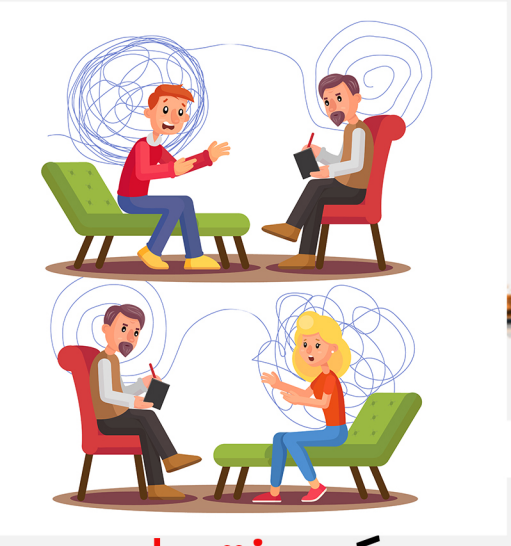
AKO
گروه مشاوره و برنامه ریزی

WWW.AKOEDU.IR

اولین و با کیفیت ترین

آکادمی کنکور در ایران

کلاس های vip کنکور



جهت دریافت برنامه ی شخصی سازی شده یک هفته ای رایگان کلیک کنید و یا به شماره ی ۰۹۰۲۵۶۴۶۲۳۴ عدد ۱ را ارسال کنید.

تلفن تماس: ۰۲۶۳۳۴۰۸۹۴۴

٤٠٠ نمونه سوال امتحان نهایی ریاضیات گسسته

۱ ۵۴ شاخه گل را حداکثر در چند گلدان قرار دهیم تا اطمینان داشته باشیم گلدانی هست که در آن حداقل ۵ شاخه گل قرار گرفته است؟

۲ به چند طریق می‌توان ۴ کلاه متفاوت را بین ۸ نفر توزیع کرد به شرط آن‌که به هر نفر حداقل یک کلاه داده شود؟

۳ به چند طریق می‌توان ۴ کلاه متفاوت را بین ۳ نفر توزیع کرد به شرط آن‌که به هر نفر حداقل یک کلاه داده شود؟

۴ در یک کلاس ۳۴ نفری، ۱۵ نفر فوتبال، ۱۱ نفر والیبال و ۹ نفر بسکتبال بازی می‌کنند. اگر بدانیم ۳ نفر هم فوتبال، هم والیبال و هم بسکتبال بازی می‌کنند و ۵ نفر فوتبال و والیبال، ۶ نفر والیبال و بسکتبال و ۳ نفر فوتبال و بسکتبال بازی می‌کنند. مشخص کنید چند نفر فقط در یک رشته بازی می‌کنند؟

۵ مربع لاتین A را درنظر بگیرید. ابتدا سطر اول و سطر دوم مربع A را جابه‌جا کنید. سپس در مربع حاصل ستون دوم و سوم را جابه جا کنید و مربع حاصل را B نام‌گذاری کنید. متعامد بودن دو مربع لاتین A و B را بررسی کنید.

$$A = \begin{array}{|c|c|c|}\hline ۲ & ۳ & ۱ \\ \hline ۱ & ۲ & ۳ \\ \hline ۳ & ۱ & ۲ \\ \hline \end{array}$$

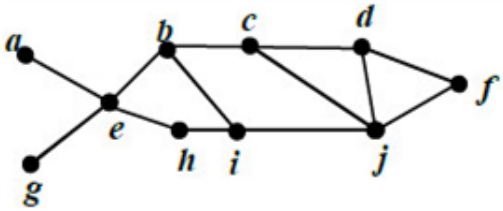
۶ به چند طریق می‌توان از بین ۶ نوع گل ۱۲ شاخه گل انتخاب کرد اگر بخواهیم: از گل نوع اول حداقل یک شاخه، از گل نوع چهارم بیش از ۳ شاخه و از گل نوع ششم فقط یک شاخه انتخاب کنیم.

۷ می‌خواهیم با حروف ب و ج و ارقام ۸، ۶، ۵، ۴، ۲، ۱ رمزی شامل ۸ کاراکتر تشکیل دهیم. مطلوب است:
الف) تعداد رمزهایی که هریک از آن‌ها با یک حرف آغاز و حرف دیگر خاتمه یابد.
ب) تعداد رمزهایی که در آن‌ها حروف کنار هم باشند.

۸ یک گراف ۶ رأسی که ۷- مجموعه آن با اندازه دو باشد، رسم کنید.

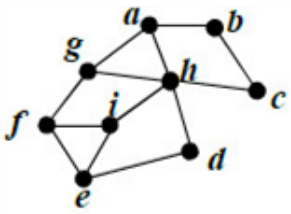
۹ یک گراف ۶ رأسی که ۷- مجموعه آن با اندازه یک باشد، رسم کنید.

۱۰ عدد احاطه گری گراف شکل مقابل را با ارائه راه‌حل، تعیین کنید.



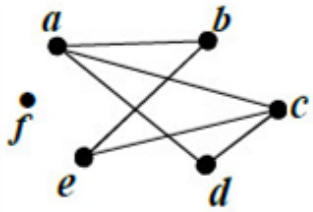
www.akoedu.ir

۱۱ در گراف شکل مقابل یک مجموعه احاطه‌گر مینیمال مشخص کنید که مینیمم نباشد.



