MN} = \frac{MN}{BN} = \frac{AM}{BM}$$

$$\Rightarrow \frac{8}{MN} = \frac{MN}{2} \Rightarrow MN^2 = 16 \Rightarrow MN = 4 \Rightarrow \frac{AM}{BM} = \frac{8}{4} = 2$$

گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

زاویه  $\widehat{BAX}$ ، زاویه خارجی مثلث  $ABC$  است، پس:  $\widehat{BAX} = 30^\circ + 40^\circ = 70^\circ$ . از طرف دیگر این زاویه ظلی است، پس:  $\widehat{AF} = 2 \times 70^\circ = 140^\circ$ .



وترهای  $AF$  و  $DE$  از مرکز دایره به یک فاصله هستند، پس کمانهای نظیر آنها با هم برابر هستند، حال داریم:

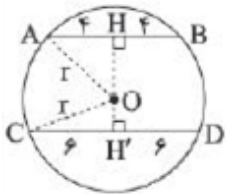
$$\left. \begin{aligned} \widehat{B} = 30^\circ &= \frac{\widehat{AE} - \widehat{DF}}{2} \Rightarrow \widehat{AE} - \widehat{DF} = 60^\circ \\ \widehat{AE} + 140^\circ + \widehat{DF} + 140^\circ &= 360^\circ \Rightarrow \widehat{AE} + \widehat{DF} = 80^\circ \end{aligned} \right\} \Rightarrow \widehat{AE} = 70^\circ, \widehat{DF} = 10^\circ$$

$$\widehat{ADE} = \frac{\widehat{AE}}{2} = 35^\circ \Rightarrow \widehat{ADB} = 180^\circ - 35^\circ = 145^\circ$$

$$\widehat{ADB} - \widehat{ADE} = 145^\circ - 35^\circ = 110^\circ$$

گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

مطابق شکل از مرکز دایره بر این دو وتر عمود می‌کنیم، پس وترها نصف می‌شوند و در مثلث‌های  $OAH$  و  $OCH'$  طبق قضیه فیثاغورس داریم:



$$\left. \begin{aligned} OH^2 + 4^2 &= r^2 \\ OH'^2 + 6^2 &= r^2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow OH^2 + 16 = OH'^2 + 36 \Rightarrow OH^2 - OH'^2 = 20$$

$$\Rightarrow (OH - OH')(OH + OH') = 20 \Rightarrow \underbrace{(OH - OH')}_{10} (OH + OH') = 20 \Rightarrow \{OH - OH' = 2OH + OH' = 10\}$$

$$\Rightarrow OH = 6, OH' = 4$$

$$OH^2 + 4^2 = r^2 \xrightarrow{OH=6} r^2 = 52 \Rightarrow r = 2\sqrt{13}$$

توجه شود حالتی که دو وتر در یک طرف مرکز دایره باشند، امکان‌پذیر نیست.

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. اگر رأس‌های یک چهارضلعی روی یک دایره قرار بگیرند به آن چهارضلعی محاطی می‌گویند و در این صورت زوایای روبه‌رو در آن مکمل‌اند. (۱۱)

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. با فرض  $\widehat{BC} = m$  و  $\widehat{AB} = n$  و  $\widehat{AD} = t$  داریم: (۱۲)

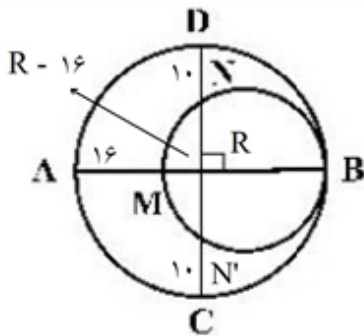
$$\widehat{N} = \frac{n + m + 100 - t}{2} \xrightarrow{\widehat{N} = 60^\circ} n + m + 100 - t = 120 \Rightarrow n + m - t = 20 \quad (1)$$

$$\widehat{M} = \frac{n + t - m}{2} \xrightarrow{\widehat{M} = 30^\circ} n + t - m = 60 \quad (2)$$

$$(1) + (2) \Rightarrow 2n = 80 \Rightarrow n = 40^\circ$$

$$x = \frac{\widehat{DC} + \widehat{AB}}{2} = \frac{100 + 40}{2} = 70^\circ$$

بنابراین:



گزینه ۳ پاسخ صحیح است. فرض کنیم شعاع دایره‌ی بزرگ‌تر باشد. چون AB (۱۳)

محور تقارن این شکل است پس  $DN = N'C = 10$ .

در ضمن قطر AB عمود منصف NN' است پس  $ON = ON'$ .

حال با استفاده از قضیه‌ی رابطه‌ی طولی در دایره می‌نویسیم.

$$ON = ON' = R - 10$$

$$ON \times ON' = OB \times OM \xrightarrow{\hspace{2cm}}$$

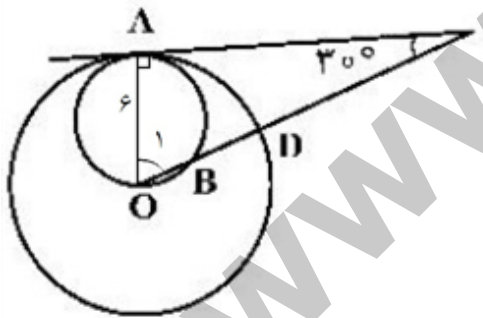
$$(R - 10)^2 = R(R - 16) \Rightarrow R^2 + 100 - 20R = R^2 - 16R$$

$$\Rightarrow 4R = 100 \Rightarrow R = 25$$

در شکل MB قطر دایره‌ی کوچک‌تر است از طرف دیگر MB مساوی ۱۶ - ۲R است. پس:

$$MB = 2R - 16 \Rightarrow \text{قطر دایره کوچک} = 50 - 16 = 34 \Rightarrow \text{شعاع دایره کوچک} = 17$$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. از مرکز O به نقطه‌ی A وصل می‌کنیم در این صورت  $\widehat{A} = 90^\circ$  است. (۱۴)



$$\triangle OAC: \widehat{C} = 30^\circ \Rightarrow OA = \frac{1}{2}OC \xrightarrow{OA = 6} OC = 12$$

$$\triangle OAC: \widehat{O_1} = 60^\circ \Rightarrow AC = \frac{\sqrt{3}}{2}OC = \frac{\sqrt{3}}{2}(12) = 6\sqrt{3}$$

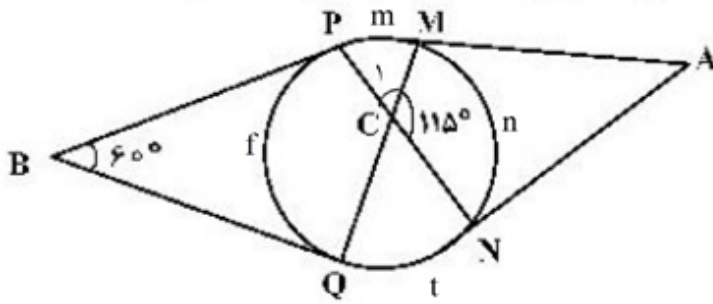
حال با استفاده از رابطه‌ی طولی در دایره‌ی کوچک‌تر می‌نویسیم:

$$CA^2 = CB \times CO \Rightarrow (6\sqrt{3})^2 = CB \times 12 \Rightarrow 108 = 12CB \Rightarrow CB = 9$$

$$BD = BC - CD = 9 - 6 = 3$$

از طرف دیگر  $CD = CO - OD = 12 - 6 = 6$  بنابراین:

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. فرض کنیم اندازه‌ی کمان‌های  $\widehat{PM}$  و  $\widehat{MN}$  و  $\widehat{NQ}$  و  $\widehat{PQ}$  به ترتیب برابر  $m$  و  $n$  و  $t$  و  $f$  باشند داریم:



$$60^\circ = \frac{m + n + t - f}{2} \Rightarrow m + n + t - f$$

$$= 120 \quad (1)$$

$$\hat{C} = 115^\circ \Rightarrow \hat{C}_1 = 180 - 115 = 65^\circ$$

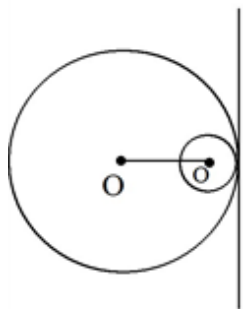
$$\Rightarrow \frac{m+t}{2} = 65 \Rightarrow m+t = 130 \quad (2)$$

$$\text{از } 1, 2 \Rightarrow n - f = -10$$

$$\hat{A} = \frac{m + f + t - n}{2} = \frac{(m+t) + (f-n)}{2} = \frac{130^\circ + 10^\circ}{2} = 70^\circ$$

بنابراین:

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. در صورتی دو دایره فقط یک مماس مشترک دارند که مماس داخلی باشند. پس باید  $OO' = |R - R'|$  باشد.



$$OO' = |R - R'| \Rightarrow 6 = |a^2 - 2 - 6a + 1|$$

$$\Rightarrow 6 = |a^2 - 6a - 1|$$

$$a^2 - 6a - 1 = 6 \Rightarrow a^2 - 6a - 7 = 0 \Rightarrow S_1 = 6$$

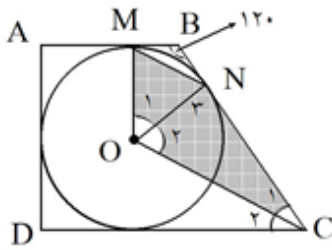
حالت اول:

$$a^2 - 6a - 1 = -6 \Rightarrow a^2 - 6a + 5 = 0 \Rightarrow S_2 = 6$$

حالت دوم:

$$\frac{S_1 + S_2}{2} = 6$$

پس میانگین مقادیر ممکن برای  $a$  برابر است با:



گزینه ۱ پاسخ صحیح است. از O به N وصل می‌کنیم در این صورت ON برابر شعاع دایره است. در ضمن در چهارضلعی OMBN دو زاویه ی  $\hat{M}$  و  $\hat{N}$  قائمه هستند پس این چهارضلعی محاطی است. بنابراین  $\hat{O}_1 + \hat{B} = 180^\circ$  پس  $\hat{O}_1 = 60^\circ$  پس مثلث OMN متساوی‌الاضلاع است. از طرف دیگر دو زاویه ی B و C در این دوزنقه مکملند و OC نیمساز زاویه ی  $\hat{C}$  است پس  $\hat{C}_1 = 30^\circ$  پس  $\hat{O}_2 = 60^\circ$  داریم.

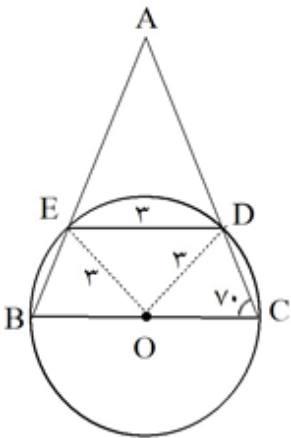
$$\triangle ONC : \hat{C}_1 = 30^\circ \Rightarrow ON = \frac{1}{2}OC \xrightarrow{ON=3} OC = 6$$

بنابراین:

$$S_{OMNC} = S_{OMN} + S_{ONC} = \frac{\sqrt{3}}{4}(3)^2 + \frac{1}{2}ON + OC \sin 60^\circ = \frac{9\sqrt{3}}{4} + \frac{1}{2}(6) \left( \frac{\sqrt{3}}{2} \right)$$

$$= \frac{9\sqrt{3}}{4} + \frac{9\sqrt{3}}{2} = \frac{27\sqrt{3}}{4}$$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. از مرکز O به نقاط D و E وصل می‌کنیم. در این صورت مثلث OED مثلث متساوی‌الاضلاع به ضلع ۳ است. پس  $\widehat{ED} = 60^\circ$  داریم:



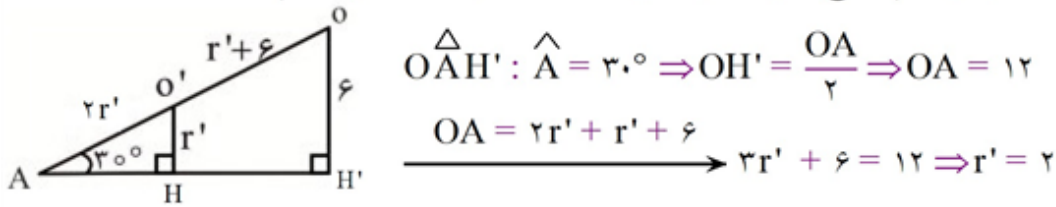
$$\hat{C} = 70^\circ \Rightarrow \frac{\widehat{BE} + \widehat{ED}}{2} = 70^\circ \Rightarrow \frac{\widehat{BE} + 60^\circ}{2} = 70^\circ \Rightarrow \widehat{BE} = 80^\circ$$

بنابراین:

$$\widehat{BE} + \widehat{ED} + \widehat{DC} = 180^\circ \xrightarrow{\widehat{BE} = 80^\circ} 80^\circ + \widehat{ED} + \widehat{DC} = 180^\circ \Rightarrow \widehat{ED} + \widehat{DC} = 100^\circ$$

$$\Rightarrow \widehat{EDC} = 100^\circ$$

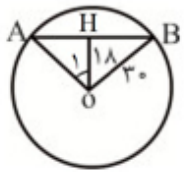
گزینه ۴ پاسخ صحیح است. فرض کنیم شعاع دایره‌ی کوچکتر  $r'$  باشد. با توجه به شکل داریم:



پس شعاع قطاع برابر  $R = 12 + 6 = 18$  است.

$$S = \frac{60}{360} \pi (18)^2 - (36\pi + 4\pi) = 14\pi$$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. در مثلث قائم‌الزاویه OAH می‌نویسیم:



$$\sin O_1 = \frac{AH}{OA} = \frac{18}{30} = \frac{3}{5} = 0.6 \xrightarrow{\cos 54^\circ = 0.6} \sin O_1 = \cos 54^\circ$$

$$O_1 = 36^\circ \Rightarrow \widehat{AOB} = 72^\circ$$

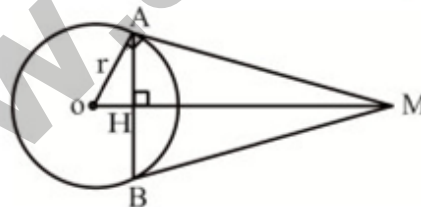
$$\widehat{AB} \text{ طول کمان } = \frac{72}{360} 2\pi(18) = 12\pi$$

بنابراین طول کمان  $\widehat{AB}$  برابر است با:

گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

با توجه به شکل مقابل،  $MO$  عمود منصف پاره‌خط  $AB$  است. پس  $AH = 4\sqrt{5}$  می‌باشد. از طرفی به کمک روابط

تولی در مثلث قائم‌الزاویه OAM داریم:

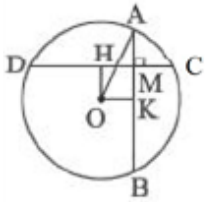


$$OA^2 = OH \times OM \Rightarrow R^2 = OH \times 18 \Rightarrow OH = \frac{R^2}{18}$$

حال به کمک قضیه‌ی فیثاغورس در مثلث AHO داریم:

$$(4\sqrt{5})^2 = R^2 - \left(\frac{R^2}{18}\right)^2 \Rightarrow R^2 = 144 \Rightarrow R = 12$$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است.  $MD = 2MC$  و  $CD = 9$  است، پس: ۲۲



$$MC = 3, MD = 6$$

از روابط طولی دو دایره داریم:

$$\left. \begin{aligned} MA \times MB = MC \times MD &\Rightarrow MA \times MB = 3 \times 6 = 18 \\ MA + MB = 11 \end{aligned} \right\} \Rightarrow MA = 2, MB = 9$$

حال از O عمود OH بر وتر CD و عمود OK بر وتر AB رسم می‌کنیم و می‌دانیم از مرکز بر وتر عمود کنیم، وتر را نصف می‌کند، چهارضلعی OHMK مستطیل است.

$$DH = HC = \frac{9}{2} = 4.5$$

$$MH = OK = DM - DH = 6 - 4.5 = 1.5 \quad (1)$$

$$AK = BK = \frac{11}{2} = 5.5 \quad (2)$$

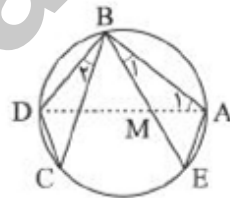
شعاع OA را رسم می‌کنیم و در مثلث OAK فیثاغورس می‌نویسیم. با توجه به رابطه‌های (۱) و (۲) می‌نویسیم:

$$OA^2 = OK^2 + AK^2 = (1.5)^2 + (5.5)^2$$

$$2R = 2OA = \sqrt{130}$$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. از B به D وصل می‌کنیم: ۲۳

$$\left\{ \begin{aligned} \widehat{B}_1 &= \frac{\widehat{AF}}{2} \\ \widehat{B}_2 &= \frac{\widehat{CD}}{2} \\ \widehat{AE} &= \widehat{CD} \end{aligned} \right. \Rightarrow \widehat{B}_1 = \widehat{B}_2 \quad (1)$$



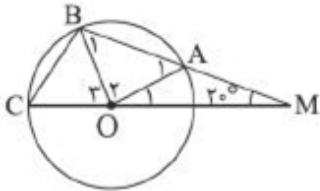
$$\widehat{A}_1 = \widehat{C} = \frac{\widehat{BD}}{2} \quad (2)$$

$$(1), (2) \Rightarrow \triangle BCD \sim \triangle AMB \Rightarrow \frac{AM}{CD} = \frac{BM}{BD} \xrightarrow[\substack{BD = \frac{5}{2}, AM = \frac{3}{2}}]{BM = 3} \frac{3}{\frac{5}{2}} = \frac{3}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{3}{2CD} = \frac{3}{5} \Rightarrow 12CD = 15 \Rightarrow CD = \frac{5}{4}$$



گزینه ۴ پاسخ صحیح است. شعاع OA و OB و وتر BC را رسم می‌کنیم:



$$MA = OA = R \Rightarrow \hat{O}_1 = \hat{M} = 20^\circ$$

$$\text{در } \triangle OAM \text{ زاویه خارجی } \hat{A}_1 = \hat{O}_1 + \hat{M} = 20^\circ + 20^\circ = 40^\circ$$

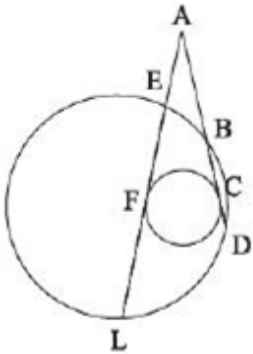
$$OA = OB = R \Rightarrow \hat{A}_1 = \hat{B}_1 = 40^\circ \Rightarrow \hat{O}_2 = 180^\circ - 80^\circ = 100^\circ$$

$$\hat{O}_3 = 180^\circ - (\hat{O}_1 + \hat{O}_2) = 180^\circ - (100^\circ + 20^\circ) = 60^\circ$$

در مثلث OBC،  $OB = OC$  و  $\hat{O}_3 = 60^\circ$  می‌باشد پس  $\triangle OBC$  مثلث متساوی‌الاضلاع است و  $BC = R$ ، پس:

$$\frac{BC}{R} = 1$$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. از رابطه طولی در دایره استفاده می‌کنیم.

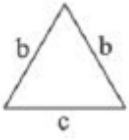


$$AF = AC = z \Rightarrow \begin{cases} AE = z - 3 \\ AB = z - 2 \end{cases}$$

$$AE \cdot AL = AB \cdot AD$$

$$\Rightarrow (z - 3)(z + 4) = (z - 2)(z + 1) \Rightarrow z = 5 \Rightarrow AE = 2$$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. مثلث متساوی الساقین ABC را در نظر می‌گیریم. ۲۶



$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{r_a} + \frac{1}{r_b} + \frac{1}{r_c} &= \frac{1}{r} \\ \frac{1}{r_a} + \frac{1}{r_b} + \frac{1}{r_c} &= \frac{2}{c} \end{aligned} \right\} \Rightarrow r = \frac{c}{2} \left. \begin{aligned} r &= \frac{S}{P} \\ S &= 12 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{c}{2} = \frac{12}{P} \Rightarrow P = 8$$

$$\Rightarrow \text{محیط مثلث} = 16 \Rightarrow 2b + c = 16$$

$$b = 1 \Rightarrow c = 14: 14 \not\leq 1 + 1$$

$$b = 2 \Rightarrow c = 12: 12 \not\leq 2 + 2$$

$$b = 3 \Rightarrow c = 10: 10 \not\leq 3 + 3$$

$$b = 4 \Rightarrow c = 8: 8 \not\leq 4 + 4$$

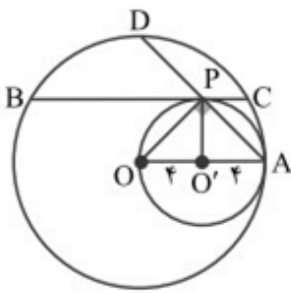
$$b = 5 \Rightarrow c = 6: 6 < 5 + 5 \checkmark$$

$$b = 6 \Rightarrow c = 4: 4 < 6 + 4 \checkmark$$

$$b = 7 \Rightarrow c = 2: 2 < 7 + 2 \checkmark$$

$$b = 8 \Rightarrow c = 0 \times$$

پس سه جواب برای طول ساق وجود دارد: ۵ یا ۶ یا ۷.



گزینه ۲ پاسخ صحیح است. بنا بر فرض سوال شکل مقابل را خواهیم داشت. چون زاویه P روبه‌رو به قطر دایره‌ی کوچک‌تر است پس قائمه می‌باشد. بنابراین شعاع OP از دایره‌ی بزرگ‌تر بر وتر AD عمود است. پس P وسط وتر AD قرار دارد. از طرف دیگر PO' بر OA عمود و آن را نصف می‌کند. در نتیجه مثلث OAP قائم‌الزاویه متساوی‌الساقین است. پس داریم:

$$PA = OP = \frac{\sqrt{2}}{2} OA = \frac{\sqrt{2}}{2} (8) = 4\sqrt{2}$$

حال با استفاده از رابطه‌ی طولی در دایره می‌نویسیم:

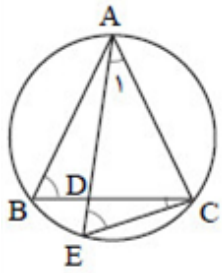
$$PA \times PD = PC \times PB \Rightarrow (4\sqrt{2})(4\sqrt{2}) = PC \times PB \Rightarrow PC \times PB = 32$$

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. طول وتر داخل دایره کوچک‌تر برابر است با: ۲۸

$$2\sqrt{\left(\frac{2}{3}R\right)^2 - \left(\frac{R}{3}\right)^2} = \frac{2}{3}\sqrt{3}R \Rightarrow AT^2 = \left(R - \frac{\sqrt{3}}{3}R\right)\left(R + \frac{\sqrt{3}}{3}R\right)$$

$$\Rightarrow AT^2 = \frac{2}{3}R^2 \Rightarrow R = \frac{\sqrt{6}}{2}AT$$

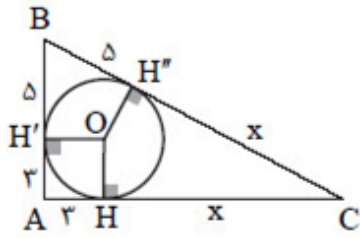
گزینه ۳ پاسخ صحیح است. مثلث متساوی الساقین است پس  $\hat{B} = \hat{C}$ . در ضمن دو زاویه ی B و E محاطی روبه‌رو به کمان AC هستند پس مساویند. بنابراین:



$$\left. \begin{array}{l} \hat{A}_1 = \hat{A}_1 \\ \hat{E} = \hat{C} \end{array} \right\} \xrightarrow{(zz)} \triangle ADC \sim \triangle AEC \Rightarrow \frac{AD}{AC} = \frac{AC}{AE}$$

$$\Rightarrow AD \times AE = AC^2$$

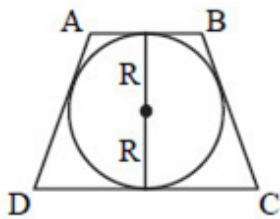
گزینه ۳ پاسخ صحیح است. بنا بر فرض سؤال شکل مقابل را خواهیم داشت. (توجه کنید چهارضلعی AHOH' مربع به ضلع ۳ است.) حال از قضیه ی فیثاغورس استفاده کرده می‌نویسیم.



$$BC^2 = AB^2 + AC^2 \Rightarrow (5+x)^2 = 8^2 + (x+3)^2$$

$$25 + x^2 + 10x = 64 + x^2 + 6x \Rightarrow 4x = 39 \Rightarrow x = 12$$

بنابراین وتر این مثلث برابر  $12 + 5 = 17$  است.



گزینه ۴ پاسخ صحیح است. به این نکته بسیار کاربردی و مهم توجه کنید. (اگر دوزنقه‌ی متساوی الساقین ABCD بر دایره‌ای به شعاع R محیط باشد آن‌گاه قطر این دایره واسطه‌ی هندسی بین دو قاعده است.

$$(2R)^2 = AB \times DC$$

یعنی در این جا بنا بر فرض  $R = \sqrt{3}$  و  $DC = 3AB$  داریم.

$$4R^2 = AB \times DC \Rightarrow 4(\sqrt{3})^2 = AB \times 3AB \Rightarrow AB^2 = 4 \Rightarrow AB = 2$$

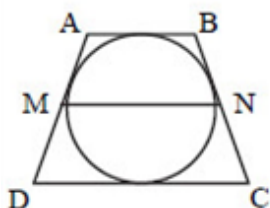
$$S_{ABCD} = \frac{1}{2}(2R)(AB + DC) = \sqrt{3}(2 + 6) = 8\sqrt{3}$$

پس  $DC = 6$  در نتیجه:

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. دوزنقه‌ی ABCD محیطی است پس  $AB + DC = AD + BC$ . در ضمن اگر M و N وسط‌های دو ساق

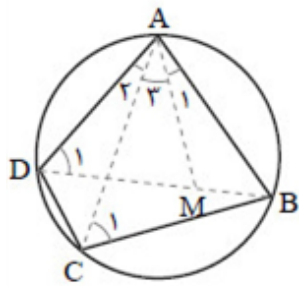
$$MN = \frac{AB + DC}{2}$$

دوزنقه باشند آن‌گاه پس  $12 = \frac{AB + DC}{2}$  یعنی  $AB + DC = 24$  بنابراین:



$$\text{محیط دوزنقه} = (AB + DC) + (AD + BC) = 2(AB + DC) = 2 \times 24 = 48$$

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. دو مثلث  $ABC$  و  $ADM$  متشابه هستند. زیرا:

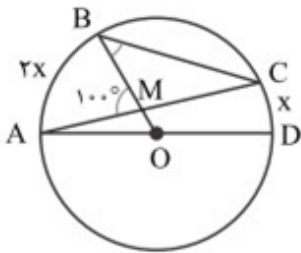


$$\left. \begin{aligned} \hat{A}_1 &= \hat{A}_2 \Rightarrow \hat{A}_1 + \hat{A}_3 = \hat{A}_2 + \hat{A}_3 \\ \hat{C}_1 &= \hat{D}_1 = \frac{\widehat{AB}}{2} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \triangle ABC \sim \triangle ADM$$

$$\Rightarrow \frac{AB}{AM} = \frac{BC}{DM} = \frac{AC}{AD} \Rightarrow AD \cdot BC = AC \cdot DM$$

توجه کنید انتخاب این دو مثلث به خاطر آن است که اولاً متشابه‌اند و ثانیاً  $AD$  و  $BC$  اضلاع آنها هستند.

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. فرض کنیم  $\widehat{CD} = x$  در این صورت  $\widehat{AB} = 2x$  است. داریم:



$$\widehat{AOB} = \widehat{AB} = 2x \text{ زاویه ی مرکزی}$$

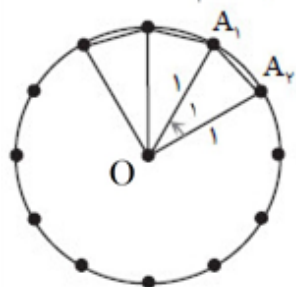
$$\widehat{CAD} \text{ محاطی} = \frac{\widehat{CD}}{2} = \frac{x}{2}$$

$$\triangle AOM: 100^\circ = \hat{MAO} + \hat{MOA} = \frac{x}{2} + 2x \Rightarrow \frac{5x}{2} = 100^\circ \Rightarrow x = 40^\circ$$

$$\widehat{BCA} \text{ محاطی} = \frac{2x}{2} = x = 40^\circ$$

$$\hat{MBC} + \hat{MCB} = 100^\circ \Rightarrow 40^\circ + \hat{MBC} = 100^\circ \Rightarrow \hat{MBC} = 60^\circ \Rightarrow \hat{OBC} = 60^\circ$$

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. با رسم شعاع‌های دایره‌ی محیطی دوازده ضلعی منتظم، به شرح زیر داریم:



$$\begin{cases} OA_1 = OA_2 = 1 \\ \hat{O}_1 = \frac{360^\circ}{12} = 30^\circ \end{cases} \Rightarrow S(\triangle OA_1A_2) = \frac{1}{2} OA_1 \cdot OA_2 \cdot \sin \hat{O}_1$$

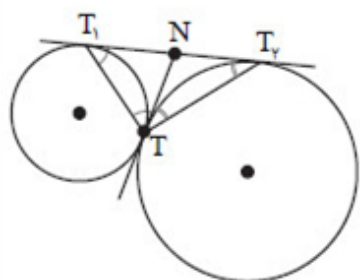
$$\Rightarrow S(\triangle OA_1A_2) = \frac{1}{2} (1)(1) \times \sin 30^\circ = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

پس مساحت ۱۲ ضلعی منتظم برابر است با:

$$S(A_1A_2 \dots A_{12}) = 12 S(\triangle OA_1A_2) = 12 \times \frac{1}{4} = 3$$

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. ابتدا شکل را رسم کرده، با رسم مماس مشترک خارجی، داخلی و خطوط اضافی  $TT_1$  و  $TT_2$

داریم:



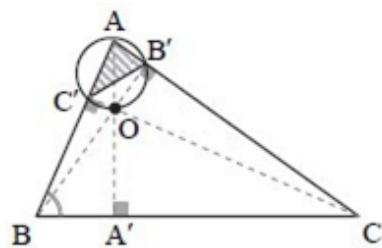
قضیه مماس  $\begin{cases} NT = NT_2 \\ NT_1 = NT \end{cases} \Rightarrow NT_1 = NT = NT_2$

$$\Rightarrow NT = \frac{1}{2} T_1T_2 \Rightarrow \angle T_1TT_2 = 90^\circ$$

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. پاسخ این مسأله در دو حالت به شرح زیر قابل

بحث می‌باشد؛

الف) زوایای مثلث حاده باشند، کم‌تر از  $90^\circ$ .

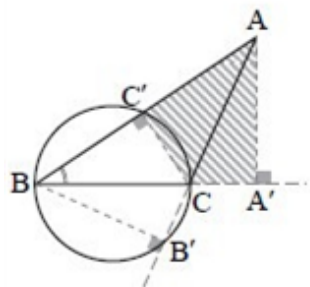


$$\hat{B} = 60^\circ \Rightarrow \hat{BAA'} = 30^\circ$$

و چهارضلعی  $OB'AC'$  «مخاطی»، با رسم دایره‌ی محیطی آن نتیجه می‌گیریم:

$$\Rightarrow \hat{C'B'B} = 30^\circ \Rightarrow \hat{C'B'C} = 30^\circ + 90^\circ = 120^\circ$$

ب) زاویه‌ی  $\hat{A}$  یا  $\hat{C}$  باز باشند، بیشتر از  $90^\circ$ .

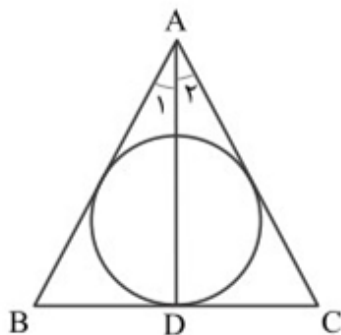


$$\hat{A} + \hat{C} = 120^\circ \Rightarrow \hat{B} = 60^\circ$$

و چهارضلعی  $BB'CC'$  «مخاطی»، با رسم دایره‌ی محیطی آن داریم:

$$\hat{C'B'C} = \hat{B} = 60^\circ$$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. مطابق شکل نیمساز زاویه  $A$  از نقطه  $D$  (محل تماس دایره‌ی محاطی داخلی با  $BC$ ) می‌گذرد. ۳۸



طبق قضیه‌ی نیمساز داریم:

$$\frac{AB}{AC} = \frac{BD}{DC} \Rightarrow \frac{BD}{CD} = \frac{c}{b}$$

$$BD = p - b, \quad CD = p - c$$

$$\frac{c}{b} = \frac{p - b}{p - c} \Rightarrow pb - b^2 = pc - c^2$$

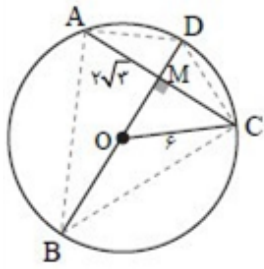
$$\Rightarrow b^2 - c^2 + pc - pb = 0 \Rightarrow (b - c)(b + c) p(b - c) = 0$$

$$\Rightarrow (b - c)(b + c - p) = 0 \Rightarrow b = c \text{ (۱) یا } p = b + c$$

$$\Rightarrow 2p = 2b + 2c \Rightarrow b + c + a = 2b + 2c \Rightarrow b + c = a \text{ غیر ممکن}$$

پس بنابر (۱) مثلث متساوی‌الساقین می‌باشد.

گزینه 4 پاسخ صحیح است. وتر BD که بیشترین طول را دارد قطر دایره است و وتر AC که کمترین طول را دارد بر وتر BD عمود است پس شکل مقابل را خواهیم داشت. پس  $BD = 12$  و نقطه‌ی M وسط AC قرار دارد. بنابراین:



$$MC \times MA = MD \times MB$$

$$MC \times MC = (R - OM)(R + OM)$$

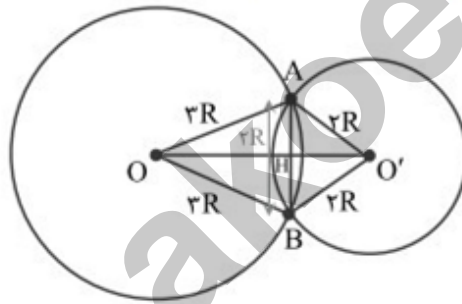
$$MC^2 = R^2 - OM^2$$

$$MC^2 = 36 - 12 = 24 \Rightarrow MC = 2\sqrt{6} \Rightarrow AC = 4\sqrt{6}$$

حال می‌توان مساحت چهارضلعی را به دست آورد.

$$S_{ABCD} = \frac{1}{2} AC \times BD \times \sin 90^\circ = \frac{1}{2} \times 12 \times 4\sqrt{6} = 24\sqrt{6}$$

گزینه 4 پاسخ صحیح است. بنا بر فرض سؤال شکل مقابل را خواهیم داشت. چون طول وتر مشترک AB برابر  $2R$  است پس مثلث  $O'AB$  متساوی‌الاضلاع است. پس داریم:

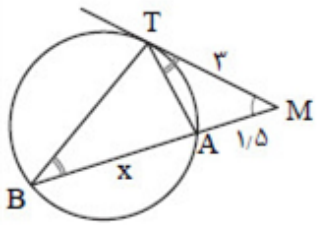


$$\left. \begin{aligned} \text{ارتفاع متساوی‌الاضلاع } O'H &= \frac{\sqrt{3}}{2} (2R) = \sqrt{3}R \\ \text{ارتفاع متساوی‌الساقین } OH &= \sqrt{8} R = 2\sqrt{2}R \end{aligned} \right\} \Rightarrow OO' = (2\sqrt{2} + \sqrt{3})R$$

در نتیجه طول مماس مشترک خارجی دو دایره برابر است با:

$$\begin{aligned} \text{طول مماس مشترک خارجی} &= \sqrt{OO'^2 - (R - R')^2} \\ &= \sqrt{(2\sqrt{2} + \sqrt{3})^2 R^2 - R^2} = \sqrt{(11 + 4\sqrt{6}) R^2 - R^2} \\ &= R \sqrt{10 + 4\sqrt{6}} = R \sqrt{(6 + 2)^2} = R (\sqrt{6} + 2) \end{aligned}$$



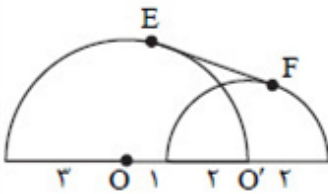
گزینه ۲ پاسخ صحیح است. با توجه به شکل داریم: ۴۱

$$\triangle ATM \sim \triangle BTM \Rightarrow \frac{AM}{MT} = \frac{AT}{BT} \Rightarrow \frac{1/5}{3} = \frac{2}{4} \Rightarrow MT = 3$$

ز ز  
متشابه

حال با استفاده از رابطه‌ی طولی در دایره می‌نویسیم:

$$MT^2 = MA \cdot MB \Rightarrow 9 = 1/5(1/5 + x) \Rightarrow 6 = 1/5 + x \Rightarrow x = 4/5$$

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. مطابق شکل مرکز دایره‌ی کوچک‌تر یعنی  $O'$  روی دایره‌ی بزرگ‌تر قرار دارد. پس طول خط‌المركزین دو دایره برابر ۳ است. بنابراین: ۴۲

$$EF = \sqrt{OO'^2 - (R - R')^2} = \sqrt{3^2 - (3 - 2)^2} = \sqrt{8} \Rightarrow EF = 2\sqrt{2}$$

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. طبق روابط طولی در دایره داریم: ۴۳

$$CA^2 = CM \times CB \Rightarrow (2\sqrt{6})^2 = CM \times (CM + 5) \Rightarrow 24 = CM^2 + 5CM$$

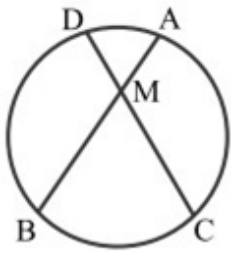
$$\Rightarrow CM^2 + 5CM - 24 = 0 \Rightarrow (CM - 3)(CM + 8) = 0 \Rightarrow CM = 3, CM = -8$$

غ ق ۸ -

$$\widehat{MAC} = \frac{\widehat{AM}}{2}, \widehat{B} = \frac{\widehat{AM}}{2} \Rightarrow \widehat{MAC} = \widehat{B}, \widehat{C} \text{ مشترک}$$

$$\Rightarrow \triangle AMC \sim \triangle BMC \Rightarrow \frac{3}{2\sqrt{6}} = \frac{2\sqrt{6}}{8} = \frac{2}{AB} \Rightarrow AB = \frac{8}{\sqrt{6}} = \frac{4\sqrt{6}}{3}$$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. فرض کنیم وتر AB و تر CD را در M قطع کند. بنابر فرض داریم: ۴۴



$$\frac{DM}{MC} = \frac{1}{2} \xrightarrow[\text{در مخرج}]{\text{ترکیب نسبت}} \frac{DM}{DC} = \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{DM}{9} = \frac{1}{3} \Rightarrow DM = 3, MC = 6$$

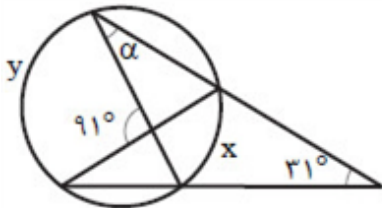
حال با استفاده از رابطه‌ی طولی در دایره می‌نویسیم:

$$DM \times MC = AM \times BM \Rightarrow 3 \times 6 = AM(11 - AM)$$

$$\Rightarrow AM^2 - 11AM + 18 = 0 \Rightarrow (AM - 9)(AM - 2) = 0 \Rightarrow AM = 2, AM = 9$$

پس  $\frac{AM}{MB} = \frac{2}{9}$  یا  $\frac{AM}{MB} = \frac{9}{2}$  که مقدار  $\frac{2}{9}$  در گزینه‌ی «۳» آمده است.