۱۲ تفاوت بین مجموعه احاطه‌گر مینیمال و مینیمم چیست؟ توضیح دهید.

۱۳ گراف G که به صورت مقابل است را درنظر بگیرید.



الف) $N_G(C)$ را با اعضا مشخص کنید.

ب) بزرگ‌ترین درجه در گراف $\overline{G}$ مربوط به کدام رأس و چند است؟

پ) دوری به طول ۵ برای رأس a بنویسید.

ت) آیا گراف G همبند است؟

۱۴ معادله $۷x \overset{۴}{\equiv} ۱$ را حل کنید.

۱۵ باقی‌مانده تقسیم عدد $A = (۱۰۰۰)^{۲۵} \times ۹ + ۱۱$ را بر ۷ بیابید.

۱۶ ثابت کنید اگر: $p \geq ۵$ عددی اول باشد، آن‌گاه به یکی از دو صورت $p = ۴k + ۱$ یا $p = ۴k + ۳$ نوشته می‌شود.

۱۷ به روش بازگشتی ثابت کنید حاصل‌ضرب هر دو عدد حقیقی، کوچک‌تر یا مساوی نصف مجموع مربعات آن‌ها است.

۱۸ جاهای خالی را با عدد یا کلمه مناسب پر کنید.

الف) a و b اعدادی صحیح و a مخالف صفر است. اگر $a|b$ آن‌گاه عدد ..... شمارنده عدد ..... است.

ب) m عددی صحیح است. حاصل $(۲m , ۶m^۳)$ برابر با ..... است.

۱۹ درست یا نادرست بودن گزاره‌های زیر را مشخص کنید.

الف) حاصل‌ضرب سه عدد طبیعی متوالی بر ۶ بخش‌پذیر است.

ب) هیچ عدد صحیحی مانند x و y وجود ندارند که رابطه $x^۲ + y^۲ = (x + y)^۲$ برقرار باشد.

۲۰ حداقل چند نفر در یک سالن همایش حضور داشته باشند تا مطمئن باشیم دست کم ۳ نفر وجود دارند که دو حرف اول و دوم نام‌خانوادگی آن‌ها مانند هم و غیرتکراری است؟

۲۱ مجموعه $S = \{۱ , ۲ , \dots , ۴۰۰\}$ را درنظر بگیرید. چند عدد در S وجود دارند به طوری‌که نه بر ۵ و نه بر ۷ بخش‌پذیر باشند.

www.akoedu.ir

تلفن تماس: ۰۲۶۳۳۴۰۸۹۴۴

۲۲ مربع لاتین A را درنظر بگیرید.

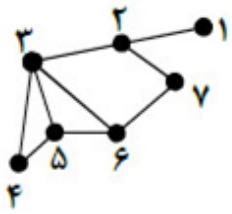
$$A = \begin{array}{|c|c|c|}\hline ۲ & ۱ & ۳ \\ \hline ۳ & ۲ & ۱ \\ \hline ۱ & ۳ & ۲ \\ \hline \end{array}$$

الف) با اِعمال یک جایگشت روی درایه‌های مربع لاتین A، مربع لاتین B را تولید کنید.
ب) متعامد بودن دو مربع لاتین A و B را بررسی کنید.

۲۳ معادله $x_۱ + x_۲ + x_۳ + x_۴ + x_۵ + x_۶ = ۱۷$ چند جواب صحیح و نامنفی دارد، به شرط آن‌که $x_۵ = ۲$ و $x_۲ > ۲$ باشند.

۲۴ با ارقام ۴، ۳، ۷، ۸، ۶ چند عدد ۵ رقمی می‌توان نوشت که:
الف) اعداد زوج کنار هم باشند.
ب) اعداد فرد کنار هم باشند.

۲۵ در گراف G که شکل آن در مقابل داده شده است:



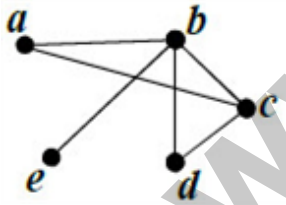
الف) یک مجموعه احاطه‌گر مینیمال با ۳ عضو بنویسید.
ب) عدد احاطه‌گری G را تعیین کنید.

۲۶ آیا گراف‌های C_n منتظم هستند؟

۲۷ گراف $P_۷$ را رسم کنید.

۲۸ گراف k- منتظم را تعریف کنید.

۲۹ گراف G به صورت مقابل را درنظر بگیرید.



الف) درجه رأس e در گراف مکمل G چند است؟
ب) تمام دورهای موجود در گراف G را بنویسید.
پ) $\Delta(G)$ را مشخص کنید.

۳۰ جاهای خالی را با کلمات مناسب پر کنید.
الف) مرتبه گراف نشان‌دهنده تعداد ..... گراف می‌باشد.
ب) اگر یک یال، یک رأس را به خود آن رأس وصل کند، این یال را ..... می‌نامیم.
پ) دو یال را ..... می‌نامیم هرگاه رأسی وجود داشته باشد که هر دوی آن‌ها را به هم متصل کند.
ت) تعداد رأس‌های فرد هر گراف عددی ..... است.

۳۱ معادله هم‌نهشتی $۸x \overset{۱۲}{=\!=} ۲۰$ را حل کرده و جواب عمومی آن‌را به دست آورید.

www.akoedu.ir

تلفن تماس: ۰۲۶۳۳۴۰۸۹۴۴

۳۲ باقی‌مانده تقسیم $(۱۹ + ۳۸^{۳۶})$ را بر ۴ به دست آورید.

۳۳ اگر a عددی طبیعی باشد، حاصل $(۳ + ۲a , ۴ + ۵a)$ را به دست آورید.

۳۴ اگر باقی‌مانده تقسیم اعداد a و b بر ۱۷ برابر ۵ و ۳ باشد، در این صورت باقی‌مانده تقسیم عدد $(۲a - ۵b)$ بر ۱۷ را بیابید.

۳۵ اگر α و β دو عدد گنگ باشند ولی $\alpha + \beta$ گویا باشد، با استفاده از برهان خلف ثابت کنید $\alpha - \beta$ گنگ است.

۳۶ گزاره‌های درست را مشخص کرده و برای گزاره‌های نادرست، مثال نقض ارائه کنید.

الف) برای هر عدد طبیعی n بزرگ‌تر از ۱، عدد $۲^{n} - ۱$ اول است.

ب) برای دو عدد طبیعی a و b، اگر $a|b$ آنگاه $[a , b] = |b|$.

پ) معادله هم‌نهشتی $ax \overset{m}{\equiv} b$ دارای جواب است اگر و تنها اگر $(a , b)|m$.

۳۷ درست یا نادرست بودن عبارت زیر را مشخص کنید.

تعداد توابع یک به یک از یک مجموعه ۲ عضوی به یک مجموعه ۳ عضوی برابر ۶ است.

۳۸ درست یا نادرست بودن عبارت زیر را مشخص کنید.

تعداد رأس‌های زوج هر گراف، عددی فرد است.

۳۹ درست یا نادرست بودن عبارت زیر را مشخص کنید.

معادله هم‌نهشتی $ax \overset{m}{\equiv} b$ دارای جواب است اگر و تنها اگر $(a , b)|m$.

۴۰ جای خالی را پر کنید.

هرگاه $(kn + ۱)$ کبوتر یا بیش‌تر در ..... لانه قرار بگیرند، در این صورت لانه‌ای وجود دارد که حداقل ..... کبوتر در آن قرار گرفته است.

۴۱ جای خالی را پر کنید.

مقدار $\gamma(C_n)$ به ازای هر عدد طبیعی $n > ۲$ برابر است با: .....

۴۲ جای خالی را پر کنید.

گراف G را ..... می‌نامیم هرگاه بین هر دو رأس آن حداقل یک مسیر وجود داشته باشد.

۴۳ نشان دهید در یک خانواده ۵ نفری حداقل دو نفر فصل تولدشان یکسان است.

۴۴ ۸ نفر را که برای یک برنامه تلویزیونی پیامک ارسال کرده، انتخاب کرده‌ایم و می‌خواهیم در ۴ مرحله و در هر مرحله یک جایزه را به یکی از این ۸ نفر (با قرعه‌کشی) به دلخواه بدهیم. این عمل به چند طریق امکان‌پذیر است؟ (یک نفر می‌تواند ۴ جایزه را برنده شود.)

۴۵ تعداد تابع‌های یک به یک از مجموعه ۳ عضوی به یک مجموعه ۶ عضوی چند تا است؟ (با ذکر دلیل)

www.akoedu.ir

تلفن تماس: ۰۲۶۳۳۴۰۸۹۴۴

۴۶ در یک کلاس ۲۵ نفری، ۱۵ نفر فوتبال و ۱۴ نفر والیبال بازی می‌کنند. مشخص کنید چند نفر نه فوتبال بازی می‌کنند و نه والیبال، به شرط آن‌که بدانیم ۹ نفر هم فوتبال و هم والیبال بازی می‌کنند.

۴۷ متعامد بودن دو مربع لاتین زیر را بررسی کنید.

۱	۲	۳
۲	۳	۱
۳	۱	۲

۱	۲	۳
۳	۱	۲
۲	۳	۱

۴۸ گراف P_5 را رسم کرده و تمام مسیرهای به طول ۳ را مشخص کنید.

۴۹ آیا گراف ۷ رأسی ۳- منتظم وجود دارد، برای پاسخ خود دلیل ارائه کنید.

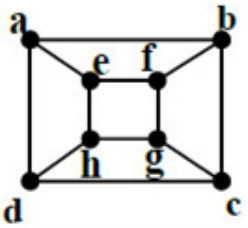
۵۰ فرض کنید $a, b \in Z, m \in N$ اگر $a \overset{m}{\equiv} b$ ثابت کنید: $n \in N, a^n \overset{m}{\equiv} b^n$.

۵۱ یک مربع لاتین چرخشی 4×4 بنویسید.

۵۲ معادله $x_1 + x_2 + \ldots + x_5 = 14$ چند جواب صحیح و نامنفی دارد به شرط آن‌که $x_1 \geq 1$ و $x_3 \geq 3$ باشند؟

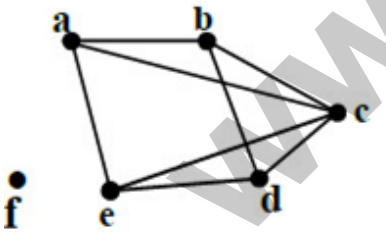
۵۳ هشت نفر به چند طریق می‌توانند در سه اتاق، سه نفره، چهار نفره و یک نفره قرار بگیرند؟

۵۴ عدد احاطه‌گری گراف زیر را مشخص کنید.