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. در لوزی در حالت کلی زوایای مقابل مکمل نیستند پس لوزی لزومی ندارد محاطی باشد. ولی زوایای مقابل دوزنقه‌ی متساوی‌الساقین، مستطیل و مربع مکمل‌اند پس محاطی هستند. ۴۵



گزینه ۲ پاسخ صحیح است. با توجه به شکل می‌نویسیم: ۴۶

$$\begin{cases} 31^\circ = \frac{y-x}{2} \\ 91^\circ = \frac{x+y}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y-x = 62^\circ \\ y+x = 182^\circ \end{cases} \xrightarrow{-} 2x = 120^\circ \Rightarrow x = 60^\circ$$

$$\alpha = \frac{x}{2} = \frac{60^\circ}{2} = 30^\circ$$

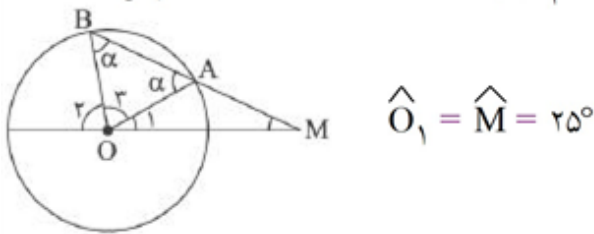
پس زاویه‌ی محاطی  $\alpha$  برابر است با:

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. می‌دانیم  $s = \frac{1}{2} a \cdot h_a$  پس  $h_a = \frac{2s}{a}$  داریم. ۴۷

$$\frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c} = \frac{1}{\frac{2s}{a}} + \frac{1}{\frac{2s}{b}} + \frac{1}{\frac{2s}{c}} = \frac{a+b+c}{2s} = \frac{2p}{2s} = \frac{p}{s}$$

از طرف دیگر می‌دانیم  $r = \frac{s}{p}$  پس  $\frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c} = \frac{1}{r}$

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. از مرکز O به نقاط A و B وصل می‌کنیم. چون  $MA = OA = 4$  است، پس:



$$\hat{O}_1 = \hat{M} = 25^\circ$$

از طرف دیگر  $OA = OB$  و  $\hat{A} = \hat{B} = \alpha$  است.  $\alpha$  زاویه خارجی مثلث OAM است، پس:

$$\alpha = \hat{O}_1 + \hat{M} = 50^\circ$$

در ضمن  $\hat{O}_2$  زاویه خارجی مثلث OBM است، پس:  $\hat{O}_2 = \hat{B} + \hat{M} = 50^\circ$ ، بنابراین:

$$\hat{O}_3 = 180^\circ - (\hat{O}_1 + \hat{O}_2) = 80^\circ$$

پس:

$$\text{طول کمان AB} = \frac{\hat{O}_3}{360^\circ} 2\pi R = \frac{80^\circ}{360^\circ} 2\pi (4) = \frac{8 \times 8}{36} \pi = \frac{16}{9} \pi$$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

چهارضلعی MNPQ محاطی است پس  $\hat{M} + \hat{P} = 180^\circ$  و چون  $\hat{P} = 90^\circ$  پس  $\hat{M} = 90^\circ$  بنابراین مثلث MNQ قائم‌الزاویه است.

$$\triangle MNQ: NQ^2 = 7^2 + 24^2 = 625 \Rightarrow NQ = 25$$

$$\triangle ANP: NP^2 = QN^2 - QP^2 = 25^2 - 15^2 = 400 \Rightarrow NP = 20$$

از طرف دیگر چهارضلعی NRSP محیطی است، پس داریم:

$$NR + PS = NP + RS \Rightarrow 21 + PS = 20 + 29 \Rightarrow PS = 28$$

بنابراین:

$$S_{QNS} = \frac{1}{2} NP \times QS = \frac{1}{2} (20)(15 + 28) = 230$$

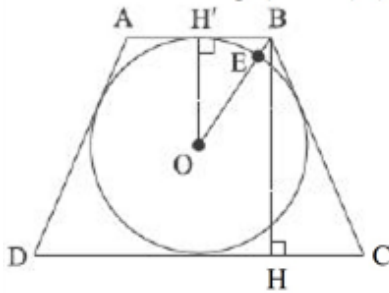
گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$(روابط طولی در دایره) AD^2 = AB \times AC = 1 \times 9 = 9 \Rightarrow AD = 3$$

از O به D وصل می‌کنیم. می‌دانیم اگر از مرکز دایره به نقطه تماس بر خط مماس وصل کنیم عمود است، پس:

$$OD \parallel CE \xrightarrow{\text{تالس}} \frac{OA}{OC} = \frac{AD}{DE} \Rightarrow \frac{5}{4} = \frac{2}{DE} \Rightarrow DE = \frac{12}{5} = 2\frac{2}{5}$$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. در هر چهارضلعی محیطی، مجموع اضلاع مقابل با هم برابر است پس:



$$AB + CD = AD + BC$$

دوزنقه، متساوی الساقین است و  $AD = BC$  است، بنابراین:

$$2BC = 6 + \frac{32}{3} = \frac{50}{3} \Rightarrow BC = \frac{25}{3}$$

$$HC = \frac{CD - AB}{2} = \frac{7}{3}$$

در مثلث قائم الزاویه BHC داریم:

با نوشتن فیثاغورس در  $\triangle BHC$  خواهیم داشت:

$$BH^2 = \left(\frac{25}{3}\right)^2 - \left(\frac{7}{3}\right)^2 = 64 \Rightarrow BH = 8$$

طول ارتفاع دوزنقه با طول قطر دایره برابر است، پس:

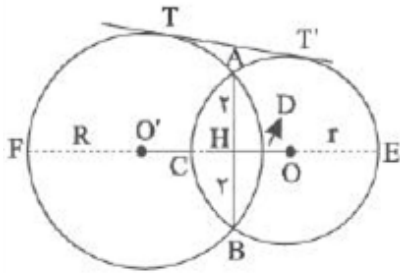
$$OH' = \frac{BH}{2} = 4 \Rightarrow BH' = \frac{AB}{2} = 3$$

با نوشتن فیثاغورس در مثلث BOH' داریم:

$$OB^2 = 4^2 + 3^2 \Rightarrow OB = 5$$

$$BE = OB - OE = 5 - 4 = 1$$

بنابراین:



$$\begin{aligned} OH = x &\Rightarrow CH = r - x, HE = r + x \\ O'H = y &\Rightarrow HD = R - y, HF = R + y \end{aligned}$$

با نوشتن فیثاغورس در مثلث‌های AOH و AO'H داریم:

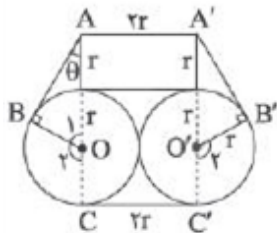
$$\begin{cases} \triangle AOH: r^2 - x^2 = r^2 & \Rightarrow (r^2 + R^2) - (x^2 + y^2) = 8 \quad (1) \\ \triangle AO'H: R^2 - y^2 = r^2 \end{cases}$$

$$TT' = \sqrt{d^2 - (R - r)^2} \Rightarrow 26 = x^2 + y^2 + 2xy - R^2 - r^2 + 2Rr$$

$\downarrow$   
x+y

$$\Rightarrow 26 = (x^2 + y^2) - (R^2 + r^2) + 2xy + 2Rr \xrightarrow{(1)} 26 = -8 + 10 + 2Rr \Rightarrow 24 = 2Rr \Rightarrow Rr = 12$$

دقت کنید در صورت سؤال داشتیم  $OH \times O'H = 5$  یعنی  $xy = 5$  است.

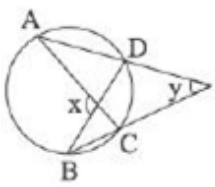


$$\triangle ABO: \sin \theta = \frac{r}{2r} = \frac{1}{2} \Rightarrow \theta = 30^\circ \Rightarrow \hat{O}_1 = 60^\circ, \hat{O}_2 = 120^\circ$$

به همین ترتیب در مثلث A'B'O' داریم:  $\hat{O}_2 = 120^\circ$ .

$$\text{طول نخ} = AA' + CC' + AB + A'B' + \widehat{BC} + \widehat{B'C'}$$

$$= 2r + 2r + \sqrt{3}r + \frac{1}{3} \times 2\pi r + \frac{1}{3} \times 2\pi r = 4r + 2\sqrt{3}r = 4\sqrt{3} + 6 = 2(2\sqrt{3} + 3)$$

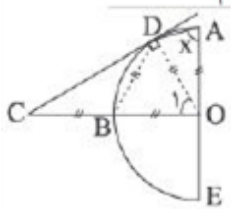
گزینه ۱ پاسخ صحیح است. ۵۴

$$\left. \begin{aligned} \widehat{AD} &= R\sqrt{3} \Rightarrow \widehat{AD} = 120^\circ \\ \widehat{BC} &= R\sqrt{2} \Rightarrow \widehat{BC} = 90^\circ \end{aligned} \right\} \Rightarrow \widehat{AD} + \widehat{BC} = 210^\circ$$

$$\widehat{AB} + \widehat{CD} = 360^\circ - 210^\circ = 150^\circ$$

بنابراین:

$$\widehat{AB} = 20^\circ + \widehat{DC} \rightarrow \begin{cases} AB = 85 \\ CD = 65 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{85 + 65}{2} = 75 \\ y = \frac{85 - 65}{2} = 10 \end{cases} \Rightarrow \frac{x}{y} = 7/5$$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. ۵۵می‌دانیم شعاع در نقطه تماس بر خط مماس عمود است، پس:  $OD \perp CD$ . در مثلث  $OCD$  داریم:

$$OA = OB = BC = R$$

در مثلث قائم‌الزاویه  $OCD$ ،  $BD$  میانه وارد بر وتر و برابر با نصف وتر است، پس:  $BD = \frac{1}{2}OC = R$ 

$$\triangle OBD: OD = BD = BO = R \Rightarrow \widehat{O_1} = 60^\circ \Rightarrow \widehat{BD} = 60^\circ$$

در نتیجه  $\triangle OBD$  متساوی‌الاضلاع است.

$$\widehat{x} = \frac{\widehat{DE}}{2} = \frac{\widehat{BD} + \widehat{BE}}{2} = \frac{60^\circ + 90^\circ}{2} = 75^\circ$$

گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

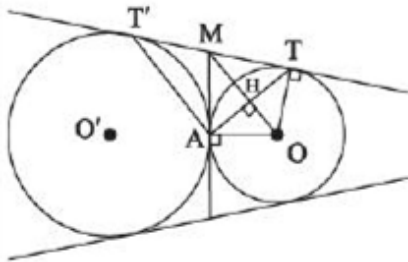
$$\left. \begin{array}{l} MA = MT' \\ MA = MT \end{array} \right\} \Rightarrow MA = MT = MT'$$

بنابراین مثلث  $ATT'$  در رأس  $A$  قائم‌الزاویه است، پس:

$$S_{\triangle AMT} = S_{\triangle AMT'} \Rightarrow S_{\triangle ATT} = 2S_{\triangle AMT}$$

از طرفی می‌دانیم که طول مماس مشترک خارجی دو دایره مماس برون از هم برابر است با:

$$TT' = 2\sqrt{RR'} = 2\sqrt{2 \times 12/5} = 10 \Rightarrow AM = MT = MT' = 5$$

از  $O$  به  $A, T, M$  وصل می‌کنیم، داریم:

$$\triangle OTM: OM^2 = OT^2 + MT^2 \Rightarrow OM^2 = 2^2 + 5^2 \Rightarrow OM = \sqrt{29}$$

مساحت مثلث  $OTM$  به دو صورت قابل محاسبه است، پس:

$$\frac{OT \times MT}{2} = \frac{TH \times OM}{2} \Rightarrow \frac{5 \times 2}{2} = \frac{TH \times \sqrt{29}}{2} \Rightarrow TH = \frac{1}{\sqrt{29}} \Rightarrow AT = \frac{20}{\sqrt{29}}$$

$$MH = \frac{25}{\sqrt{29}}$$

با نوشتن فیثاغورس در مثلث  $MTH$  خواهیم داشت:

بنابراین:

$$S_{\triangle ATT'} = 2S_{\triangle AMT} = 2 \frac{MH \times AT}{2} = \frac{25}{\sqrt{29}} \times \frac{20}{\sqrt{29}} = \frac{500}{29}$$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$$OO' = d, TT' = \sqrt{d^2 - (R + R')^2}$$

$$\xrightarrow{R=3R'} 14 = \sqrt{16^2 - (3R' + R')^2} \Rightarrow 196 = 256 - 16R'^2$$

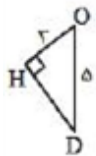
$$\Rightarrow 16R'^2 = 60 \Rightarrow R'^2 = \frac{60}{16} = \frac{15}{4} \Rightarrow R' = \frac{\sqrt{15}}{2}$$

۵۸

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. چون از نقطه A دو مماس بر دایره کوچکتر رسم شده است، پس  $AT = AM$ . از طرفی در روابط طولی برای دایره بزرگتر داریم:

$$AM^2 = AB \times AD \xrightarrow{BD=2AB} AM^2 = AB \times 4AB = 4AB^2 \Rightarrow AM = 2AB \quad (1)$$

از O عمودی بر وتر BD رسم می‌کنیم، می‌دانیم وتر را نصف می‌کند. با توجه به اندازه‌های داده شده و رابطه فیثاغورس،  $HD = 4$  و  $BD = 8$  می‌باشد، در نتیجه:



$$AB = \frac{1}{3}BD = \frac{8}{3}$$

بنابراین بر اساس رابطه (۱) داریم:

$$AT = AM = 2AB = \frac{16}{3}$$

۵۹

گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$$S_{\triangle AOB} = S_1 = \frac{1}{2} \times 1 \times 1 \times \sin 30^\circ = \frac{1}{4}$$

$$\sqrt{3}S_1 + S_2 = \frac{\pi}{3} \Rightarrow \sqrt{3} \times \frac{1}{4} + S_2 = \frac{\pi}{3} \Rightarrow S_2 = \frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{4}$$

$$\Rightarrow S_2 = \frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{1}{2} \times 1^2 \times \beta - \frac{1}{2} \times 1 \times 1 \times \sin \beta = \frac{1}{2}\beta - \frac{1}{2}\sin \beta \quad (1)$$

با جایگزینی گزینه‌ها، به گزینه (۲) می‌رسیم یعنی:  $\beta = 120^\circ$  یا  $\beta = \frac{2\pi}{3}$ .

دقت کنید با توجه به رابطه داده شده در صورت سؤال،  $\beta$  در رابطه (۱) باید بر حسب رادیان جایگزین شود.

۶۰

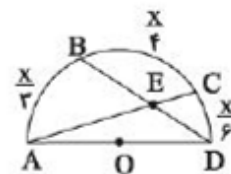
گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

$$3\widehat{AB} = 4\widehat{BC} = 6\widehat{CD} = x \Rightarrow \frac{x}{3} + \frac{x}{4} + \frac{x}{6} = 180$$

$$\Rightarrow \frac{4x + 3x + 2x}{12} = 180 \Rightarrow \frac{9x}{12} = 180 \Rightarrow x = 240$$

$$\Rightarrow \widehat{AB} = 80^\circ, \widehat{BC} = 60^\circ, \widehat{CD} = 40^\circ$$

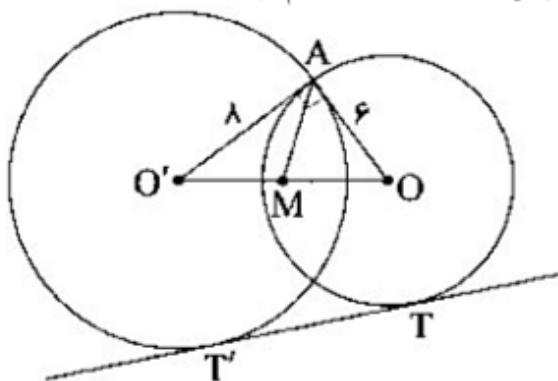
$$\widehat{AEB} = \frac{\widehat{AB} + \widehat{CD}}{2} = \frac{80 + 40}{2} = 60^\circ$$



بنابراین:



گزینه ۱ پاسخ صحیح است. اگر در مثلثی میانه‌ی وارد بر یک ضلع، نصف آن ضلع باشد، آن مثلث، قائم‌الزاویه است. چون میانه  $AM$  نصف  $OO'$  است پس مثلث  $OAO'$  قائم‌الزاویه است. در نتیجه  $OO' = 10$



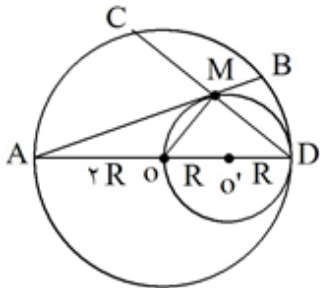
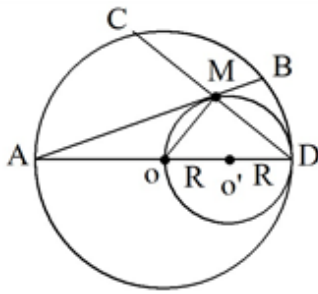
$$TT' = \sqrt{d^2 - (R - R')^2} = \sqrt{10^2 - (8 - 6)^2} = \sqrt{96} = 4\sqrt{6}$$

www.akoedu.ir

گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

از مرکز  $O$  به نقطه‌ی  $M$  وصل می‌کنیم در این صورت زاویه‌ی  $M$  زاویه‌ی  
محاطی روبه‌رو به قطر  $OD$  است پس  $\widehat{M} = 90^\circ$ .  
بنابراین  $OM$  بر وتر  $CD$  عمود است پس  $OM$  وتر  $CD$  نصف می‌کند یعنی  
 $CM = MD$ .

حال با استفاده از رابطه‌ی طولی در دایره می‌نویسیم.



$$MA \times MB = MC \times MD \Rightarrow MA \times MB = MD^2 \quad (1)$$

در ضمن با وصل کردن نقطه‌ی  $B$  به  $D$  نتیجه می‌گیریم زاویه‌ی محاطی  $B$  که روبه‌رو به قطر دایره‌ی بزرگ‌تر است  
قائم است و شعاع  $O'M$  بر وتر  $AB$  عمود است پس:

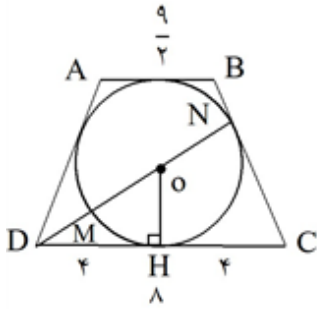
$$O'M \parallel BD \Rightarrow \frac{MA}{MB} = \frac{O'A}{O'D} \Rightarrow \frac{MA}{MB} = \frac{2R}{R} = 2 \Rightarrow MA = 2MB \quad (2)$$

$$2MB \times MB = MD^2 \Rightarrow \sqrt{2}MB = MD$$

$$\frac{MC}{MB} = \frac{MD}{MB} = \frac{\sqrt{2}MB}{MB} = \sqrt{2}$$

بنابراین:

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. در ذوزنقه‌ی متساوی‌الساقین محیطی حاصل ضرب دو قاعده مساوی مربع قطر دایره‌ی محاطی است. اگر شعاع دایره محاطی باشد آن‌گاه داریم:



$$AB \times DC = 4R^2 \Rightarrow \frac{9}{2} \times 8 = 4R^2$$

$$\Rightarrow R^2 = 9 \Rightarrow R = 3$$

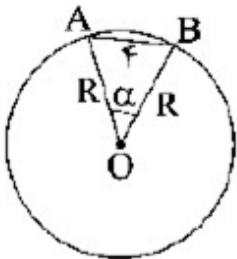
حال از مرکز O به رأس D وصل می‌کنیم تا دایره را در نقطه‌های M و N قطع کند. در این صورت طول پاره‌خط DM نزدیک‌ترین و طول پاره‌خط DN دورترین فاصله‌ی نقاط دایره تا رأس D هستند. مسلماً  $DN = DO + R$ . برای به دست آوردن DO در مثلث قائم‌الزاویه ODH می‌نویسیم:

$$OD^2 = OH^2 + DH^2 = 3^2 + 4^2 = 25 \Rightarrow OD = 5$$

$$D \text{ تا دایره } = OD + R = 5 + 3 = 8$$

بنابراین:

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. ۶۴



$$\alpha = \frac{360^\circ}{8} = 45^\circ$$

طبق قضیه‌ی کسینوس‌ها داریم:

$$\widehat{OAB}: 4^2 = R^2 + R^2 - 2R \cdot R \cos 45^\circ$$

$$\Rightarrow 16 = R^2 (2 - \sqrt{2}) \Rightarrow R^2 = \frac{16}{2 - \sqrt{2}} = 8(2 + \sqrt{2})$$

$$S \text{ دایره} = \pi R^2 = \pi \times 8(2 + \sqrt{2}) = 8\pi(2 + \sqrt{2})$$

۶۵

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. ابتدا مساحت مثلث را با قاعده‌ی هرون پیدا می‌کنیم:

$$p = \frac{13 + 15 + 4}{2} = 16 \Rightarrow S = \sqrt{16(16-15)(16-13)(16-4)} = 24$$

از طرفی شعاع دایره‌ی محیطی مثلث برابر است با:

$$R = \frac{a \cdot b \cdot c}{4S} = \frac{15 \times 13 \times 4}{4 \times 24} = \frac{1}{2}$$

۶۶

گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

نکته: اگر  $r_a$ ،  $r_b$  و  $r_c$  شعاع‌های سه دایره‌ی محیطی خارجی مثلث و  $r$  شعاع دایره‌ی محیطی داخلی باشد، آنگاه داریم:

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{r_a} + \frac{1}{r_b} + \frac{1}{r_c} \quad \text{(الف)}$$

$$r \cdot r_a \cdot r_b \cdot r_c = S^2 \quad \text{(ب)}$$

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} = \frac{10 + 5 + 4}{20} = \frac{19}{20} \Rightarrow r = \frac{20}{19}$$

$$S = \sqrt{\frac{20}{19} \times 2 \times 4 \times 5} = 20 \cdot \sqrt{\frac{2}{19}}$$

۶۷

گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$$\frac{AM}{MC} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{AM + MC}{MC} = \frac{1 + 2}{2} \Leftrightarrow \frac{AC}{MC} = \frac{3}{2} \Rightarrow MC = \frac{2}{3} AC$$

چهارضلعی ABNM محیطی است، پس زوایای روبه‌رو مکمل هم هستند.

$$\Rightarrow \frac{NC}{AC} = \frac{MC}{BC} \Rightarrow \frac{NC}{AC} = \frac{\frac{2}{3} AC}{BC} \Rightarrow \frac{2}{AC} = \frac{\frac{2}{3} AC}{6} \Rightarrow AC = 3\sqrt{2}$$

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} AC \cdot BC \cdot \sin \hat{C} \xrightarrow{\hat{C} = 30^\circ} S_{ABC} = \frac{1}{2} \times 3\sqrt{2} \times 6 \times \frac{1}{2} = 9\frac{\sqrt{2}}{2}$$

۶۸

گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$\text{طول مماس مشترک داخلی} = \sqrt{OO'^2 - (R + R')^2}$$

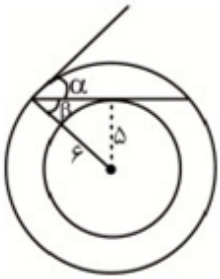
$$\xrightarrow{OO' = 2(R + R')} 5\sqrt{3} = \sqrt{4(R + R')^2} = (R + R')\sqrt{3} \Rightarrow R + R' = 5 \Rightarrow R = 5 - R'$$

$$\text{طول مماس مشترک خارجی} = \sqrt{OO'^2 - (R - R')^2}$$

$$\xrightarrow{OO' = 2(R + R')} \sqrt{91} = \sqrt{4(R + R')^2 - (R - R')^2} = \sqrt{4(5)^2 - (5 - 2R')^2}$$

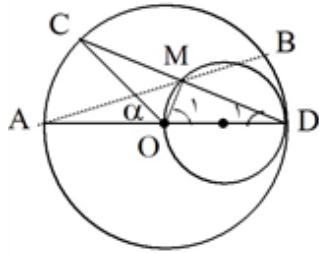
$$\Rightarrow (5 - 2R')^2 = 9 \Rightarrow R' = 1$$

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. در شکل زیر  $\alpha$  و  $\beta$  متمم هم هستند.



$$\sin \alpha = \cos \beta = \frac{\sqrt{36 - 25}}{6} = \frac{\sqrt{11}}{6}$$

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. توجه کنید که شعاع دایره‌ی بزرگ‌تر قطر دایره‌ی کوچک‌تر است پس اگر OM را رسم کنیم آن‌گاه زاویه‌ی M قائمه است. پس عمود OM وتر CD را نصف می‌کند یعنی  $CM = CD$ . حال بنابر رابطه‌ی طولی در دایره می‌نویسیم:



$$MA \times MB = MC \times MD \xrightarrow{MC = MD} MA \times MB = MD^2 \quad (1)$$

در ضمن طول کمان AC از رابطه‌ی زیر به دست می‌آید.

$$\text{طول کمان AC} = \frac{\alpha}{360} (2\pi R) \Rightarrow \frac{4\pi}{3} = \frac{\alpha}{360} 2\pi \times 4 \Rightarrow \alpha = 60 \Rightarrow \widehat{AC} = 60^\circ$$

بنابراین  $\widehat{D}_1 = 30^\circ$  پس  $\widehat{O}_1 = 60^\circ$ .

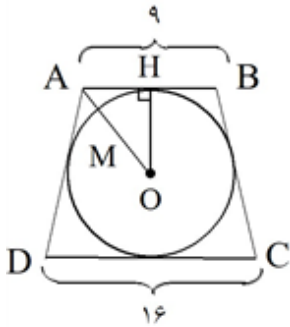
$$\triangle OMD : \widehat{O}_1 = 60^\circ \Rightarrow MD = \frac{\sqrt{3}}{2} OD = \frac{\sqrt{3}}{2} \times 4 = 2\sqrt{3}$$

$$\Rightarrow MA \times MB = MD^2 = (2\sqrt{3})^2 = 12$$

در نتیجه:

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. از مرکز  $O$  مرکز دایره‌ی محاطی به رأس  $A$  وصل می‌کنیم تا دایره را در  $M$  قطع کند آن‌گاه طول پاره‌خط  $AM$  نزدیک‌ترین نقاط دایره تا رأس قاعده‌ی کوچک دوزنقه است.

اگر شعاع دایره محاطی باشد آن‌گاه  $4R^2 = AB \times DC$  پس  $4R^2 = 9 \times 16$  در نتیجه  $R^2 = 36$  پس  $R = 6$ . حال در مثل قائم‌الزایه‌ی  $OAH$  می‌توان نوشت:



$$\left. \begin{aligned} AH &= \frac{AB}{2} = \frac{9}{2} \\ OH &= R = 6 \end{aligned} \right\} \Rightarrow OA^2 = OH^2 + AH^2$$

$$\Rightarrow OA^2 = 36 + \frac{81}{4} = \frac{225}{4} \Rightarrow OA = \frac{15}{2}$$

$$AM = OA - OM = \frac{15}{2} - 6 = \frac{3}{2}$$

بنابراین:

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. اگر  $AB$  ضلع  $n$  ضلعی منظم محاطی و  $r$  شعاع دایره محیطی آن باشد، داریم:

$$AB = 2r \tan \frac{180^\circ}{n} \Rightarrow r = \frac{AB}{2 \times \tan \frac{180^\circ}{n}} \Rightarrow AB = \frac{1}{2 \times \tan \frac{180^\circ}{12}} = \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{\sqrt{6} + \sqrt{2}} \approx \frac{1}{2} \times \frac{1}{0.727} \approx 2$$

گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

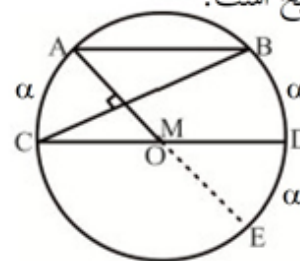
سه قطعه‌ای از نخ که با دایره اشتراک دارد برابر محیط دایره و قسمت‌هایی که بین دو دایره می‌باشد، سه برابر قطر دایره است.

$$3 \times (2 \times 2) + 2 \times \pi \times 2 \approx 24$$

گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$\widehat{AC} = \widehat{BD} = \widehat{DE} = \alpha$$

$$90 = \frac{3\alpha}{2} \Rightarrow \alpha = 60 \Rightarrow \widehat{AB} = 60 \Leftrightarrow AB = OA = 6$$

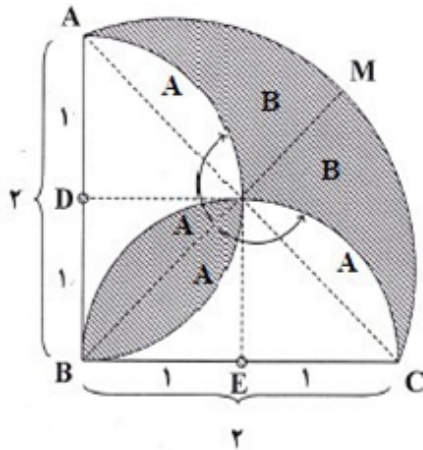


گزینه ۳ پاسخ صحیح است. ۷۵

$$\begin{cases} \widehat{B} = 40^\circ \Rightarrow \widehat{AC} = 80^\circ \\ \widehat{A} = 46^\circ \Rightarrow \widehat{BC} = 92^\circ \end{cases} \quad \text{و} \quad \underbrace{\widehat{C'B} + \widehat{BC} = 180^\circ}_{\text{نیم دایره}} \Rightarrow \widehat{CB} = 180^\circ - 92^\circ = 88^\circ$$

اکنون اندازه زاویه X به صورت زیر به دست می آید:

$$\widehat{X} = \frac{1}{2}(\widehat{CB} + \widehat{AC}) = \frac{1}{2}(88^\circ + 80^\circ) = \frac{1}{2}(168^\circ) = 84^\circ$$



گزینه ۳ پاسخ صحیح است. با توجه به تقارن موجود در شکل و رسم خطوط  $AC$  و  $BM$ ، قسمت‌های هم‌مساحت را با یک نام مشخص می‌کنیم و داریم:

$$S_{\text{هاشور زده}} = 2A + 2B$$

با انتقال مساحت‌های  $A$  هاشور زده از مربع کوچک به محل‌های مشخص شده با  $A$  سفید، مساحت هاشور کاملاً به بیرون مثلث قائم‌الزاویه منتقل می‌شود پس:

$$S_{\text{هاشور}} = 2A + 2B = S_{\text{ربع دایره با شعاع } 2} - S_{\Delta ABC} \quad \text{قائم الزاویه}$$

$$S_{\text{هاشور}} = \frac{1}{4}\pi(2)^2 - \frac{2 \times 2}{2} \Rightarrow S_{\text{هاشور}} = \pi - 2$$

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. اندازه ضلع هر  $n$  ضلعی منتظم محیطی  $x = 2r \cdot \text{tg}\left(\frac{180}{n}\right)$  و اندازه ضلع هر  $n$  ضلعی

منتظم محاطی  $y = 2r \cdot \text{Sin}\left(\frac{180}{n}\right)$  می‌باشد پس:

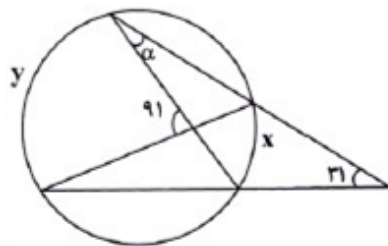
$$n = 6 \Rightarrow x = 2 \times 6 \times \text{tg}(30^\circ) \Rightarrow x = 4\sqrt{3}$$

$$S_{\text{محیطی}} = \frac{3\sqrt{3}}{2}x^2 = \frac{3\sqrt{3}}{2}(4\sqrt{3})^2 = 72\sqrt{3}$$

$$n = 6 \Rightarrow y = 2 \times 6 \times \text{Sin}(30^\circ) = 6$$

$$S'_{\text{محاطی}} = \frac{3\sqrt{3}}{2}(6)^2 = 54\sqrt{3}$$

$$\text{اختلاف مساحت‌ها} = S_{\text{محیطی}} - S'_{\text{محاطی}} = 72\sqrt{3} - 54\sqrt{3} = 18\sqrt{3}$$



$$\begin{cases} 91 = \frac{x+y}{2} \\ 31 = \frac{y-x}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+y = 182 \\ y-x = 62 \end{cases} \Rightarrow y = 122, x = 60$$

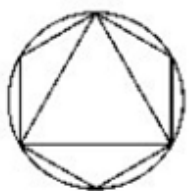
$\alpha$  زاویه محاطی و نصف کمان X است، پس  $\alpha = 30^\circ$  است.

نکته: مساحت n ضلعی منتظم محاط در دایره‌ای به شعاع R مساوی است با:



$$S_n = nS_{\triangle AOB} = n \times \frac{1}{2} R^2 \sin \frac{360}{n}$$

حال داریم:

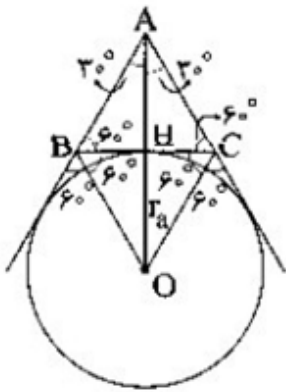


$$\frac{S_3}{S_6} = \frac{3 \times \frac{1}{2} R^2 \sin \frac{360}{3}}{6 \times \frac{1}{2} R^2 \sin \frac{360}{6}} = \frac{\sin 120^\circ}{2 \sin 60^\circ} = \frac{1}{2}$$

بنابراین مساحت شش ضلعی منتظم دو برابر مساحت مثلث متساوی الاضلاع است، پس مساحت شش ضلعی  $30\sqrt{3}$  است.



گزینه ۲ پاسخ صحیح است. می‌دانیم مرکز دایره‌ی محاطی خارجی، محل تقاطع دو نیمساز خارجی است (نقطه‌ی O). بنابراین دو مثلث ABC و OBC بنا بر دو زاویه و ضلع بین هم‌نهشت هستند و لذا: AH ارتفاع مثلث ABC برابر OH است.



$$\begin{aligned} OH = AH = r_a &\Rightarrow OA = 2 \times AH \\ &= 2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} a = \sqrt{3} \times \sqrt{3} = 3 \end{aligned}$$

گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

$$\begin{cases} TT'^2 = d^2 - (R - R')^2 & \text{خارجی} \\ PP'^2 = d^2 - (R + R')^2 & \text{داخلی} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 63 = 64 - (R - R')^2 \\ 15 = 64 - (R + R')^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} R + R' = 7 \\ R - R' = 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow R = 4, R' = 3 \Rightarrow RR' = 12 \text{ حاصل ضرب شعاع‌ها}$$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. اگر  $\Gamma_a$  و  $\Gamma_b$  و  $\Gamma_c$  شعاع‌های سه دایره محاطی خارجی و  $\Gamma$  شعاع دایره محاطی داخلی باشد آن‌گاه:

$$\frac{1}{r_a} + \frac{1}{r_b} + \frac{1}{r_c} = \frac{1}{r}$$

$$\left. \begin{aligned} s_a = 4\pi = \pi r_a^2 &\Rightarrow r_a = 2 \\ s_b = 9\pi = \pi r_b^2 &\Rightarrow r_b = 3 \\ s_c = 36\pi = \pi r_c^2 &\Rightarrow r_c = 6 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = \frac{1}{r}$$

$$\begin{aligned} \Gamma = 1 &\text{ شعاع دایره محاطی داخلی} \\ \text{محیط دایره محاطی داخلی} &= 2\pi(1) = 2\pi \end{aligned}$$

گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

مساحت دوزنقه‌ای که محاطی و محیطی است برابر میانگین حسابی دو قاعده، ضربدر میانگین هندسی آنها است.

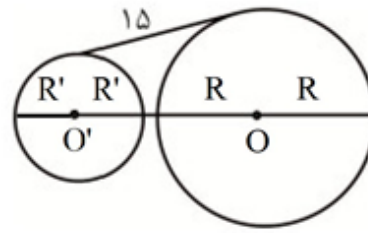
$$\alpha + \beta = \frac{64}{4} = 16, \alpha\beta = \frac{81}{4} \Rightarrow S = \frac{\alpha + \beta}{2} \sqrt{\alpha\beta} = \frac{16}{2} \times \sqrt{\frac{81}{4}} \Rightarrow S = 8 \times \frac{9}{2} = 36$$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. فرض کنیم طول خط‌المركزین دو دایره یعنی  $OO'$  برابر  $d$  باشد. داریم:

$$\begin{cases} d + R = 26 \\ d + R' = 18 \end{cases} \Rightarrow R - R' = 8$$

$$\Rightarrow 15 = \sqrt{d^2 - 8^2} \Rightarrow d = 17$$

$$\Rightarrow R = 9, R' = 1 \Rightarrow 17 + 9 + 1 = 27$$



گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

قطر دایره محیطی برابر وتر مثلث قائم‌الزاویه است و می‌دانیم شعاع دایره‌ی محیطی داخلی برابر  $\frac{S}{p}$  است. داریم:

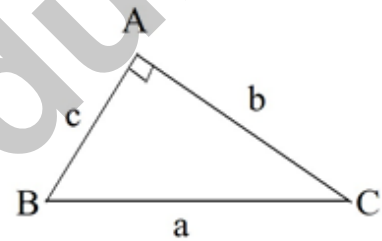
$$\left. \begin{aligned} a = 20 \Rightarrow b^2 + c^2 = 400 \Rightarrow b + c = \sqrt{400 + 2bc} \\ \text{و } 6 = \frac{bc}{20 + b + c} \Rightarrow b + c = \frac{bc}{6} - 20 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{bc}{6} - 20 = \sqrt{400 + 2bc}$$

$$bc = x \Rightarrow \sqrt{400 + 2x} = \frac{x}{6} - 20$$

$$\Rightarrow \cancel{400} + 2x = \frac{x^2}{36} - \frac{20}{3}x + \cancel{400}$$

$$\Rightarrow \frac{x^2}{36} - \frac{26}{3}x = 0 \quad x = 12 \times 26$$

$$\Rightarrow S = \frac{bc}{2} = 12 \times 13 = 156$$



گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$$\widehat{CD} = 100^\circ \Rightarrow \widehat{OC} + \widehat{OD} = 260^\circ$$

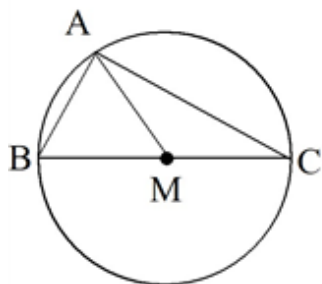
$$\widehat{M} = 70^\circ = \frac{\widehat{OD} - \widehat{OC}}{2} \Rightarrow \widehat{OD} - \widehat{OC} = 140^\circ \Rightarrow \begin{cases} \widehat{OC} + \widehat{OD} = 260^\circ \\ \widehat{OD} - \widehat{OC} = 140^\circ \end{cases} \Rightarrow \widehat{OD} = 200^\circ$$

$$\Rightarrow \widehat{OC} = 60^\circ$$

$\widehat{O}$  در دایره بزرگ‌تر زاویه ظلّی و برابر  $\frac{\widehat{OC}}{2}$  و در دایره کوچک‌تر، زاویه مرکزی و برابر  $\widehat{AB}$  است، پس داریم:

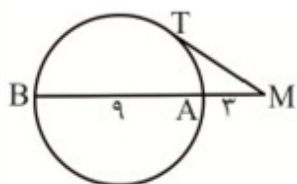
$$\widehat{AB} = \frac{60}{2} = 30^\circ$$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است.  $1^2 = 0.28^2 + 0.96^2$ ، پس مثلث ABC مثلث قائم‌الزاویه است. پس قطر دایره به طول ۱ و مرکز دایره وسط وتر BC است. ۸۷



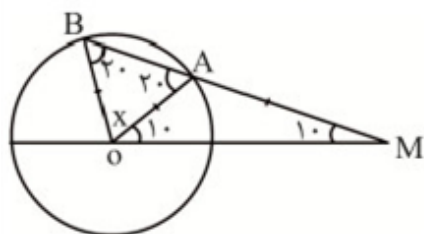
$$MA = MB = MC = \frac{1}{2} \Rightarrow MA + MB + MC = 1.5$$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. ۸۸



$$MT^2 = MA \times MB = 3(3 + 9) = 36 \Rightarrow MT = 6$$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. با توجه به اینکه  $MA = R$  و  $\hat{M} = 10$ ، می‌توانیم X را محاسبه کنیم: ۸۹



$$X = 180 - 40 = 140$$

پس با زاویه  $10 + 140 = 150$  درجه قطع می‌کند.

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. چون دو خط موازی‌اند و دو کمان بین دو خط موازی برابرند، داریم: ۹۰

$$2X = \frac{360 - 44}{2} = 158 \Rightarrow X = 79$$

91

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. در شکل  $AB = 10$  و قطر  $BC$  را رسم کرده‌ایم. با توجه به داده‌های روی شکل داریم:

$$AB = 2\alpha, \quad \angle ACB = 180^\circ + 2\beta$$

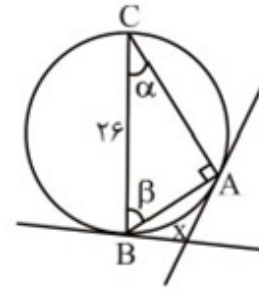
$$x = \frac{180^\circ + 2\beta - 2\alpha}{2} = 90^\circ + \beta - \alpha$$

$$\triangle ABC : AC = \sqrt{26^2 - 10^2} = 24$$

$$\triangle ABC : \sin \alpha = \cos \beta = \frac{5}{13}$$

$$\cos \alpha = \sin \beta = \frac{12}{13}, \quad \cos(\beta - \alpha) = \cos \beta \cos \alpha + \sin \alpha \sin \beta$$

$$\Rightarrow \sin(90^\circ + \beta - \alpha) = \cos(\beta - \alpha) = \frac{12 \times 5 \times 12}{13 \times 13} = \frac{120}{169}$$



گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

92



با توجه به شکل داریم:

$$KF = FT, \quad FE = FM$$

$$AB = BT, \quad MC = CD$$

$$AD = 15 \text{ cm} \Rightarrow AB + BC + CD = BT + BC + MC = 15 \text{ cm} \quad (1)$$

$$KE = 15 \text{ cm} \Rightarrow KF + FE = FT + FM = 15 \text{ cm} \quad (2)$$

$$(1), (2) \Rightarrow FB + BC + FC = 30 \text{ cm}$$

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. فرض می‌کنیم  $MS = TS = MT = x$  و  $NT = y$  باشد. آن‌گاه با استفاده از رابطه‌ی

93

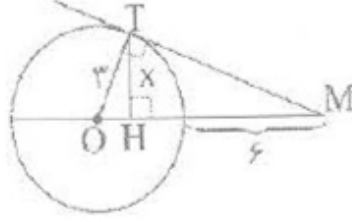
طول‌ی در دایره می‌نویسیم:

$$SQ \times SM = SR \times SN \Rightarrow \frac{1}{2}x = \frac{1}{3}(x + y) \Rightarrow \frac{1}{6}x = \frac{1}{3}y \Rightarrow y = \frac{1}{2}x \quad (1)$$

$$PT \times MT = NT \times TR \Rightarrow \frac{1}{2}x = y \left( x + \frac{1}{3} \right) \xrightarrow{(1)} \frac{1}{2}x = \frac{1}{2}x \left( x + \frac{1}{3} \right) \xrightarrow{x \neq 0} 1 = x + \frac{1}{3} \Rightarrow x = \frac{2}{3}$$

بنابراین محیط مثلث  $MTS$  برابر  $3x$  یعنی ۲ است.