۵۵ گراف کامل K_p دارای ۱۰ یال است. ابتدا p را به دست آورید، سپس گراف را رسم کنید.

۵۶ گراف G به صورت مقابل رسم شده است. به سؤالات زیر پاسخ دهید.



الف) $\Delta(G)$, $\delta(G)$ را مشخص کنید.

ب) سه دور به طول ۳ بنویسید.

پ) ماکزیمم درجه در مکمل گراف G چند است؟

ت) $N_G(e)$ را با اعضا بنویسید.

ث) آیا گراف G همبند است؟

۵۷ معادله سیاله $2x + 5y = 19$ را حل کنید.

۵۸ رقم یکان عدد $(7 + 2^{11})$ را به دست آورید.

۵۹ اگر باقی‌مانده تقسیم اعداد m و n بر ۱۷ به‌ترتیب ۵ و ۳ باشد، در این صورت باقی‌مانده تقسیم عدد $(2m - 5n)$ بر ۱۷ را محاسبه کنید.

www.akoedu.ir

تلفن تماس: ۰۲۶۳۳۴۰۸۹۴۴

۶۰ ثابت کنید اگر $p > ۳$ عددی اول باشد، آن‌گاه به یکی از دو صورت $p = ۶k + ۱$ یا $p = ۶k + ۵$ $(k \in W)$ نوشته می‌شود.

۶۱ فرض کنیم a و n دو عدد طبیعی باشند به طوری‌که $a \mid ۳n + ۴$ و $a \mid ۲n + ۳$. نشان دهید $a = ۱$.

۶۲ ثابت کنید اگر a و b دو عدد حقیقی نامنفی باشند، داریم: $\frac{a+b}{۲} \geq \sqrt{ab}$.

۶۳ درستی یا نادرستی عبارات زیر را مشخص کنید.

الف) برای هر دو عدد حقیقی x و y، داریم: $\sqrt{x+y} = \sqrt{x} + \sqrt{y}$.

ب) اگر a و b دو عدد حقیقی باشند و $ab = ۰$ آن‌گاه $a = ۰$ یا $b = ۰$.

پ) اگر $a, b \in R$ داریم: $a < b \Leftrightarrow a^۲ < b^۲$.

ت) حاصل‌جمع هر دو عدد گنگ، عددی گنگ است.

۶۴ قرار است سه کارگر $W_۱, W_۲, W_۳$ در سه روز متوالی با سه ماشین نخ‌ریسی و با ۳ نوع الیاف کار کنند، به گونه‌ای که هر کارگر با هر نوع ماشین و هر نوع الیاف دقیقاً یک بار کار کرده باشد و نیز هر الیاف در هر ماشین دقیقاً یک بار به کار رفته باشد. برای این منظور برنامه‌ریزی کنید.

۶۵ در یک اردوی دانش‌آموزی حداقل چند دانش‌آموز حضور داشته باشند تا اطمینان داشته باشیم که لااقل ۷ نفر از آن‌ها ماه تولد یکسانی دارند؟

۶۶ در بین اعداد طبیعی مانند n، به طوری‌که $۱ \leq n \leq ۱۰۰$، چند عدد وجود دارد که بر ۶ یا ۱۰ بخش‌پذیر است؟

۶۷ به چند طریق می‌توان ۴ خودکار متفاوت را بین ۸ نفر توزیع کرد به شرط آن‌که هیچ‌کس بیش‌تر از یک خودکار نداشته باشد؟ (به هر نفر حداکثر یک خودکار داده باشیم.)

۶۸ ۴ دانش‌آموز پایه دهم و ۳ دانش‌آموز پایه یازدهم، به چند طریق می‌توانند در یک ردیف قرار گیرند، به طوری‌که:

الف) هیچ دو دانش‌آموز هم پایه کنار هم نباشند. ب) همواره دانش‌آموزان پایه دهم کنار هم باشند.

۶۹ ثابت کنید تعداد رأس‌های فرد هر گراف، عددی زوج است.

۷۰ گراف G، ۶ رأسی ۳- منتظم است.

الف) اندازه گراف G را بیابید. ب) نمودار گراف G را رسم کنید.

۷۱ اگر x و y دو عدد حقیقی مثبت باشند، ثابت کنید $\frac{x}{y} + \frac{y}{x} \geq ۲$.

www.akoedu.ir

تلفن تماس: ۰۲۶۳۳۴۰۸۹۴۴

۷۲ در هر مورد متعامد بودن دو مربع لاتین داده شده را بررسی کنید.

الف)

۲	۱	۳
۱	۳	۲
۳	۲	۱

۳	۲	۱
۱	۳	۲
۲	۱	۳

ب)

۳	۱	۲
۲	۳	۱
۱	۲	۳

۱	۲	۳
۳	۱	۲
۲	۳	۱

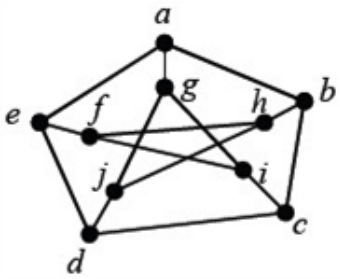
۷۳ مربع لاتین مقابل را درنظر بگیرید و با اعمال یک جایگشت بر روی ۴، ۳، ۲، ۱ یک مربع لاتین جدید به دست آورید.

۲	۱	۴	۳
۴	۳	۲	۱
۳	۴	۱	۲
۱	۲	۳	۴

۷۴ به چند طریق می‌توان از بین ۵ نوع گل، ۱۱ شاخه گل انتخاب کرد، اگر بخواهیم، از گل نوع دوم حداقل ۲ شاخه و از گل نوع پنجم بیش از ۳ شاخه انتخاب کنیم.

۷۵ با ارقام عدد ۴، ۳، ۲، ۲، ۲، ۱، ۱ چند عدد ۷ رقمی می‌توان نوشت؟

۷۶

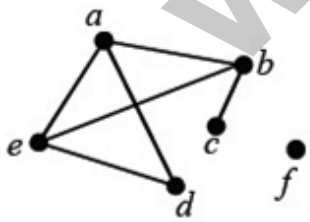


عدد احاطه‌گری گراف زیر را مشخص و ادعای خود را ثابت کنید.

۷۷ گرافی ۶ رأسی با عدد احاطه‌گری ۲ رسم کنید، به طوری‌که:
الف) مجموعه احاطه‌گر یکتا با اندازه ۲ داشته باشد.
ب) بیش از یک مجموعه احاطه‌گر با اندازه ۲ داشته باشد.

۷۸ در گراف G، درجه رأس v برابر با ۹ است و درجه رأس v در گراف $\overline{G}$ برابر با ۱۲ است. مرتبه گراف G را مشخص کنید.

۷۹ گراف G را درنظر گرفته و به سوالات زیر پاسخ دهید.



الف) $N_G[a]$ را با اعضا مشخص کنید.
ب) یک دور به طول ۴ در این گراف مشخص کنید.
پ) یک مسیر به طول ۳ و یک مسیر به طول ۴ از a به c بنویسید.

www.akoedu.ir

تلفن تماس: ۰۲۶۳۳۴۰۸۹۴۴

۸۰ جاهای خالی را با عبارت مناسب پر کنید.
الف) مجموع درجه‌های رأس‌های هر گراف ..... تعداد یال‌ها است.
ب) در یک گراف k- منتظم، ماکزیمم درجه رأس برابر با ..... است.
پ) در بین تمام مجموعه‌های احاطه‌گر گراف G، مجموعه یا مجموعه‌های احاطه‌گری که کم‌ترین تعداد عضو را دارند، مجموعه احاطه‌گر ..... گراف G می‌نامیم.
ت) یک مجموعه احاطه‌گر را که با حذف هریک از رأس‌هایش، دیگر احاطه‌گر نباشد، احاطه‌گر ..... می‌نامیم.

۸۱ معادله هم‌نهشتی $5x \overset{11}{\equiv} 2$ را حل کرده و جواب عمومی آن‌را بنویسید.

۸۲ باقی‌مانده تقسیم 7^{30} بر ۱۵ را به دست آورید.

۸۳ اگر $n \in N$، $n|9k+7$ و $n|7k+6$، ثابت کنید $n=1$ یا $n=5$.

۸۴ اگر باقی‌مانده تقسیم عدد a بر ۴ برابر ۳ باشد، در این صورت باقی‌مانده تقسیم عدد $2a+3$ بر ۸ را به دست آورید.

۸۵ گزاره درست را اثبات کنید و برای گزاره نادرست، مثال نقض ارائه دهید.
الف) مجموع هر دو عدد گنگ، عددی گنگ است.
ب) اگر از مربع عددی فرد یک واحد کم کنیم، حاصل همواره بر ۸ بخش‌پذیر است.

۸۶ مجموعه اعداد $A=\{1, 2, 3, \ldots, 84\}$ را درنظر بگیرید. نشان دهید هر زیر مجموعه ۴۳ عضوی از S دارای ۲ عضو است که مجموعشان برابر ۸۵ است.

۸۷ با استفاده از اصل شمول و عدم شمول، تعداد توابع پوشا از یک مجموعه ۴ عضو به یک مجموعه ۳ عضوی را به دست آورید.

۸۸ بررسی کنید، آیا دو مربع لاتین 3×3 روبه‌رو متعامدند؟

۱	۲	۳
۳	۱	۲
۲	۳	۱

۱	۲	۳
۲	۳	۱
۳	۱	۲

۸۹ معادله $x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=14$ چند جواب صحیح و نامنفی دارد، به شرط آن‌که $x_1>2$, $x_3>3$ باشند.

۹۰ ۶ کتاب ریاضی مختلف و ۵ کتاب فیزیک متمایز را به چند طریق می‌توان کنار هم در یک ردیف قرار داد، به طوری‌که:
الف) کتاب‌ها یکی در میان قرار گیرند.
ب) کتاب‌های ریاضی کنار هم و کتاب‌های فیزیک نیز کنار هم باشند.

۹۱ با حروف کلمه «می‌سی‌سی‌پی» چند جایگشت ۸ حرفی بامعنا یا بی‌معنا می‌توان نوشت؟

www.akoedu.ir

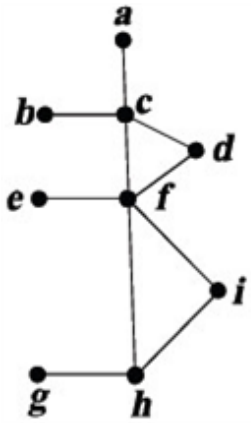
تلفن تماس: ۰۲۶۳۳۴۰۸۹۴۴

۹۲ اگر n تعداد رئوس گراف و Δ ماکزیمم درجه گراف باشد

الف) گرافی رسم کنید که برای آن عدد احاطه‌گر برابر $\left\lceil \frac{n}{\Delta+1} \right\rceil$ است.