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. شعاع OT بر خط مماس MT عمود است، پس مثلث OTM قائم الزاویه است و TH ارتفاع وارد بر وتر است. اگر  $OH = y$  فرض شود، آن گاه بنابر رابطه طولی در مثلث قائم الزاویه می نویسیم:



$$OT^2 = OH \times OM \Rightarrow 9 = y \times 4 \Rightarrow y = 1$$

$$\Delta TOH: x = \sqrt{3^2 - 1^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2} \Rightarrow TH = 2\sqrt{2}$$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. ۹۵

$$R' = 3R \Rightarrow d = R + R' = 4R$$

$$L = \sqrt{d^2 - (R - R')^2} = \sqrt{16R^2 - 4R^2} = 2\sqrt{3}R$$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. ۹۶

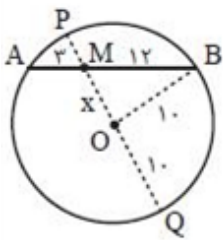
$$\begin{cases} \hat{A} = 30^\circ = \frac{\widehat{PM} + \widehat{PQ} + \widehat{QN} - \widehat{MN}}{2} \Rightarrow \widehat{PM} + \widehat{PQ} + \widehat{QN} - \widehat{MN} = 60 & (1) \\ \hat{B} = 50^\circ = \frac{\widehat{PM} + \widehat{MN} + \widehat{NQ} - \widehat{PQ}}{2} \Rightarrow \widehat{PM} + \widehat{MN} + \widehat{NQ} - \widehat{PQ} = 100 & (2) \end{cases}$$

$$(1) + (2) \Rightarrow \widehat{PM} + \widehat{QN} = 80^\circ$$

$$\widehat{NLQ} = \frac{\widehat{PM} + \widehat{QN}}{2} = \frac{80^\circ}{2} = 40^\circ$$

$$ML = NL \Rightarrow \widehat{LMN} = \widehat{LNM} = \frac{\widehat{L}}{2} = 20^\circ \Rightarrow \widehat{NQ} = 2 \times 20^\circ = 40^\circ$$

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. OM را امتداد می دهیم تا دایره را در نقاط P و Q قطع کند. ۹۷



$$MA \times MB = PM \times MQ$$

$$PM = OP - x = 10 - x$$

$$MQ = 10 + x$$

$$\Rightarrow 3 \times 12 = (10 - x)(10 + x) \Rightarrow 100 - x^2 = 36$$

$$\Rightarrow x^2 = 64 \Rightarrow x = 8$$

$$\text{OMB محیط مثلث: } 8 + 12 + 10 = 30$$

۹۸

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. می‌دانیم در چندضلعی‌های محیطی  $S = rP$  که در آن  $S$  مساحت و  $P$  نصف محیط چندضلعی و  $r$  شعاع دایره‌ی محاطی آن است و همچنین مساحت مثلث متساوی‌الاضلاع به ضلع  $a$  برابر  $\frac{\sqrt{3}}{4}a^2$  است، بنابراین:

$$S = \frac{\sqrt{3}}{4}a^2 \Rightarrow S = rP \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{4}a^2 = 2\sqrt{3} \times \frac{3}{4}a \Rightarrow a = 12$$

$$P = \frac{3}{2}a$$

$$\text{ارتفاع} = \frac{\sqrt{3}}{2}a = \frac{\sqrt{3}}{2} \times 12 = 6\sqrt{3}$$

۹۹

گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

$$\hat{T}_1 = \hat{T}_3 \Rightarrow \hat{T}_1 + \hat{T}_2 = \hat{T}_3 + \hat{T}_2 \Rightarrow \hat{CTB} = \hat{DTM}$$

$$\left. \begin{aligned} \hat{TDM} = \hat{TCB} = \frac{\widehat{BT}}{2} \\ \hat{CTB} = \hat{DTM} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \hat{DTM} \sim \hat{CTB}$$

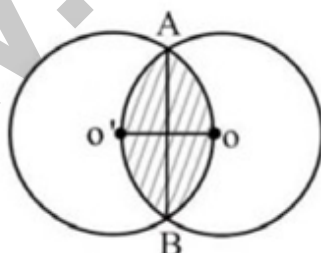
بنابراین:

$$\frac{TD}{TC} = \frac{TM}{TB} = \frac{DM}{BC} \Rightarrow TM \times BC = TB \times DM$$

۱۰۰

گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$$OA = O'A = OO' \Rightarrow \hat{AOB} = 2 \times 60^\circ = 120^\circ$$



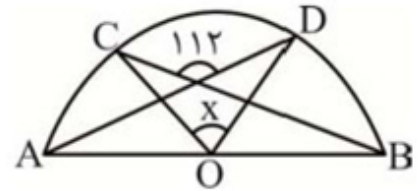
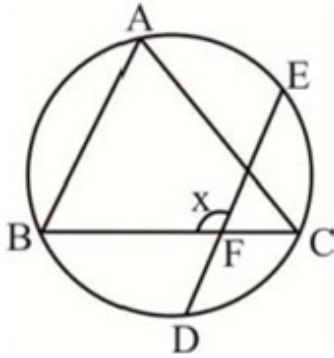
(مساحت  $\triangle OAB$  - مساحت قطاع  $OAB$ )  $\times 2$  = مساحت ناحیه مشترک

$$= 2 \left( \pi (1^2) \times \frac{120}{360} - \frac{1}{2} \times 1 \times 1 \times \sin 120^\circ \right) = \frac{2\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2} \cong 1/23$$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. (۱۰۱)

$$\widehat{AB} = 180, \widehat{CD} = x \Rightarrow 112 = \frac{180 + x}{2}$$

$$\Rightarrow x = 224 - 180 = 44$$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. چون  $\widehat{CD} = \widehat{CE}$  داریم: (۱۰۲)

$$\widehat{A} = \frac{\widehat{BD} + \widehat{DC}}{2}, x = \frac{\widehat{BA} + \widehat{AE} + \widehat{DC}}{2} \Rightarrow$$

$$\widehat{A} + x = \frac{\widehat{BA} + \widehat{AE} + \widehat{EC} + \widehat{DC} + \widehat{BD}}{2} = 180$$

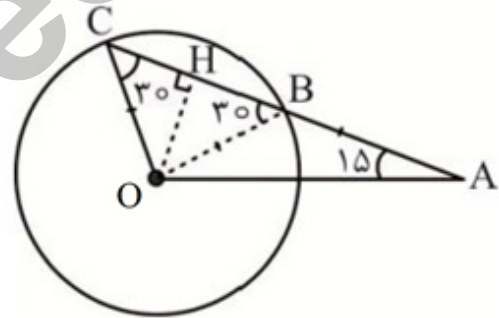
$$\Rightarrow x = 180 - 75 = 105^\circ$$

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. (۱۰۳)  
در مثلث متساوی الساقین OBC، ارتفاع OH را رسم می‌کنیم.

$$\frac{CH}{OC} = \cos 30^\circ \Rightarrow CH = 10 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 5\sqrt{3}$$

$$\Rightarrow CB = 2 \times 5\sqrt{3} = 10\sqrt{3} \approx 17$$

$$\Rightarrow AC = 10 + 17 = 27$$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. زاویه AOB مرکزی است اگر مقدار آن  $\beta$  فرض شود آن گاه کمان ACB نیز برابر  $\beta$  خواهد بود و در نتیجه کمان ADB برابر  $360^\circ - \beta$  است. (۱۰۴)زاویه ACB محاطی و روبه‌رو به کمان ADB است و همچنین برابر زاویه  $\beta$  است، پس:

$$\frac{360 - \beta}{2} = \beta \Rightarrow \beta = 120^\circ$$

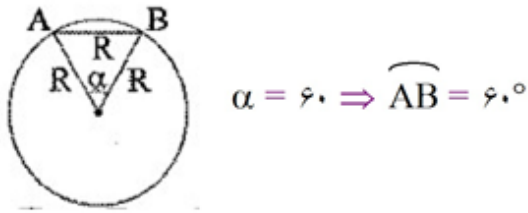
CO نیم‌ساز زاویه C می‌باشد، پس  $\widehat{DCB} = 60^\circ$  و در نتیجه  $\alpha = 120^\circ$  خواهد بود.

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. (۱۰۵)

چون خط d بر دایره C مماس است، پس فاصله‌ی مرکز دایره تا خط d برابر شعاع دایره است.

$$2 + \frac{1}{m} = 12 \Rightarrow m = \frac{1}{10} = 0.1$$

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. اگر اندازه‌ی وتر برابر شعاع دایره باشد، کمان متناظر با آن  $60^\circ$  است دلیل آن که در شکل مقابل به وضوح دیده می‌شود:



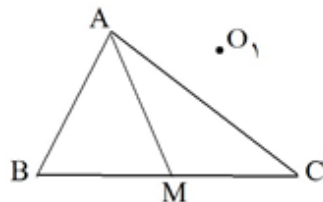
در دایره‌ی شکل سؤال اگر  $\widehat{BC} = x$  باشد آن‌گاه:

$$\widehat{DC} + \widehat{BC} + \widehat{BA} + \widehat{AD} = 360^\circ \Rightarrow 60^\circ + 3x = 360^\circ \Rightarrow x = 100^\circ$$

زاویه‌ی D محاطی است، پس:

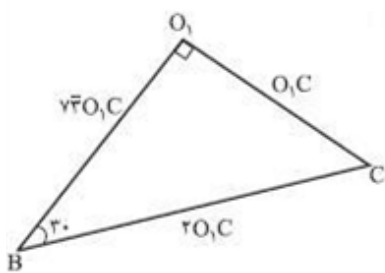
$$\alpha = \frac{1}{2} \widehat{BC} = \frac{1}{2} x = 50^\circ$$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است.



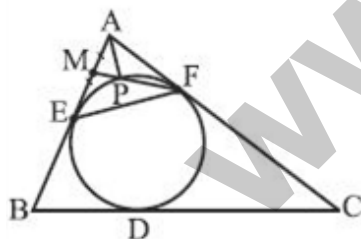
$$BM \cdot BC = BO_1^2 - O_1C^2 \Rightarrow \frac{BC}{2} \cdot BC = (\sqrt{3}O_1C)^2 - O_1C^2$$

$$\Rightarrow BC^2 = 4O_1C^2 \Rightarrow BC = 2O_1C$$



$$\Rightarrow \widehat{BC} = 2\alpha$$

گزینه ۱ پاسخ صحیح است.



$$ME^2 = MP \cdot MF \Rightarrow MA^2 = MP \cdot MF \Rightarrow \widehat{PAM} = \widehat{PFA}$$

$$\widehat{PAM} = \frac{\widehat{B} + \widehat{C}}{2} \Rightarrow \widehat{PFA} = \frac{\widehat{B} + \widehat{C}}{2} \Rightarrow \widehat{PFE} = \frac{2(\widehat{B} + \widehat{C})}{10}$$

$$\widehat{EFA} = \frac{\widehat{B} + \widehat{C}}{2} \xrightarrow{\text{چون}} \left\{ \begin{array}{l} \widehat{EDP} = \widehat{PFE} = \frac{2(\widehat{B} + \widehat{C})}{10} \Rightarrow \widehat{EDP} \widehat{P} \widehat{DF} = \frac{\frac{2(\widehat{B} + \widehat{C})}{10}}{\frac{\widehat{B} + \widehat{C}}{2}} = \frac{2}{5} \\ \widehat{PDF} = \widehat{PFA} = \frac{\widehat{B} + \widehat{C}}{2} \end{array} \right.$$

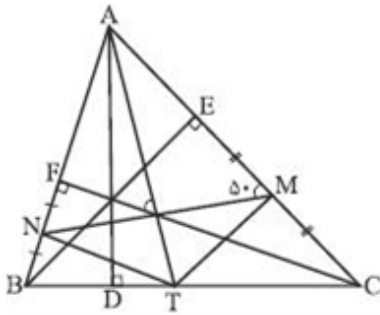


109

گزینه ۳ پاسخ صحیح است.  $TM$  و  $TN$  به ترتیب میان خطهای  $\triangle BEC$  و  $\triangle BCF$  می‌باشند، در نتیجه:

$$\widehat{TMA} = \widehat{TNA} = 90^\circ$$

پس  $AMTN$  محاطی است، در نتیجه:



$$\widehat{ATN} = \widehat{AMN} = 50$$

$$\widehat{TAN} = 90 - 50 = 40$$

گزینه ۵ پاسخ صحیح است.  $EO$  را امتداد دهید تا دایره دوم را در  $D$  قطع کند. شعاع دو دایره را با  $R$  و  $r$  نشان دهید. می‌دانیم:  $JO - R = 2r$ ، در نتیجه می‌توان گفت:

$$OX^2 = DO \cdot OE \Rightarrow OX = (2R - 2r)(2r) = 2Rr - 4r^2 = 400$$

در نتیجه:  $XL = 40$

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. 111

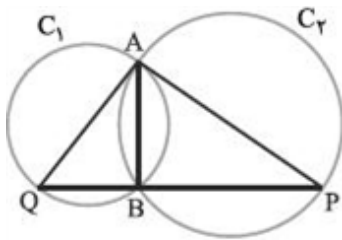
گزینه ۲ پاسخ صحیح است. 112

113

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. می‌دانیم:  $\widehat{PAB} = \widehat{AQB}$  و  $\widehat{QAB} = \widehat{APB}$

$$\widehat{AQB} = \widehat{PAB}$$

حال می‌توان نوشت:



$$\frac{AB}{PB} = \frac{QB}{AB} \Rightarrow AB = 800$$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. می‌دانیم  $\widehat{BAC} = \widehat{BDC} = 70^\circ$ ، در نتیجه:  $\widehat{ABC} = 70^\circ$  و  $\widehat{ADC} = 110^\circ$ ، 114

بنابراین  $\triangle ABC$  متساوی‌الساقین است، در نتیجه:  $AC = BC = 6$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. نسبت مساحت‌های دو اضلعی منتظم محیطی و محاطی یک دایره،  $\cos \frac{2\pi}{n}$  است. 115

$$\cos \frac{2\pi}{8} = \frac{1 + \frac{\cos \pi}{2}}{2} = \frac{2 + \sqrt{2}}{4}$$

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. اگر شعاع‌ها را  $R$  و  $R'$  فرض کنیم:

$$\begin{cases} 2\sqrt{RR'} = 4 \\ R + R' = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} RR' = 4 \\ R + R' = 5 \end{cases}$$

معادله‌ی درجه‌دومی تشکیل می‌دهیم که مجموع ریشه‌های آن ۵ و حاصل ضرب ریشه‌هایش ۴ باشد.

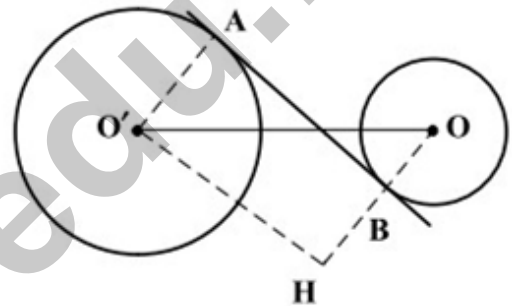
$$x^2 - 5x + 4 = 0 \Rightarrow x = 1, 4$$

معادله دو جواب دارد:  $\begin{cases} R = 1 \\ R' = 4 \end{cases}$  یا  $\begin{cases} R' = 1 \\ R = 4 \end{cases}$  که در هر حالت، شعاع ۴ مدنظر است و مساحت دایره‌ی بزرگ‌تر  $16\pi$  خواهد بود.

گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

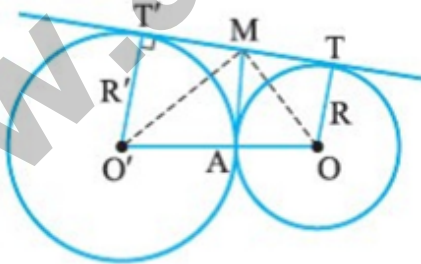
با توجه به شکل  $AB = O'H$  در مثل قائم‌الزاویه  $HOO'$  داریم:

$$O'H = \sqrt{81 - 49} = \sqrt{32} \Rightarrow AB = 4\sqrt{2}$$



گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$TT' = \sqrt{OO'^2 - (R - R')^2} = \sqrt{13^2 - (9 - 4)^2} = 12$$



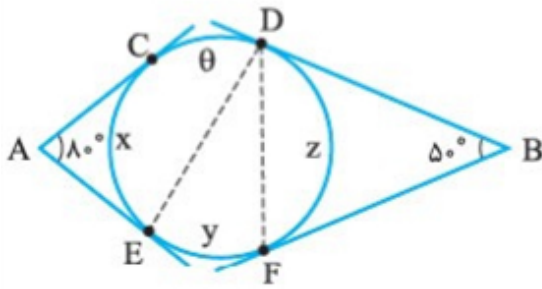
اگر مماس مشترک داخلی دو دایره، مماس مشترک خارجی را در  $M$  قطع کند، آنگاه  $O'M$  نیمساز  $\widehat{T'MA}$  و  $OM$  نیز نیمساز  $\widehat{TMA}$  است، پس  $\widehat{O'MO} = 90^\circ$  است. اگر دایره‌ای به قطر  $OO'$  رسم شود از همان نقطه  $M$   $MA = MT' = MT = \frac{TT'}{2} = 6$  مطلوب است. از طرفی:

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. اگر کمان  $\widehat{CD}$  برابر  $\theta$  باشد، آن‌گاه:

$$CD = 2R \sin \frac{\theta}{2}$$

$$\Rightarrow R = 2R \sin \frac{\theta}{2}$$

$$\Rightarrow \sin \frac{\theta}{2} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{\theta}{2} = 30^\circ \Rightarrow \theta = 60^\circ$$



$$\widehat{A} = \frac{(\theta + z + y) - x}{2} \Rightarrow 80^\circ = \frac{60^\circ + z + y - x}{2} \Rightarrow z + y - x = 100^\circ \quad (1)$$

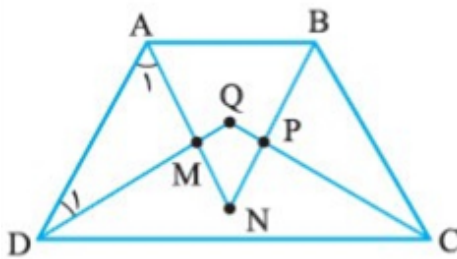
$$\widehat{B} = \frac{(\theta + x + y) - z}{2} \Rightarrow 50^\circ = \frac{60^\circ + x + y - z}{2} \Rightarrow x + y - z = 40^\circ \quad (2)$$

$$(1) + (2) \Rightarrow 2y = 140^\circ \Rightarrow y = 70^\circ$$

$$\text{زاویه } \widehat{EDF} = \frac{y}{2} = 35^\circ$$

زاویه EDF محاطی است و برابر با نصف کمان مقابلش است. پس:

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. 120

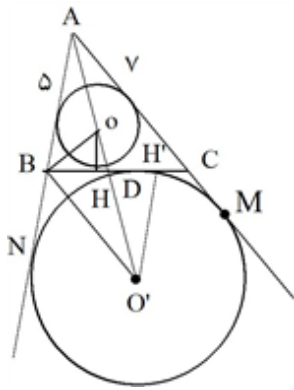


$$\begin{aligned} \widehat{A} + \widehat{D} &= 180^\circ \\ \Rightarrow \widehat{A_1} + \widehat{D_1} &= 90^\circ \\ \Rightarrow \widehat{M} &= 90^\circ \end{aligned}$$

به صورت مشابه  $\widehat{P} = 90^\circ$  و چون مجموع دو زاویه مقابل در چهارضلعی MNPQ برابر  $180^\circ$  است، پس این چهارضلعی محاطی است.

از طرفی مثلث‌های ABN و DQC و دو مثلث AMD و BPC هم‌نهشت هستند، پس:  $MQ = QP$  و  $MN = NP$

در نتیجه  $MQ + NP = QP + MN$ ، یعنی در چهارضلعی MNPQ مجموع دو ضلع مقابل، برابر با مجموع دو ضلع دیگر است، پس این چهارضلعی محیطی است. در نتیجه چهارضلعی هم محاطی و هم محیطی است.



گزینه ۳ پاسخ صحیح است. بنابر فرض سؤال شکل مقابل را خواهیم داشت به طوری که مرکز دایره محاطی داخلی و  $O'$  مرکز دایره محاطی خارجی نظیر ضلع  $BC$  است. طول  $HH'$  که تصویر قائم  $OO'$  روی ضلع  $BC$  است را باید به دست آوریم. می‌دانیم که  $P$  نصف محیط مثلث  $ABC$  برابر ۱۰ است. پس:

$$BH = P - AC = 10 - 7 = 3$$

$$AM = P = 10 \Rightarrow CM = P - AC = 3$$

در ضمن  $CM = CH'$  پس  $CH' = 3$  بنابراین:

$$HH' = BC - BH - CH' \Rightarrow HH' = 8 - 3 - 3 = 2$$

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. می‌دانیم اگر در یک چندضلعی محیطی مساحت را با  $S$ ، محیط را با  $2P$  و شعاع دایره محاطی را با  $r$  نشان دهید، آن‌گاه  $S = rP$ ، بنابراین داریم:

$$\begin{cases} S = 2P \\ (2P)^2 + S^2 = 600 \end{cases} \Rightarrow S^2 + S = 600 \Rightarrow S^2 + S - 600 = 0$$

$$\Rightarrow (S - 24)(S + 25) = 0 \Rightarrow S = 24 \Rightarrow 2P = 24$$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. فرض کنیم  $\hat{D}_2 = y$  و  $\hat{C}_2 = x$ ، در نتیجه  $\hat{D}_1 = 2y$  و  $\hat{C}_1 = 2x$  بنابراین داریم:

$$\text{خارجی } \hat{ABD} = \hat{D}_2 + \hat{C}_1 = y + 2x$$

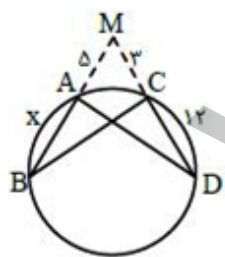
$$\text{خارجی } \hat{AEC} = \hat{C}_2 + \hat{D}_1 = x + 2y$$

$$\text{محاطی } ABFE \Rightarrow \hat{ABF} + \hat{AEF} = 180^\circ \Rightarrow y + 2x + x + 2y = 180^\circ$$

$$\Rightarrow 4x + 4y = 180^\circ \Rightarrow x + y = \frac{180^\circ}{4} = 45^\circ$$

$$\hat{D} + \hat{C} = 2x + 2y = 90^\circ \Rightarrow \hat{A} = 180^\circ - (\hat{C} + \hat{D}) = 180^\circ - 90^\circ = 90^\circ$$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. از  $B$  به  $D$  وصل کنید. زاویه‌های  $A$  و  $C$  روبه‌روی یک ضلع هستند. می‌توان این‌طور تصور کرد که هر دو زاویه محاطی روی محیط یک دایره هستند یعنی  $ABDC$  یک چهارضلعی محاطی است. نقطه  $M$  از برخورد امتداد دو وتر  $AB$  و  $CD$  ساخته شده است و رابطه طولی برایش برقرار است.

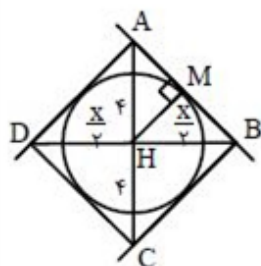


$$MA \times MB = MC \times MD$$

$$\Rightarrow 5 \times (5 + x) = 3 \times (3 + 12)$$

$$\Rightarrow 25 + 5x = 45 \Rightarrow x = 4$$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. شعاع را در نقطه تماس دایره با ضلع AB رسم کرده‌ایم. اندازه AC = ۸ و BD = x است. (۱۲۵)



$$\triangle AMH: r^2 + AM^2 = AH^2 \Rightarrow 4 + AM^2 = 16 \Rightarrow AM = 2\sqrt{3}$$

حالا از رابطه طولی در مثل قائم‌الزاویه AHB استفاده می‌کنیم.

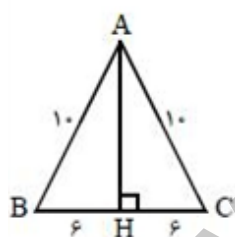
$$\triangle AHB: AH^2 = AM \times AB \Rightarrow 16 = 2\sqrt{3} \times AB \Rightarrow AB = \frac{8}{\sqrt{3}}$$

$$\triangle ABH: AB^2 = BH^2 + AH^2 \Rightarrow \frac{64}{3} = \frac{x^2}{4} + 16 \Rightarrow x = \frac{8}{\sqrt{3}}$$

مساحت لوزی با داشتن قطرهای به راحتی به دست می‌آیند.

$$S_{ABCD} = \frac{1}{2} AC \times BD = \frac{1}{2} \times 8 \left( \frac{8}{\sqrt{3}} \right) = \frac{32}{\sqrt{3}}$$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. می‌دانیم شعاع دایره محاطی خارجی از رابطه  $r_a = \frac{S}{p-a}$  به دست می‌آید، پس برای محاسبه شعاع‌های دایره محاطی خارجی به مساحت مثل نیاز داریم. مثل ABC متساوی‌الساقین است، پس AH هم ارتفاع است و هم میانه. (۱۲۶)



$$\triangle AHC: AC^2 = CH^2 + AH^2 \Rightarrow AH = 8$$

$$S_{\triangle ABC} = \frac{AH \times BC}{2} = \frac{8 \times 12}{2} = 48$$

$$r_a = \frac{48}{16 - 10} = 8$$

$$r_c = r_b = \frac{48}{16 - 12} = 12$$

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. می‌دانیم در مثل ABC داریم: (۱۲۷)

$$\frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c} = \frac{1}{r}, \quad \frac{1}{r_a} + \frac{1}{r_b} + \frac{1}{r_c} = \frac{1}{r}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{r_a} + \frac{1}{r_b} + \frac{1}{r_c} = \frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c} \Rightarrow \frac{1}{30} + \frac{1}{10} + \frac{1}{5} = \frac{1}{5} + \frac{1}{20} + \frac{1}{h_c}$$

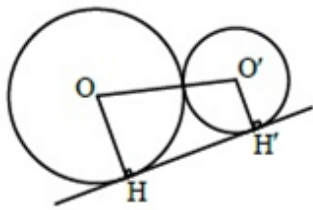
$$\Rightarrow \frac{1}{h_c} = \frac{1}{30} + \frac{1}{10} - \frac{1}{20} = \frac{2+6-3}{60} = \frac{5}{60} \Rightarrow \frac{1}{h_c} = \frac{1}{12} \Rightarrow h_c = 12$$

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. با توجه به تعداد مماس مشترکها، دو دایره مماس برون از هم هستند. یعنی

$$\frac{R}{R'} = 3 \text{ و } d = 8 = R + R' \text{ (فرض کنیم } (R > R') \text{) پس:}$$

$$R = 6, R' = 2$$

طبق شکل داریم:



$$\begin{aligned} HH' &= 2\sqrt{RR'} = 2\sqrt{3} \\ \text{ذوزنقه قائم الزاویه } OO'HH' & \\ \Rightarrow S &= \frac{(6+2) \times 2\sqrt{3}}{2} = 16\sqrt{3} \end{aligned}$$

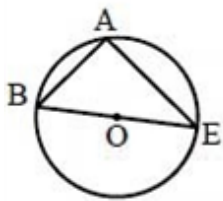
گزینه ۲ پاسخ صحیح است. ۱۲۹

$$BM^2 = BQ \cdot BP \Rightarrow 4^2 = 2 \times BP \Rightarrow BP = 8 \Rightarrow QP = 6$$

$$\Rightarrow CQ = 3 = 6 = 9 \Rightarrow CN^2 = CP \cdot CQ \Rightarrow CN^2 = 3 \times 9 = 27$$

$$\Rightarrow CN = 3\sqrt{3}$$

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. از نقطه A، وتر AE را به طول ۸ رسم می‌کنیم. ۱۳۰



$$AE = CD \Rightarrow \widehat{AE} = \widehat{CD} \Rightarrow \widehat{AB} + \widehat{AE} = 180$$

$$\Rightarrow \widehat{BE} = 180 \Rightarrow \widehat{A} = 90$$

$$\Rightarrow BE^2 = AB^2 + AE^2 = 100$$

$$\Rightarrow BE = 10 \Rightarrow R = 5$$

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. ۱۳۱



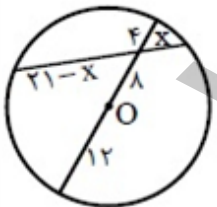
$$AB = 12 \Rightarrow AH = 6$$

$$OH^2 = OA^2 - AH^2 = 100 - 36 = 64$$

$$\Rightarrow OH = 8$$

$$HM = OM - OH = 10 - 8 = 2$$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. با توجه به داده‌ای مسئله شکل را رسم می‌کنیم. ۱۳۲



$$4 \times (8 + 12) = X(21 - X)$$

$$\Rightarrow 80 = -X^2 + 21X \Rightarrow X^2 - 21X + 80 = 0$$

$$(X - 5)(X - 16) = 0 \Rightarrow X = 5 \text{ و } X = 16$$

$$\text{پس: } \frac{21 - X}{X} = \frac{16}{5}$$

۱۳۳

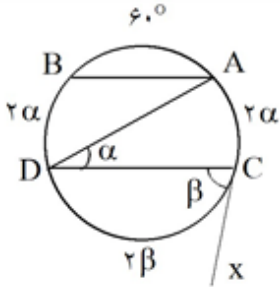
گزینه ۳ پاسخ صحیح است. زاویه DAC ظلّی است، پس اگر AD برابر ۲x باشد. داریم:

$$\widehat{B} = \widehat{AD} = x, AB = AC \Rightarrow \widehat{B} = \widehat{C} = x$$

$$\widehat{ADC} \text{ زاویه خارجی } \widehat{ADB} = \widehat{DAC} + \widehat{C} = x + x = 2x$$

$$\widehat{ABD}: \widehat{B} + 30^\circ + \widehat{ADB} = 180^\circ \Rightarrow x + 30^\circ + 2x = 180^\circ \Rightarrow x = 50^\circ$$

$$\widehat{AD} = 2 \times 50^\circ = 100^\circ$$

چون AB با DE موازی است، پس  $\widehat{AD} = \widehat{BE}$ ، بنابراین  $\widehat{BE} = 100^\circ$ 

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. اگر از مرکز دایره به نقاط A و B وصل کنیم آن‌گاه

مثلث OAB متساوی‌الاضلاع است پس اندازه‌ی کمان AB برابر  $60^\circ$  است. ازطرف دیگر می‌دانیم کمان‌های بین دو وتر موازی مساویند پس  $\widehat{AC} = \widehat{BD}$ . درضمن زاویه‌ی DCx ظلّی است پس  $\widehat{DC} = 2\beta$  در نتیجه:

$$\widehat{AC} + \widehat{BD} + \widehat{DC} + \widehat{AB} = 360^\circ \Rightarrow 2\alpha + 2\alpha + 2\beta + 60^\circ = 360^\circ$$

$$\beta = 2\alpha \rightarrow 4\alpha = 300^\circ \Rightarrow \alpha = \frac{300^\circ}{4}$$

$$\widehat{BD} = 2\alpha = 2 \left( \frac{300^\circ}{4} \right) = \frac{300^\circ}{2} = 150^\circ$$

پس:

۱۳۵

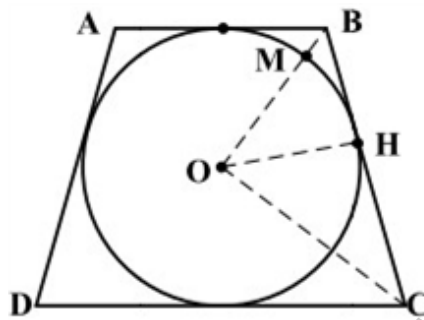
گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

$$AB + CD = BC + AD \Rightarrow 2BC = 22 \Rightarrow BC = 11$$

$$\text{مثلث } OBC \text{ قائم‌الزاویه } CH = \frac{15}{2}, BH = \frac{7}{2}$$

$$R^2 = BH \cdot CH = \frac{105}{4}, OB^2 = BH \times BC = \frac{77}{2}$$

$$BM = OB - R = \frac{1}{2}(\sqrt{154} - \sqrt{105})$$



۱۳۶

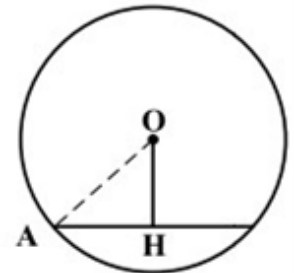
گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

اگر a, b, c, d اضلاع متوالی چهارضلعی باشند  $a + c \neq b + d$  پس محیطی نیست اگر A, B, C, Dزاویه‌های متوالی باشند  $\widehat{A} + \widehat{C} \neq \widehat{B} + \widehat{D}$  پس  $\widehat{A} + \widehat{C} \neq 180^\circ$  لذا چهارضلعی غیرم محیطی و غیر محیطی است.

۱۳۷

گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$AH = \frac{\sqrt{3}}{2} R \Rightarrow OH = \frac{1}{2} R \Rightarrow OH = \frac{1}{4}(2R)$$



گزینه ۴ پاسخ صحیح است. ۱۳۸

$$\begin{cases} \widehat{E} = \frac{1}{2} \widehat{AMB} \text{ (ثابت)} \\ \widehat{F} = \frac{1}{2} \widehat{ANB} \text{ (ثابت)} \end{cases}$$

$$\widehat{EBF} = 180^\circ - (\widehat{E} + \widehat{F}) \Rightarrow \widehat{EBF} \text{ (همواره ثابت)}$$

ثابت                      ثابت

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. ابتدا شکل رسم کرده، به شرح زیر داریم: ۱۳۹

$$\begin{cases} CD = 9 \\ CD = 3x \end{cases} \Rightarrow x = 3 \Rightarrow \begin{cases} CM = 3 \\ MD = 6 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \underbrace{AM \times MB = CM \times MD}_{\text{قضیه رابطه طولی}} \Rightarrow AM \times MB = 18$$

$$\Rightarrow \begin{cases} AM \times MB = 18 \\ AB = 11 \end{cases} \Rightarrow t(11-t) = 18 \Rightarrow 11t - t^2 = 18$$

$$\Rightarrow t^2 - 11t + 18 = 0 \Rightarrow (t-9)(t-2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} t = 2 \\ t = 9 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} AM = 2 \\ MB = 9 \end{cases} \text{ یا } \begin{cases} AM = 9 \\ MB = 2 \end{cases}$$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. ۱۴۰

$$\widehat{ANB} = 2 \times 70^\circ = 140^\circ, \widehat{AC} + \widehat{ANB} = 180^\circ$$

$$\widehat{AC} = 180^\circ - 140^\circ = 40^\circ$$

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. مطابق شکل داریم: ۱۴۱

$$AT^2 = AB \times AD \Rightarrow 36 = 4(x+5) \Rightarrow x = 4 \Rightarrow CD = 4$$

$$CE \times CF = CB \times CD \Rightarrow (R-2)(R+2) = 1 \times 4$$

$$\Rightarrow R^2 - 4 = 4 \Rightarrow R = 2\sqrt{2}$$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. ۱۴۲

$$MAC \sim MCB$$

$$\frac{MC}{MB} = \frac{AC}{BC} = \frac{MA}{MC}$$

$$\begin{cases} \frac{2}{6} = \frac{4}{x} \Rightarrow MB = 12 \\ MC^2 = MA \times MB \end{cases} \Rightarrow 12 \times x = 64 \Rightarrow x = \frac{64}{12} = \frac{16}{3}$$

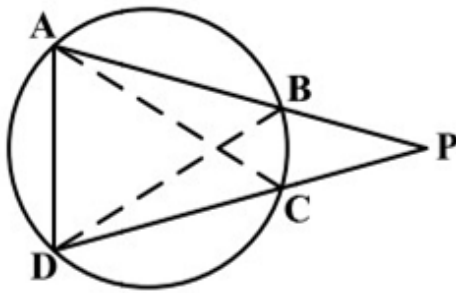


۱۴۳

گزینه ۱ پاسخ صحیح است.  
از ۴ رأس چهارضلعی یک دایره می‌گذرد بنابر روابط طولی در دایره داریم.  
 $7(7 + 25) = 14(14 + x) \Rightarrow x = 2$

۱۴۴

گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

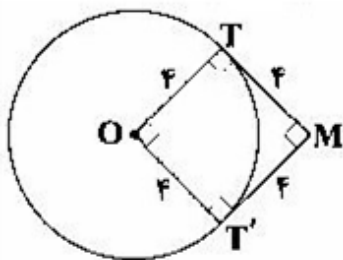


$$\begin{cases} \widehat{AD} - \widehat{BC} = 50 \\ \widehat{AD} + \widehat{BC} = 150 \end{cases} \Rightarrow \widehat{AD} = 100 \Rightarrow \widehat{DBA} = 50$$

در نتیجه  $\widehat{DBP} = 130^\circ$

۱۴۵

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. می‌دانیم اگر از یک نقطه خارج دایره مانند M بر دایره دو مماس عمود بر هم رسم کنیم، آن‌گاه چهارضلعی حاصل مربع است.



$$S_{\text{قطاع}} = \frac{90^\circ}{360^\circ} \times \pi r^2 = \frac{1}{4} \pi (4)^2 = 4\pi$$

$$S_{\text{مربع}} = 4^2 = 16$$

$$S_{\text{هاشور}} = \text{مساحت مربع} - \text{مساحت قطاع} = 16 - 4\pi$$

۱۴۶

گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

$$(\widehat{A} = 60^\circ, c = 5, b = 10) \Rightarrow a^2 = 25 + 100 - 2(5 \times 10) \times \frac{1}{2} \Rightarrow a = 5\sqrt{3}$$

$$S = \frac{25\sqrt{3}}{2} \text{ و } 2p = 15 + 5\sqrt{3} \text{ پس } \widehat{C} = 90^\circ \text{ بنا به قضیه فیثاغورث زاویه}$$

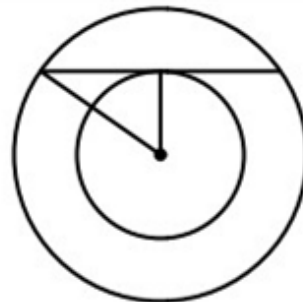
$$\text{در نتیجه } R = 5 \text{ و } r = \frac{S}{p} = \frac{25\sqrt{3}}{15 + 5\sqrt{3}} = \frac{5}{1 + \sqrt{3}} = \frac{5}{2}(\sqrt{3} - 1)$$

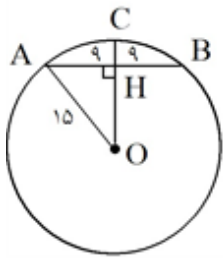
$$\text{مساحت مطلوب} = \frac{25\sqrt{3}}{2} \pi - \frac{25}{4} (4 - 2\sqrt{3}) \pi = \frac{25\sqrt{3}}{2} \pi$$

۱۴۷

گزینه ۲ پاسخ صحیح است.  
در مثلث قائم‌الزاویه داریم.

$$\left(\frac{x}{2}\right)^2 = 7^2 - 3^2 = 40 \Rightarrow x = 4\sqrt{10}$$





$$OH = \sqrt{15^2 - 9^2} = 12 \Rightarrow HC = 15 - 12 = 3 \Rightarrow \frac{HC}{OH} = \frac{1}{4}$$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. از هر سه نقطه‌ی غیرواقع بر یک خط راست، دایره‌ای می‌گذرد. معادله‌ی این دایره را به صورت  $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$  در نظر می‌گیریم و مختصات نقاط A، B و C را در آن جایگذاری می‌کنیم:

$$\begin{cases} 16 + 4a + c = 0 \\ 4 + 2b + c = 0 \\ 16 + 4 - 4a - 2b + c = 0 \end{cases} \begin{array}{l} \xrightarrow{-} 12 + 4a - 2b = 0 \\ \xrightarrow{-} 28 - 6b = 0 \\ \xrightarrow{-} -16 + 4a + 2b = 0 \end{array}$$

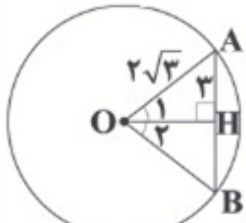
$$\Rightarrow b = \frac{14}{3}, 4a = 2b - 12 \Rightarrow a = \frac{b}{2} - 3 = \frac{7}{3} - 3 = -\frac{2}{3}$$

$$c = -16 - 4a = -16 - 4\left(-\frac{2}{3}\right) = -16 + \frac{8}{3} = -\frac{40}{3}$$

$$r = \frac{1}{2} \sqrt{a^2 + b^2 - 4c} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{4}{9} + \frac{196}{9} + \frac{160}{3}} = \frac{1}{2 \times 3} \sqrt{4 + 196 + 480} = \frac{1}{6} \sqrt{680}$$

$$\Rightarrow r = \frac{2}{6} \sqrt{170} = \frac{1}{3} \sqrt{170}$$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. در مثلث OAH رابطه‌ی فیثاغورس را می‌نویسیم: (۱۵۰)

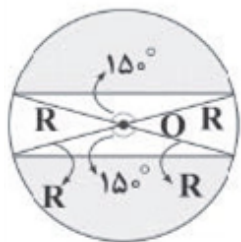


$$\begin{aligned} OH^2 + HA^2 &= OA^2 \Rightarrow OH^2 = (2\sqrt{3})^2 - 3^2 \\ &= 12 - 9 = 3 \Rightarrow OH = \sqrt{3} \end{aligned}$$

از طرفی می‌دانیم در مثلث قائم‌الزاویه، ضلع روبه‌رو زاویه‌ی  $30^\circ$ ، نصف وتر است، پس  $\hat{A} = 30^\circ$  در نتیجه  $\hat{O}_1 = 60^\circ$ .

$$\hat{O}_1 = \hat{Q}_2 = 60^\circ \Rightarrow \widehat{AOB} = 120^\circ \xrightarrow{\text{زاویه مرکزی}} \widehat{AB} = 120^\circ$$

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. (۱۵۱)



$$S_{\text{دو قطاع}} = \frac{300^\circ}{360^\circ} \times \pi R^2 = \frac{5}{6} \pi R^2$$

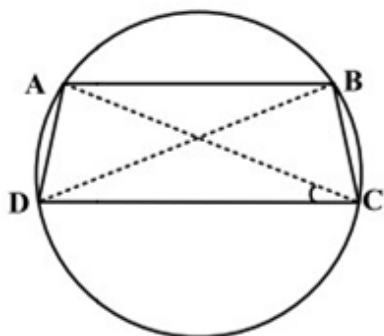
$$S_{\text{دو مثلث}} = 2 \times S_{\text{مثلث}} = 2 \times \frac{1}{2} \times R \times R \times \sin 150^\circ = \frac{R^2}{2}$$

$$\text{مساحت رنگی} = S_{\text{دو قطاع}} - S_{\text{دو مثلث}} = \frac{5}{6} \pi R^2 - \frac{R^2}{2} = \frac{R^2}{2} \left( \frac{5\pi}{3} - 1 \right)$$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. الزاماً دوزنقه متساوی الساقین است. (۱۵۲)

$$\widehat{BC} = \widehat{AD} = \widehat{2C} = 54^\circ$$

$$\frac{1}{2} (\widehat{AD} + \widehat{BC}) = 54^\circ \text{ زاویه بین دو قطر}$$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. چون  $AB = OE$  است، پس مثلث  $AOB$  متساوی الاضلاع است. (۱۵۳)

$$\widehat{AOE} = 180^\circ - 60^\circ - 80^\circ = 40^\circ \Rightarrow \widehat{AE} = 40^\circ \Rightarrow \widehat{ADE} = \frac{\widehat{AE}}{2} = \frac{40^\circ}{2} = 20^\circ$$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. مثلث  $ABC$  در رأس  $A$  قائمه است، زیرا زاویه‌ی محاطی  $A$  روبرو به قطر است. هم‌چنین  $AOB$  متساوی الاضلاع است، پس داریم: (۱۵۴)

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 \Rightarrow 4R^2 = R^2 + AC^2 \Rightarrow AC = R\sqrt{3} \xrightarrow{R=10} AC = 10\sqrt{3}$$

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. اگر شعاع دایره‌ی بزرگ‌تر و کوچک را به ترتیب  $r$  و  $r'$  در نظر بگیریم، آنگاه اندازه‌ی مماس مشترک برابر است با: (۱۵۵)

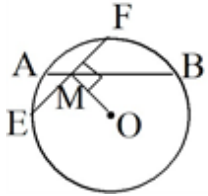
$$TT' = 2\sqrt{rr'} = \sqrt{2r} \Rightarrow 4rr' = 2r^2 \Rightarrow \frac{r}{r'} = 2$$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. چون چهارضلعی محاطی است، پس زوایای مقابل مکمل اند: (۱۵۶)

$$\begin{cases} \hat{A} + \hat{C} = 180^\circ \\ \hat{A} = \hat{C} \end{cases} \Rightarrow \hat{A} = \hat{C} = 90^\circ \Rightarrow \hat{B} - 60^\circ = 90^\circ \Rightarrow \hat{B} = 150^\circ$$

$$\hat{D} + \hat{B} = 180^\circ \xrightarrow{\hat{B} = 150^\circ} \hat{D} = 30^\circ$$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. کوتاه‌ترین وتر گذرنده از M وترى است که بر OM عمود باشد. فرض کنیم EF وتر گذرنده از M و عمود بر OM باشد، در این صورت EF در نقطه‌ی M نصف می‌شود. داریم:



$$AM = x, BM = 3x \xrightarrow{AB = 8} 4x = 8 \Rightarrow x = 2 \Rightarrow \begin{cases} AM = 2 \\ BM = 6 \end{cases}$$

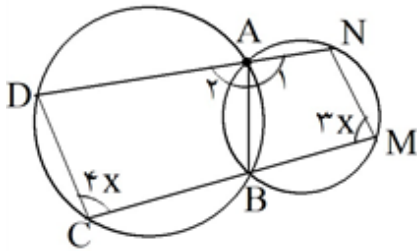
$$MA \times MB = ME \times MF \Rightarrow 2 \times 6 = ME^2 \Rightarrow ME = 2\sqrt{3} \Rightarrow EF = 4\sqrt{3}$$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. با توجه به روابط طولی در دایره داریم. (۱۵۸)

$$10y = 2 \times 5 \Rightarrow y = 2$$

$$x^2 = 6(6 + 10 + y) \Rightarrow x^2 = 6(6 + 10 + 2) = 6 \times 18 \Rightarrow x = 6\sqrt{3}$$

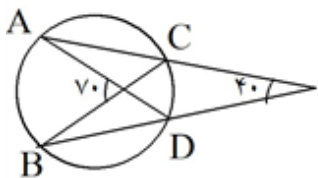
گزینه ۱ پاسخ صحیح است. نقاط تلاقی دو دایره را به هم وصل می‌کنیم در این صورت دو چهارضلعی محاطی ایجاد می‌شود و می‌دانیم در چهارضلعی محاطی دو زاویه‌ی مقابل مکملند. داریم:



$$\begin{cases} \hat{A}_1 + 3x = 180^\circ \\ \hat{A}_2 + 4x = 180^\circ \end{cases} \Rightarrow \underbrace{\hat{A}_1 + \hat{A}_2}_{180^\circ} + 7x = 360^\circ$$

$$\Rightarrow 7x = 180^\circ \Rightarrow x = \frac{180^\circ}{7}$$

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. (۱۶۰)



$$\begin{cases} 40^\circ = \frac{\widehat{AB} - \widehat{CD}}{2} \Rightarrow \widehat{AB} - \widehat{CD} = 80^\circ \\ 70^\circ = \frac{\widehat{AB} + \widehat{CD}}{2} \Rightarrow \widehat{AB} + \widehat{CD} = 140^\circ \end{cases} \Rightarrow 2\widehat{AB} = 220^\circ$$

$$\Rightarrow \widehat{AB} = 110^\circ$$

گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

در مثلث قائم‌الزاویه  $\triangle ABE$ ،  $\widehat{B} = 30^\circ$ . پس:

$$AE = \frac{1}{2} AB = 12$$

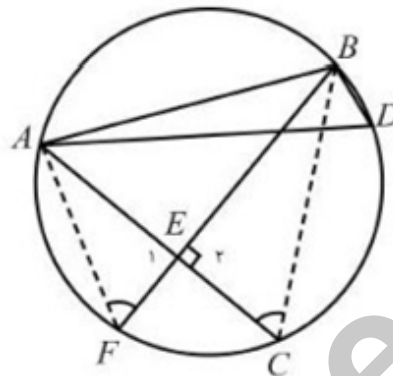
$$EB = \frac{\sqrt{3}}{2} AB = 12\sqrt{3}$$

و

حال وترهای  $BC$  و  $AF$  را رسم می‌کنیم. زاویه‌های  $\widehat{C}$  و  $\widehat{F}$  هر دو روبه‌روی کمان  $\widehat{AB}$  هستند، پس با هم برابرند.

$$\widehat{C} = \widehat{F}, \widehat{E}_1 = \widehat{E}_2 = 90^\circ \Rightarrow \triangle AEF \sim \triangle BEC$$

$$\Rightarrow \frac{AE}{BE} = \frac{EF}{EC} \Rightarrow \frac{12}{12\sqrt{3}} = \frac{EF}{3} \Rightarrow EF = \sqrt{3}$$



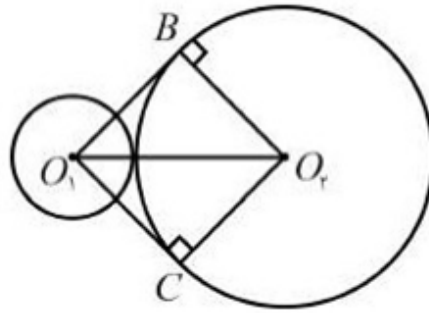
حال وتر  $BD$  را رسم می‌کنیم. زاویه  $\widehat{ABD}$  روبه‌روی قطر دایره است، پس  $\widehat{ABD} = 90^\circ$  و زاویه‌های  $\widehat{AFB}$  و  $\widehat{ADB}$  هر دو روبه‌روی کمان  $AB$  هستند. پس:

$$\widehat{ADB} = \widehat{AFB}, \widehat{ABD} = \widehat{E}_1 = 90^\circ \Rightarrow \triangle ABD \sim \triangle AEF$$

$$\Rightarrow \frac{AB}{AE} = \frac{BD}{EF} \Rightarrow \frac{24}{12} = \frac{BD}{\sqrt{3}} \Rightarrow BD = 2\sqrt{3}$$

۱۶۲

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. قطر دایره‌هایی که درون حلقه رسم می‌کنیم ۸ است، یعنی شعاع‌شان برابر ۴ است. از مرکز دایره کوچک‌تر، دو مماس بر یکی از دایره‌های وسط حلقه رسم می‌کنیم. ادعا می‌کنیم زاویه بین این دو مماس از  $90^\circ$  بیشتر و از  $120^\circ$  کمتر است.