ب) گرافی رسم کنید که برای آن عدد احاطه‌گری بزرگ‌تر از $\left\lceil \frac{n}{\Delta+1} \right\rceil$ باشد.

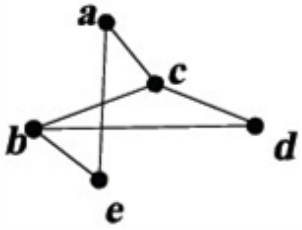
۹۳ برای گراف روبه‌رو:



الف) یک مجموعه احاطه‌گر با ۴ عضو مشخص کنید.

ب) مجموعه‌ای از رئوس را مشخص کنید که احاطه‌گر مینیمال باشد.

۹۴ گراف G به صورت مقابل را درنظر بگیرید و به سؤالات زیر پاسخ دهید.



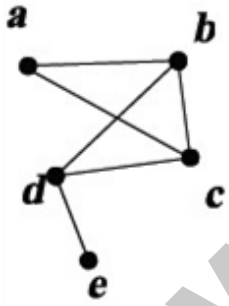
الف) دوری به طول ۵ مشخص کنید.

ب) مکمل گراف G را رسم کنید.

۹۵ آیا گراف ۳- منتظم از مرتبه ۵ وجود دارد؟ دلیل بیاورید.

۹۶ گراف k- منتظم از مرتبه n را تعریف کنید.

۹۷ گراف G به صورت مقابل را درنظر بگیرید و به سؤالات زیر پاسخ دهید.



الف) $\delta(G)$ را مشخص کنید.

ب) اندازه گراف را تعیین کنید.

پ) مجموعه همسایگی بسته رأس b را بنویسید.

ت) اگر $N_G(d) = \{e, x, b\}$ باشد، x کدام رأس است؟

۹۸ جواب‌های عمومی معادله سیاله خطی $۹x + ۱۳y = ۷$ را به دست آورید.

۹۹ ثابت کنید می‌توان دو طرف یک رابطه همنهشتی را در عددی صحیح ضرب کرد، به عبارتی دیگر، برای اعداد صحیح a, b, c و عدد طبیعی m، اگر $a \overset{m}{\equiv} b$ آنگاه $ac \overset{m}{\equiv} bc$.

۱۰۰ باقی‌مانده تقسیم $۱۳^{۲۲}$ را بر ۱۷ به دست آورید.

۱۰۱ فرض کنید a عددی طبیعی باشد، حاصل $[۲۱a^۲, ۳۵a^۳]$ را به دست آورید.

www.akoedu.ir

تلفن تماس: ۰۲۶۳۳۴۰۸۹۴۴

۱۰۲ اگر عدد طبیعی $a > 1$، در دو شرط $a|4k+9$ و $a|6k+14$ صدق کند، مقدار a را بیابید.

۱۰۳ به روش بازگشتی ثابت کنید، اگر $a > 0$ آنگاه $a + \frac{1}{a} \geq 2$.

۱۰۴ درست یا نادرست بودن عبارت زیر را مشخص کنید.
اگر $a|b$ آنگاه $[a, b] = |b|$.

۱۰۵ ۱۳ نقطه درون یک مستطیل 8×6 قرار دارند؛ نشان دهید حداقل ۲ نقطه از این ۱۳ نقطه وجود دارند که فاصله آن‌ها از هم، کم‌تر از $\sqrt{8}$ باشد.

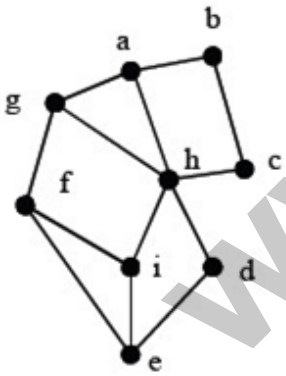
۱۰۶ چند عدد طبیعی مانند n به طوری‌که $1 \leq n \leq 350$ وجود دارد که بر هیچ‌یک از اعداد ۴ و ۶ بخش‌پذیر نباشد.

۱۰۷ قرار است چهار مدرس T_1, T_2, T_3, T_4 در چهار جلسه متوالی در چهار کلاس C_1, C_2, C_3, C_4 به گونه‌ای تدریس کنند که هر مدرس در هر کلاس دقیقاً یک جلسه تدریس کند، برای این منظور برنامه‌ریزی نمایید.

۱۰۸ تعداد جواب‌های صحیح و نامنفی معادله $x_1 + x_2 + \ldots + x_6 = 12$ با شرط $x_5 \geq 4, x_1 > 2$ را محاسبه کنید.

۱۰۹ ۴ کتاب فیزیک متفاوت و ۵ کتاب ریاضی متفاوت را می‌توانیم به چند طریق در قفسه‌ای و در یک ردیف بچینیم به طوری که:
الف) همواره کتاب‌های فیزیک کنار هم باشند.
ب) هیچ دو کتاب ریاضی کنار هم نباشند.
ج) یک کتاب ریاضی خاص و دو کتاب فیزیک خاص همواره کنار هم باشند.