اثبات ادعا: اگر  $O_1$  و  $O_2$  مرکزهای دایره کوچک و دایره بین حلقه باشند و نقطه‌های  $B$  و  $C$  محل تماس باشند، می‌دانیم  $O_1 B \perp O_2 B$ ،  $O_1 O_2 = 5$  و  $O_2 B = 4$ . بنابراین بنابر قضیه فیثاغورس،  $O_1 B = 3$ . داریم:

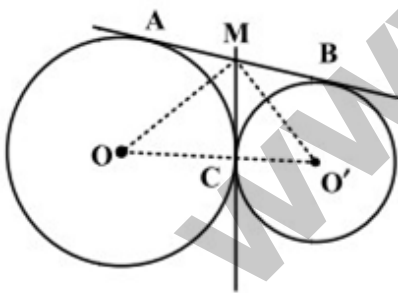
$$O_2 B > O_1 B \Rightarrow \widehat{BO_1 O_2} > \widehat{BO_2 O_1} \Rightarrow \widehat{BO_1 O_2} > 45^\circ \Rightarrow \widehat{BO_1 C} = 2\widehat{BO_1 O_2} > 90^\circ$$

$$O_1 B > \frac{O_1 O_2}{2} \Rightarrow \widehat{O_1 O_2 B} > 30^\circ \Rightarrow \widehat{BO_1 O_2} < 60^\circ \Rightarrow \widehat{BO_1 C} = 2\widehat{BO_1 O_2} < 120^\circ$$

بنابراین  $\widehat{BO_1 C} > 90^\circ$  پس اگر چهار دایره درون حلقه بین دو دایره رسم کنیم، حتماً هم‌پوشانی خواهند داشت و  $\widehat{BO_1 C} < 120^\circ$  پس می‌توانیم سه دایره درون حلقه بین دو دایره رسم کنیم به طوری که هم‌پوشانی نداشته باشند.

۱۶۳

گزینه ۴ پاسخ صحیح است.



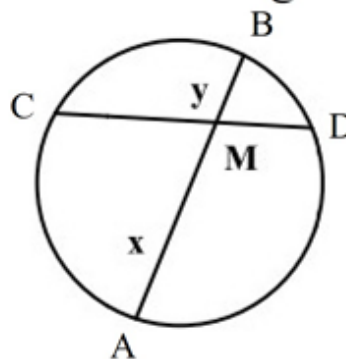
با توجه به شکل  $MA = MB = MC$  مثلث  $MOO'$  قائم‌الزاویه است  $MC^2 = CO \times CO' = RR'$  پس

$$AB = 2\sqrt{RR'} = 2 \times 6 = 12$$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. ۱۶۴

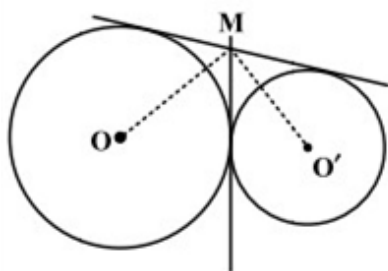
$$MC = \frac{2}{3}(18) = 12, MD = \frac{1}{3}(18) = 6$$

$$\begin{cases} x + y = 22 \\ xy = 72 \end{cases} \Rightarrow (x - y)^2 = (x + y)^2 - 4xy = 196$$



پس  $x - y = 14$  با فرض  $x + y = 22$  خواهیم داشت:  $\frac{y}{x} = \frac{4}{18} = \frac{2}{9}$

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. ۱۶۵

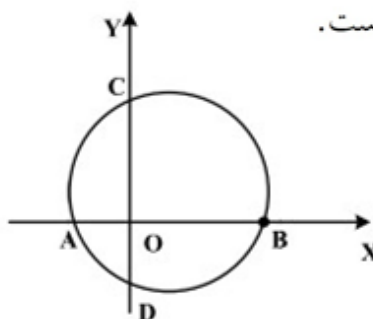


$\widehat{OMO'} = 90^\circ$   $MO', MO$  نیمسازهای زاویه M هستند دو نیمساز بر هم عمودند پس زاویه

$$\overline{OA} \cdot \overline{OB} = \overline{OC} \cdot \overline{OD}$$

$$(-3)(7) = 5(\overline{OD}) \Rightarrow \overline{OD} = -4/5$$

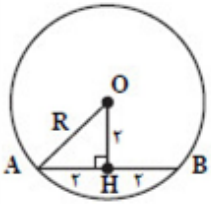
گزینه ۴ پاسخ صحیح است. ۱۶۶



۱۶۷

گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

نکته: خطی که از مرکز دایره بگذرد و بر وتر دایره عمود باشد، آن وتر و کمان نظیر آن وتر را نصف می‌کند.  
با توجه به نکته‌ی بالا، در شکل زیر داریم:



$$AH = BH = \frac{AB}{2} = 2$$

اکنون با استفاده از قضیه‌ی فیثاغورس در مثلث قائم‌الزاویه‌ی OAH داریم:

$$OA^2 = OH^2 + AH^2 = 2 + 2 \Rightarrow OA = \sqrt{4} = 2\sqrt{2}$$

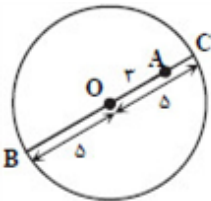
۱۶۸

گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

نکته: بلندترین وتر گذرنده از یک نقطه درون دایره قطر گذرنده از آن نقطه است.

نقطه‌ی A به فاصله‌ی ۳ از مرکز دایره است، پس درون دایره قرار دارد.

بلندترین وتر گذرنده از A، قطر BC است که طول آن برابر است با:  $2 \times 5 = 10$



۱۶۹

گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

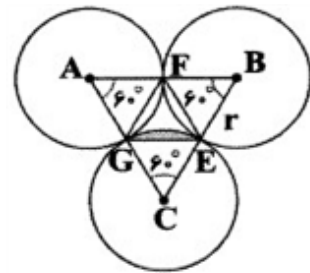
برای به دست آوردن مساحت ناحیه‌ی موردنظر، مساحت قطعه‌ی GE را به دست می‌آوریم و در ۳ ضرب می‌کنیم:

$$AB = BC = CA = 2r$$

در نتیجه مثلث ABC، متساوی‌الاضلاع است و داریم:

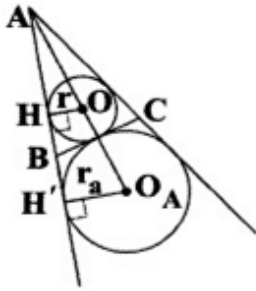
$$S_{GE} = S_{\text{قطاع CGE}} - S_{\Delta CGE} = \frac{1}{6}\pi r^2 - \frac{1}{2}r^2 \times \sin 60^\circ$$

$$= 6\pi - 18 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 6\pi - 9\sqrt{3} \Rightarrow S = 3 \times S_{GE} = 18\pi - 27\sqrt{3}$$





گزینه ۳ پاسخ صحیح است. چون  $OH$  و  $OH'$  هر دو موازی هستند، طبق تعمیم قضیه‌ی تالس در  $\triangle AH'O$ :



$$\frac{AO}{AO_A} = \frac{OH}{O_A H'} = \frac{r}{r_a}$$

به همین ترتیب:

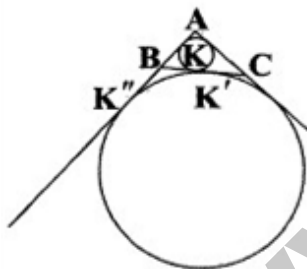
$$\begin{cases} \frac{BO}{BO_B} = \frac{r}{r_b} \\ \frac{CO}{CO_C} = \frac{r}{r_c} \end{cases} \Rightarrow \frac{AO}{AO_A} + \frac{BO}{BO_B} + \frac{CO}{CO_C} = \frac{r}{r_a} + \frac{r}{r_b} + \frac{r}{r_c} \quad (i)$$

می‌دانیم:

$$\frac{1}{r_a} + \frac{1}{r_b} + \frac{1}{r_c} = \frac{1}{r} \xrightarrow{\text{طرفین را در } r \text{ ضرب می‌کنیم}} \frac{r}{r_a} + \frac{r}{r_b} + \frac{r}{r_c} = 1 \quad (ii)$$

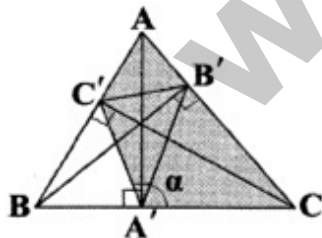
$$(i), (ii) \Rightarrow \frac{AO}{AO_A} + \frac{BO}{BO_B} + \frac{CO}{CO_C} = 1$$

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. می‌دانیم که  $BK = P - b$  و  $BK' = BK'' = P - c$  و همچنین



$$\begin{aligned} KK' &= BK' - BK = (P - c) - (P - b) \\ &= b - c = 2 - 3 = 1 \end{aligned}$$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است.



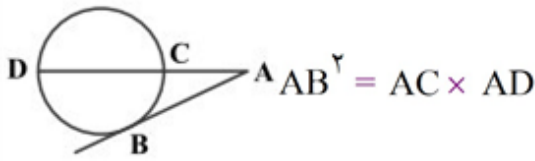
$$\angle \hat{A}'C = \angle \hat{A}C' = 90^\circ$$

در نتیجه نقاط  $A'$  و  $C'$  روی دایره‌ای به قطر  $AC$  هستند (کمان حاوی  $90^\circ$  روی  $AC$ )، پس  $ACA'C'$  یک چهارضلعی محاطی است، در نتیجه:

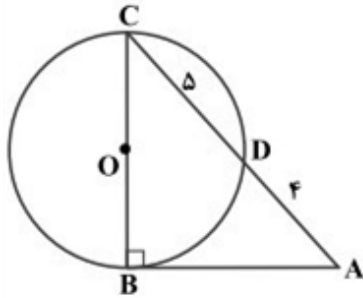
$$\Rightarrow \hat{A} + \alpha = 180^\circ \xrightarrow{\hat{A} = 70^\circ} \alpha = 180^\circ - 70^\circ = 110^\circ$$

۱۷۳

گزینه ۴ پاسخ صحیح است.  
 نکته ۱: شعاع دایره در نقطه‌ی تماس بر خط مماس عمود است.  
 نکته ۲: در شکل مقابل داریم:



با استفاده از نکته ۲ در شکل مقابل داریم:



$$AB^2 = AD \times AC = 4 \times 9 = 36 \Rightarrow AB = 6$$

$$BC \perp AB \Rightarrow \hat{B} = 90^\circ$$

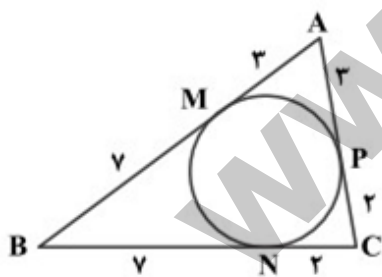
$$BC^2 = AC^2 - AB^2 = 81 - 36 = 45 \Rightarrow BC = 3\sqrt{5} \Rightarrow R = \frac{BC}{2} = \frac{3}{2}\sqrt{5}$$

با استفاده از نکته ۱ داریم:

اکنون با استفاده از قضیه‌ی فیثاغورس داریم:

۱۷۴

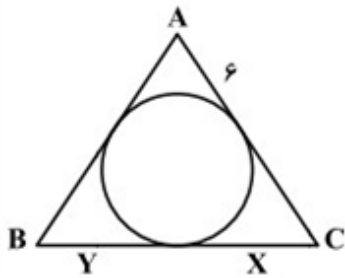
گزینه ۲ پاسخ صحیح است.  
 نکته: مماس‌های رسم‌شده از یک نقطه بر دایره با هم برابرند.  
 با استفاده از نکته در شکل مقابل داریم:



$$\begin{cases} AP = AM = x & (1) \\ BN = BM = y & \\ BC = 9 & \end{cases} \rightarrow CN = z \Rightarrow CP = CN = z \quad (2)$$

$$AC = AP + PC = x + z = 5$$

از (۱) و (۲) داریم:

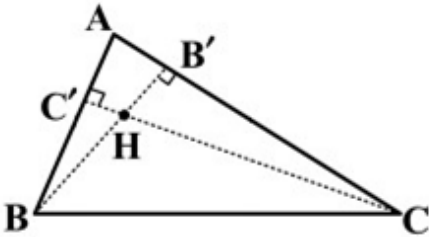


گزینه ۲ پاسخ صحیح است. (۱۷۵)

با توجه به شکل داریم:

$$x = 9 - 6 = 3 \text{ و } y = 13 - 6 = 7$$

$$\text{پس } BC = x + y = 10$$



گزینه ۲ پاسخ صحیح است. (۱۷۶)

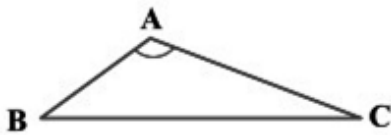
با توجه به شکل چهارضلعی  $AB'HC'$  محاطی است.

$$CB' \cdot CA = CH \cdot CC'$$

$$HC' = 0.65 \text{ در نتیجه } CC' = 6/25 \text{ پس } 5 \times 7 = 5/6 \times CC'$$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. (۱۷۷)

نکته: مساحت مثلث دلخواه  $ABC$  برابر است با:



$$S = \frac{1}{2} AB \times AC \times \sin \hat{A}$$

نکته: در دایره‌ای به شعاع  $R$ ، مساحت قطاع با زاویه مرکزی  $\theta$  درجه، برابر  $S = \frac{\pi}{360} \times R^2 \times \theta$  است.

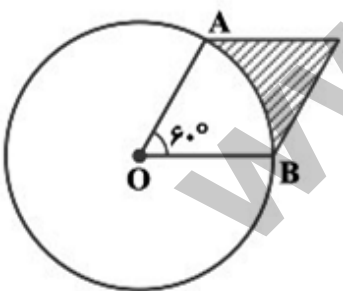
ابتدا مساحت لوزی را به دست می‌آوریم.

$$S_1 = 2S_{\triangle OAB} = 2 \times \left( \frac{1}{2} \times OA \times OB \times \sin 60^\circ \right) = \frac{\sqrt{3}}{2} R^2 \approx 0.85 R^2$$

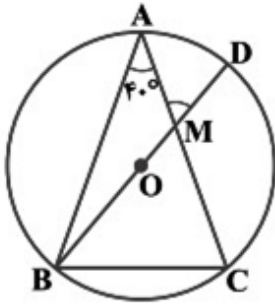
اکنون مساحت قطاع را به دست می‌آوریم:

$$S_2 = \frac{\pi}{360} \times R^2 \times 60^\circ = \frac{\pi}{6} R^2 \approx 0.52 R^2$$

بنابراین مساحت قسمت هاشورخورده تقریباً برابر است با:



$$S = S_1 - S_2 \approx 0.85 R^2 - 0.52 R^2 = 0.33 R^2$$



گزینه ۳ پاسخ صحیح است. (۱۷۸)

نکته: در یک دایره وترهای برابر، کمانهای برابر دارند.

نکته: اندازهی هر زاویهی محاطی، نصف اندازهی کمان روبه‌روی آن است.

طبق فرض داریم:

$$AB = AC \Rightarrow \widehat{AB} = \widehat{AC}$$

$$\widehat{A} = \frac{\widehat{BC}}{2} \leftarrow \widehat{A} = 40^\circ \quad \widehat{BC} = 80^\circ$$

$$\widehat{AB} = \widehat{AC} = \frac{360^\circ - 80^\circ}{2} = \frac{280^\circ}{2} = 140^\circ$$

چون BD قطر است، داریم:

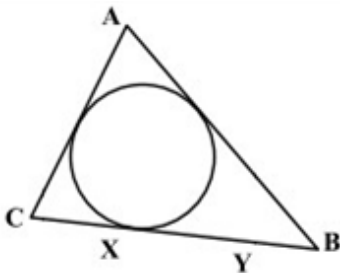
$$\widehat{BAD} = 180^\circ \Rightarrow \widehat{BA} + \widehat{AD} = 180^\circ \Rightarrow 140^\circ + \widehat{AD} = 180^\circ \Rightarrow \widehat{AD} = 40^\circ$$

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. (۱۷۹)



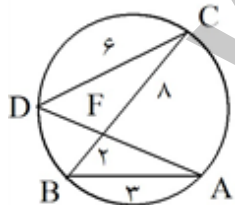
حداکثر فاصله‌ی دو نقطه روی محیط دایره، برابر قطر دایره است. طول قطر دایره دو برابر شعاع است. پس حداکثر فاصله‌ی دو نقطه که چنین دایره‌ای از آن‌ها عبور کند، برابر ۶ است. پس دایره‌ای به شعاع ۳ وجود ندارد که دو نقطه به فاصله‌ی ۷ روی آن باشد.

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. (۱۸۰)

با توجه به شکل داریم:  $x = 9 - 6 = 3$ ,  $y = 13 - 6 = 7$ پس  $BC = x + y = 10$ 

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. (۱۸۱)

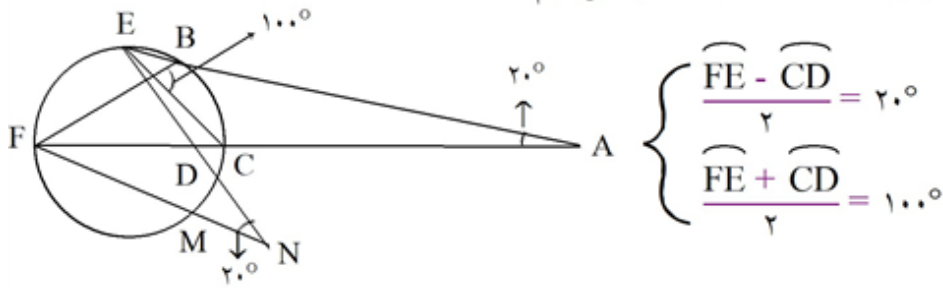
$$\begin{cases} \widehat{A} = \widehat{C} = \frac{\widehat{BD}}{2} \\ \widehat{B} = \widehat{D} = \frac{\widehat{AC}}{2} \end{cases} \Rightarrow \triangle AFC \sim \triangle FCD \Rightarrow \frac{CD}{AB} = \frac{FC}{FA} = \frac{FD}{FB}$$



$$\Rightarrow \frac{6}{3} = \frac{8}{FA} = \frac{FD}{2} \Rightarrow FA = FD = 4$$

$$AD = FA + FD = 4 + 4 = 8$$

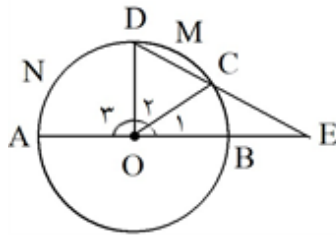
گزینه ۳ پاسخ صحیح است. ابتدا اندازه‌ی  $\widehat{FE}$  و  $\widehat{CB}$  را محاسبه می‌کنیم.



$$\Rightarrow \widehat{FE} = 120^\circ \Rightarrow \widehat{CD} = 80^\circ$$

$$\widehat{N} = 20^\circ \Rightarrow \frac{\widehat{FE} - \widehat{MD}}{2} = 20^\circ \Rightarrow \widehat{FE} - \widehat{MD} = 40^\circ \Rightarrow 120^\circ - \widehat{MD} = 40^\circ \Rightarrow \widehat{MD} = 80^\circ$$

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. از O به C و D وصل می‌کنیم.  $\widehat{O}_2$  زاویه‌ی مرکزی است، پس  $\widehat{O}_2 = 30^\circ$ . از طرفی  $OC = OD = r$  پس  $\triangle OCD$  متساوی‌الساقین است و  $\widehat{C} = \widehat{D} = \frac{180^\circ - 30^\circ}{2} = 75^\circ$  خواهد بود.  $\widehat{C}$  برای مثلث OCE زاویه‌ی خارجی است، پس  $75^\circ = \widehat{O}_1 + 30^\circ$  در نتیجه  $\widehat{O}_1 = 45^\circ$ .



$$\widehat{O}_3 = 180^\circ - (30^\circ + 45^\circ) = 105^\circ$$

$$\Rightarrow \widehat{AND} = \widehat{O}_3 = 105^\circ$$

$$AC^2 = 5^2 + 12^2 = 169 \Rightarrow AC = AB = 13$$

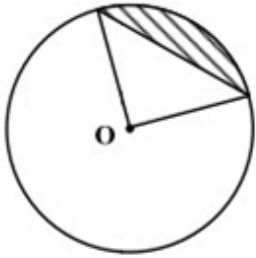
$$S_{\triangle ABC} = \frac{10 \times 12}{2} = 60$$

$$R = \frac{2S_{\triangle ABC}}{a+b+c} = \frac{2 \times 60}{10+13+13} = \frac{120}{36} = \frac{10}{3}$$

$$\text{مساحت دایره} = \pi r^2 = \pi \left(\frac{100}{9}\right)$$

$$\text{مساحت ناحیه هاشور خورده} = 60 - \frac{100\pi}{9} = \frac{20}{9} (27 - 5\pi)$$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. با توجه به شکل در مثلث قائم‌الزاویه  $OO'B$  داریم  $OO' = OB$  پس  $\widehat{B} = 30^\circ$  و  $\widehat{O} = 60^\circ$  کمان روبه‌رو در دایره کوچکتر  $120^\circ$  در نتیجه  $\widehat{OA} = 180^\circ - 120^\circ = 60^\circ$



گزینه ۱ پاسخ صحیح است. مثلث OAB متساوی الاضلاع به ضلع ۶ واحد است.

$$S = \frac{1}{6} (\text{مساحت دایره}) - \text{مساحت مثلث} = \frac{\pi \times 36}{6} - \frac{36\sqrt{3}}{4}$$

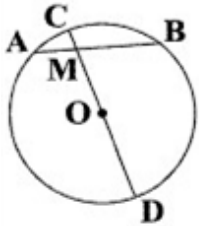
$$S = 6\pi - 9\sqrt{3}$$

پس:

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. طبق روابط طولی در دایره می‌دانیم:

$$AM \times MB = CM \times MD$$

$$\begin{matrix} \downarrow & \downarrow \\ ((r - OM) & (r + OM)) \end{matrix} (*)$$



$$\Rightarrow 2 \times 4/5 = r^2 - OM^2 \Rightarrow 25 - OM^2 = 9$$

$$\Rightarrow OM^2 = 16 \Rightarrow OM = 4 \text{ cm}$$

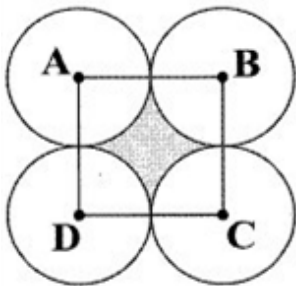
$$\xrightarrow{(*)} \begin{cases} CM = 1 \text{ cm} \\ DM = 9 \text{ cm} \end{cases} \Rightarrow \frac{CM}{DM} = \frac{1}{9}$$

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. مساحت ناحیه‌ی رنگی برابر است با مساحت مربع ABCD منهای مجموع مساحت ۴

$$S = AB^2 - 4 \times \frac{1}{4} \pi r^2$$

ربع دایره، به عبارت دیگر:

از آنجایی که  $AB = 2r$ ، پس داریم:



$$\left. \begin{aligned} S &= 4r^2 - \pi r^2 = (4 - \pi)r^2 \\ r &= 4 \\ \Rightarrow S &= 16(4 - \pi) = 64 - 16\pi \end{aligned} \right\}$$

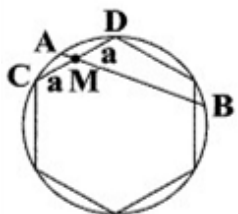
گزینه ۴ پاسخ صحیح است. چون M وسط CD است در نتیجه:

$$CM = MD = a$$

$$AM \times MB = CM \times MD = a^2$$

$$\left. \begin{aligned} AM &= 2 \\ AB &= 10 \end{aligned} \right\} \Rightarrow BM = AB - AM = 10 - 2 = 8 \text{ cm}$$

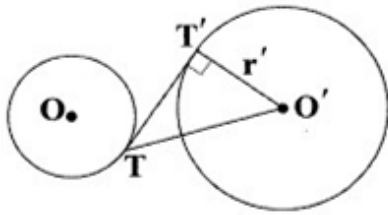
$$\Rightarrow AM \times MB = 2 \times 8 = 16 = a^2 \Rightarrow a^2 = 16 \Rightarrow a = 4$$



$$\Rightarrow \text{محیط شش ضلعی منتظم} = 6 \times 2a = 6 \times 2 \times 4 = 48$$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. می‌دانیم: ۱۹۰

$$TT' = \sqrt{d^2 - (r + r')^2} = \sqrt{100 - 64} = \sqrt{36} = 6 \text{ cm}$$

طبق رابطه‌ی فیثاغورس در  $\triangle T'TO'$  داریم:

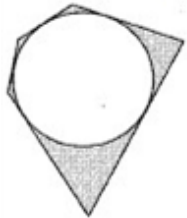
$$\Rightarrow r'^2 + TT'^2 = OT'^2 = 25 + 36 = 61 \Rightarrow OT' = \sqrt{61}$$

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. ۱۹۱

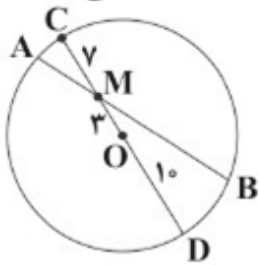
نکته: مساحت یک ضلعی محیطی با محیط  $2P$  و شعاع دایره‌ی محاطی  $r$  برابر با  $rP$  است، پس داریم:

$$\left. \begin{array}{l} r = 2 \\ 2P = 16 \Rightarrow P = 8 \end{array} \right\} \Rightarrow S = rP = 2 \times 8 = 16$$

حال برای به دست آوردن مساحت ناحیه‌ی رنگی، مساحت دایره را از مساحت به دست آمده کم می‌کنیم:



$$\Rightarrow \text{مساحت ناحیه ی رنگی} = \overbrace{r \times P}^S - \pi r^2 = 16 - 4\pi$$

گزینه ۱ پاسخ صحیح است.  $OM$  را از دو طرف امتداد داده تا مطابق شکل محیط دایره را در نقاط  $C$  و  $D$  قطع کند. ۱۹۲

$$CM \times MD = AM \times MB \Rightarrow \underbrace{(10 - r)}_{r - OM} \underbrace{(10 + r)}_{r + OM} = AM \times MB$$

می‌دانیم:

$$\Rightarrow AM \times MB = 7 \times 13 = 91$$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. ۱۹۳

$$\widehat{ACB} = \frac{\widehat{AB}}{2} = 50^\circ \Rightarrow \widehat{AB} = 100^\circ \Rightarrow \widehat{AC} + \widehat{CB} = 360^\circ - 100^\circ = 260^\circ$$

$$\widehat{M} = \frac{\widehat{AC} - \widehat{CB}}{2} = 40^\circ \Rightarrow \widehat{AC} - \widehat{CB} = 80^\circ$$

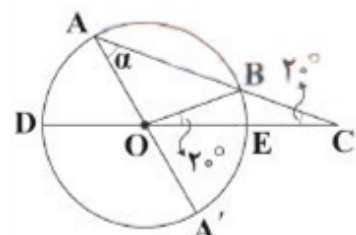
می‌دانیم:

$$\Rightarrow + \begin{cases} \widehat{AC} - \widehat{CB} = 80^\circ \\ \widehat{AC} + \widehat{CB} = 260^\circ \end{cases}$$

$$2\widehat{AC} = 340^\circ \Rightarrow \widehat{AC} = 170^\circ$$

$$\widehat{C} = \frac{\widehat{AD} - \widehat{BE}}{2} \quad (*)$$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. با توجه به شکل داریم که:



$$OB = BC = 2 \text{ cm} \Rightarrow \widehat{BOE} = 20^\circ \Rightarrow \widehat{BE} = 20^\circ$$

$$\xrightarrow{(*)} 20^\circ = \frac{\widehat{AD} - 20^\circ}{2} \Rightarrow \widehat{AD} = 60^\circ$$

$$\widehat{AD} = \widehat{A'E} = 60^\circ$$

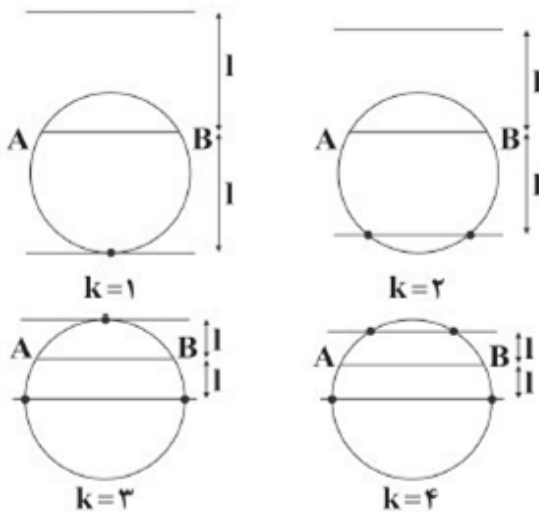
O مرکز دایره است، در نتیجه:

$$\alpha = \frac{\widehat{BE} + \widehat{EA'}}{2} = \frac{60^\circ + 20^\circ}{2} = 40^\circ$$

www.akoedu.ir



گزینه ۴ پاسخ صحیح است.  $k$  می تواند، ۱، ۲، ۳ یا ۴ باشد. ۱۹۵



پس  $k$  چهار مقدار طبیعی می تواند اختیار کند.

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. ۱۹۶

$$AB \parallel CD \Rightarrow \widehat{AD} = \widehat{BC}$$

$$\widehat{B} = \frac{\widehat{ADC}}{2} = \frac{\widehat{AD} + \widehat{DC}}{2} = \frac{\widehat{AD}}{2} + \frac{\widehat{DC}}{2} \xrightarrow{\widehat{AD} = \widehat{BC}} \frac{\widehat{BC}}{2} + \frac{\widehat{DC}}{2} \Rightarrow \widehat{B} = \widehat{A}_1 + \frac{\widehat{DC}}{2}$$

$$\Rightarrow \widehat{B} - \widehat{A}_1 = \frac{\widehat{DC}}{2} \Rightarrow 60^\circ = \frac{\widehat{DC}}{2} \Rightarrow \widehat{DC} = 60^\circ \times 2 = 120^\circ$$

از نقطه  $O$  مرکز دایره، عمود  $OH$  را بر ضلع  $DC$  رسم می کنیم. می دانیم  $OH$  عمود منصف وتر  $DC$  است و کمان  $DC$  را نصف می کند. بنابراین داریم:

$$\widehat{O}_1 = 60^\circ \Rightarrow HC = \frac{R\sqrt{3}}{2} \xrightarrow{CH = \frac{DC}{2} = \sqrt{3}}$$

$$\sqrt{3} = \frac{R\sqrt{3}}{2} \Rightarrow R = 2$$

$$\widehat{DC} = \frac{\pi R \alpha}{180^\circ} = \frac{\pi \times 2 \times 120^\circ}{180^\circ} = \frac{4\pi}{3}$$

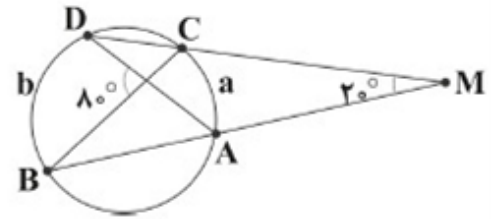
با فرض  $\widehat{DOC} = \alpha$ :

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. با فرض  $\widehat{AC} = a$  و  $\widehat{BD} = b$  داریم:

$$\begin{cases} 80^\circ = \frac{a+b}{2} \\ 20^\circ = \frac{b-a}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a+b = 160^\circ \\ b-a = 40^\circ \end{cases} \Rightarrow b = 100^\circ, a = 60^\circ$$

$$\widehat{CBA} = \frac{\widehat{AC}}{2} = \frac{a}{2} = 30^\circ \quad (\text{مخاطی})$$

$$\Rightarrow \widehat{BMC} = 180^\circ - 20^\circ - 30^\circ = 130^\circ$$



$$\widehat{AD} = \widehat{CD}$$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. در ذوزنقه  $ABCD$ ،  $DC \parallel AB$ ، پس:

همین طور می‌دانیم  $\widehat{E}_2 = \frac{\widehat{CD} + \widehat{AD}}{2}$ ، با توجه به این که زاویه‌ی بین دو قطر برابر  $120^\circ$  است، پس  $\widehat{E}_2 = 60^\circ$  و

$$60^\circ = \frac{\widehat{CD} + \widehat{AD}}{2} \xrightarrow{\widehat{AD} = \widehat{CB}} \widehat{AD} = \widehat{CB} = 60^\circ \quad \text{داریم:}$$

$$\widehat{C} = \frac{\widehat{BAD}}{2} = \frac{\widehat{BA} + \widehat{AD}}{2} \Rightarrow \frac{\widehat{BA} + 60^\circ}{2} = 105^\circ \Rightarrow \widehat{BA} = 210^\circ - 60^\circ = 150^\circ$$

$$\widehat{AD} + \widehat{AB} + \widehat{BC} + \widehat{CD} = 360^\circ \Rightarrow \widehat{CD} = 360^\circ - 60^\circ - 60^\circ - 150^\circ = 90^\circ$$

با توجه به این که اضلاع  $D\widehat{M}C$  بر دایره مماس‌اند، داریم:

$$\widehat{DMC} = \frac{\widehat{DAC} - \widehat{DC}}{2} = \frac{270^\circ - 90^\circ}{2} = \frac{180^\circ}{2} = 90^\circ$$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. با توجه به شکل، داریم:  $CD \parallel AB \Rightarrow \widehat{AC} = \widehat{BD}$

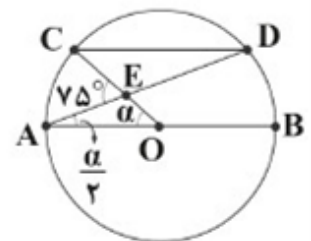
$$\widehat{COA} = \widehat{AC} = \alpha \quad (\text{مرکزی})$$

$$\widehat{DAB} = \frac{\widehat{DB}}{2} = \frac{\widehat{AC}}{2} = \frac{\widehat{COA}}{2} = \frac{\alpha}{2} \quad (\text{مخاطی})$$

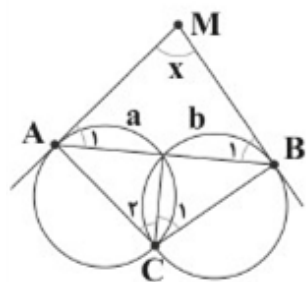
در  $\triangle AEO$ ،  $\widehat{AEC}$  زاویه‌ی خارجی است.

$$\Rightarrow \alpha = 75^\circ \times \frac{2}{3} = 50^\circ$$

$$S_{COA} = \frac{\pi R^2 \alpha}{360^\circ} = \frac{\pi R^2 \times 50^\circ}{360^\circ} = \frac{5}{36} \pi R^2$$

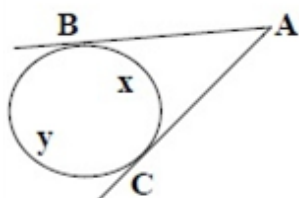


گزینه ۱ پاسخ صحیح است.  $\hat{A}_1$  و  $\hat{B}_1$  زاویه‌های ظلی و  $\hat{C}_1$  و  $\hat{C}_2$  زاویه‌های محاطی هستند، داریم:



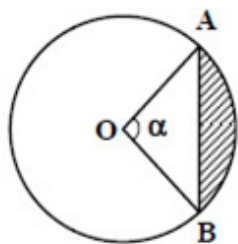
$$\Rightarrow \begin{cases} \hat{B}_1 = \frac{b}{r}, \hat{A}_1 = \frac{a}{r} \\ \hat{C}_1 = \frac{b}{r}, \hat{C}_2 = \frac{a}{r} \end{cases} \Rightarrow \hat{A}_1 + \hat{B}_1 = \hat{C}_1 + \hat{C}_2 = 100^\circ$$

$$\triangle AMB: x + \hat{A}_1 + \hat{B}_1 = 180^\circ \Rightarrow x = 80^\circ$$



گزینه ۲ پاسخ صحیح است.  $\left(\frac{x}{y} = \frac{3}{5}, x + y = 360^\circ\right) \Rightarrow x = 135^\circ, y = 225^\circ$

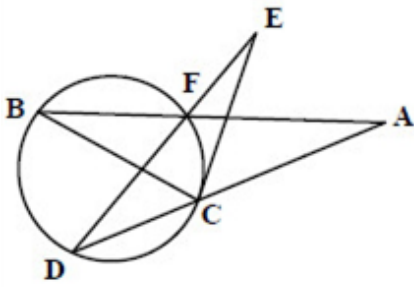
پس:  $\hat{A} = \frac{1}{2}(225 - 135) = 45^\circ$



گزینه ۲ پاسخ صحیح است. مساحت قطاع برابر است با:  $\pi R^2 \cdot \frac{\alpha}{2\pi} = \frac{\alpha R^2}{2}$

مساحت مثلث OAB برابر است با:  $\frac{1}{2} R^2 \sin \alpha = \frac{R^2 \sin \alpha}{2}$

مساحت قسمت رنگ‌شده =  $\frac{R^2}{2}(\alpha - \sin \alpha)$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. ۲۰۳

$$\widehat{FC} = \widehat{2D} = 50^\circ$$

$$\widehat{B} = \frac{\widehat{FC}}{2} = 25^\circ$$

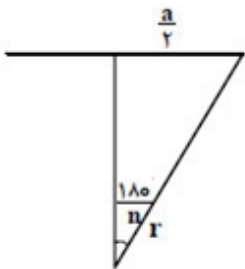
چون مثلث ABC و CDE متساوی الساقین هستند داریم:

$$\widehat{E} = \widehat{A} = 25^\circ$$

$$\widehat{A} = \frac{\widehat{BD} - \widehat{FC}}{2} = 25^\circ \Rightarrow \widehat{CD} = 100^\circ$$

$$\widehat{E} = \frac{\widehat{CD} - \widehat{FC}}{2} = 25^\circ \Rightarrow \widehat{CD} = 100^\circ$$

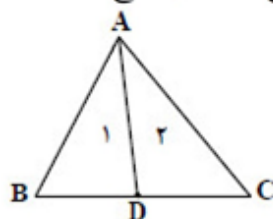
$$\widehat{BF} = 360^\circ - (100^\circ + 100^\circ + 50^\circ) = 110^\circ$$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. ۲۰۴گزینه ۱ پاسخ صحیح است. ۲۰۵

$$\sin\left(\frac{180}{n}\right) = \frac{a}{r} = \frac{a}{2r} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{180}{n} = 30 \Rightarrow n = 6$$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. فرض کنید  $h$  ارتفاع وارد بر ضلع  $BC$  باشد. داریم:



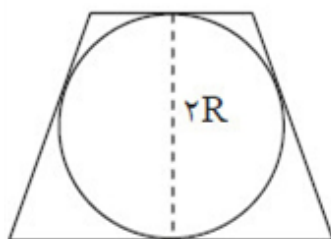
$$r_1 = \frac{S_1}{P_1} = \frac{\frac{1}{2}h \times BD}{AB + AD + BD} = \frac{h \times BD}{AB + AD + BD}$$

$$r_2 = \frac{S_2}{P_2} = \frac{\frac{1}{2}h \times DC}{AC + AD + CD} = \frac{h \times DC}{AC + AD + CD}$$

$$\left. \begin{array}{l} r_1 = r_2 \\ BD = DC \end{array} \right\} \rightarrow AB = AC$$

پس مثلث متساوی الساقین است.