۱۱۰ در گراف شکل مقابل یک مجموعه احاطه‌گر غیرمینیمال انتخاب کنید. سپس با حذف برخی از رأس‌ها، آن‌را به یک مجموعه احاطه‌گر مینیمال تبدیل نمایید.



۱۱۱ الف) گراف p_8 را رسم کنید.
ب) یک γ- مجموعه از آن‌را مشخص کنید.
ج) یک مجموعه احاطه‌گر مینیمال ۴ عضوی از آن‌را مشخص نمایید.

۱۱۲ یک گراف ۵ رأسی غیرتهی k- منتظم رسم کنید به طوری‌که:
الف) k بیش‌ترین مقدار ممکن را داشته باشد. ب) k کم‌ترین مقدار ممکن را داشته باشد.

تلفن تماس: ۰۲۶۳۳۴۰۸۹۴۴

www.akoedu.ir

۱۱۳ گراف G با مجموعه رأس‌های $V = \{a, b, c, d, e, f\}$ و مجموعه یال‌های زیر درنظر بگیرید:
$E = \{ab, bc, cd, ed, ae, cf, ef\}$

الف) نمودار گراف را رسم کنید.
ب) $N_G[b]$ را مشخص کنید.
ج) یک مسیر به طول ۵ از b به d بنویسید.

۱۱۴ با تبدیل معادله سیاله خطی $۲۰۰۰x + ۵۰۰۰y = ۲۹۰۰۰$ به معادله هم‌نهشتی و حل آن، جواب‌های عمومی این معادله را بیابید.

۱۱۵ باقی‌مانده تقسیم $(۲۷)^{۷} + ۱۹$ را بر ۱۳ بیابید.

۱۱۶ برای هر سه عدد حقیقی x, y, z ثابت کنید: $x^۲ + y^۲ + z^۲ \geq xy + yz + xz$

۱۱۷ جای خالی را پر کنید.
$c = [a, b]$ اگر و تنها اگر دو شرط زیر برقرار باشند:
۱) $a|c, b|c$ ۲) $\forall m > ۰, \ldots$

۱۱۸ درستی یا نادرستی گزاره‌های زیر را تعیین کنید.
الف) مجموع هر دو عدد فرد، عددی زوج است.
ب) برای هر عدد طبیعی n بزرگ‌تر از ۱، عدد $۲^{n} - ۱$ اول است.

۱۱۹ در جاهای خالی عبارت ریاضی مناسب قرار دهید.
الف) اگر G یک گراف n رأسی باشد، مقدار $q(G) + q(\overline{G})$ برابر ..... است.
ب) عدد احاطه‌گری گراف $C_۶$ برابر ..... می‌باشد.

۱۲۰ در جای خالی عبارت ریاضی مناسب قرار دهید.
مجموع درایه‌های سطر اول یک مربع لاتین ۵ در ۵ برابر با ..... است.

۱۲۱ در یک اردوی دانش‌آموزی حداقل چند دانش‌آموز وجود داشته باشند تا اطمینان داشته باشیم که حداقل ۷ نفر از آنها ماه تولد یکسانی دارند؟

۱۲۲ چند عدد طبیعی مانند n، به طوری که $۱ \leq n \leq ۲۰۰$، وجود دارد که بر هیچ یک از اعداد ۳، ۴، بخش‌پذیر نباشند؟
(بر ۳ بخش‌پذیر نباشند و بر ۴ نیز بخش‌پذیر نباشند.)

۱۲۳ دو مربع متعامد از مرتبه ۳ بنویسید.

۱۲۴ می‌خواهیم ۸ نفر را که دو به دو برادر یک‌دیگرند در دو طرف طول یک میز مستطیل شکل بنشانیم. اگر بخواهیم هر نفر روبروی برادرش بنشیند، به چند طریق می‌توان این کار را انجام داد؟

۱۲۵ تعداد جواب‌های صحیح و نامنفی معادله‌ی زیر با شرطهای داده‌شده را به دست آورید.
$x_۱ + x_۲ + \ldots + x_۵ = ۱۲ \qquad x_۱ > ۲, x_۵ \geq ۴$

www.akoedu.ir

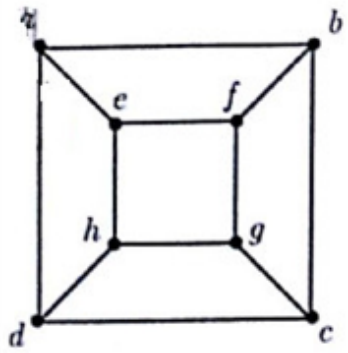
تلفن تماس: ۰۲۶۳۳۴۰۸۹۴۴

۱۲۶ ۹ نفر به چند طریق می‌توانند در سه اتاق ۲ نفره، ۳ نفره و ۴ نفره، واقع در یک هتل اسکان یابند؟

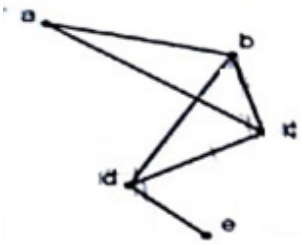
۱۲۷ اگر عدد احاطه‌گری در یک گراف ۵ رأسی برابر یک باشد در این صورت $\Delta(G)$ و حداقل و حداکثر تعداد یال‌هایی را که گراف G می‌تواند داشته باشد مشخص کنید.