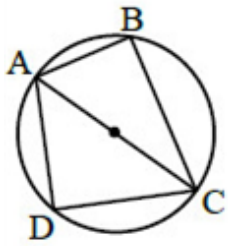
گزینه ۳ پاسخ صحیح است.



$$\text{مجموع دو قاعده} = \frac{\text{محیط}}{2} = \frac{48}{2} = 24$$

$$\text{مساحت} = \frac{1}{2}(24)(2R) = 72$$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. با توجه به فرض سؤال، شکل مقابل را خواهیم داشت:



$$\hat{B} = \frac{180^\circ}{2} = 90^\circ$$

$$\hat{D} = \frac{180^\circ}{2} = 90^\circ$$

$$AB = CD$$

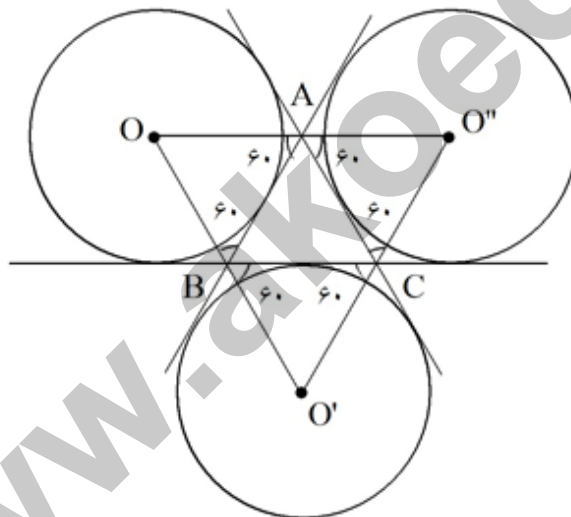
$$AC \text{ مشترک}$$

$$\hat{B} = \hat{D} = 90^\circ$$

$$\left. \begin{array}{l} AB = CD \\ AC \text{ مشترک} \\ \hat{B} = \hat{D} = 90^\circ \end{array} \right\} \Rightarrow \triangle ABC \cong \triangle ADC \Rightarrow BC = AD$$

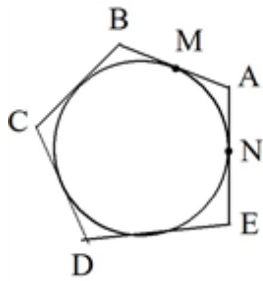
در چهارضلعی ABCD چون اضلاع روبه‌رو برابر هستند پس ABCD متوازی‌الاضلاع است و چون یک زاویه‌ی  $90^\circ$  دارد پس مستطیل است.

گزینه ۲ پاسخ صحیح است.



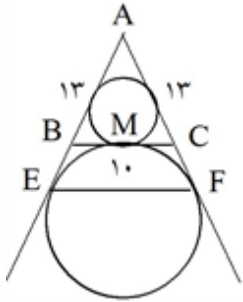
در صورتی که نقاط O و O' و O'' مراکز دایره‌های محاطی خارجی مثلث ABC باشند، آنگاه مثلث‌های AOB و AO''C و BO'C متساوی‌الاضلاع به ضلع ۶ هستند. پس:

$$\text{محیط } OO'O'' = (6 + 6) \times 3 = 36$$



گزینه ۱ پاسخ صحیح است. همان‌گونه که در شکل مشخص است ۵ ضلعی دایره را به ۵ کمان مساوی تقسیم کرده است، در نتیجه اندازه کمان موردنظر برابر  $72^\circ = \frac{360}{5}$  است.

گزینه ۴ پاسخ صحیح است.



$$CM = FC = \frac{BC}{2} = 5$$

$$\frac{BC}{EF} = \frac{AC}{AF} = \frac{13}{18}$$

$$EF = \frac{18}{13} \times 10 = 13/84$$

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. چون مثلث متساوی‌الاضلاع است داریم:

$$r_a = r_b = r_c$$

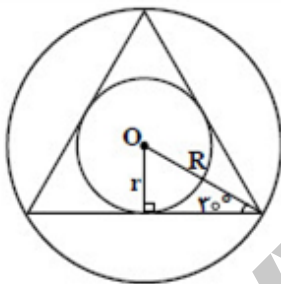
$$\frac{1}{r_a} + \frac{1}{r_b} + \frac{1}{r_c} = \frac{1}{r}$$

$$\frac{3}{r_a} = \frac{1}{r} \Rightarrow r = \frac{r_a}{3}$$

$$r_a = 3 \left( \frac{3}{2} \right) = \frac{9}{2}$$

و بنا به رابطه داریم:

$$2\pi \left( \frac{9}{2} \right) = 9\pi \text{ در نتیجه محیط دایره برابر } 9\pi$$



گزینه ۳ پاسخ صحیح است. در مثلث قائم‌الزاویه ضلع روبه‌رو زاویه‌ی  $30^\circ$ ، نصف وتر است.

$$r = \frac{1}{2}R$$

$$\frac{S_2}{S_1} = \left( \frac{1}{2} \right)^2 = \frac{1}{4}$$

بنابراین:

در نتیجه:

$$\frac{S_2}{S_1} = \frac{1}{4}$$

یا

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. (۲۱۴)



$$OH^2 = 5^2 - 4^2 = 25 - 16 = 9 \Rightarrow OH = 3$$

از طرفی:

بنا به حالت دو زاویه مساوی  $\triangle AOH \sim \triangle ADC$

در نتیجه:

$$\frac{OH}{DC} = \frac{OA}{AC} = \frac{AH}{AD} \Rightarrow \frac{3}{DC} = \frac{5}{8} \Rightarrow DC = \frac{24}{5} = 4\frac{4}{5}$$

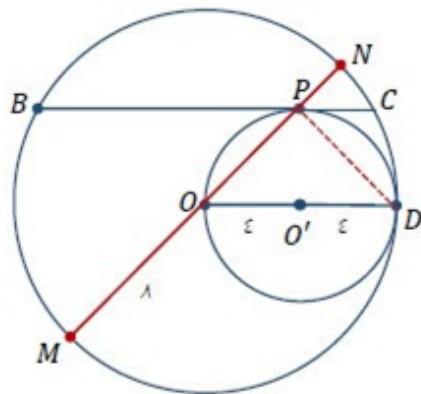
$$BC = 2DC = 2 \times 4\frac{4}{5} = 9\frac{4}{5}$$

بنابراین:

$$\text{محیط مثلث} = 9\frac{4}{5} + 8 + 8 = 25\frac{4}{5}$$

نکته: در یک مثلث، مرکز دایره محیطی همان محل برخورد عمود منصف‌های مثلث است.

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. (۲۱۵)



نکته: شعاع در نقطه‌ی تماس بر خط مماس عمود است.

$$O'P \perp BC, BC \parallel OD \rightarrow O'P \perp OD$$

پس نتیجه می‌گیریم  $O'P$  عمود منصف  $OD$  می‌شود و مثلث  $OPD$  متساوی‌الساقین است.

از طرفی مثلث  $OPD$  قائم‌الزاویه است (زاویه‌ی  $P = 90^\circ$  محاطی و روبه‌روی قطر دایره‌ی کوچک‌تر است).

$$\text{پس: } OP = PD = \frac{\sqrt{2}}{2} \times 8 = 4\sqrt{2}$$

از  $O$  به  $P$  وصل کرده و ادامه می‌دهیم تا دایره‌ی بزرگ را در نقاط  $N$  و  $M$  قطع کند. طبق روابط طولی در دایره داریم:

$$BP \times PC = PM \times PN = (OP + 8)(8 - OP) = 8^2 - OP^2$$

از طرفی مثلث  $OPD$  قائم‌الزاویه است لذا بر طبق رابطه‌ی فیثاغورس:

$$OD^2 - OP^2 = 8^2 - OP^2 = PD^2 = (4\sqrt{2})^2 = 32$$



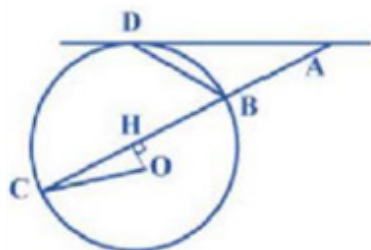
گزینه ۲ پاسخ صحیح است. (۲۱۶)

$$\widehat{DAC} = x \rightarrow \widehat{DBC} = 2x \rightarrow \text{کمان } \widehat{DC} = 4x$$

$$\widehat{DAC} = \frac{\widehat{DC} - \widehat{DB}}{2} \rightarrow x = \frac{4x - \widehat{DB}}{2} \rightarrow \text{کمان } \widehat{DB} = 2x \rightarrow \text{کمان } \widehat{DB} = 4x + 2x = 6x$$

$$\widehat{COB} \text{ مرکزی زاویه} = \widehat{CB} = 6x$$

زمانی که از O مرکز دایره به وتر BC عمود می‌کنیم، علاوه بر این که وتر نصف می‌شود، زاویه‌ی  $\widehat{COB}$  هم نصف می‌شود. لذا:



$$\widehat{COH} = \frac{\widehat{COB}}{2} = 3x \rightarrow \frac{\widehat{COH}}{\widehat{DAC}} = \frac{3x}{x} = 3$$

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. بنا به قضیه‌ی سینوس‌ها داریم: (۲۱۷)

$$\frac{a}{\sin A} = 2R \Rightarrow a = 2R \sin A \Rightarrow 6 = 2R \times \sin 60^\circ \Rightarrow 6 = 2R \times \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow 6 = R\sqrt{3}$$

$$\Rightarrow R = \frac{6}{\sqrt{3}} = \frac{6\sqrt{3}}{3} = 2\sqrt{3}$$

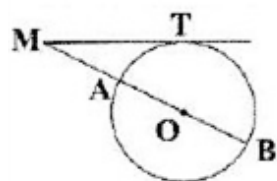
گزینه ۴ پاسخ صحیح است. مساحت ذوزنقه‌ای که هم محیطی و هم محاطی باشد، برابر حاصل ضرب میانگین حسابی و میانگین هندسی قاعده‌های آن است. بنابراین: (۲۱۸)

$$\text{میانگین هندسی قاعده‌ها} = \sqrt{a \cdot b} = \sqrt{4 \times 5} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$$

$$\text{میانگین حسابی قاعده‌ها} = \frac{a+b}{2} = \frac{4+5}{2} = \frac{9}{2}$$

$$\text{مساحت ذوزنقه} : S = \frac{9}{2} \times 2\sqrt{5} = 9\sqrt{5}$$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. اگر پاره خط  $MO$  را امتداد دهیم و نقطه‌ی برخورد آن با دایره را  $B$  بنامیم، در این صورت با استفاده از رابطه‌های طولی در دایره داریم:



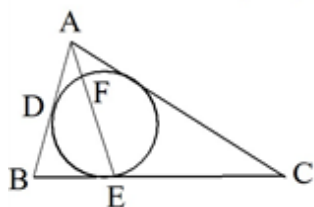
$$MT^2 = MA \times MB$$

از طرفی  $MB = MA + 2R$  که شعاع دایره است. بنابراین:

$$MT^2 = MA \times (MA + 2R) \Rightarrow (3\sqrt{2})^2 = 4 \times (4 + 2R) \Rightarrow 18 = 4 + 2R$$

$$\Rightarrow R = \frac{18 - 4}{2} = \frac{14}{2} = 7$$

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. بنا به فرض  $AC = 8$ ،  $BC = 7$  و  $AB = 5$  است، پس می‌توان نوشت:



$$AD = P - a = \frac{5 + 7 + 8}{2} - 7 = 10 - 7 = 3$$

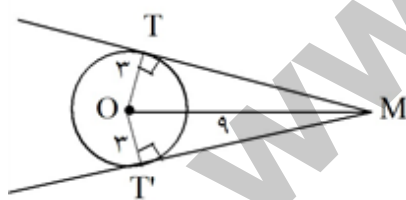
$$AD^2 = AF \times AE \Rightarrow 3^2 = AF \times AE \Rightarrow AF \times AE = 9$$

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. زوایای مقابل در چهارضلعی محاطی مکمل یکدیگرند. پس داریم:

$$3a + 5a = 180^\circ \Rightarrow 8a = 180^\circ \Rightarrow a = \frac{180^\circ}{8} = \frac{45^\circ}{2} = 22.5^\circ$$

$$x + 6a = 180^\circ \Rightarrow x = 180^\circ - 6 \times 22.5^\circ = 180^\circ - 135^\circ = 45^\circ$$

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. چهارضلعی  $MTOT'$  از دو مثلث هم‌نهشت  $OMT$  و  $OMT'$  تشکیل شده است، پس مساحت آن دو برابر مساحت مثلث  $OMT$  است. داریم:



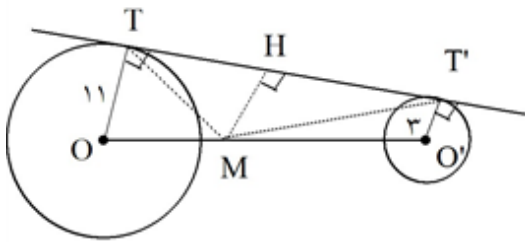
$$OM^2 = OT^2 + MT^2 \Rightarrow 9^2 = 3^2 + MT^2$$

$$\Rightarrow MT^2 = 81 - 9 = 72 \Rightarrow MT = 6\sqrt{2}$$

$$S(MTOT') = 2S(OMT) = 2 \times \frac{1}{2} \times OT \times MT$$

$$\Rightarrow S(MTOT') = 3 \times 6\sqrt{2} = 18\sqrt{2}$$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. چهارضلعی  $OTT'O'$  دوزنقه‌ی قائم‌الزاویه است. اگر از  $M$  وسط ساق  $OO'$  بر ساق  $TT'$  عمود کنیم، در این صورت  $MH$  موازی قاعده‌ها و  $H$  وسط  $TT'$  می‌شود پس  $MH$  پاره‌خط میانگین دوزنقه است و داریم:



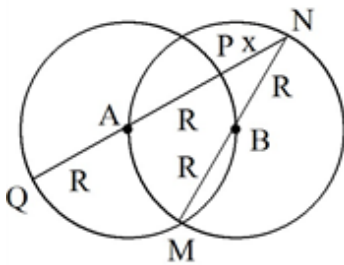
$$MH = \frac{OT + O'T'}{2} = \frac{11 + 3}{2} = \frac{14}{2} = 7$$

$$TT' = \sqrt{OO'^2 - (R - R')^2} = \sqrt{17^2 - (11 - 3)^2}$$

$$= \sqrt{289 - 64} = \sqrt{225} = 15$$

$$S(MTT') = \frac{1}{2} MH \times TT' = \frac{1}{2} \times 7 \times 15 = 52.5$$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. دایره‌ها از مرکز یک‌دیگر می‌گذرند، پس شعاع آن‌ها برابر است. شعاع دو دایره را  $R$  فرض می‌کنیم. بنا به رابطه‌ی طولی امتداد وترها در دایره‌ی سمت چپ داریم:



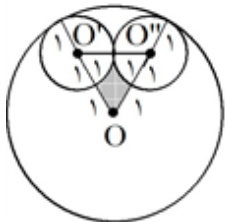
$$NB \times MN = NP \times NQ \Rightarrow R \times 2R = x \times (x + 2R)$$

$$\Rightarrow x^2 + 2Rx - 2R^2 = 0 \Rightarrow x = -R \pm \sqrt{3R^2}$$

$$\xrightarrow{x > 0} x = \sqrt{3}R - R$$

$$\frac{NQ}{MN} = \frac{2R + x}{2R} = \frac{2R + \sqrt{3}R - R}{2R} = \frac{\sqrt{3} + 1}{2}$$

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. مثلث  $OO'O''$  متساوی‌الاضلاع به ضلع ۲ می‌باشد. پس اندازه‌ی زوایای  $O'$  و  $O''$  در این مثلث  $60^\circ$  است. اگر از مساحت مثلث، مساحت قطاع‌های هم‌نهشت به شعاع واحد و زاویه‌ی مرکزی  $60^\circ$  را کم کنیم، مساحت ناحیه‌ی رنگی به دست می‌آید:

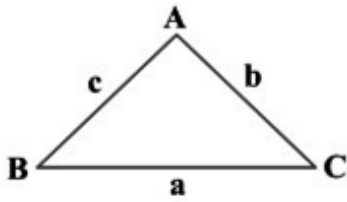


$$\text{مساحت ناحیه ی رنگی} = \frac{2^2 \times \sqrt{3}}{4} - 2 \times \frac{\pi \times 1^2 \times 60}{360} = \sqrt{3} - \frac{\pi}{3}$$

۲۲۶

گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

نکته (قضیه سینوس‌ها): در هر مثلث دلخواه نسبت اندازه هر ضلع به سینوس زاویه مقابل آن برابر با قطر دایره محیطی مثلث است.

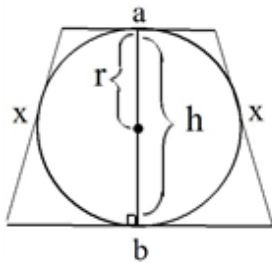
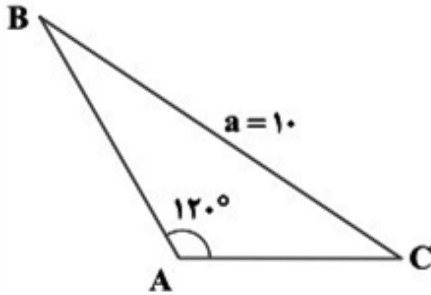


$$\frac{a}{\sin \hat{A}} = \frac{b}{\sin \hat{B}} = \frac{c}{\sin \hat{C}} = 2R \quad (R \text{ شعاع دایره محیطی است.})$$

با استفاده از قضیه سینوس‌ها داریم:

$$\frac{a}{\sin \hat{A}} = 2R \Rightarrow \frac{10}{\sin 120^\circ} = 2R \Rightarrow 2R = \frac{10}{\frac{\sqrt{3}}{2}}$$

$$\Rightarrow R = \frac{10}{\sqrt{3}} = \frac{10\sqrt{3}}{3}$$



گزینه ۳ پاسخ صحیح است. مساحت هر ذوزنقه با قاعده‌های  $a$  و  $b$  از رابطه‌ی زیر محاسبه می‌شود:

$$S = \frac{a+b}{2} \times h$$

با توجه به شکل  $h = 2r = 2 \times 2 = 4$ ، بنابراین:

$$S = \frac{a+b}{2} \times h \Rightarrow 24 = \frac{a+b}{2} \times 4 \Rightarrow a+b = \frac{24}{2} = 12$$

حال اگر هر ساق ذوزنقه را با  $x$  نشان دهیم، چون ذوزنقه بر دایره محیطی است، بنابراین مجموع اندازه‌ی قاعده‌های آن با مجموع اندازه‌ی ساق‌های آن برابر است، در نتیجه:

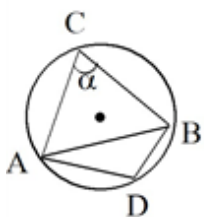
$$a + b = x + x = 2x \Rightarrow x = \frac{a+b}{2} = \frac{12}{2} = 6$$

۲۲۸

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. یک چندضلعی، محاط بر دایره است، هرگاه زوایای روبه‌رو مکمل هم‌دیگر باشند. بنابراین:

$$\hat{D} + \hat{C} = 180^\circ \xrightarrow{\hat{D} = 2\hat{C}} 2\hat{C} + \hat{C} = 180^\circ \Rightarrow 3\hat{C} = 180^\circ \Rightarrow \hat{C} = \frac{180^\circ}{3} = 60^\circ$$

هم‌چنین اگر شعاع کمان حاوی زاویه‌ی  $\hat{ACB} = \alpha$  برابر  $R$  باشد، آن‌گاه اندازه پاره‌خط روبه‌روی آن  $(AB)$ ، از رابطه‌ی زیر محاسبه می‌شود:



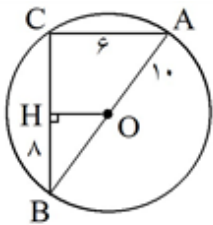
$$AB = 2R \sin \alpha = 2 \times 2\sqrt{3} \times \sin 60^\circ = 4\sqrt{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow AB = 6$$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. نقطه‌ی هم‌رسی سه عمودمنصف یک مثلث، مرکز دایره محیطی مثلث و نقطه‌ی هم‌رسی سه نیمساز مثلث، مرکز دایره محاطی آن است، بنابراین هر مثلث هم محاطی و هم محیطی است. یک چهارضلعی بر یک دایره محیط است اگر و تنها اگر مجموع دو ضلع مقابل برابر مجموع دو ضلع دیگر باشد و با توجه به برابر بودن اضلاع در مربع و لوزی، بنابراین هم مربع و هم لوزی محیطی هستند. یک دوزنقه تنها زمانی می‌تواند محیطی باشد که مجموع قاعده‌ها با مجموع ساق‌های آن برابر باشد.

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. در هر مثلث متساوی‌الاضلاع به ضلع  $a$ ، مساحت  $S$  و نصف محیط  $P$ ، شعاع‌های هر سه دایره‌ی محاطی خارجی آن با هم برابر هستند و از رابطه‌ی زیر محاسبه می‌شود:

$$r = \frac{S}{P - a}, S = \frac{\sqrt{3}}{4} a^2, P = \frac{3a}{2} \Rightarrow r = \frac{\frac{\sqrt{3}}{4} a^2}{\frac{3a}{2} - a} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{4} a^2}{\frac{a}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{2} a \Rightarrow r = \frac{\sqrt{3}}{2} a$$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. نقطه‌ی هم‌رسی سه نیمساز مثلث، مرکز دایره‌ی محاطی مثلث و نقطه‌ی هم‌رسی سه عمودمنصف مثلث، مرکز دایره‌ی محیطی مثلث است. بنابراین هر مثلث هم محیطی و هم محاطی است.

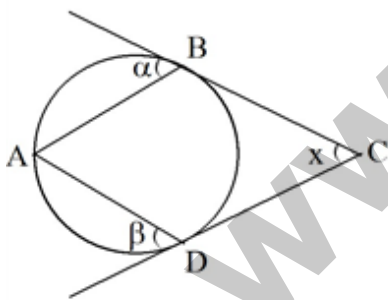


گزینه ۴ پاسخ صحیح است. مطابق شکل فرض می‌کنیم  $BC$  ضلع متوسط مثلث  $ABC$  باشد. چون مرکز دایره‌ی محیطی، نقطه‌ی هم‌رسی عمودمنصف‌های اضلاع مثلث است، بنابراین  $OH$  عمودمنصف ضلع  $BC$ ، آن را نصف می‌کند، یعنی  $|BH| = 4$ . از طرفی اندازه‌ی  $OH$  همان فاصله‌ی مرکز دایره از ضلع  $BC$  است، لذا با استفاده از قضیه‌ی فیثاغورس در مثلث  $BOH$  داریم:

$$OH = \sqrt{|OB|^2 - |BH|^2} = \sqrt{5^2 - 4^2} = \sqrt{9} = 3$$

توجه کنید که  $OB$  برابر شعاع دایره است که اندازه‌ی آن ۵ است.

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. با توجه به زوایای ظلی روی شکل داریم:



$$\widehat{AB} = 2\alpha, \widehat{AD} = 2\beta \Rightarrow \widehat{BAD} = 2\alpha + 2\beta$$

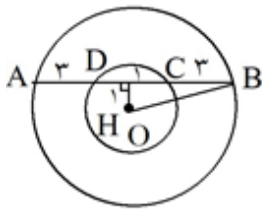
$$\widehat{BD} = 360^\circ - \widehat{BAD} = 360^\circ - 2\alpha - 2\beta$$

$$\widehat{A} = \frac{\widehat{BD}}{2} = \frac{360^\circ - 2\alpha - 2\beta}{2} = 180^\circ - \alpha - \beta$$

حال مجموع اندازه‌ی زوایای چهارضلعی  $ABCD$  را می‌نویسیم:

$$\widehat{A} + 180^\circ - \alpha + x + 180^\circ - \beta = 360^\circ \Rightarrow 180^\circ - \alpha - \beta + 180^\circ - \alpha + x + 180^\circ - \beta = 360^\circ \Rightarrow x = 2\alpha + 2\beta - 180^\circ$$

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. از مرکز دایره بر وتر  $AB$  خطی عمود رسم می‌کنیم. وترهای  $AB$  و  $CD$  هر دو نصف می‌شوند. پس  $CH = DH = ۱$  و  $AH = BH = ۴$ . شعاع دایره‌ها را  $OB = R$  و  $OC = r$  می‌نامیم. بنا به قضیه فیثاغورس داریم:



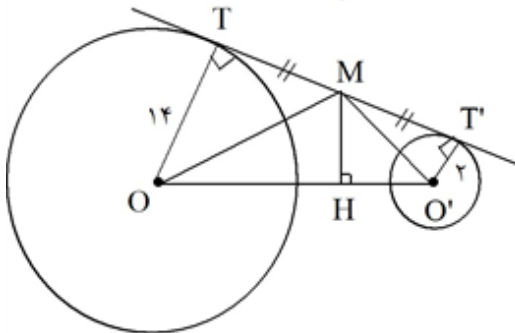
$$\begin{cases} OB^2 = OH^2 + BH^2 \\ OC^2 = OH^2 + CH^2 \end{cases} \xrightarrow{\text{تفاضل}}$$

$$OB^2 - OC^2 = BH^2 - CH^2$$

$$\Rightarrow R^2 - r^2 = 4^2 - 1^2 = 16 - 1 = 15$$

$$\text{مساحت بین دو دایره} = \pi R^2 - \pi r^2 = \pi(R^2 - r^2) = 15\pi$$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. ابتدا طول مماس مشترک خارجی دو دایره را محاسبه می‌کنیم:



$$TT' = \sqrt{OO'^2 - (R - R')^2} = \sqrt{20^2 - (14 - 2)^2}$$

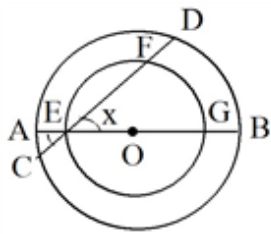
$$= \sqrt{400 - 144}$$

$$\Rightarrow TT' = \sqrt{256} = 16 \Rightarrow MT = MT' = 8$$

$$S(\triangle OMO') = S(\triangle OTT'O') - S(\triangle O'TM) - S(\triangle O'T'M) = \frac{1}{2}(14 + 2) \times 16 - \frac{14 \times 8}{2} - \frac{8 \times 2}{2}$$

$$\Rightarrow S(\triangle OMO') = 128 - 56 - 8 = 64, S(\triangle OMO') = \frac{MH \times OO'}{2} \Rightarrow 64 = \frac{MH \times 20}{2}$$

$$\Rightarrow MH = \frac{64}{10} = 6.4$$



گزینه ۴ پاسخ صحیح است. در دایره بزرگ، زاویه  $x$ ، حاصل از وترهای متقاطع  $AB$  و  $CD$  است:

$$x = \frac{\widehat{AC} + \widehat{BD}}{2}$$

در دایره کوچک،  $x$  زاویه محاطی است:

$$x = \frac{\widehat{GF}}{2} = \frac{180^\circ - \widehat{EF}}{2}$$

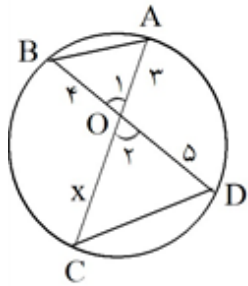
پس از تساوی‌های فوق نتیجه می‌شود:

$$\frac{\widehat{AC} + \widehat{BD}}{2} = \frac{180^\circ - \widehat{EF}}{2} \Rightarrow \widehat{BD} = 180^\circ - (\widehat{AC} + \widehat{EF})$$

و بنا به فرض  $\widehat{AC} + \widehat{EF} = 104^\circ$  است، پس نهایتاً داریم:

$$\widehat{BD} = 180^\circ - 104^\circ = 76^\circ$$

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. مثلث‌های  $OAB$  و  $OCD$  بنابر تساوی زوایا متشابه‌اند:



$\widehat{A} = \widehat{D}$  (چون کمان رو به روی آن‌ها یکسان است.)

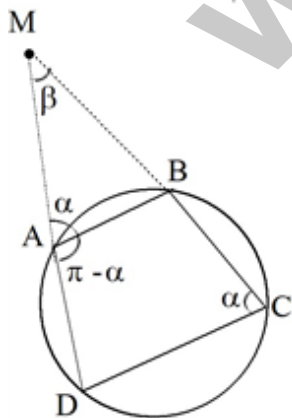
$\widehat{O}_1 = \widehat{O}_2$  (متقابل به راس)

$\widehat{B} = \widehat{C}$  (چون کمان رو به روی آن‌ها یکسان است.)

بنابراین طبق تناسب اضلاع داریم:

$$\frac{AO}{DO} = \frac{BO}{CO} \Rightarrow \frac{3}{x} = \frac{4}{5} \Rightarrow x = \frac{4 \times 5}{3} = \frac{20}{3} = \frac{18 + 2}{3} = 6\frac{2}{3}$$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. چهارضلعی محاطی است، بنابراین زوایای روبه‌رو مکمل‌اند، پس داریم:



$$\triangle MAB \sim \triangle MCD \Rightarrow \frac{S_{MAB}}{S_{MCD}} = \left(\frac{AB}{CD}\right)^2 = \frac{9}{25}$$

$$\Rightarrow \frac{S_{MDC} - S_{AMB}}{S_{MDC}} = \frac{16}{25} \Rightarrow \frac{S_{ABCD}}{S_{MDC}} = \frac{16}{25} = 64\%$$

۲۳۹

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. محیط مثلث ABC برابر با ۲AE است، بنابراین:

$$2p = AB + BC + AC \Rightarrow 2p = AB + (BM + MC) + AC$$

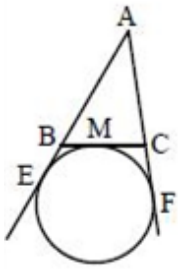
$$\Rightarrow 2p = (AB + BM) + (MC + AC)$$

$$\begin{array}{l} BM = BE \\ MC = CF \end{array} \rightarrow 2p = (AB + BE) + (CF + AC)$$

$$\Rightarrow 2p = AE + AF \xrightarrow{AE = 2AF} 2p = 2AE$$

$$\xrightarrow{AE = 14} 2p = 2 \times 14 = 28$$

$$\Rightarrow 2m - 2 = 28 \Rightarrow 2m = 30 \Rightarrow m = 15$$



۲۴۰

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. از نقطه O به C وصل می‌کنیم، با توجه به این که  $AC = \sqrt{2}R$  در مثلث OAC داریم:

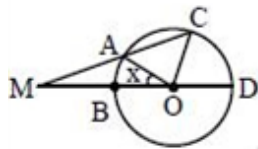
$$OA^2 + OC^2 = AC^2$$

بنابراین این مثلث در رأس O قائمه است، در نتیجه:

$$\begin{cases} \widehat{AB} + \widehat{CD} = 90 \\ \frac{\widehat{CD} - \widehat{AB}}{2} = 20 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \widehat{CD} + \widehat{AB} = 90 \\ \widehat{CD} - \widehat{AB} = 40 \end{cases}$$

$$\xrightarrow{\text{جمع طرفین}} 2\widehat{CD} = 130 \Rightarrow \widehat{CD} = 65 \text{ و } \widehat{AB} = 25$$

$$\widehat{O} = x = \widehat{AB} = 25$$



۲۴۱

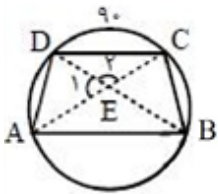
گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$ABCD: \text{ذوزنقه} \Rightarrow AB \parallel CD \Rightarrow \widehat{BC} = \widehat{AD}$$

$$\widehat{BD} = 2\widehat{A} = 150 \Rightarrow \widehat{BC} = 60 \Rightarrow \widehat{AD} = 60$$

$$E_1 = \frac{60 + 60}{2} = 60^\circ$$

$$E_2 = 180 - 60 = 120^\circ$$



۲۴۲

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. در حالتی که دو دایره متداخل باشند، هیچ مماسی نمی‌توان رسم کرد، پس:

$$OO' < 12 - 7 \Rightarrow OO' < 5 \Rightarrow OO' = 1, 2, 3, 4$$

۲۴۳

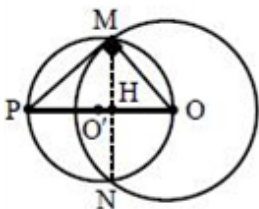
گزینه ۳ پاسخ صحیح است. شکل این سؤال مانند رسم مماس از نقطه P خارج از دایره O می‌باشد. چون M روبه‌روی قطر است، پس ۹۰ درجه است.

$$PM^2 = OP^2 - OM^2 = 100 - 36 = 64 \Rightarrow PM = 8$$

$$\text{روابط وطلی در مثلث قائم الزاویه: } PM \times OM = MH \times OP$$

$$\Rightarrow MH = \frac{6 \times 8}{10} = 4/8$$

$$MN = 2 \times 4/8 = 9/6$$





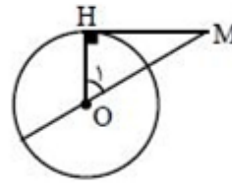
گزینه ۱ پاسخ صحیح است. (۲۴۴)

$$\left. \begin{array}{l} OH = 6 \\ OM = 12 \end{array} \right\} \Rightarrow M = 30^\circ \Rightarrow \hat{O}_1 = 60^\circ$$

$$MH^2 = d^2 - R^2 = 108 \Rightarrow MH = 6\sqrt{3}$$

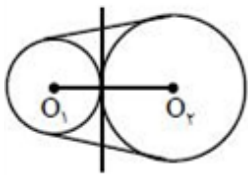
$$\text{مساحت هاشورخورده} = \frac{1}{2} OH \times MH - \frac{O_1}{360} \times \pi R^2$$

$$= \frac{1}{2} \times 6 \times 6\sqrt{3} - \frac{1}{6} \times \pi \times 36 = 6(3\sqrt{3} - \pi)$$

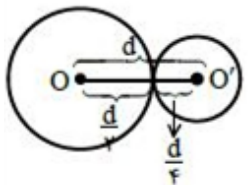


گزینه ۴ پاسخ صحیح است. دو دایره در صورتی دارای سه مماس مشترک اند که مماس خارج باشند در این صورت داریم:

$$\begin{aligned} O_1 O_2 &= R_1 + R_2 \\ \Rightarrow 3x - 6 &= (x + 3) + (x - 2) \\ \Rightarrow 3x - 6 &= 2x + 1 \Rightarrow x = 7 \\ \Rightarrow R_1 &= x - 2 = 5 \\ \Rightarrow R_2 &= x + 3 = 10 \end{aligned}$$



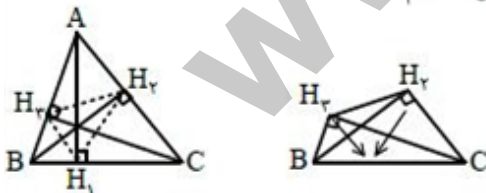
گزینه ۴ پاسخ صحیح است. (۲۴۵)



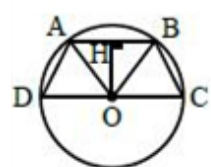
$$\begin{cases} r_1 + r_2 = \frac{rd}{4} \\ r_1 - r_2 = \frac{d}{4} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} r_1 = \frac{d}{2} \\ r_2 = \frac{d}{4} \end{cases}$$

کوچکترین دایره‌ای که بر هر دو دایره بالا مماس است، قطرش  $\frac{d}{4} - \frac{d}{4} - \frac{d}{4} = \frac{d}{4}$  است، پس شعاعش  $\frac{d}{8}$  است.

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. چهارضلعی‌های  $OH_1BH_3$ ،  $OH_2CH_1$ ،  $OH_3AH_2$  و  $OH_1BH_3$  با توجه به مکمل بودن زوایای مقابل (زوایای قائمه) محاطی هستند و چهارضلعی‌های  $AH_2H_1B$ ،  $BH_3H_2C$  و  $AH_3H_1C$  به دلیل برابری زوایای رو به یک ضلع محاطی هستند، بنابراین ۶ چهارضلعی محاطی داریم:



گزینه ۲ پاسخ صحیح است. (۲۴۷)



$$\text{ارتفاع و میانه بر هم منطبقند.} \Rightarrow BH = AH = 6$$

$$OA = OB = 10 \Rightarrow OH^2 = 100 - 36 = 64 \Rightarrow OH = 8$$

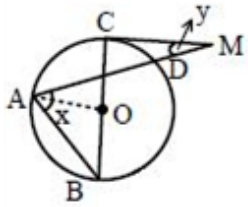
$$S = \frac{1}{2}(AB + CD) \times OH = \frac{1}{2}(12 + 20) \times 8 = 128$$

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. ۲۴۹

$$\hat{P}_1 = \frac{\widehat{BD} + \widehat{CE}}{2} \Rightarrow \widehat{BD} + \widehat{CE} = 100 \Rightarrow \widehat{BC} = 100$$

$$\hat{A} = \frac{\widehat{BC}}{2} = \frac{100}{2} = 50$$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. ۲۵۰



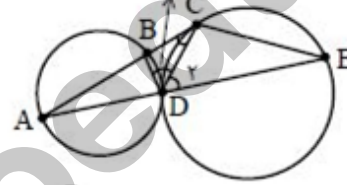
متساوی الاضلاع  $\triangle OAB$ :  $OA = OB = AB = R \Rightarrow \hat{B} = 60^\circ \Rightarrow \widehat{AC} = 120$

$$\Rightarrow \hat{B} = 60^\circ \Rightarrow \widehat{AC} = 120$$

$$\left. \begin{aligned} \hat{x} &= \frac{180 - \widehat{DC}}{2} \\ \hat{y} &= \frac{120 - \widehat{CD}}{2} \end{aligned} \right\} \Rightarrow x - y = \frac{180 - 120}{2} = 30$$

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. ۲۵۱

$$\left. \begin{aligned} \hat{A} &= \frac{\widehat{BD}}{2} \\ \hat{A} &= \frac{\widehat{CE} - \widehat{CD}}{2} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{\widehat{CE}}{2} = \frac{\widehat{BD} + \widehat{CD}}{2} \quad (*)$$



$$\left. \begin{aligned} \hat{D}_1 &= \frac{\widehat{BD}}{2} + \frac{\widehat{CD}}{2} \\ \hat{D}_2 &= \frac{\widehat{CE}}{2} \end{aligned} \right\} \xrightarrow{(*)} \hat{D}_1 = \hat{D}_2 \quad (1)$$

$$\left. \begin{aligned} \hat{C}_1 &= \frac{\widehat{CD}}{2} \\ \hat{E} &= \frac{\widehat{CD}}{2} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \hat{C}_1 = \hat{E} \quad (2)$$

$$(1), (2) \Rightarrow \triangle BCD \sim \triangle CDE \Rightarrow \text{نسبت تشابه} \Rightarrow \frac{BD}{CD} = \frac{BC}{CE}$$

گزینه ۵ پاسخ صحیح است. فرض کنید مثلث  $OAB$  متساوی‌الاضلاع به ضلع واحد است و کمان  $AB$  بخشی از

دایره‌ی به مرکز  $O$  و شعاع واحد. مساحت قطاع یک‌ششم مساحت دایره است و مساحت مثلث برابر است با  $\frac{\sqrt{3}}{4}$ ؛

پس مساحت ناحیه‌ی سایه‌خورده برابر است با  $\frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{4}$ . گل از دوازده‌تا از این ناحیه‌ها تشکیل شده است؛ پس

مساحت گل برابر است با

$$12 \left( \frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{4} \right) = 2\pi - 3\sqrt{3}$$



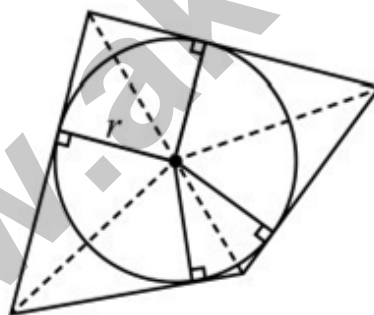
گزینه ۱ پاسخ صحیح است. اندازه‌ی پاره‌خط‌های  $AB$ ،  $BC$  و  $CA$  به ترتیب برابر است با  $3+1$ ،  $2+3$  و  $1+3$ ؛

پس مثلث  $ABC$  در رأس  $C$  قائمه است و مساحتش برابر است با  $\frac{1}{2} \times 3 \times 4 = 6$ .

گزینه ۲ پاسخ صحیح است.  $OB$  و  $OC$  شعاع دایره هستند؛ پس مثلث  $OBC$  متساوی‌الاضلاع است و در نتیجه،

مساحت قطاع  $OBC$  (که با مساحت قطاع  $OAX$  برابر است) یک‌ششم مساحت دایره است.

گزینه ۵ پاسخ صحیح است.



با توجه به شکل، مساحت چهارضلعی برابر است با:  $\frac{\text{محیط چهارضلعی} \times r}{2}$

مساحت دایره هم برابر است با:  $\frac{\text{محیط دایره} \times r}{2}$

پس  $\frac{\text{مساحت چهارضلعی}}{\text{مساحت دایره}}$  برابر است با  $\frac{\text{محیط چهارضلعی}}{\text{محیط دایره}}$  یعنی برابر است با  $\frac{4}{\pi}$ .

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. زاویه  $ABD$  روبه‌روی کمان  $AED$  است و کمان  $AED$  هم روبه‌روی دو زاویه  $X$  است؛ پس  $ABD = 2X$ . چون  $ABD = 72^\circ$ ، پس  $X = \frac{72^\circ}{2} = 36^\circ$ .

گزینه ۵ پاسخ صحیح است. هر واحد برابر است با  $5^\circ$ ، اندازه‌ی زاویه برابر است با

$$\frac{20 \times 5^\circ - 16 \times 5^\circ}{2} = 10^\circ$$

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. اگر شعاع دایره‌ی وسطی و شعاع دایره‌ی بزرگ را به ترتیب با  $r$  و  $R$  نمایش دهیم، داریم

$$\frac{\pi}{4} = \frac{1}{4} \pi (r^2 - 1) = \frac{1}{4} \pi (R^2 - r^2)$$

$$\Rightarrow r^2 - 1 - 1 \Rightarrow r^2 = 2 \Rightarrow r = \sqrt{2}$$

$$\Rightarrow R^2 - r^2 = 1 \Rightarrow R^2 - 2 = 1 \Rightarrow R^2 = 3 \Rightarrow R = \sqrt{3}$$

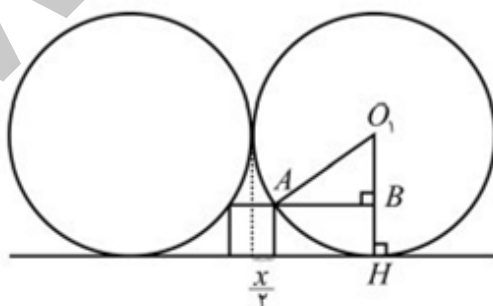
پس حاصل ضرب شعاع برابر  $\sqrt{6}$  است.

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. مانند شکل زیر از مرکز یکی از دایره‌ها ( $O_1$ ) بر خط مماس عمود می‌کنیم. پای عمود همان نقطه‌ی تماس است. تقاطع دایره با مربع را  $A$  و پای عمود از  $A$  بر  $O_1H$  را  $B$  می‌نامیم. اگر طول ضلع مربع را برابر  $X$  در نظر بگیریم داریم  $O_1A = 1$ ،  $O_1B = 1 - X$ ،  $AB = 1 - \frac{X}{2}$ . بنا بر قضیه‌ی فیثاغورس داریم

$$1^2 = (1 - X)^2 + \left(1 - \frac{X}{2}\right)^2 \Rightarrow 1 = 2 + \frac{5}{4}X^2 - 3X$$

$$\Rightarrow \frac{5}{4}X^2 - 3X + 1 = 0$$

$$\Rightarrow X = 2 \text{ یا } X = \frac{2}{5}$$



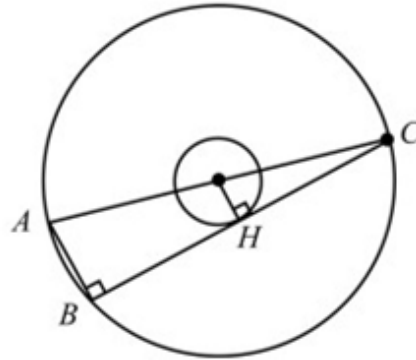
طول ضلع مربع از شعاع دایره کوچک‌تر است. پس امکان ندارد که  $X$  برابر ۲ باشد. پس  $X = \frac{2}{5}$ .

گزینه ۲ پاسخ صحیح است.  $\angle ABC = 90^\circ$ . اگر مرکز دایره‌ها و نقطه‌ی تماس  $BC$  با دایره‌ی کوچک را به ترتیب  $O$  و  $H$  بنامیم،  $\angle H = 90^\circ$ .

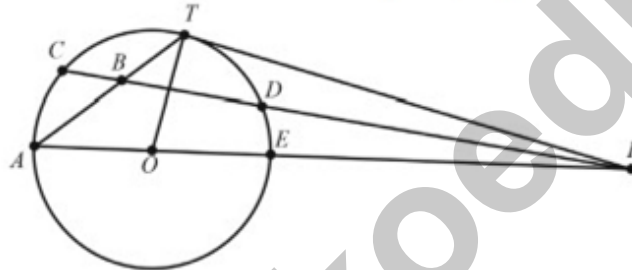
پس  $\triangle ABC \sim \triangle OHC$ ، بنابراین

$$\frac{OH}{OC} = \frac{AB}{AC} \Rightarrow \frac{1}{3} = \frac{12}{AC} \Rightarrow AC = 36$$

$$\Rightarrow OC = 18$$



گزینه ۲ پاسخ صحیح است. با توجه به شکل زیر داریم:



$$\angle TPB = \angle BPA \Rightarrow \frac{\widehat{CT} - \widehat{TD}}{2} = \frac{\widehat{CA} - \widehat{DE}}{2} \Rightarrow \frac{\widehat{CA} + \widehat{TD}}{2} = \frac{\widehat{CT} + \widehat{DE}}{2}$$

$$\frac{\widehat{CA} + \widehat{TD}}{2} + \frac{\widehat{CT} + \widehat{DE}}{2} = 90^\circ$$

از طرفی:

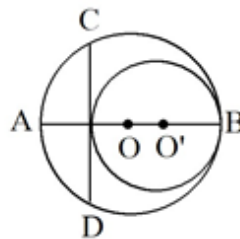
$$\angle TBP = \frac{\widehat{CA} + \widehat{TD}}{2} = 45^\circ \text{ پس}$$

گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

$$AE \times EB = CE \times ED = \frac{CD^2}{4}$$

$$CD^2 = 4(AE)(EB) = 4(4)(6) = 96$$

$$CD = 4\sqrt{6}$$



گزینه ۳ پاسخ صحیح است. با توجه به فرمول کتاب داریم (۲۶۳)

$$S = \frac{\pi R^2 \alpha}{360^\circ} = \frac{\pi \times 5^2 \times 90^\circ}{360^\circ} = 6/25\pi$$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. (۲۶۴)

نکته: یک چندضلعی محدب را منتظم می‌نامیم هرگاه تمام ضلع‌های آن با هم و تمام زاویه‌های آن با هم برابر باشند.

نکته: اندازه هر زاویه محاطی، نصف اندازه کمان روبه‌روی آن است.

طبق فرض،  $AB$  یکی از اضلاع ۱۲ ضلعی منتظم محاط در دایره است، پس:

$$\widehat{AB} = \frac{1}{12} \times 360^\circ = 30^\circ$$

همچنین  $BC$  یکی از اضلاع ۱۰ ضلعی منتظم محاط در دایره است، پس:

$$\widehat{BC} = \frac{1}{10} \times 360^\circ = 36^\circ$$

در نتیجه  $\widehat{AB} + \widehat{BC} = 66^\circ$ ، پس  $\widehat{AMC} = 360^\circ - 66^\circ = 294^\circ$ . بنابراین اندازه زاویه محاطی  $B$  برابر است

$$\widehat{B} = \frac{\widehat{AMC}}{2} = \frac{294^\circ}{2} = 147^\circ$$

با:

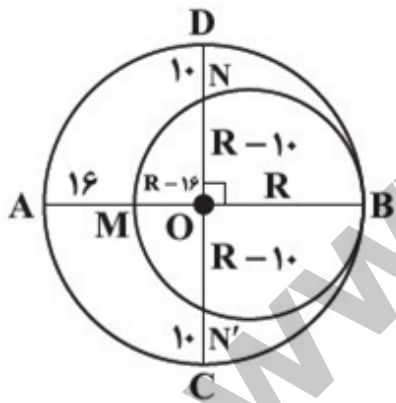
گزینه ۳ پاسخ صحیح است. (۲۶۵)

نکته: اگر خط‌های شامل دو وتر دلخواه  $AB$  و  $CD$  در نقطه‌ای مانند  $M$  (درون یا بیرون دایره) یکدیگر را قطع کنند، آن‌گاه:

$$MA \cdot MB = MC \cdot MD$$

فرض کنیم شعاع دایره بزرگ برابر  $R$  و شعاع دایره کوچک برابر  $r$  باشد. با توجه به تقارن شکل، اندازه‌ها را روی شکل می‌نویسم.

حال با استفاده از نکته در دایره کوچک داریم:



$$\begin{aligned} ON \cdot ON' &= OB \cdot OM \Rightarrow (R-10) \times (R-10) = R(R-16) \\ &\Rightarrow R^2 + 100 - 20R = R^2 - 16R \Rightarrow 4R = 100 \Rightarrow R = 25 \\ r &= \frac{MB}{2} = \frac{(R-16) + R}{2} = \frac{9+25}{2} = \frac{34}{2} = 17 \end{aligned}$$

۲۶۶

گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

نکته: اگر خط‌های شامل دو وتر دلخواه  $AB$  و  $CD$  در نقطه‌ای مانند  $M$  (درون یا بیرون دایره) یکدیگر را قطع کنند،  
 $MA \cdot MB = MC \cdot MD$   
 آنگاه:

طبق وتر  $AB$ ، وتر  $CD$  را به نسبت ۱ به ۲ تقسیم کرده است، پس:  $MC = 2x$  ،  $MD = x$   
 با توجه به اینکه  $CD = 9$  داریم:

$$MD + MC = 9 \Rightarrow x + 2x = 9 \Rightarrow x = 3$$

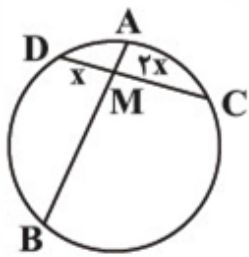
حال با استفاده از نکته بالا داریم:

$$\begin{aligned} MA \cdot MB &= MC \cdot MD && \xrightarrow{MC = 6 \text{ و } MD = 3} \\ MA \cdot MB &= 18 && (*) \end{aligned}$$

از طرفی طبق فرض  $AB = 11$ ، پس:

$$MA + MB = 11 \quad (**)$$

از (\*) و (\*\*) نتیجه می‌شود:  $MA = 2$  ،  $MB = 9$   
 بنابراین وتر  $CD$ ، وتر  $AB$  را به نسبت ۲ به ۹ قطع کرده است.



۲۶۷

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. نکته: مساحت ذوزنقه، نصف حاصل ضرب ارتفاع در مجموع دو قاعده است.

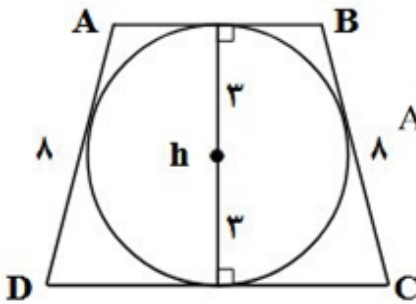
نکته: در هر چهارضلعی محیطی، مجموع اضلاع روبه‌رو با هم برابر است.

چون شعاع دایره محاطی برابر ۳ است، پس اندازه ارتفاع ذوزنقه برابر ۶ می‌باشد.

حال با استفاده از نکته بالا داریم:  $AB + DC = AD + BC = 8 + 8 = 16$

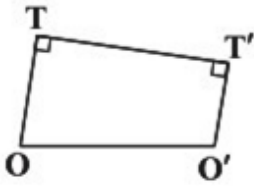
بنابراین مساحت ذوزنقه برابر است با:

$$S = \frac{1}{2}(AB + DC) h = \frac{1}{2} \times 16 \times 6 = 48$$



گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

نکته: شعاع دایره در نقطه تماس، بر خط مماس عمود است.  
نکته: مجموع زاویه‌های داخلی یک چهارضلعی برابر  $۳۶۰^\circ$  است.  
در دوزنقه  $OTT'O'$  داریم:



$$\begin{cases} OT \perp TT' \Rightarrow \hat{T} = 90^\circ \\ O'T' \perp TT' \Rightarrow \hat{T}' = 90^\circ \end{cases}$$

با توجه به اینکه  $\hat{T} + \hat{T}' + \hat{O} + \hat{O}' = 360^\circ$  نتیجه می‌گیریم:

$$\hat{O} + \hat{O}' = 180^\circ \quad (۱)$$

در مثلث  $OAT$  داریم:

$$\begin{aligned} OT = OA = r &\Rightarrow \hat{OTA} = \hat{OAT} = \alpha \\ &\Rightarrow \hat{O} = 180^\circ - 2\alpha \quad (۲) \end{aligned}$$

به همین ترتیب در مثلث  $O'AT'$  داریم:

$$O'T' = O'A = r' \Rightarrow \hat{O'T'A} = \hat{O'AT'} = \beta \Rightarrow \hat{O}' = 180^\circ - 2\beta \quad (۳)$$

از (۱)، (۲) و (۳) نتیجه می‌گیریم:

$$180^\circ - 2\alpha + 180^\circ - 2\beta = 180^\circ \Rightarrow 2(\alpha + \beta) = 180^\circ \Rightarrow \alpha + \beta = 90^\circ$$

بنابراین اندازه زاویه  $a$  برابر است با:

$$\hat{A} = 180^\circ - \alpha - \beta = 180^\circ - 90^\circ = 90^\circ$$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

نکته: در دایره‌ای به شعاع  $r$ ، طول کمان روبه‌رو به زاویه مرکزی  $\theta$  (رادیان)، برابر است با:

$$l = \theta r$$

با توجه به شکل و با استفاده از نکته بالا، طول تسمه برابر است با:

طول کمان روبه‌رو به زاویه  $۱۲۰^\circ$

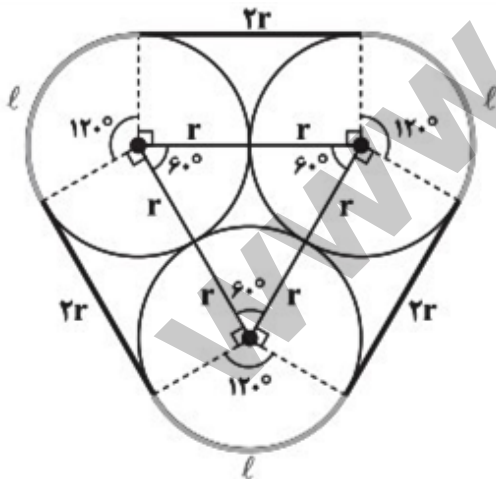
$$L = 3(2r + l) = 3\left(2r + \frac{2\pi}{3}r\right) = 6r + 2\pi r$$

$$\xrightarrow{r=4} L = 24 + 8\pi$$

طبق فرض این مقدار برابر  $x + y\pi$  است، پس  $x = 24$  و  $y = 8$

$$x - y = 24 - 8 = 16$$

بنابراین:





گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

نکته: در هر مثلث با مساحت  $S$  و محیط  $۲P$ ، اندازه شعاع دایره محاطی داخلی برابر است با:  $r = \frac{S}{P}$

اعداد ۶، ۸ و ۱۰ فیثاغورسی هستند ( $۶^2 + ۸^2 = ۱۰^2$ )، پس مثلث مورد نظر قائم الزاویه است، بنابراین:

$$\begin{cases} S = \frac{1}{2} \times 6 \times 8 = 24 \\ 2P = 10 + 8 + 6 = 24 \Rightarrow P = 12 \end{cases}$$

حال با استفاده از نکته بالا داریم:

$$r = \frac{S}{P} = \frac{24}{12} = 2$$



گزینه ۲ پاسخ صحیح است. نکته: مساحت مثلث متساوی الاضلاع به ضلع  $a$ ، برابر  $\frac{\sqrt{3}}{4} a^2$  است.

نکته: در مثلث  $ABC$  با مساحت  $S$  و محیط  $۲P$ ، شعاع دایره محاطی خارجی نظیر

رأس  $A$  برابر است با:  $r_a = \frac{S}{P - a}$

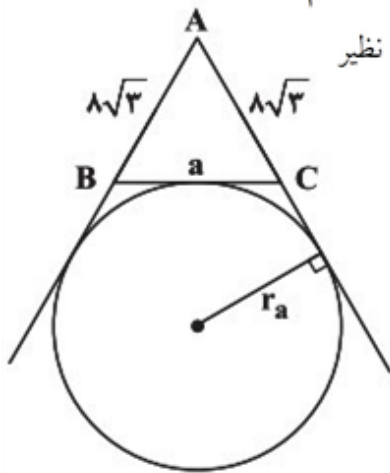
مساحت و محیط این مثلث عبارتند از:

$$\text{مساحت: } S = \frac{\sqrt{3}}{4} a^2 = \frac{\sqrt{3}}{4} \times 64 \times 3 = 48\sqrt{3}$$

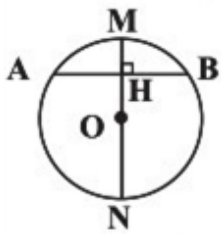
$$\text{محیط: } 2P = 8\sqrt{3} \times 3 = 24\sqrt{3}$$

بنابراین شعاع دایره محاطی خارجی این مثلث برابر است با:

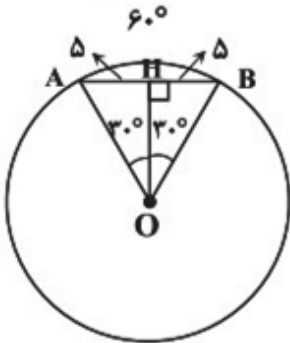
$$r_a = \frac{S}{P - a} = \frac{48\sqrt{3}}{12\sqrt{3} - 8\sqrt{3}} = \frac{48\sqrt{3}}{4\sqrt{3}} = 12$$



گزینه ۱ پاسخ صحیح است. راه حل اول: نکته: قطر عمود بر وتر، آن وتر و کمان‌هایشان را نصف می‌کند.

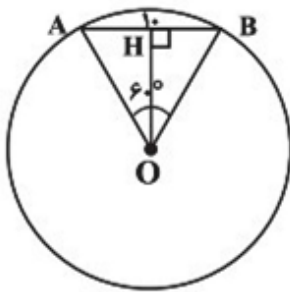


$$\text{قطر } MN \perp AB \Rightarrow AH = BH, \widehat{AM} = \widehat{BM}, \widehat{AN} = \widehat{BN}$$



$$\triangle OBH: \tan \hat{O} = \frac{BH}{OH} \Rightarrow \tan 30^\circ = \frac{5}{OH}$$

$$\Rightarrow OH = \frac{5}{\tan 30^\circ} = \frac{5}{\frac{1}{\sqrt{3}}} = 5\sqrt{3}$$



راه حل دوم:

نکته: در مثلث متساوی‌الساقین، زاویه‌های روبه‌رو به ساق‌ها با هم برابرند.

نکته: در مثلث متساوی‌الاضلاع، هر سه زاویه برابر  $60^\circ$  هستند و برعکس.

نکته: اندازه ارتفاع مثلث متساوی‌الاضلاع به ضلع  $a$  برابر  $\frac{\sqrt{3}}{2}a$  است.

$$\triangle OAB: OA = OB \Rightarrow \hat{A} = \hat{B} = \frac{180^\circ - \hat{O}}{2} = \frac{180^\circ - 60^\circ}{2} = 60^\circ$$

$$\hat{A} = \hat{B} = \hat{O} = 60^\circ \Rightarrow \triangle OAB \text{ متساوی‌الاضلاع به ضلع } AB = 10 \text{ است.} \Rightarrow OH = \frac{\sqrt{3}}{2} \times 10 = 5\sqrt{3}$$

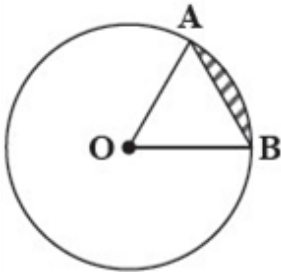
گزینه ۲ پاسخ صحیح است. (۲۷۳)

$$S = \frac{\sqrt{3}}{4} a^2$$

نکته: مساحت مثلث متساوی الاضلاع به ضلع  $a$  برابر است با:

$$S = \frac{\pi \alpha}{360} \times R^2 \quad \text{نکته: مساحت قطاع با زاویه مرکزی } \alpha \text{ (برحسب درجه) در دایره‌ای به شعاع } R \text{ برابر است با:}$$

برای به دست آوردن مساحت قسمت هاشورخورده، باید مساحت مثلث متساوی الاضلاع  $OAB$  را از مساحت قطاع روبه‌رو به کمان  $AB$  کم کنیم. با استفاده از نکات بالا داریم:



$$\begin{cases} S_{OAB} = \frac{\sqrt{3}}{4} \times 6^2 = 9\sqrt{3} \approx 9 \times 1/7 = 15/3 \\ S_{\text{قطاع}} = \frac{\pi \times 60}{360} \times 6^2 = 6\pi \approx 6 \times 3/14 \approx 18/8 \end{cases}$$

$$\Rightarrow S_{\text{هاشور}} \approx 18/8 - 15/3 = 3/5$$

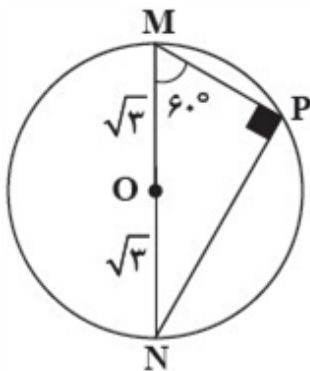
گزینه ۳ پاسخ صحیح است. (۲۷۴)

نکته: اندازه زاویه محاطی روبه‌رو به قطر دایره، برابر  $90^\circ$  است.

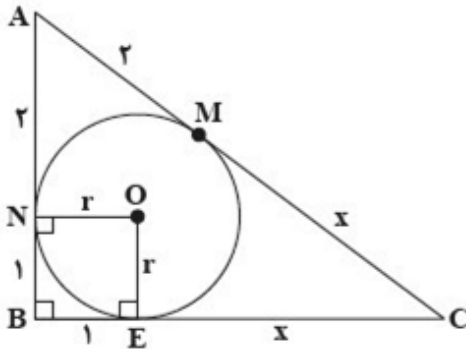
مطابق شکل، زاویه  $P$  روبه‌رو به قطر  $MN$  است، پس از نکته بالا نتیجه می‌گیریم:  $\hat{P} = 90^\circ$  حال در مثلث قائم‌الزاویه  $PMN$  داریم:

$$\sin \hat{M} = \frac{PN}{MN} \Rightarrow \sin 60^\circ = \frac{PN}{2OM}$$

$$\Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{PN}{2\sqrt{3}} \Rightarrow PN = 3$$



گزینه ۳ پاسخ صحیح است. نکته: طول مماس‌های رسم شده بر یک دایره از یک نقطه‌ی خارج آن با هم برابرند. با توجه به نکته‌ی بالا داریم:



$$NB = BE \xrightarrow{NB = OE = r = 1} NB = BE = 1$$

$$AN = AM \xrightarrow{AM = 2} AN = AM = 2$$

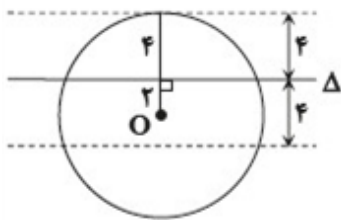
$$CM = CE = x$$

با استفاده از قضیه‌ی فیثاغورس در مثلث ABC داریم:

$$AB^2 + BC^2 = AC^2 \Rightarrow (2+1)^2 + (x+1)^2 = (x+2)^2 \Rightarrow 9 + x^2 + 2x + 1 = x^2 + 4x + 4$$

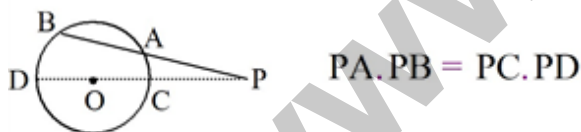
$$\Rightarrow 2x = 6 \Rightarrow x = 3 \Rightarrow CM = CE = 3$$

$$\Rightarrow \begin{cases} AB = AN + NB = 2 + 1 = 3 \\ BC = BE + CE = 1 + 3 = 4 \\ AC = AM + CM = 2 + 3 = 5 \end{cases} \Rightarrow \Delta ABC \text{ محیط} = 3 + 4 + 5 = 12$$



گزینه ۲ پاسخ صحیح است. مکان هندسی نقاطی که از خط  $\Delta$  به فاصله‌ی ۴ باشند، دو خط موازی  $\Delta$  و به فاصله‌ی ۴ از آن است. مطابق شکل یکی از این دو خط بر دایره مماس است و دیگری دایره را در دو نقطه قطع می‌کند، پس سه نقطه با این ویژگی وجود دارد.

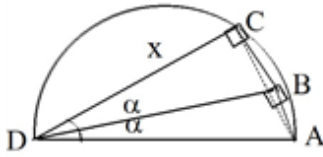
گزینه ۱ پاسخ صحیح است. بنا به قضیه روابط طولی در دایره داریم:



بنا به فرض:  $PB = 2x + 4$ ,  $PA = x + 4$ ,  $AB = x$ ,  $PD = 10 + 6 = 16$ ,  $PC = 6$

$$(x+4)(2x+4) = 6 \times 16 \Rightarrow (x+2)(x+4) = 6 \times 8 \Rightarrow x = 4$$

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. از D به B وصل می‌کنیم. زاویه  $\hat{D}_1$  و  $\hat{D}_2$  زاویه‌های محاطی روبه‌رو یک کمان هستند و با هم برابرند. فرض کنید این زاویه  $\alpha$  باشد، داریم:



$$\triangle ABD: \sin \alpha = \frac{AB}{AD} = \frac{1}{3}$$

$$\triangle ACD: \cos 2\alpha = \frac{x}{6}$$

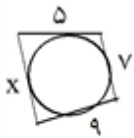
$$\Rightarrow \cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2 \alpha \Rightarrow \frac{x}{6} = 1 - 2\left(\frac{1}{9}\right) = \frac{7}{9} \Rightarrow x = \frac{14}{3}$$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. بنابر رابطه در دایره داریم:  $x(32 + x) = 10(22 + 10)$

$$x^2 + 32x - 320 = 0 \Rightarrow (x - 8)(x + 40) = 0$$

در نتیجه  $x = 8$ .

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. در چهارضلعی محیطی، طول قطعات مماس‌ها که از یک رأس رسم شوند، برابرند، در نتیجه مجموع دو ضلع مقابل برابر مجموع دو ضلع مقابل دیگر است.



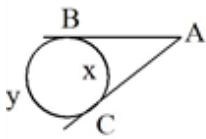
$$5 + 9 = 7 + x \Rightarrow x = 7$$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. دو کمان X و Y محاسبه می‌شوند:

$$x + y = 360 \text{ و } \frac{x}{y} = \frac{3}{5}$$

$$x + \frac{5}{3}x = 360 \Rightarrow x = 135 \text{ و } y = 225$$

$$\widehat{BAC} = \frac{y - x}{2} = 45^\circ \text{ اندازه زاویه بین این دو مماس}$$

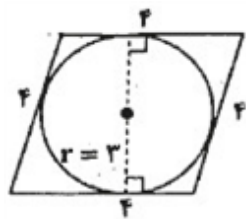


گزینه ۱ پاسخ صحیح است.  $\triangle OTH$  و  $\triangle OTM$  بنابه حالت (زز) متشابه‌اند. نسبت تشابه آن‌ها به صورت زیر است:

$$\frac{OH}{OT} = \frac{OT}{OM} \xrightarrow{OT = R} OH \cdot OM = R^2 \xrightarrow{\substack{OM = 8 \\ R = 4}} OH = 2$$

با استفاده از قضیه فیثاغورس در مثلث OTH داریم:

$$TH = \sqrt{OT^2 - OH^2} = \sqrt{16 - 4} = 2\sqrt{3} \Rightarrow TT' = 2TH = 4\sqrt{3}$$



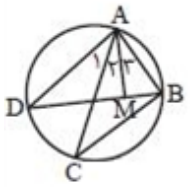
گزینه ۲ پاسخ صحیح است. نکته: مساحت هر متوازی‌الاضلاع برابر است با حاصل ضرب ارتفاع در قاعده‌ی نظیرش، مطابق شکل ارتفاع این لوزی برابر است با:

$$h = 2r = 2 \times 3 = 6$$

با توجه به نکته‌ی بالا، مساحت این لوزی برابر است با:

$$S_{\text{لوزی}} = a \cdot h = 4 \times 6 = 24$$

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. (۲۸۴)



$$\widehat{A}_1 = \widehat{A}_2 \Rightarrow \widehat{A}_1 + \widehat{A}_3 = \widehat{A}_2 + \widehat{A}_3$$

$$\left. \begin{array}{l} \widehat{DAM} = \widehat{BAC} \\ \widehat{D} = \widehat{C} \end{array} \right\} \Rightarrow \triangle DM \sim \triangle ABC \Rightarrow \frac{AD}{AC} = \frac{DM}{BC}$$

$$\Rightarrow AD \times BC = AC \times DM$$

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. (۲۸۵)

$$CB^2 = CD \times CA, \widehat{A} = 30^\circ \Rightarrow AC = 2BC \Rightarrow CB = 2CD = \sqrt{3}$$

$$\Rightarrow BC = 2\sqrt{3}, \operatorname{tg} \widehat{C} = \sqrt{3} = \frac{AB}{BC} \Rightarrow AB = 2\sqrt{3} \times \sqrt{3} = 6$$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. (۲۸۶)

$$\left\{ \begin{array}{l} L = r \\ |OO'| = r \end{array} \right. \Rightarrow L^2 = (d)^2 - (R - R')^2$$

$$\Rightarrow (R - R')^2 = 81 - 49 = 32 \Rightarrow R - R' = 4\sqrt{2}$$

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. قطر دایره‌ی کوچک‌تر  $\frac{3}{4}$  قطر دایره‌ی بزرگ‌تر است. پس وتر BP نیز  $\frac{3}{4}$  وتر DB است. (دو مثلث ADB و CPB متشابهند.) (۲۸۷)

$$\frac{BP}{BD} = \frac{3}{4} \Rightarrow BP = 3DP$$

$$\text{روابط طولی: } EP \cdot FP = DP \cdot BP \Rightarrow 15 \times 10 = DP \cdot (3DP) \Rightarrow DP = 5\sqrt{2}$$

گزینه ۴ پاسخ صحیح است.  $\widehat{CDA} = 90^\circ \Rightarrow \widehat{AB} = \widehat{BC} = 90^\circ \Rightarrow \widehat{AE} = \widehat{ED} = \widehat{DC} = \frac{180}{3} = 60^\circ$  (۲۸۸)

$$x = \frac{1}{2}(\widehat{EB} - \widehat{DC}) = \frac{1}{2}(150 - 60) = 45^\circ$$

$$y = \frac{1}{2}(\widehat{ADC} - \widehat{AB}) = \frac{1}{2}(180 - 90) = 45^\circ$$

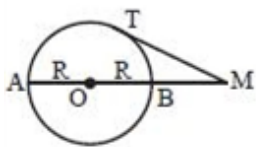
گزینه ۳ پاسخ صحیح است. نقطه‌ی M خارج دایره و مماس MT را در نظر می‌گیریم. از M به مرکز دایره وصل می‌کنیم و امتداد می‌دهیم، داریم: (۲۸۹)

$$MT^2 = MB \times MA \Rightarrow \sqrt{12}^2 = MB(MB + 2R)$$

$$\Rightarrow 12 = MB(MB + 4) \Rightarrow MB^2 + 4MB - 12 = 0$$

$$\Rightarrow (MB + 6)(MB - 2) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} MB = -6 \text{ غ ق} \\ MB = 2 \Rightarrow \text{دورترین فاصله M از دایره} = MA = 6 \end{cases}$$



گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

$$\begin{cases} AB = CD \Rightarrow \widehat{AB} = \widehat{CD} \Rightarrow \widehat{AC} + \widehat{CB} = \widehat{CB} + \widehat{BD} \Rightarrow \widehat{AC} = \widehat{BD} \\ AB \parallel DE \Rightarrow \widehat{AE} = \widehat{BD} \end{cases}$$

همچنین دو وتر AB و CD برابر و متقاطع اند، پس خطی که مرکز دایره را به نقطه‌ی تقاطع آن‌ها وصل کند، نیمساز آن زاویه خواهد بود. بنابراین  $\widehat{AMO} = \widehat{DMO}$  (I) و چون  $AB \parallel DE$  و OM مورب:

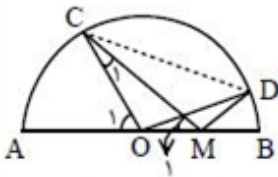
$$\widehat{AMO} = \widehat{MOD} = 70^\circ \quad (\text{II})$$

از رابطه‌های (I) و (II) نتیجه می‌شود:  $\widehat{AMD} = 140^\circ$ .

$$\begin{cases} \widehat{EA} + \widehat{AC} + \widehat{CB} + \widehat{BD} = 180^\circ \\ \widehat{EA} = \widehat{AC} = \widehat{BD} = y \text{ و } \widehat{CB} = x \\ \widehat{AMD} = \frac{\widehat{EAD} + \widehat{CB}}{2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x + 3y = 180 \\ \frac{(180 + y) + x}{2} = 140 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 60^\circ \\ y = 40^\circ \end{cases} \Rightarrow \widehat{BC} = 60^\circ$$

گزینه ۱ پاسخ صحیح است.



$$O\hat{C}M : O\hat{M}_1 = \hat{C}_1 + \hat{M}_1 \Rightarrow \hat{M}_1 = 50^\circ - 20^\circ = 30^\circ$$

از آنجا که  $O\hat{C}M = O\hat{D}M$ ، پس چهارضلعی OCDM محاطی است بنابراین زوایای  $C\hat{M}O$  و  $C\hat{D}O$  که روبه‌رو به یک وتر هستند با هم برابرند و:

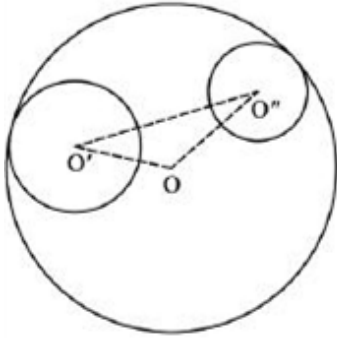
$$C\hat{D}O = C\hat{M}O (\hat{M}_1) = 30^\circ$$

از طرفی مثلث OCD متساوی‌الساقین است در نتیجه:

$$C\hat{O}D = 180^\circ - (C\hat{O}D + O\hat{D}C) = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ \Rightarrow \widehat{CD} = 120^\circ$$

$$\widehat{DB} = 180^\circ - (\widehat{AC} + \widehat{CD}) \Rightarrow \widehat{DB} = 10^\circ$$

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. با توجه به روابط داده شده، دایره‌های  $C'$  و  $C''$  بر دایره  $C$  مماس داخل‌اند. در مثلث  $OO'O''$  با توجه به قضیه‌ی نامساوی مثلثی خواهیم داشت:



$$\begin{aligned} OO'' - OO' &< O'O'' < OO'' + OO' \\ \Rightarrow (R - R'') - (R - R') &< O'O'' < (R - R'') + (R - R') \\ \Rightarrow R' - R'' &< O'O'' < 2R - (R' + R'') \end{aligned}$$

گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

$$S = \frac{bc}{r} = 5 \Rightarrow bc = 10, a + b + c = k \text{ محیط}$$

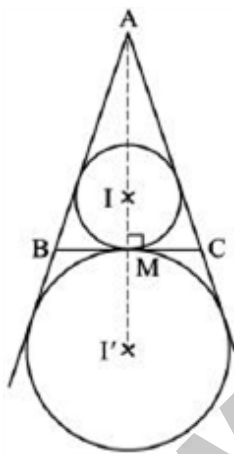
$$(b + c)^2 = (k - a)^2 \Rightarrow b^2 + c^2 + 2bc = k^2 + a^2 - 2ak \quad (1)$$

اگر  $O$  مرکز دایره باشد داریم:

$$OA = R\sqrt{2} = 3\sqrt{2}$$

$$AN = \text{نصف محیط} \Rightarrow (\sqrt{2}R)^2 - R^2 = AN^2 \Rightarrow AN = R = 3 \Rightarrow k = 2AN = 6$$

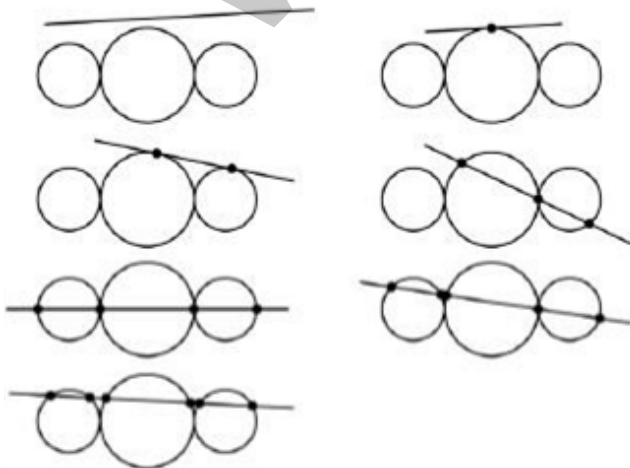
$$\xrightarrow{(1)} 2bc = k^2 - 2ak \Rightarrow 20 = 36 - 2 \times a \times 6 \Rightarrow a = \frac{4}{3}$$



گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

اگر  $I$  مرکز دایره‌ی محاطی داخلی  $I'$  مرکز دایره‌ی محاطی خارجی باشد بدیهی است که  $I'I \perp BC$  و اگر نقطه‌ی  $M$  محل تماس دو دایره باشد، واضح است که  $M$  هم روی خط  $AI$  (نیمساز  $A$ ) و هم روی  $I'I$  است، پس  $AM$  هم عمود و هم نیمساز است یعنی مثلث  $ABC$  متساوی‌الساقین است.

گزینه ۳ پاسخ صحیح است.





۲۹۶

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. در مثلث  $OAB$ ،  $OA = OB = r$  شعاع دایره است زاویه مرکزی  $\hat{O}$  روبه روی کمان  $\widehat{AB}$  می باشد بنابراین مثلث مذکور قائم الزاویه متساوی الساقین است. در نتیجه:

$$S_{\triangle AOB} = \frac{1}{2}(r)(r) = \frac{1}{2}r^2$$

از طرفی زاویه  $\hat{E}$  محاطی و رو به قطر  $DC$  است پس  $\hat{E} = 90^\circ$  و چون  $\widehat{DE} = \widehat{EC}$  مثلث  $\triangle CED$  نیز قائم الزاویه متساوی الساقین است و داریم:

$$DE = EC = x \Rightarrow (2r)^2 = x^2 + x^2 \Rightarrow x^2 = 2r^2$$

$$S_{\triangle AOB} = \frac{1}{2}x^2 = r^2$$

$$\frac{S_{\triangle AOB}}{S_{\triangle CED}} = \frac{1}{2}$$

۲۹۷

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. کافی است کمان  $\widehat{AB}$  را محاسبه کنیم:

$$\widehat{AB} + \widehat{BC} + \widehat{CD} + \widehat{AD} = 360 \rightarrow 2\widehat{BC} + \widehat{AD} = 360 \quad (1)$$

از طرفی

$$\hat{E} = \frac{\widehat{BC} - \widehat{AD}}{2} = 20 \Rightarrow \widehat{BC} - \widehat{AD} = 40 \quad (2)$$

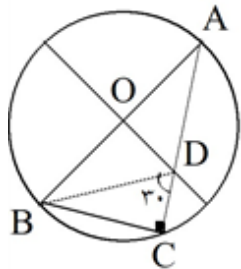
$$(2) \text{ و } (1) \Rightarrow 2\widehat{BC} + \widehat{BC} - 40 = 360 \Rightarrow 3\widehat{BC} = 400 \Rightarrow \widehat{BC} = 100$$

$$\widehat{ACD} = \frac{60}{2} = 30 \text{ و } \widehat{AD} = 60$$

در نتیجه:

۲۹۸

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. از این که دو قطر دایره بر هم عمود است (دو قطر عمود منصف یکدیگرند) در نتیجه:



$$\begin{aligned} AD &= BD \\ \Rightarrow \hat{A} &= \hat{B} = 15^\circ \end{aligned} \quad (1)$$

چون  $\hat{D}$  زاویه خارجی مثلث  $ABD$  می باشد پس  $\hat{D} = 2 \times 15 = 30$  از طرفی

$$\frac{AD}{DC} = \frac{BD}{DC} \quad (1)$$

و زاویه  $\hat{C}$ ، زاویه محاطی رو به قطر است در نتیجه  $\hat{C} = 90^\circ$  در مثلث  $BDC$  داریم.

$$\cos \hat{D} = \frac{DC}{BD} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{DC}{BD} \Rightarrow \frac{BD}{DC} = \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

۳۹۹

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. از این که A وسط کمان ED است در نتیجه (۱)  $\widehat{ED} = \widehat{AD}$  از طرفی:

$$\widehat{B} = \frac{\widehat{AC}}{2} = \frac{\widehat{AD} + \widehat{DC}}{2} \quad (2)$$

$$\widehat{F} = \frac{\widehat{EB} + \widehat{BC} + \widehat{AD}}{2}$$

$$\widehat{B} + \widehat{F} = \frac{\widehat{AD} + \widehat{DC} + \widehat{BC} + \widehat{EB} + \widehat{EA}}{2} = \frac{360}{2} = 180$$

از (۱) و (۲) داریم:

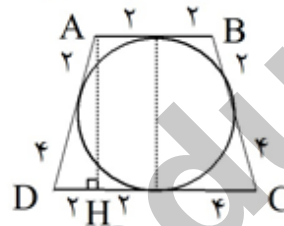
$$\widehat{A} = \frac{\widehat{BC}}{2} = 40 \Rightarrow \widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{F} = 220$$

و از طرفی

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. چون ABCD متساوی الساقین است در نتیجه  $AD = BC$ . هم چنین می دانیم طول مماس های رسم شده بر یک دایره از هر نقطه خارج آن با هم برابرند بنابراین با توجه به شکل

$$AH^2 + DH^2 = AD^2 \Rightarrow AH = \sqrt{36 - 4} = 4\sqrt{2}$$

$$S_{ABCD} = \frac{1}{2}(4 + 8)(4\sqrt{2}) = 24\sqrt{2}$$

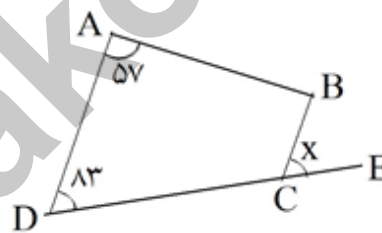


گزینه ۲ پاسخ صحیح است. چون چهارضلعی ABCD محاطی است بنابراین زوایای روبه رو مکمل یکدیگرند یعنی

$$\widehat{C} = 180 - 57 = 123^\circ$$

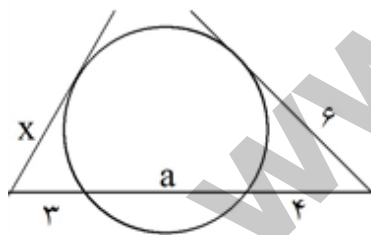
$$\widehat{X} = 180 - 123 = 57$$

و در نتیجه:



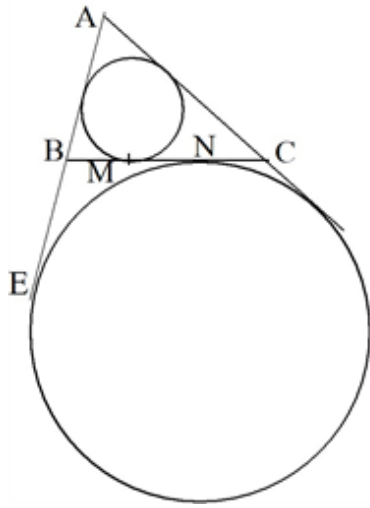
گزینه ۱ پاسخ صحیح است. قطعه مماس واسطه هندسی بین دو قطعه از قاطع است.

۳۰۲



$$2(4 + a) = 36 \Rightarrow a = 5$$

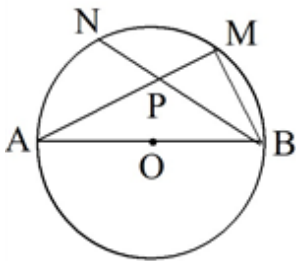
$$x^2 = 3(a + 3) = 3(8) \Rightarrow x = 2\sqrt{6}$$



۳۰۳

گزینه ۲ پاسخ صحیح است.  
همواره اگر  $2P$  محیط مثلث  $ABC$  باشد، آن‌گاه  
 $BM = 11 - 7 = 4$  یعنی  $BM = P - AC$   
و  $BN = BE = P - AB$

پس  $BN = 11 - 5 = 6$ ، بنابراین داریم:  
 $MN = BN - BM = 6 - 4 = 2$



۳۰۴

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. با توجه به رابطه‌ی طولی در دایره داریم:  
 $NP \times PB = AP \times PM \Rightarrow PB = 4, AM = 12, BN = 9$   
زاویه‌ی  $M$  محاطی رویه‌رو به قطر دایره است، پس  $\widehat{M} = 90^\circ$   
پس در مثلث قائم‌الزاویه  $ABM$  و  $BMP$  داریم:

$$AB^2 = MB^2 + 144 = PB^2 - PM^2 + 144 = 156$$

$$AB = \sqrt{156} = 2\sqrt{39} \Rightarrow R = \sqrt{39}$$

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. در هر مربع قطر‌ها نیم‌ساز زاویه‌های نظیرشان هستند، بنابراین:

$$\begin{cases} M = 90^\circ \\ OMA = 45^\circ \end{cases} \Rightarrow AOM = 45^\circ$$

در نتیجه مثلث  $AOM$  متساوی‌الساقین است و داریم:  $AM = MO$

$$\widehat{AOM}: AM^2 + OM^2 = OA^2 \Rightarrow 2OM^2 = OA^2$$

$$\Rightarrow OA = \sqrt{2}OM \Rightarrow OM + 3\sqrt{2} - 3 = \sqrt{2}OM$$

$$\Rightarrow 3\sqrt{2} - 3 = OM(\sqrt{2} - 1) \Rightarrow OM = \frac{3\sqrt{2} - 3}{\sqrt{2} - 1} = \frac{3(\sqrt{2} - 1)}{\sqrt{2} - 1} = 3$$

$$OA = \sqrt{2}OM = 3\sqrt{2}$$



۳۰۶

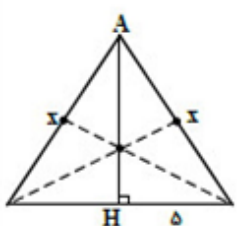
گزینه ۴ پاسخ صحیح است. شعاع دایره‌ی محاطی هر مثلث مساوی  $\frac{S}{p}$  است، بنابراین  $\frac{10}{3} = \frac{S}{p}$  در نتیجه  $S = \frac{10}{3}p$

اگر ساق مثلث  $x$  باشد ارتفاع  $AH = \sqrt{x^2 - 25}$  مساحت مثلث برابر است با:

$$\frac{1}{3}(x + x + 10) \times \frac{1}{2} = AH \times 10 \times \frac{1}{2}$$

$$2x + 10 = 3\sqrt{x^2 - 25} \Rightarrow 4x^2 + 40x + 100 = 9x^2 - 225$$

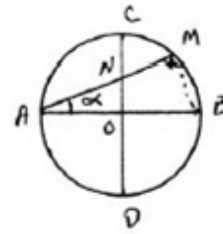
$$5x^2 - 40x - 325 = 0 \Rightarrow x^2 - 8x - 65 = 0 \Rightarrow x = 13$$



گزینه ۱ پاسخ صحیح است. در دو مثلث قائم الزاویه AON و AMB داریم  $OA = R$  و  $AB = 2R$

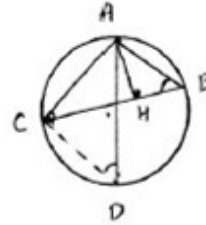
$$AN = \frac{R}{\cos \alpha}, AM = 2R \cos \alpha$$

$$\frac{NM}{NA} = \frac{AM - AN}{AN} = \frac{AM}{AN} - 1 = 2 \cos \alpha - 1 = \cos 2\alpha$$



گزینه ۴ پاسخ صحیح است. دو مثلث قائم الزاویه ABH و ACD متشابه هستند.

$$\frac{AH}{AC} = \frac{AB}{AD} \Rightarrow \frac{AH}{9} = \frac{8}{12} \Rightarrow AH = 6$$



گزینه ۲ پاسخ صحیح است. فرض کنیم دایره‌ی گذرا از دو رأس A و B در نقطه‌ی M بر ضلع DC مماس باشد. در این صورت اگر O مرکز دایره باشد آن‌گاه OM بر DC و امتداد آن بر AB عمود خواهد بود در مثلث قائم الزاویه OAN قضیه‌ی فیثاغورس را می‌نویسیم.

$$OA^2 = AN^2 + ON^2 \Rightarrow R^2 = 2^2 + (4 - R)^2 \Rightarrow R^2 = 4 + 16 - 8R + R^2$$

$$\Rightarrow R = \frac{20}{8} = \frac{5}{2}$$

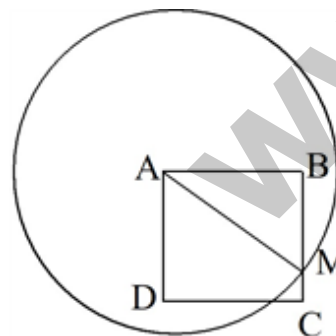
گزینه ۴ پاسخ صحیح است. ذوزنقه ABCD یک چهارضلعی محیطی است پس مجموع اضلاع مقابل آن با هم برابرند. از طرف دیگر پاره‌خطی که وسط‌های دو ساق ذوزنقه را به هم وصل می‌کند نصف مجموع دو قاعده است یعنی  $MN = \frac{AB + DC}{2}$  داریم:

$$MN = 12 \Rightarrow AB + DC = 24$$

در ضمن  $AB + DC = AD + BC$  بنابراین محیط این ذوزنقه برابر است با:

$$\text{محیط} = AB + DC + AD + BC = 24 + 24 = 48$$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. شعاع دایره  $\frac{2}{5}$  است پس  $AM = \frac{2}{5}$  بنابراین قضیه فیثاغورس در مثلث ABM نتیجه می‌گیریم.



$$AM^2 = AB^2 + BM^2 \Rightarrow \left(\frac{5}{2}\right)^2 = 2^2 + BM^2 \Rightarrow BM^2 = \frac{9}{4}$$

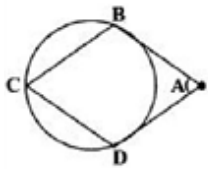
$$\Rightarrow BM = \frac{3}{2}$$

اندازه پاره‌خط CM نزدیک‌ترین فاصله رأس مربع تا نقاط تلاقی دایره با ضلع مربع است. داریم:

$$CM = BC - BM = 2 - \frac{3}{2} = \frac{1}{2}$$

۳۱۲

گزینه ۱ پاسخ صحیح است.



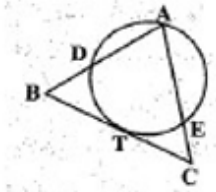
$$\begin{aligned} ABCD \text{ لوزی است} &\Rightarrow \widehat{C} = \widehat{A} \Rightarrow \widehat{BD} = 2\widehat{C} = 2\widehat{A} \\ \Rightarrow \widehat{A} &= \frac{\widehat{BCD} - \widehat{BD}}{2} = \frac{(360 - 2A) - 2A}{2} = 180 - 2A \\ \Rightarrow 3A &= 180^\circ \Rightarrow A = 60^\circ \end{aligned}$$

۳۱۳

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. برای مماس رابطه‌ی طولی می‌نویسیم:

$$1) BT^2 = BD \cdot BA \xrightarrow{BT = 2CT} 16 CT^2 = BD \cdot AB \xrightarrow{AB = AC} 16 CT^2 = BD \cdot AC$$

$$2) CT^2 = CE \cdot CA$$



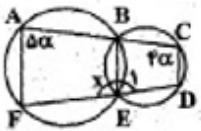
حالا اگر این دو رابطه را به هم تقسیم کنیم خواهیم داشت:

$$\frac{16 CT^2}{CT^2} = \frac{BD \cdot AC}{CE \cdot AC} \xrightarrow{\text{ساده}} 16 = \frac{BD}{CE}$$

۳۱۴

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. چهارضلعی‌های ABEF و BCDE محاطی‌اند و مجموع

زوایای روبه‌رو در هر چهارضلعی محاطی ۱۸۰° است! پس:



$$ABEF: \delta\alpha + x = 180 \Rightarrow \delta\alpha = 180^\circ - x \xrightarrow{\widehat{E}_1 = 180^\circ - x} \delta\alpha = \widehat{E}_1$$

$$BCDE: 4\alpha + \widehat{E}_1 = 180^\circ$$

$$4\alpha + \delta\alpha = 180^\circ \Rightarrow \alpha = 20^\circ$$

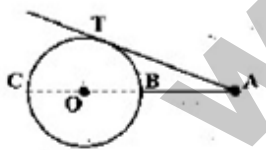
از مقایسه‌ی این دو رابطه خواهیم داشت:

۳۱۵

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. دورترین و نزدیک‌ترین نقاط یک دایره نسبت به نقطه‌ای خارج یا داخل آن دایره، محل تلاقی قطری از دایره یا امتداد قطری از دایره است که از نقطه‌ی A می‌گذرد.

$$BA = 4R$$

$$BC = 2R \Rightarrow AC = 6R$$



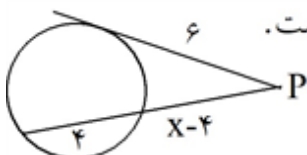
از روابط طولی در دایره داریم:

$$AT^2 = AB \times AC = 4R \times 6R = 24R^2 \Rightarrow AT = 2\sqrt{6}R$$

۳۱۶

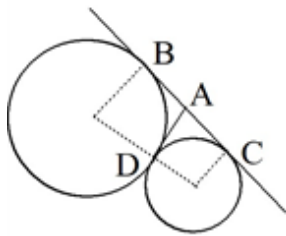
گزینه ۳ پاسخ صحیح است. می‌دانیم مجذور مماس برابر با حاصلضرب دو قطعه قاطع است.

اگر فاصله‌ی P تا انتهای قاطع برابر X باشد، داریم:



$$X(X-4) = 36 \Rightarrow X^2 - 4X - 36 = 0$$

$$X = 2 + \sqrt{4 + 36} = 2 + 2\sqrt{10}$$

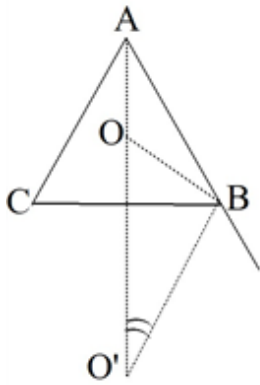


گزینه ۳ پاسخ صحیح است. با توجه به شکل داریم  $AD = AB = AC$  زیرا

مماس‌های رسم شده از یک نقطه بر دایره مساویند، در نتیجه  $AD = \frac{BC}{2}$  ولی طول مماس مشترک خارجی این دو دایره برابر است با:

$$BC^2 = (R + R')^2 - (R - R')^2 = 4R''^2 = 40$$

$$AD = \sqrt{10} \text{ یا } BC = 2\sqrt{10}$$



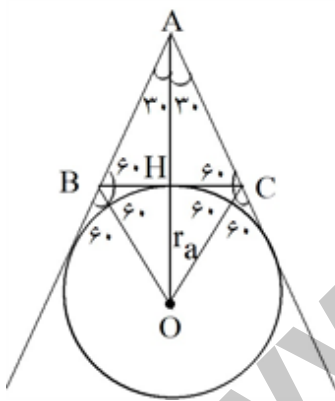
گزینه ۳ پاسخ صحیح است. نقطه‌ی  $O$  و  $O'$  در محل تلاقی نیم‌سازها است.

$$\hat{O} = 30^\circ \Rightarrow O'B = AB = 2\sqrt{3}$$

قائم‌الزاویه  $OBO'$  اندازه‌ی وتر  $OO'$  برابر است با  $2\sqrt{3} \times \frac{2}{\sqrt{3}} = 4$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$$\begin{cases} \widehat{BC} = \widehat{CD} = \widehat{DE} = y \Rightarrow 3y + 2x = 360^\circ \\ \hat{A} = 40^\circ = \frac{\widehat{CD} - \widehat{BE}}{2} \Rightarrow y - 2x = 80^\circ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 15^\circ \\ y = 110^\circ \end{cases}$$



گزینه ۲ پاسخ صحیح است. مرکز دایره‌ی محاطی خارجی، محل تقاطع دو نیم‌ساز

خارجی است که مطابق شکل نقطه‌ی  $O$  می‌باشد، در این شکل دو مثلث  $ABC$  و  $OBC$  به حالت تساوی دو زاویه و ضلع بین هم‌نهشت‌اند و لذا:

$$OH = AH = \frac{\sqrt{3}}{2} a$$

$$r_a = \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} a = \frac{3}{4} a$$

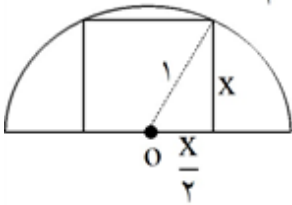
گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$$\hat{APN} = \hat{ANP} = \frac{\widehat{PN}}{2} \text{ زاویه‌ی ظلّی}$$

$$\hat{APN} + \hat{ANP} + \hat{A} = 180^\circ \Rightarrow \widehat{PN} + \hat{A} = 180^\circ \Rightarrow \widehat{PN} = 180^\circ - \hat{A}$$

$$\hat{M} = \frac{\widehat{PN}}{2} = \frac{180^\circ - A}{2} = 90^\circ - \frac{\hat{A}}{2}$$

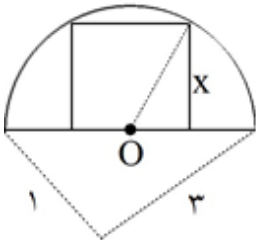
گزینه ۲ پاسخ صحیح است. شعاع دایره یک واحد است اگر ضلع مربع  $X$  فرض شود داریم:



$$X^2 + \frac{X^2}{4} = 1 \Rightarrow X^2 = \frac{4}{5} \Rightarrow X = \frac{2}{\sqrt{5}}$$

قطر مربع برابر است با:  $\frac{2}{\sqrt{5}} \times \sqrt{2} = \frac{2\sqrt{10}}{5}$

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. قطر نیم دایره  $\sqrt{1+9} = \sqrt{10}$



ضلع مربع  $X$  فرض شود خواهیم داشت:  $X^2 + \left(\frac{X}{2}\right)^2 = \left(\frac{\sqrt{10}}{2}\right)^2$

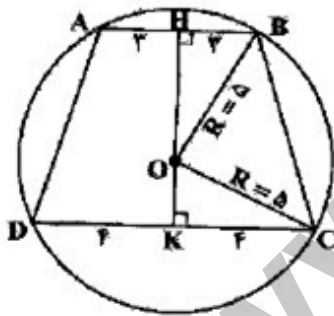
$5X^2 = 10 \Rightarrow X = \sqrt{2}$  قطر مربع برابر است با  $X\sqrt{2} = \sqrt{2} \times \sqrt{2} = 2$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. در دو دایره‌ی مماس خارج، طول خط‌المركزین  $OO' = R + R'$  و ول مماس مشترک خارجی  $2\sqrt{RR'}$  است.

$$2\sqrt{RR'} = 36 \Rightarrow \sqrt{RR'} = 18 \xrightarrow{R' = 4R} \sqrt{4R^2} = 18 \Rightarrow 2R = 18 \Rightarrow R = 9$$

$$\Rightarrow R' = 36 \Rightarrow OO' = 36 + 9 = 45$$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. دو شکل برای این سؤال قابل رسم است:

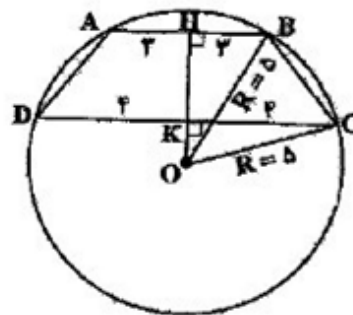


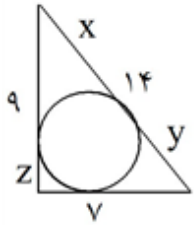
$$\begin{cases} OH = \sqrt{25 - 9} = 4 \\ OK = \sqrt{25 - 16} = 3 \end{cases} \Rightarrow HK = 7$$

$$S_{ABCD} = \frac{(6 + 14)}{2} \times 7 = 49$$

$$\begin{cases} OH = \sqrt{25 - 9} = 4 \\ OK = \sqrt{25 - 16} = 3 \end{cases} \Rightarrow HK = 1$$

$$S_{ABCD} = \frac{(6 + 14)}{2} \times 1 = 10$$

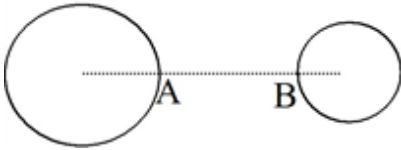




$$x + y + z = \frac{14 + 9 + 7}{2} = 15 \Rightarrow x = 8$$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. با توجه به شکل محیط مثلث برابر

۳۲۶

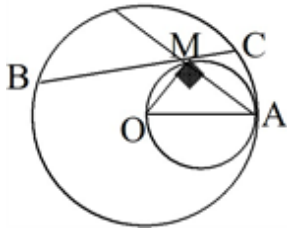


گزینه ۴ پاسخ صحیح است. کوچکترین پاره‌خط که دو سر آن روی دو

۳۲۷

دایره باشد منطبق بر خط‌المركزین است.

$$AB = 14 - (5 + 7) = 2$$



گزینه ۲ پاسخ صحیح است. اگر از نقطه‌ی M به نقاط O و A وصل کنیم در

۳۲۸

این صورت زاویه‌ی M قائمه خواهد بود زیرا محاطی روبه‌رو به قطر می‌باشد چون OM

عمود بر وتر AD است پس  $MA = MD$  داریم:

$$MA = MD \Rightarrow MB \times MC = MA \times MD \Rightarrow MB \times MC = MA^2$$

گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

۳۲۹

از نقاط B و C به نقطه‌ی تلاقی دوم دو دایره یعنی N وصل می‌کنیم.

$$\widehat{N}_1 + \widehat{N}_2 = \frac{\widehat{AB}}{2} + \frac{\widehat{AC}}{2} = \widehat{B}_1 + \widehat{C}_1 = 180 - \widehat{M} \quad (1)$$

از طرفی در مثلث BNC داریم:

$$\begin{aligned} \widehat{N}_1 + \widehat{N}_2 &= 180 - (\widehat{B}_2 + \widehat{C}_2) \\ &= 180 - \left( \frac{\widehat{APN}}{2} + \frac{\widehat{AP'N}}{2} \right) = 180 - \text{مقدار ثابت} \quad (2) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow 180 - \widehat{M} = 180 - \text{مقدار ثابت} \Rightarrow \widehat{M} = \text{مقدار ثابت} \quad (1) \text{ و } (2)$$

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. رابطه‌های طولی دایره:

۳۳۰

$$DE^2 = DC \cdot DB \Rightarrow 9^2 = 3(3 + BC) \Rightarrow BC = 24$$

$$AF^2 = AB \cdot AC \Rightarrow x^2 = 8(8 + 24) = 8 \times 32 \Rightarrow x = 16$$

گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

۳۳۱

$$\widehat{ED} = \widehat{AE} = \widehat{BC} = \widehat{CD} = \alpha \Rightarrow 2\alpha + (3\alpha + 10) = 360 \Rightarrow \alpha = 50^\circ$$

$$\widehat{P} = \frac{1}{2}(\widehat{AD} - \widehat{BC}) = \frac{1}{2}(50) = 25^\circ$$

گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

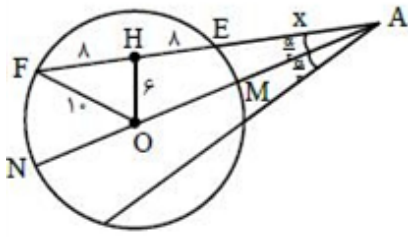
۳۳۲

$$\left. \begin{aligned} (\text{محاطی}) \widehat{C} &= \frac{1}{2}AB \\ (\text{محاطی}) \widehat{Q} &= \frac{1}{2}AB \end{aligned} \right\} \Rightarrow \widehat{C} = \widehat{Q} \left. \begin{aligned} &\Rightarrow \widehat{C} = \widehat{P} = \widehat{Q} \Rightarrow BP = BQ \Rightarrow PH = QH \\ (\text{در دو مثلث AHC و APT}) \widehat{C} &= \widehat{P} \end{aligned} \right\}$$



۳۳۳

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. عمود OH و EF را نصف می‌کند.



$$OH = \sqrt{10^2 - 8^2} = 6$$

$$AM \times AN = AE(AE + 16)$$

$$\Rightarrow (OA - R)(OA + R) = x(x + 16)$$

$$\Rightarrow 12^2 - 10^2 = x^2 + 16x \Rightarrow x^2 + 16x - 44 = 0$$

$$\Rightarrow x = \frac{-16 \pm \sqrt{64 + 44}}{2} = -8 + 6\sqrt{3}$$

$$\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \frac{OH}{AH} = \frac{6}{x + 8} = \frac{6}{6\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \frac{\alpha}{2} = 30^\circ \Rightarrow \alpha = 60^\circ$$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. رابطه‌ی طولی:

۳۳۴

$$DE \cdot AE = BE \cdot CE \Rightarrow \frac{AE}{CE} = \frac{BE}{DE}$$

اگر A را به C وصل کنیم، زاویه‌ی محاطی ACB روبه‌رو به قطر است، پس:

$$\widehat{ACB} = 90^\circ \Rightarrow \cos x = \frac{CE}{AE}$$

$$\widehat{D}_1 = \widehat{B}_1, \widehat{A}_1 = \widehat{C}_1 \quad \text{محاطی روبه‌رو به یک کمان}$$

از طرفی:

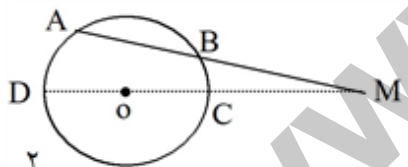
$$\Rightarrow \widehat{C}_1 = \widehat{D}_1, \widehat{D}_1 = \widehat{A}_1 \quad \text{موازی و مورب}$$

$$E\widehat{CD} \sim E\widehat{AB} \Rightarrow \frac{S_{E\widehat{CD}}}{S_{E\widehat{AB}}} = \left(\frac{CE}{AE}\right)^2 = \cos^2 x$$

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. در چهارضلعی محیطی مجموع دو ضلع مقابل برابر مجموع دو ضلع مقابل دیگر است.

۳۳۵

$$a = 8 \quad \text{پس } 5 + 7 = 4 + a = 8$$



گزینه ۳ پاسخ صحیح است. اگر M را به مرکز دایره وصل کنیم، نقطه C

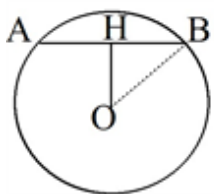
۳۳۶

نزدیک‌ترین نقطه دایره تا M است. مقدار  $MC = x$  فرض شود.

$$MA \cdot MB = MC \cdot MD \Rightarrow 15 \times 8 = x(x + 12)$$

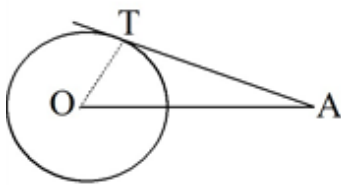
$$x^2 + 12x - 120 = 0 \Rightarrow x = -6 + \sqrt{36 + 120} = -6 + \sqrt{156} = -6 + 2\sqrt{39}$$

$$MC = 2(\sqrt{39} - 3) \quad \text{پس}$$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. به فرض  $OH = \frac{OB}{2}$  پس زاویه  $\widehat{B} = 30^\circ$  و زاویه  $\widehat{O} = 60^\circ$ 

۳۳۷

در نتیجه زاویه  $\widehat{AOB} = 120^\circ$  و کمان  $\widehat{AB}$  برابر  $120^\circ$  درجه است.



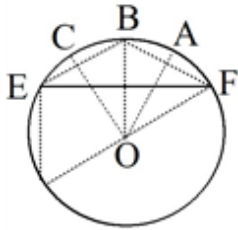
۳۳۸

گزینه ی ۲ پاسخ صحیح است. مثلث قائم الزاویه OAT

$$AT^2 = \sqrt{(7/5)^2 - (4/5)^2}$$

$$AT^2 = \sqrt{\frac{225}{4} - \frac{16}{4}} = \sqrt{\frac{144}{4}} = 6$$

محیط مثلث  $7/5 + 4/5 + 6 = 18$

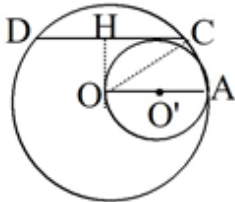


۳۳۹

گزینه ی ۲ پاسخ صحیح است. می دانیم شعاع عمود بر وتر، کمان آنرا نصف می کند با توجه به شکل داریم:

قائم الزاویه DEF داریم:  $\widehat{AOC} = \alpha + \beta \Rightarrow EF = 2(\alpha + \beta)$

$$(D = \alpha + \beta, DF = 2) \Rightarrow \sin(\alpha + \beta) = \frac{EF}{2} \Rightarrow EF = 2 \sin(\alpha + \beta)$$



۳۴۰

گزینه ی ۳ پاسخ صحیح است. در مثلث قائم الزاویه OCH داریم:  $(OH = 2, OC) \Rightarrow CH = 2\sqrt{3}$

$$CD = 4\sqrt{3}$$

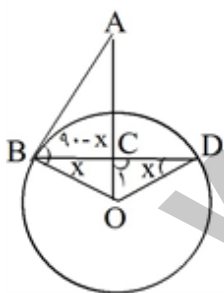
۳۴۱

گزینه ی ۱ پاسخ صحیح است. با توجه به رابطه ی طولی در دایره داریم:

$$\left. \begin{array}{l} BB' \times BA = BD \times BM \\ CC' \times CA = CM \times Cd \end{array} \right\} \xrightarrow{BM = CM} \frac{BB' \times BA}{CC' \times CA} = \frac{BD}{CD} \quad (1)$$

$$AD \text{ نیمساز قضیه نیمساز} \xrightarrow{\quad} \frac{BD}{CD} = \frac{AB}{AC} \quad (2)$$

$$(2) \text{ و } (1) \Rightarrow \frac{BB'}{CC'} = 1$$



۳۴۲

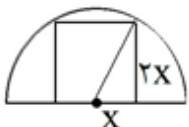
گزینه ی ۲ پاسخ صحیح است. شعاع OB بر ضلع AB عمود است. از طرفی مثلث OBD متساوی الساقین می باشد. (OB = OD) پس اگر  $\widehat{OBD} = x$  آن گاه

$$\widehat{CBA} = \widehat{BCA} = 90 - x \Rightarrow \widehat{C_1} = 90 - x$$

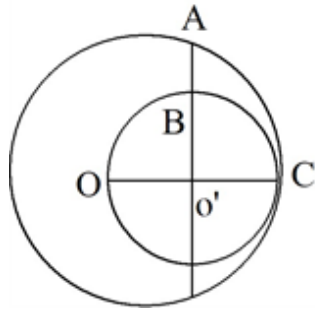
$$\widehat{O} = 90 \text{ و}$$

۳۴۳

گزینه ی ۴ پاسخ صحیح است.



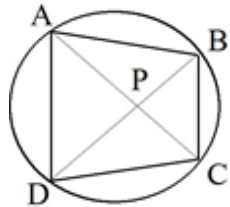
$$x^2 + (2x)^2 = R^2 \Rightarrow 5x^2 = \left(\frac{15}{2}\right)^2 \Rightarrow 4x^2 = 45$$



گزینه ۲ پاسخ صحیح است. ۳۴۴

$$OO' = 6/5 - 4 = 2/5, \quad OA'^2 = OO'^2 + O'A'^2 \Rightarrow (6/5)^2 = (2/5)^2 + O'A'^2$$

$$O'A'^2 = \frac{169}{4} - \frac{25}{4} = \frac{144}{4} = 36 \Rightarrow O'A' = 6 \Rightarrow AB = 6 - 4 = 2$$



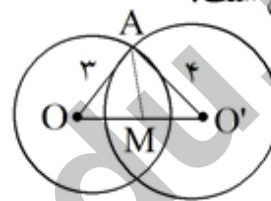
گزینه ۳ پاسخ صحیح است. ۳۴۵

$$PA \cdot PC = PB \cdot PD \Rightarrow 12 \times 12 = 8 \times PD \Rightarrow PD = 18$$

$$AM = MO = MO' \Rightarrow \widehat{OO'M} \Rightarrow OO' = 5$$

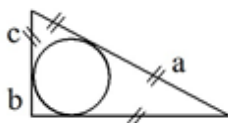
قائم الزاویه

$$TT' = \sqrt{OO'^2 - (R - R')^2} = \sqrt{25 - 1} = 2\sqrt{6}$$



گزینه ۳ پاسخ صحیح است. ۳۴۶

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. با توجه به شکل مقابل، اندازه‌ی مماس‌هایی که از هر رأس بر دایره‌ی محاطی رسم شود برابراند. بزرگ‌ترین قطعه‌ی مماس به طول a است، مجموع هر سه قطعه مماس‌های نامساوی برابر نصف محیط است.



وتر مثلث قائم‌الزاویه برابر  $\sqrt{25 + 144} = 13$  می‌باشد.

$$a + b + c = \frac{5 + 12 + 13}{2} = 15 \quad \text{و} \quad b + c = 5$$

الزاماً  $a = 15 - 5 = 10$

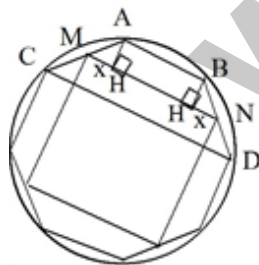
گزینه ۲ پاسخ صحیح است. هرکدام از کمان‌های نظیر  $\widehat{AC}$  مساوی  $45^\circ$  زاویه‌ی  $\widehat{M_1} = \widehat{C_1} = 45^\circ$  پس مثلث

AHM قائم‌الزاویه‌ی متساوی‌الساقین است. با فرض  $MH = x$  داریم:

$$2x^2 = 9 \Rightarrow x = \frac{3}{\sqrt{2}}$$

$$MN = 2x + 6$$

در ضمن ضلع مربع برابر است با:  
مساحت مربع:



$$MN = 2 \times \frac{3}{\sqrt{2}} + 6 \Rightarrow MN^2 = 54 + 36\sqrt{2}$$

$$\frac{CO_1}{CO} = \frac{O_1A}{OB} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

گزینه‌ی ۴ پاسخ صحیح است. دو مثلث  $COB$  و  $ACO_1$  متشابه‌اند، پس:

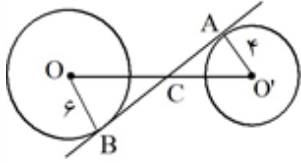
۳۴۹

این رابطه را ترکیب در مخرج می‌کنیم.

$$\frac{CO_1}{CO} = \frac{2}{3} \Rightarrow \frac{CO_1}{CO_1 + CO} = \frac{2}{5}$$

$$CO_1 + CO = 12$$

$$\frac{CO_1}{12} = \frac{2}{5} \Rightarrow CO_1 = \frac{24}{5}$$



$$CA^2 = CO_1^2 - O_1A^2 = \left(\frac{24}{5}\right)^2 - 16$$

در مثلث قائم‌الزاویه  $CAO_1$  داریم:

$$CA^2 = \frac{24^2}{25} - \frac{16}{1} = \frac{24 \times 24 - 25 \times 16}{25} = \frac{16(36 - 25)}{25} = \frac{16}{25} \times 11 \Rightarrow CA = \frac{4}{5}\sqrt{11}$$

$$\frac{CA}{CA + CB} = \frac{2}{5} \Rightarrow \frac{\frac{4}{5}\sqrt{11}}{AB} = \frac{2}{5} \Rightarrow AB = 2\sqrt{11}$$

ترکیب در مخرج می‌کنیم:  $\frac{CA}{CB} = \frac{2}{3}$

گزینه‌ی ۴ پاسخ صحیح است. اگر اوساط یک  $n$  ضلعی منتظم را به ترتیب به هم وصل کنیم، مساحت  $n$  ضلعی جدید

۳۵۰

$$S = 6 \times \frac{3^2 \times \sqrt{3}}{4} \times \cos \frac{2\pi}{6} = \frac{81\sqrt{3}}{8}$$

$\cos \frac{2\pi}{n}$  مساحت  $n$  ضلعی اولیه است، پس:

گزینه‌ی ۴ پاسخ صحیح است. از آنجا که  $R_1 + R_2 = \frac{13}{12}d$  و  $|R_1 - R_2| = \frac{5}{12}d$ ، بنابراین:

۳۵۱

$$\left. \begin{array}{l} R_1 + 2R_2 = \frac{11}{6}d \\ 3R_1 + 4R_2 = 4d \end{array} \right\} \rightarrow R_1 = \frac{d}{3}, R_2 = \frac{3}{4}d$$

و در نتیجه دو دایره متقاطع‌اند و دو خط مماس (خارجی) برای آنها وجود دارد.  $|R_1 - R_2| < d < R_1 + R_2$

گزینه‌ی ۳ پاسخ صحیح است.

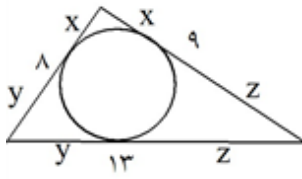
۳۵۲

فقط دو مماس مشترک (خارجی) وجود دارد  $\rightarrow$  دو دایره متقاطع‌اند  $\rightarrow 3 - 2 < \sqrt{5} < 3 + 2$

۳۵۳

$$\left. \begin{array}{l} x + y = 8 \\ x + z = 9 \\ y + z = 13 \end{array} \right\} \oplus \rightarrow 2(x + y + z) = 30 \rightarrow x + y + z = 15$$

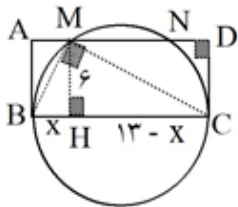
گزینه ۱ پاسخ صحیح است.



بنابراین:  $x = 2$  و  $y = 6$  و  $z = 7$  می‌باشد، در نتیجه:  $\frac{x}{y} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

۳۵۴

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. مثلث  $MBC$  در راس  $M$  قائمه است چون  $BC$  قطر دایره است و زاویه‌ی محاطی روبه‌رو به قطر  $90^\circ$  است، حال در مثلث قائم‌الزاویه ارتفاع وارد بر وتر، واسطه‌ی هندسی بین دو قطعه‌ی ایجاد شده بر وتر است، بنابراین:

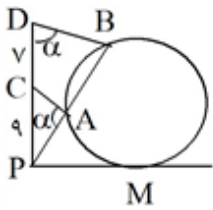


$$6^2 = x(13 - x) \Rightarrow x^2 - 13x + 36 = 0 \Rightarrow (x - 4)(x - 9) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 4 \\ x = 9 \end{cases}$$

بنابراین قطعه‌ی کوچک‌تر یعنی  $BH = 4$  می‌باشد و در نتیجه  $AM = 4$  و به همین ترتیب  $MN = 13 - (4 + 4) = 5$  و در نتیجه:  $ND = 4$

۳۵۵

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. دو مثلث  $PAC$  و  $PDB$  با دو زاویه‌ی برابر متشابه‌اند، بنابراین:



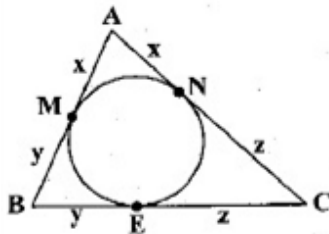
$$\frac{PA}{PD} = \frac{PC}{PB} \rightarrow \frac{PA}{9 + 7} = \frac{9}{PB} \rightarrow PA \cdot PB = 9 \times 16$$

از طرفی  $PM$  مماس بر دایره و  $PAB$  قاطع است، بنابراین:

$$PA \cdot PB = PM^2 \rightarrow PM^2 = 9 \times 16 \rightarrow PM = 3 \times 4 = 12$$

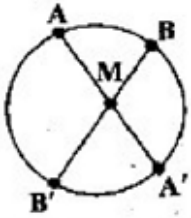
۳۵۶

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. می‌دانیم طول دو قطعه مماس رسم شده از بیرون دایره، با هم برابر است، لذا خواهیم داشت:

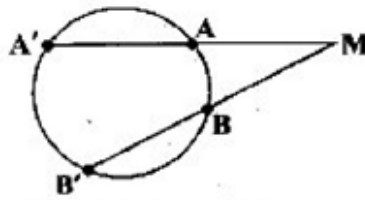


$$\begin{cases} AM = AN = x \\ BM = BE = y \\ CN = CE = z \end{cases} \Rightarrow 2(x + y + z) = 2P = 20 \Rightarrow x + y + z = 10$$

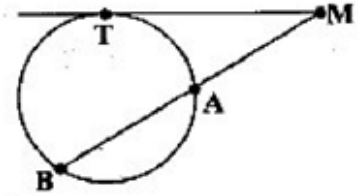
$$\Rightarrow x = 10 - (y + z) = 10 - (BC) = 10 - 8 = 2$$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. روابط طولی در دایره: ۳۵۷

$$MA \cdot MA' = MB \cdot MB'$$

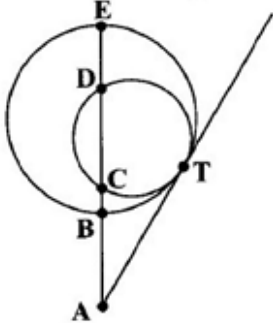


$$MA \cdot MA' = MB \cdot MB'$$



$$MT^2 = MA \cdot MB$$

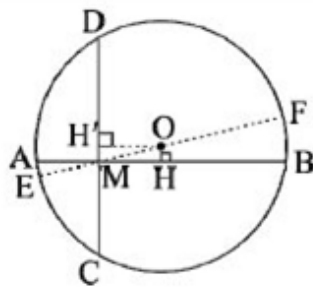
با توجه به رابطه‌ی طولی در دایره داریم:



$$\left. \begin{aligned} AT^2 &= AC \times AD \\ AT^2 &= AB \times AE \end{aligned} \right\}$$

$$\Rightarrow AC \times AD = AB \times (AC + CE)$$

$$\Rightarrow AC \times 11 = 5(AC + 9) \Rightarrow 6AC = 45 \Rightarrow AC = \frac{15}{2}$$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. ۳۵۸

$$AM \cdot BM = CM \cdot DM \Rightarrow 12 = 3DM \Rightarrow DM = 4$$

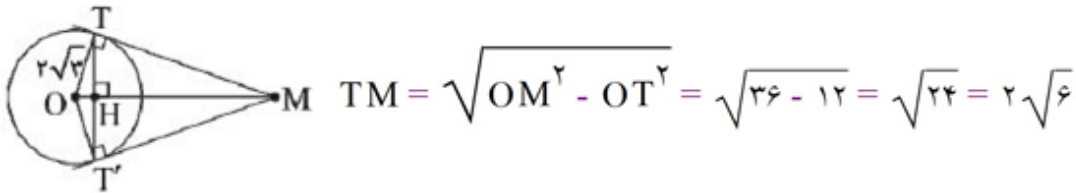
$$\left. \begin{aligned} AH &= \frac{AB}{2} = \frac{8}{2} = 4 \Rightarrow MH = AH - AM = 4 - 2 = 2 \\ CH' &= \frac{CD}{2} = \frac{7}{2} \Rightarrow MH' = CH' - CM = \frac{7}{2} - 3 = \frac{1}{2} \end{aligned} \right\}$$

$$\Rightarrow OM^2 = 4 + \frac{1}{4} = \frac{17}{4}$$

$$EM \cdot FM = AM \cdot BM \Rightarrow (R - OM)(R + OM) = 12 \Rightarrow R^2 - OM^2 = 12$$

$$\Rightarrow R^2 = 12 + \frac{17}{4} = \frac{65}{4} \Rightarrow R = \frac{\sqrt{65}}{2} \Rightarrow \text{قطر دایره } \sqrt{65}$$

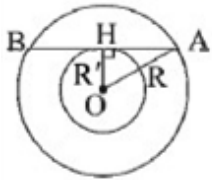
گزینه ۴ پاسخ صحیح است. (۳۵۹)



TH ارتفاع وارد بر وتر مثلث OTM است. در نتیجه:

$$TH \times OM = OT \times TM \Rightarrow TH \times 6 = 2\sqrt{3} \times 2\sqrt{6} \Rightarrow TH = 2\sqrt{2}$$

$$TT' = 2TH = 4\sqrt{2} \quad \text{پس:}$$

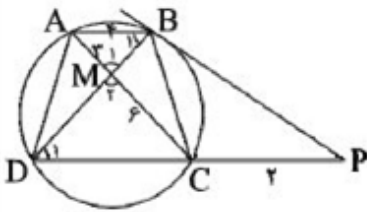
گزینه ۲ پاسخ صحیح است. مساحت ناحیه‌ی بین دو دایره‌ی هم‌مرکز  $\pi(R^2 - R'^2)$  است، پس: (۳۶۰)

$$\pi(R^2 - R'^2) = 25\pi \Rightarrow R^2 - R'^2 = 25$$

$$AH^2 = R^2 - R'^2$$

$$\Rightarrow AH^2 = 25 \Rightarrow AH = 5 \Rightarrow AB = 2AH = 10$$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. مثلث‌های AMB و DMC به حالت تساوی دو زاویه متشابه‌اند، زیرا: (۳۶۱)



$$\left. \begin{array}{l} AB \parallel CD \Rightarrow \hat{D}_1 = \hat{B}_1 \\ \hat{M}_1 = \hat{M}_2 \end{array} \right\} \Rightarrow \triangle AMD \sim \triangle DMC$$

$$\frac{AB}{DC} = \frac{AM}{MC} \Rightarrow \frac{AB}{DC} = \frac{4}{2} \Rightarrow DC = 8$$

با توجه به روابط طولی در دایره داریم:

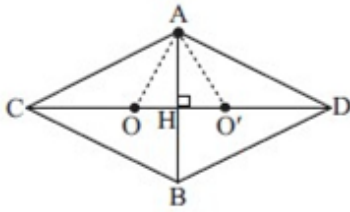
$$PB^2 = PC \times PD = (4)(2) = 8 \Rightarrow PB = 2\sqrt{2}$$





گزینه ۴ پاسخ صحیح است. چهارضلعی  $ADBC$  لوزی است. ( $AB$  و  $CD$  عمود منصف یکدیگرند.) و مثلث  $AOO'$  متساوی الاضلاع است. (هر ضلع برابر شعاع است.)

$$AH = \frac{\sqrt{3}}{2} AO = \frac{\sqrt{3}}{2} R$$



$$S_{ADBC} = \frac{1}{2} AB \cdot CD = \frac{1}{2} \left( 2 \frac{\sqrt{3}}{2} R \right) (3R)$$

$$\Rightarrow 18\sqrt{3} = \frac{3\sqrt{3}}{2} R^2 \Rightarrow R = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. طول مماس مشترک داخلی = ۰

$$\begin{aligned} \text{طول مماس مشترک خارجی} &= \sqrt{d^2 - (R - R')^2} \\ &= \sqrt{(R + 2R)^2 - (R - 2R)^2} = 2R \end{aligned}$$

$$\hat{A}_\gamma = 3x$$

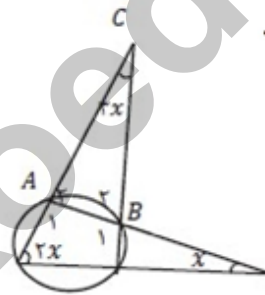
$$\hat{B}_\gamma = 180 - 2x$$

$$\rightarrow \hat{B}_\gamma = 2x$$

$$\hat{C} + \hat{A}_\gamma + \hat{B}_\gamma = 3x + 3x + 2x = 8x$$

$$= 180^\circ \rightarrow x = \frac{180}{8}$$

$$= 22/5$$



گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

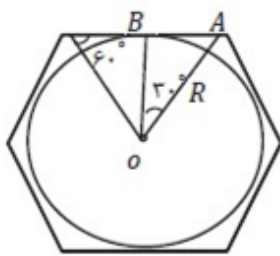
$$yk \parallel CC' \rightarrow \angle CA' = 60^\circ$$

$$\angle COC' = 120^\circ \rightarrow \angle CA = 60^\circ$$

$$\angle COD = 60^\circ \rightarrow \angle CD = 60^\circ$$

$$\angle \hat{A}D = \frac{AD}{2} = \frac{120}{2} = 60^\circ$$

گزینه ۱ پاسخ صحیح است.



گزینه ۱ پاسخ صحیح است. با توجه به شکل مقابل ضلع دایره‌ی محیطی برابر با

$$\frac{\sqrt{2}}{2} a \text{ و شعاع دایره‌ی محیطی برابر با } a \text{ می‌باشد.}$$

$$r = \frac{\sqrt{3}}{2} a \Rightarrow \frac{2r}{R} = \frac{\sqrt{3}a}{a} = \sqrt{3}$$

$$R = a$$

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. در ذوزنقه‌ی متساوی‌الساقین که محیط بر دایره به شعاع  $r$  می‌باشد حاصل ضرب دو قاعده مساوی  $4r^2$  است داریم:

$$4r^2 = 16 \rightarrow r = 2$$

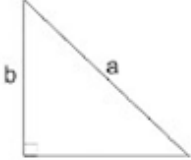
$$\text{مساحت دایره} = \pi r^2 = 4\pi$$

$$a^2 = b^2 + c^2$$

$$a^2 = 12^2 + 5^2 = 169 \Rightarrow a = 13$$

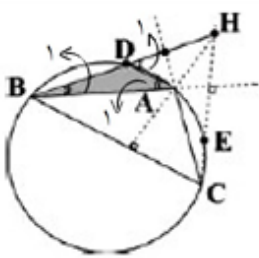
گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

نکته: شعاع دایره‌ی محیطی مثلث قائم‌الزاویه، نصف وتر مثلث است.



گزینه ۱ پاسخ صحیح است. دو مثلث  $ADM$  و  $ACB$  متشابه‌اند. زیرا:

$$\begin{cases} \widehat{D} = \widehat{C} = \widehat{AB} & \text{مخاطبی مقابل به } \widehat{AB} \\ \widehat{A}_{(1+3)} = \widehat{A}_{(2+3)} \end{cases} \Rightarrow \widehat{M} = \widehat{B} = \frac{AD}{DM} = \frac{AC}{BC} \Rightarrow AD \times BC = AC \times DM$$



گزینه ۳ پاسخ صحیح است. اضلاع زاویه‌ی  $AHD$  بر اضلاع زاویه‌ی  $ACB$  عمود است، بنابراین این دو زاویه برابرند.

$$\widehat{AHD} = \widehat{ACB} = \frac{\widehat{AD}}{2} + \frac{\widehat{BD}}{2} = \widehat{B}_1 + \widehat{A}_1 = \widehat{D}_1 = \widehat{ADH}$$

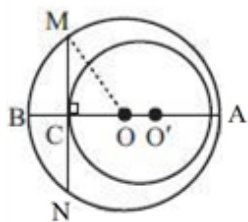
دقت کنید که  $D_1$  در مثلث  $ADB$  زاویه‌ی خارجی است. بنابراین برابر با مجموع دو زاویه‌ی داخلی غیرمجاور با خودش می‌باشد.

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. مثلث  $BOO'$  متساوی‌الاضلاع است و  $BC$  ارتفاع آن:

$$BC = \frac{\sqrt{3}}{2}(OB) = \frac{\sqrt{3}}{2}(\sqrt{3}) = \frac{3}{2}$$

$$AP^2 = AB \cdot AD = \frac{3}{2} \left( 3 \times \frac{3}{2} \right) = \frac{27}{4} \Rightarrow AP = \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. بزرگ‌ترین وتر مماس بر  $C'$ ، وتر عمود بر قطر مشترک دو دایره است.

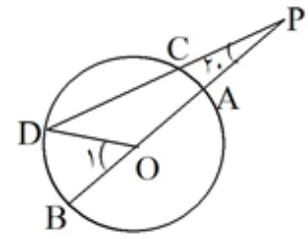


$$OC = O'C - OO' = \frac{3}{4}R - \left( R - \frac{3}{4}R \right) = \frac{1}{4}R$$

$$OM^2 = MC^2 - OC^2 \Rightarrow R^2 = MC^2 + \frac{1}{4}R^2$$

$$\Rightarrow MC = \frac{\sqrt{3}}{2}R \Rightarrow MN = \sqrt{3}R$$

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. ۳۷۸



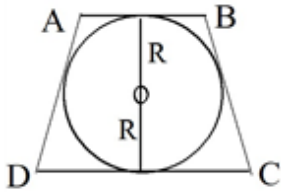
$$\widehat{p} = \frac{\widehat{BD} - \widehat{AC}}{2} \Rightarrow \widehat{BD} - \widehat{AC} = 2 \times 20 = 40$$

$$\widehat{AC} + \widehat{CD} + \widehat{BD} = 180 \Rightarrow \widehat{AC} + \widehat{BD} = 180 - 90 = 90$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \widehat{BD} + \widehat{AC} = 90 \\ \widehat{BD} - \widehat{AC} = 40 \end{cases} \Rightarrow 2\widehat{BD} = 130 \Rightarrow \widehat{BD} = 65^\circ \Rightarrow \angle O_1 = 65$$

$$\Rightarrow \angle DOA = 180 - 65 = 115$$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. ۳۷۹



$$AB + CD = AD + BC = 18$$

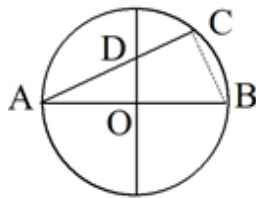
$$\rightarrow S = \frac{1}{2}(2R) \times (AB + CD) = 4 \times 18 = 72$$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. دو مثلث قائم الزویه AOD و ACB ۳۸۰

$$\frac{AD}{AB} = \frac{AO}{AC} \Rightarrow \frac{AD}{10} = \frac{5}{8}$$

متشابه اند.

$$\text{لذا } AD = \frac{50}{8} = 6\frac{1}{4}$$

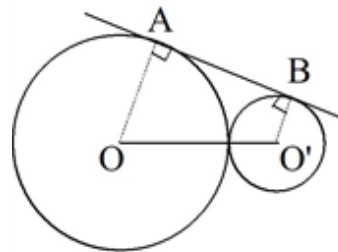


گزینه ۱ پاسخ صحیح است. طول مماس مشترک خارجی دو دایره با شعاع‌های R ۳۸۱

و R' و خط‌المركزین از رابطه‌ی زیر به دست می‌آید.

$$AB = \sqrt{2 - (R - R')^2} \Rightarrow \sqrt{2}R = \sqrt{(R + R')^2 - (R - R')^2}$$

$$\Rightarrow 2R^2 = 4RR' \Rightarrow \frac{R}{R'} \Rightarrow \frac{R}{R'} = 2 \text{ یا } \frac{R}{R'} = \frac{1}{2}$$



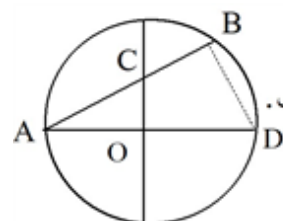
گزینه ۴ پاسخ صحیح است. مرکز دایره محاطی محل تلاقی نیم‌سازهای داخلی ۳۸۲

مثلث است با توجه به شکل، مساحت کل مثلث اصلی برابر مجموع مساحت سه مثلث حاصل است و شعاع دایره محاطی برابر ارتفاع سه مثلث حاصل است.

$$\text{مساحت مثلثی اصلی} = \frac{1}{2}r \times 10 + \frac{1}{2}r \times 9 + \frac{1}{2}r(9)$$

مساحت مثلث متساوی‌الساقین قابل محاسبه است زیرا ارتفاع وارد بر قاعده  $\sqrt{81 - 25}$  است.

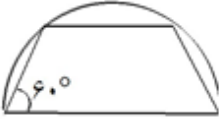
$$\text{مساحت مثلث اصلی} = 5 \times \sqrt{56} = 10\sqrt{14} \Rightarrow 14r = 10\sqrt{14} \Rightarrow r = \frac{5\sqrt{14}}{7}$$



گزینه ۳ پاسخ صحیح است. دو مثلث قائم الزویه ABD و AOC ۳۸۳

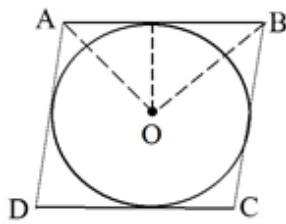
$$\text{یعنی } AC = \frac{5}{4}R \text{ به اندازه } \frac{5}{4} \text{ شعاع است. یا } \frac{AC}{AD} = \frac{OA}{AB} \Rightarrow \frac{AC}{2R} = \frac{R}{1/6R} \Rightarrow AC = \frac{2R}{1/6}$$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. قطر نیم دایره  $2R=4$  چون زاویه  $\hat{A}=60^\circ$  در نتیجه اندازهی هر سه کمان  $60^\circ$  درجه و اندازهی وتر آنها برابر شعاع دایره است. اندازهی قاعدههای دوزنقه ۴ و ۲ واحد است و ارتفاع دوزنقه  $\sqrt{3}$  است



$$S = \frac{\sqrt{3}}{2} (4+2) = 3\sqrt{3}$$

پس مساحت آن

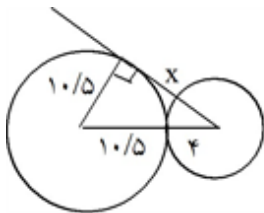


گزینه ۴ پاسخ صحیح است. با معلوم بودن محیط دایره مقدار شعاع محاسبه می شود:  
 $S = 2\pi R \Rightarrow 15/7 = 2 \times 3/14 R$   
 $R = \frac{15/7}{2 \times 3/14} = \frac{5}{2}$   
 پس مساحت چهارضلعی برابر مجموع مساحت چهار مثلث OAB, OBC, OCD, ODA و ODA است.

$$S = \frac{1}{2} R (AB + BC + CD + DA)$$

می دانیم در چهارضلعی محیطی مجموع اضلاع غیر مجاور برابر هم اند.

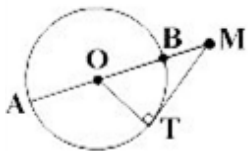
$$S = \frac{1}{2} \times \frac{5}{2} (18 + 18) = 45$$



گزینه ۴ پاسخ صحیح است. اگر  $X$  طول قطعهی مماس باشد داریم:

$$(4 + 10/5)^2 = (10/5)^2 + X^2 \rightarrow X^2 = (14/5 - 10)(14/5 + 10/5)$$

$$\rightarrow X^2 = 4 \times 25 \rightarrow X = 10$$



گزینه ۱ پاسخ صحیح است. مطابق شکل AM و BM به ترتیب بیشترین و کمترین فاصلهی M از نقاط دایره است:

$$MT^2 = MB \times MA = 4 \times 16 = 64 \Rightarrow MT = 8$$

راه حل دیگر: چون شعاع بر خط مماس در نقطه تماس عمود است، پس:

$$MT = \sqrt{OM^2 - R^2} = \sqrt{10^2 - 4^2} = 8$$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. مرکزهای دو دایره محاطی خارجی و محیطی آن محل تلاقی

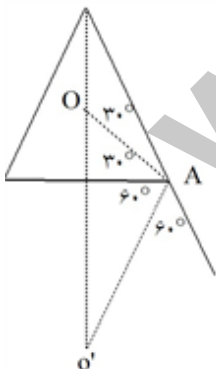
نیمسازها است مثلث AOO' قائم الزویه در رأس A و  $\hat{O}' = 30^\circ$  در نتیجه

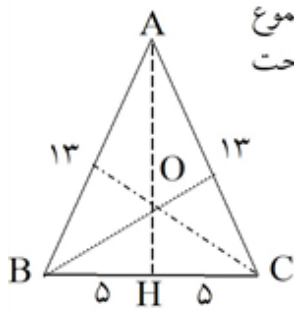
$$AO = \frac{1}{2} OO' \Rightarrow OO' = 2AO$$

برابر  $\frac{2}{3}$  ارتفاع مثلث متساوی الاضلاع

$$OO' = 2 \text{ پس } AO = \frac{2}{3} \left( \frac{\sqrt{3}}{2} \times \sqrt{3} \right) = 1$$

است ارتفاع مثلث  $\frac{\sqrt{3}}{2}$  ضلع آن است الزاماً





گزینه ۴ پاسخ صحیح است. مرکز دایره محاطی محل تلاقی نیمسازهای داخلی است. مجموع مساحت‌های سه مثلث OAB و OAC و OBC برابر مساحت مثلث ABC است. مساحت هر ۴ مثلث را محاسبه می‌کنیم:

$$AH^2 = 13^2 - 5^2 = 144 \Rightarrow AH = 12$$

شعاع دایره محاطی را  $r$  بنامیم. مسلماً ارتفاع  $r$  ارتفاع سه مثلث کوچک‌تر است.

$$r(13+13+13) = 12 \times 10 \Rightarrow r = \frac{120}{36} = \frac{10}{3}$$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$S = \frac{\sqrt{3}}{4} a^2 \Rightarrow 3\sqrt{3} = \frac{\sqrt{3}}{4} a^2 = 12 \Rightarrow a = 2\sqrt{3}$$

در مثلث متساوی‌الاضلاع شعاع دایره محاطی داخلی  $\frac{1}{3}$  ارتفاع است.

$$h = \frac{\sqrt{3}}{2} a \Rightarrow h = \frac{\sqrt{3}}{2} (2\sqrt{3}) = 3 \rightarrow r = \frac{1}{3} h \Rightarrow r = 1$$

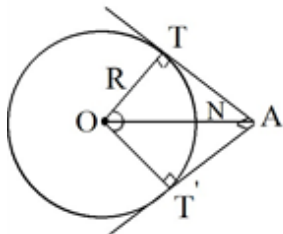
$\widehat{PAC} = \widehat{PDB} \Rightarrow ABDC$  چهارضلعی محاطی  
 $\Rightarrow PA \cdot PB = PC \cdot PD$

گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

$$PM^2 = PA \cdot PB$$

می‌دانیم:

$$PM^2 = PA \cdot PB = PC \cdot PD \Rightarrow PM^2 = 9 \times 16 \Rightarrow PM = 12$$

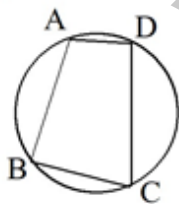


گزینه ۳ پاسخ صحیح است.  $\widehat{ATOT'}$  یک مربع است. چون زاویه‌های آن  $90^\circ$  است و دو ضلع مجاور آن  $AT$  و  $AT'$  نیز با هم برابرند، زیرا دو مماس رسم شده از نقطه‌ی A هستند.

OA قطر این مربع است پس  $OA = R\sqrt{2}$  می‌باشد. نزدیک‌ترین فاصله‌ی A از دایره نقطه‌ی N است.

$$AN = OA - R = R\sqrt{2} - R = 4\sqrt{2} - 4 = 4(\sqrt{2} - 1) = \frac{4}{\sqrt{2} + 1}$$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. چهار ضلعی محاطی، چهارضلعی است که همه‌ی رأس‌هایش روی محیط یک دایره قرار بگیرد که زوایای روبه‌روی آن مکمل‌اند. با توجه به چهار ضلعی ABCD داریم:

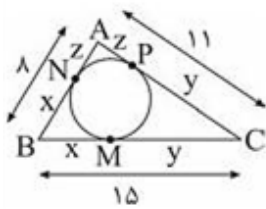


$\widehat{A} + \widehat{C} = 180^\circ$ . حالا دو رابطه‌ی داده شده در صورت تست را با هم جمع می‌کنیم:

$$\widehat{B} + \widehat{C} + \widehat{B} + \widehat{A} = 145 + 85 = 230$$

$$2\widehat{B} + \widehat{A} + \widehat{C} = 230^\circ$$

حال به جای  $\widehat{A} + \widehat{C}$ ،  $180^\circ$  می‌گذاریم:  $2\widehat{B} + 180^\circ = 230^\circ \Rightarrow \widehat{B} = 25^\circ$



گزینه‌ی ۱ پاسخ صحیح است. در شکل روبه‌رو  $BC = 15$  بزرگ‌ترین ضلع مثلث است. می‌دانیم اگر از یک نقطه دو مماس بر دایره رسم کنیم، اندازه‌ی دو مماس برابرند. در نتیجه مطابق شکل داریم:

$$BM = BN = x \quad CM = CP = y \quad AN = AP = z$$

در این سؤال نسبت  $\frac{x}{y}$  خواسته شده است. می‌توان نوشت:

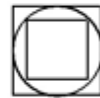
$$2(x+y+z) = 15+11+8 = 34 \Rightarrow x+y+z = 17 \quad z+y = 11 \Rightarrow x = 6 \quad x+z = 8 \Rightarrow y = 9$$

$$\frac{x}{y} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$$

در نتیجه:

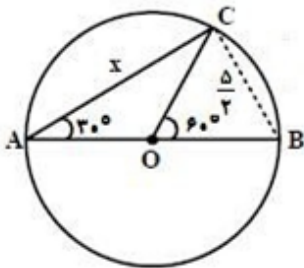
گزینه‌ی ۳ پاسخ صحیح است. با توجه به شکل هندسی مساحت مربع محاطی نصف مساحت مربع محیطی است. ضلع مربع محیطی برابر قطر دایره است.

$$S_1 = 8^2 = 64, S_2 = \frac{1}{2}(64) = 32$$



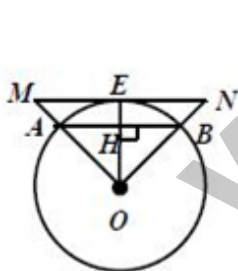
$$S_1 - S_2 = 64 - 32 = 32$$

گزینه‌ی ۳ پاسخ صحیح است.  $AB$  قطر دایره است، پس  $\triangle ABC$  در رأس  $C$  قائمه است، از طرفی زاویه‌های  $\hat{COB}$  و محاطی  $\hat{A}$  رو به یک کمان هستند، پس  $\hat{A} = 30^\circ$  است و ضلع مقابل به آن نصف وتر است، حال در مثلث  $ABC$  از فیثاغورس استفاده می‌کنیم.



$$x^2 = 25 - \frac{25}{4} = \frac{75}{4} \Rightarrow x = \frac{5\sqrt{3}}{2}$$

گزینه‌ی ۳ پاسخ صحیح است. اگر از مرکز دایره به دو رأس مجاور از ۶ ضلعی منتظم وصل کنیم، مثلث پدید آمده، متساوی‌الاضلاع شده و زاویه‌ی رأسش برابر  $60^\circ$  خواهد شد، بنابراین:



$$\widehat{BOH} = \widehat{NOE} = 30 \Rightarrow BH = AH = \frac{R}{2} \Rightarrow OH = \frac{\sqrt{3}}{2}R \Rightarrow S_{\triangle OAB} = \frac{\sqrt{3}}{4}R^2$$

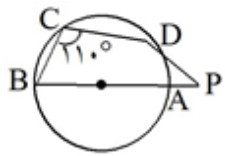
$$OE = R \text{ و } OE = \frac{\sqrt{3}}{2}ON \Rightarrow ON = MN = \frac{2\sqrt{3}}{3}R \Rightarrow S_{\triangle OMN} = \frac{\sqrt{3}}{3}R^2$$

$$\frac{S_{\text{ضلعی محیطی ۶}}}{S_{\text{ضلعی محاطی ۶}}} = \frac{S_{\triangle OMN}}{S_{\triangle OAB}} = \frac{4}{3}$$

گزینه‌ی ۲ پاسخ صحیح است.



$$\text{طول مماس مشترک داخلی دو دایره} = \sqrt{OO'^2 - (R+R')^2} \Rightarrow OO' = 14$$



$$\hat{C} = 110^\circ = \frac{180^\circ + \widehat{DA}}{2} \Rightarrow \widehat{DA} = 40^\circ \Rightarrow \widehat{BCD} = 140^\circ \Rightarrow \hat{P} = \frac{140^\circ - 40^\circ}{2} = 50^\circ$$

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. (۳۹۹)

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. (۴۰۰)

$$\triangle OAB : OA = OB = R, \hat{AOB} = 60^\circ \Rightarrow \text{متساوی الاضلاع} \Rightarrow AB = R$$

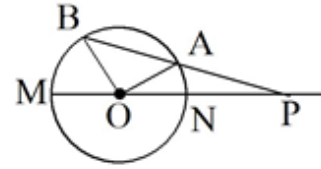
$$PM = 2R \Rightarrow PN = 2R - 2R = R$$

$$PA \times PB = PN \times PM$$

$$PA = x \Rightarrow x(x + R) = 2R^2 \Rightarrow x^2 + Rx - 2R^2 = 0$$

$$\Rightarrow x = \frac{-R \pm \sqrt{R^2 + 4R^2}}{2} \Rightarrow x = \frac{\sqrt{13} - 1}{2}$$

منفی غیرقابل قبول



www.akoedu.ir

۱	۱	۲	۳	۴	۳۳	۱	۲	۳	۴	۶۵	۱	۲	۳	۴	۹۷	۱	۲	۳	۴
۲	۱	۲	۳	۴	۳۴	۱	۲	۳	۴	۶۶	۱	۲	۳	۴	۹۸	۱	۲	۳	۴
۳	۱	۲	۳	۴	۳۵	۱	۲	۳	۴	۶۷	۱	۲	۳	۴	۹۹	۱	۲	۳	۴
۴	۱	۲	۳	۴	۳۶	۱	۲	۳	۴	۶۸	۱	۲	۳	۴	۱۰۰	۱	۲	۳	۴
۵	۱	۲	۳	۴	۳۷	۱	۲	۳	۴	۶۹	۱	۲	۳	۴	۱۰۱	۱	۲	۳	۴
۶	۱	۲	۳	۴	۳۸	۱	۲	۳	۴	۷۰	۱	۲	۳	۴	۱۰۲	۱	۲	۳	۴
۷	۱	۲	۳	۴	۳۹	۱	۲	۳	۴	۷۱	۱	۲	۳	۴	۱۰۳	۱	۲	۳	۴
۸	۱	۲	۳	۴	۴۰	۱	۲	۳	۴	۷۲	۱	۲	۳	۴	۱۰۴	۱	۲	۳	۴
۹	۱	۲	۳	۴	۴۱	۱	۲	۳	۴	۷۳	۱	۲	۳	۴	۱۰۵	۱	۲	۳	۴
۱۰	۱	۲	۳	۴	۴۲	۱	۲	۳	۴	۷۴	۱	۲	۳	۴	۱۰۶	۱	۲	۳	۴
۱۱	۱	۲	۳	۴	۴۳	۱	۲	۳	۴	۷۵	۱	۲	۳	۴	۱۰۷	۱	۲	۳	۴
۱۲	۱	۲	۳	۴	۴۴	۱	۲	۳	۴	۷۶	۱	۲	۳	۴	۱۰۸	۱	۲	۳	۴
۱۳	۱	۲	۳	۴	۴۵	۱	۲	۳	۴	۷۷	۱	۲	۳	۴	۱۰۹	۱	۲	۳	۴
۱۴	۱	۲	۳	۴	۴۶	۱	۲	۳	۴	۷۸	۱	۲	۳	۴	۱۱۰	۱	۲	۳	۴
۱۵	۱	۲	۳	۴	۴۷	۱	۲	۳	۴	۷۹	۱	۲	۳	۴	۱۱۱	۱	۲	۳	۴
۱۶	۱	۲	۳	۴	۴۸	۱	۲	۳	۴	۸۰	۱	۲	۳	۴	۱۱۲	۱	۲	۳	۴
۱۷	۱	۲	۳	۴	۴۹	۱	۲	۳	۴	۸۱	۱	۲	۳	۴	۱۱۳	۱	۲	۳	۴
۱۸	۱	۲	۳	۴	۵۰	۱	۲	۳	۴	۸۲	۱	۲	۳	۴	۱۱۴	۱	۲	۳	۴
۱۹	۱	۲	۳	۴	۵۱	۱	۲	۳	۴	۸۳	۱	۲	۳	۴	۱۱۵	۱	۲	۳	۴
۲۰	۱	۲	۳	۴	۵۲	۱	۲	۳	۴	۸۴	۱	۲	۳	۴	۱۱۶	۱	۲	۳	۴
۲۱	۱	۲	۳	۴	۵۳	۱	۲	۳	۴	۸۵	۱	۲	۳	۴	۱۱۷	۱	۲	۳	۴
۲۲	۱	۲	۳	۴	۵۴	۱	۲	۳	۴	۸۶	۱	۲	۳	۴	۱۱۸	۱	۲	۳	۴
۲۳	۱	۲	۳	۴	۵۵	۱	۲	۳	۴	۸۷	۱	۲	۳	۴	۱۱۹	۱	۲	۳	۴
۲۴	۱	۲	۳	۴	۵۶	۱	۲	۳	۴	۸۸	۱	۲	۳	۴	۱۲۰	۱	۲	۳	۴
۲۵	۱	۲	۳	۴	۵۷	۱	۲	۳	۴	۸۹	۱	۲	۳	۴	۱۲۱	۱	۲	۳	۴
۲۶	۱	۲	۳	۴	۵۸	۱	۲	۳	۴	۹۰	۱	۲	۳	۴	۱۲۲	۱	۲	۳	۴
۲۷	۱	۲	۳	۴	۵۹	۱	۲	۳	۴	۹۱	۱	۲	۳	۴	۱۲۳	۱	۲	۳	۴
۲۸	۱	۲	۳	۴	۶۰	۱	۲	۳	۴	۹۲	۱	۲	۳	۴	۱۲۴	۱	۲	۳	۴
۲۹	۱	۲	۳	۴	۶۱	۱	۲	۳	۴	۹۳	۱	۲	۳	۴	۱۲۵	۱	۲	۳	۴
۳۰	۱	۲	۳	۴	۶۲	۱	۲	۳	۴	۹۴	۱	۲	۳	۴	۱۲۶	۱	۲	۳	۴
۳۱	۱	۲	۳	۴	۶۳	۱	۲	۳	۴	۹۵	۱	۲	۳	۴	۱۲۷	۱	۲	۳	۴
۳۲	۱	۲	۳	۴	۶۴	۱	۲	۳	۴	۹۶	۱	۲	۳	۴	۱۲۸	۱	۲	۳	۴



۱۲۹	۱	۲	۳	۴	۱۶۱	۱	۲	۳	۴	۱۹۳	۱	۲	۳	۴	۲۲۵	۱	۲	۳	۴
۱۳۰	۱	۲	۳	۴	۱۶۲	۱	۲	۳	۴	۱۹۴	۱	۲	۳	۴	۲۲۶	۱	۲	۳	۴
۱۳۱	۱	۲	۳	۴	۱۶۳	۱	۲	۳	۴	۱۹۵	۱	۲	۳	۴	۲۲۷	۱	۲	۳	۴
۱۳۲	۱	۲	۳	۴	۱۶۴	۱	۲	۳	۴	۱۹۶	۱	۲	۳	۴	۲۲۸	۱	۲	۳	۴
۱۳۳	۱	۲	۳	۴	۱۶۵	۱	۲	۳	۴	۱۹۷	۱	۲	۳	۴	۲۲۹	۱	۲	۳	۴
۱۳۴	۱	۲	۳	۴	۱۶۶	۱	۲	۳	۴	۱۹۸	۱	۲	۳	۴	۲۳۰	۱	۲	۳	۴
۱۳۵	۱	۲	۳	۴	۱۶۷	۱	۲	۳	۴	۱۹۹	۱	۲	۳	۴	۲۳۱	۱	۲	۳	۴
۱۳۶	۱	۲	۳	۴	۱۶۸	۱	۲	۳	۴	۲۰۰	۱	۲	۳	۴	۲۳۲	۱	۲	۳	۴
۱۳۷	۱	۲	۳	۴	۱۶۹	۱	۲	۳	۴	۲۰۱	۱	۲	۳	۴	۲۳۳	۱	۲	۳	۴
۱۳۸	۱	۲	۳	۴	۱۷۰	۱	۲	۳	۴	۲۰۲	۱	۲	۳	۴	۲۳۴	۱	۲	۳	۴
۱۳۹	۱	۲	۳	۴	۱۷۱	۱	۲	۳	۴	۲۰۳	۱	۲	۳	۴	۲۳۵	۱	۲	۳	۴
۱۴۰	۱	۲	۳	۴	۱۷۲	۱	۲	۳	۴	۲۰۴	۱	۲	۳	۴	۲۳۶	۱	۲	۳	۴
۱۴۱	۱	۲	۳	۴	۱۷۳	۱	۲	۳	۴	۲۰۵	۱	۲	۳	۴	۲۳۷	۱	۲	۳	۴
۱۴۲	۱	۲	۳	۴	۱۷۴	۱	۲	۳	۴	۲۰۶	۱	۲	۳	۴	۲۳۸	۱	۲	۳	۴
۱۴۳	۱	۲	۳	۴	۱۷۵	۱	۲	۳	۴	۲۰۷	۱	۲	۳	۴	۲۳۹	۱	۲	۳	۴
۱۴۴	۱	۲	۳	۴	۱۷۶	۱	۲	۳	۴	۲۰۸	۱	۲	۳	۴	۲۴۰	۱	۲	۳	۴
۱۴۵	۱	۲	۳	۴	۱۷۷	۱	۲	۳	۴	۲۰۹	۱	۲	۳	۴	۲۴۱	۱	۲	۳	۴
۱۴۶	۱	۲	۳	۴	۱۷۸	۱	۲	۳	۴	۲۱۰	۱	۲	۳	۴	۲۴۲	۱	۲	۳	۴
۱۴۷	۱	۲	۳	۴	۱۷۹	۱	۲	۳	۴	۲۱۱	۱	۲	۳	۴	۲۴۳	۱	۲	۳	۴
۱۴۸	۱	۲	۳	۴	۱۸۰	۱	۲	۳	۴	۲۱۲	۱	۲	۳	۴	۲۴۴	۱	۲	۳	۴
۱۴۹	۱	۲	۳	۴	۱۸۱	۱	۲	۳	۴	۲۱۳	۱	۲	۳	۴	۲۴۵	۱	۲	۳	۴
۱۵۰	۱	۲	۳	۴	۱۸۲	۱	۲	۳	۴	۲۱۴	۱	۲	۳	۴	۲۴۶	۱	۲	۳	۴
۱۵۱	۱	۲	۳	۴	۱۸۳	۱	۲	۳	۴	۲۱۵	۱	۲	۳	۴	۲۴۷	۱	۲	۳	۴
۱۵۲	۱	۲	۳	۴	۱۸۴	۱	۲	۳	۴	۲۱۶	۱	۲	۳	۴	۲۴۸	۱	۲	۳	۴
۱۵۳	۱	۲	۳	۴	۱۸۵	۱	۲	۳	۴	۲۱۷	۱	۲	۳	۴	۲۴۹	۱	۲	۳	۴
۱۵۴	۱	۲	۳	۴	۱۸۶	۱	۲	۳	۴	۲۱۸	۱	۲	۳	۴	۲۵۰	۱	۲	۳	۴
۱۵۵	۱	۲	۳	۴	۱۸۷	۱	۲	۳	۴	۲۱۹	۱	۲	۳	۴	۲۵۱	۱	۲	۳	۴
۱۵۶	۱	۲	۳	۴	۱۸۸	۱	۲	۳	۴	۲۲۰	۱	۲	۳	۴	۲۵۲	۱	۲	۳	۴
۱۵۷	۱	۲	۳	۴	۱۸۹	۱	۲	۳	۴	۲۲۱	۱	۲	۳	۴	۲۵۳	۱	۲	۳	۴
۱۵۸	۱	۲	۳	۴	۱۹۰	۱	۲	۳	۴	۲۲۲	۱	۲	۳	۴	۲۵۴	۱	۲	۳	۴
۱۵۹	۱	۲	۳	۴	۱۹۱	۱	۲	۳	۴	۲۲۳	۱	۲	۳	۴	۲۵۵	۱	۲	۳	۴
۱۶۰	۱	۲	۳	۴	۱۹۲	۱	۲	۳	۴	۲۲۴	۱	۲	۳	۴	۲۵۶	۱	۲	۳	۴

۲۵۷	۱	۲	۳	۴	۲۸۹	۱	۲	۳	۴	۳۲۱	۱	۲	۳	۴	۳۵۳	۱	۲	۳	۴
۲۵۸	۱	۲	۳	۴	۲۹۰	۱	۲	۳	۴	۳۲۲	۱	۲	۳	۴	۳۵۴	۱	۲	۳	۴
۲۵۹	۱	۲	۳	۴	۲۹۱	۱	۲	۳	۴	۳۲۳	۱	۲	۳	۴	۳۵۵	۱	۲	۳	۴
۲۶۰	۱	۲	۳	۴	۲۹۲	۱	۲	۳	۴	۳۲۴	۱	۲	۳	۴	۳۵۶	۱	۲	۳	۴
۲۶۱	۱	۲	۳	۴	۲۹۳	۱	۲	۳	۴	۳۲۵	۱	۲	۳	۴	۳۵۷	۱	۲	۳	۴
۲۶۲	۱	۲	۳	۴	۲۹۴	۱	۲	۳	۴	۳۲۶	۱	۲	۳	۴	۳۵۸	۱	۲	۳	۴
۲۶۳	۱	۲	۳	۴	۲۹۵	۱	۲	۳	۴	۳۲۷	۱	۲	۳	۴	۳۵۹	۱	۲	۳	۴
۲۶۴	۱	۲	۳	۴	۲۹۶	۱	۲	۳	۴	۳۲۸	۱	۲	۳	۴	۳۶۰	۱	۲	۳	۴
۲۶۵	۱	۲	۳	۴	۲۹۷	۱	۲	۳	۴	۳۲۹	۱	۲	۳	۴	۳۶۱	۱	۲	۳	۴
۲۶۶	۱	۲	۳	۴	۲۹۸	۱	۲	۳	۴	۳۳۰	۱	۲	۳	۴	۳۶۲	۱	۲	۳	۴
۲۶۷	۱	۲	۳	۴	۲۹۹	۱	۲	۳	۴	۳۳۱	۱	۲	۳	۴	۳۶۳	۱	۲	۳	۴
۲۶۸	۱	۲	۳	۴	۳۰۰	۱	۲	۳	۴	۳۳۲	۱	۲	۳	۴	۳۶۴	۱	۲	۳	۴
۲۶۹	۱	۲	۳	۴	۳۰۱	۱	۲	۳	۴	۳۳۳	۱	۲	۳	۴	۳۶۵	۱	۲	۳	۴
۲۷۰	۱	۲	۳	۴	۳۰۲	۱	۲	۳	۴	۳۳۴	۱	۲	۳	۴	۳۶۶	۱	۲	۳	۴
۲۷۱	۱	۲	۳	۴	۳۰۳	۱	۲	۳	۴	۳۳۵	۱	۲	۳	۴	۳۶۷	۱	۲	۳	۴
۲۷۲	۱	۲	۳	۴	۳۰۴	۱	۲	۳	۴	۳۳۶	۱	۲	۳	۴	۳۶۸	۱	۲	۳	۴
۲۷۳	۱	۲	۳	۴	۳۰۵	۱	۲	۳	۴	۳۳۷	۱	۲	۳	۴	۳۶۹	۱	۲	۳	۴
۲۷۴	۱	۲	۳	۴	۳۰۶	۱	۲	۳	۴	۳۳۸	۱	۲	۳	۴	۳۷۰	۱	۲	۳	۴
۲۷۵	۱	۲	۳	۴	۳۰۷	۱	۲	۳	۴	۳۳۹	۱	۲	۳	۴	۳۷۱	۱	۲	۳	۴
۲۷۶	۱	۲	۳	۴	۳۰۸	۱	۲	۳	۴	۳۴۰	۱	۲	۳	۴	۳۷۲	۱	۲	۳	۴
۲۷۷	۱	۲	۳	۴	۳۰۹	۱	۲	۳	۴	۳۴۱	۱	۲	۳	۴	۳۷۳	۱	۲	۳	۴
۲۷۸	۱	۲	۳	۴	۳۱۰	۱	۲	۳	۴	۳۴۲	۱	۲	۳	۴	۳۷۴	۱	۲	۳	۴
۲۷۹	۱	۲	۳	۴	۳۱۱	۱	۲	۳	۴	۳۴۳	۱	۲	۳	۴	۳۷۵	۱	۲	۳	۴
۲۸۰	۱	۲	۳	۴	۳۱۲	۱	۲	۳	۴	۳۴۴	۱	۲	۳	۴	۳۷۶	۱	۲	۳	۴
۲۸۱	۱	۲	۳	۴	۳۱۳	۱	۲	۳	۴	۳۴۵	۱	۲	۳	۴	۳۷۷	۱	۲	۳	۴
۲۸۲	۱	۲	۳	۴	۳۱۴	۱	۲	۳	۴	۳۴۶	۱	۲	۳	۴	۳۷۸	۱	۲	۳	۴
۲۸۳	۱	۲	۳	۴	۳۱۵	۱	۲	۳	۴	۳۴۷	۱	۲	۳	۴	۳۷۹	۱	۲	۳	۴
۲۸۴	۱	۲	۳	۴	۳۱۶	۱	۲	۳	۴	۳۴۸	۱	۲	۳	۴	۳۸۰	۱	۲	۳	۴
۲۸۵	۱	۲	۳	۴	۳۱۷	۱	۲	۳	۴	۳۴۹	۱	۲	۳	۴	۳۸۱	۱	۲	۳	۴
۲۸۶	۱	۲	۳	۴	۳۱۸	۱	۲	۳	۴	۳۵۰	۱	۲	۳	۴	۳۸۲	۱	۲	۳	۴
۲۸۷	۱	۲	۳	۴	۳۱۹	۱	۲	۳	۴	۳۵۱	۱	۲	۳	۴	۳۸۳	۱	۲	۳	۴
۲۸۸	۱	۲	۳	۴	۳۲۰	۱	۲	۳	۴	۳۵۲	۱	۲	۳	۴	۳۸۴	۱	۲	۳	۴

۳۸۵	۱	۲	۳	۴
۳۸۶	۱	۲	۳	۴
۳۸۷	۱	۲	۳	۴
۳۸۸	۱	۲	۳	۴
۳۸۹	۱	۲	۳	۴
۳۹۰	۱	۲	۳	۴
۳۹۱	۱	۲	۳	۴
۳۹۲	۱	۲	۳	۴
۳۹۳	۱	۲	۳	۴
۳۹۴	۱	۲	۳	۴
۳۹۵	۱	۲	۳	۴
۳۹۶	۱	۲	۳	۴
۳۹۷	۱	۲	۳	۴
۳۹۸	۱	۲	۳	۴
۳۹۹	۱	۲	۳	۴
۴۰۰	۱	۲	۳	۴

www.akoedu.ir