۱۲۸ در هر قسمت، گراف خواسته شده را رسم کنید.
الف) یک گراف ۲ منظم از مرتبه ۸ که عدد احاطه‌گری آن کمترین مقدار ممکن است را داشته باشد.
ب) یک گراف ۵ رأسی که ۷- مجموعه‌ی آن با اندازه یک باشد.
ج) یک گراف ۶ رأسی با عدد احاطه‌گری ۲ رسم کنید که یک مجموعه‌ی احاطه‌گر یکتا با اندازه‌ی ۲ داشته باشد.

۱۲۹ در گراف شکل مقابل:
الف) یک مجموعه‌ی احاطه‌گر مینیمم مشخص کنید.
ب) یک مجموعه احاطه‌گر مینیمال مشخص کنید که مینیمم نباشد.



۱۳۰ گراف G را (مطابق شکل مقابل) در نظر بگیرید.
الف) مجموعه رئوس و مجموعه یال‌ها را بنویسید.
ب) در گراف G، یک دور به طول ۳ بنویسید.
ج) درجه رأس e را در گراف $\overline{G}$ مشخص کنید.



۱۳۱ جواب عمومی معادله $۴x \overset{۵}{\equiv} ۱۷$ را به دست آورید.

۱۳۲ اگر عددی مانند k در Z باشد، به طوری‌که $۵|۴k+۱$، ثابت کنید: $۲۵|\ ۱۶k^۲ + ۲۸k + ۶$.

۱۳۳ گزاره زیر را به روش بازگشتی (گزاره‌های هم‌ارز) ثابت کنید.
(برای هر عدد حقیقی $a > ۰$ داریم: $a + \frac{۱}{a} \geq ۲$)

۱۳۴ ثابت کنید حاصل جمع یک عدد گویا و یک عدد گنگ عددی گنگ است.

۱۳۵ درستی یا نادرستی گزاره‌های زیر را معلوم کنید.
الف) مربع هر عدد فرد را می‌توان به صورت $۸k - ۱$ نوشت.
ب) یک ۷- مجموعه در گراف $p_۵$، ۲ عضو دارد.
ج) تعداد کمتر از $\left\lceil \frac{n}{\Delta + ۱} \right\rceil$ رأس نمی‌توانند تمام n رأس گراف را احاطه کنند.
د) برای $n = ۱, ۲, ۶$ دو مربع لاتین متعامد از مرتبه n وجود ندارد.

www.akoedu.ir

تلفن تماس: ۰۲۶۳۳۴۰۸۹۴۴

۱۳۶ در جای خالی عبارت ریاضی مناسب قرار دهید.
حاصل عبارت $[(۸ , ۶) , ۱۲]$ برابر ..... خواهد شد.

۱۳۷ ثابت کنید اگر در یک دبیرستان حداقل ۵۰۵ دانش‌آموز مشغول به تحصیل باشند لااقل ۷ نفر از آنها روز هفته و ماه تولدشان یکسان است.

۱۳۸ در بین اعداد ۱ تا ۹۰ چند عدد وجود دارد که بر ۲ یا ۳ بخش‌پذیر باشند.

۱۳۹ اگر سه دوست هم سایز، سه کت و سه پیراهن داشته باشند و بخواهند در سه روز اول هفته از این لباسها به گونه‌ای استفاده کنند که هر فرد هر یک از کت‌ها و هریک از پیراهن‌ها را دقیقاً یک بار استفاده کرده باشد و هر کت با هر پیراهن نیز دقیقاً یکبار مورد استفاده قرار بگیرد، چگونه می‌توانند این کار را انجام دهند؟

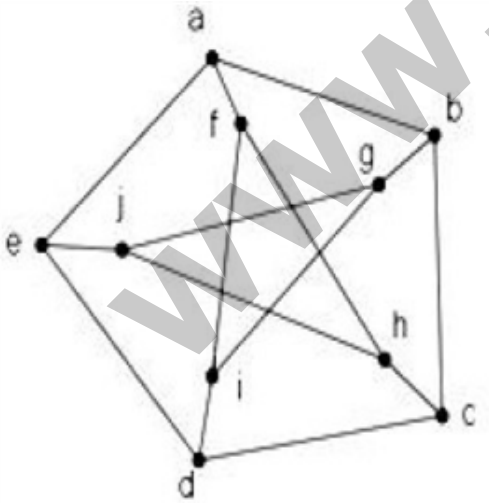
۱۴۰ تعداد جواب‌های صحیح و نامنفی معادله $x_۱ + x_۲ + ... + x_۵ = ۱۰$ با شرط $x_i > ۰ , i = ۲, ۳, ۴, ۵$ را محاسبه کنید.

۱۴۱ ۶ دانش‌آموز پایه دوازدهم و ۵ دانش‌آموز پایه یازدهم به چند طریق می‌توانند کنار هم در یک ردیف قرار گیرند، به طوری که:
الف) به صورت یک در میان قرار بگیرند.
ب) همواره دانش‌آموزان یازدهم کنار هم باشند.
ج) یک دانش‌آموز خاص یازدهم و یک دانش‌آموز خاص دوزادهم در کنار هم باشند.

۱۴۲ با ارقام ۵, ۴, ۴, ۲, ۳, ۲, ۲, ۱, ۱, ۱ چند عدد ۹ رقمی می‌توان نوشت؟

۱۴۳ الف) یک گراف ۶ رأسی با عدد احاطه‌گری ۲ رسم کنید که یک مجموعه احاطه‌گر یکتا با اندازه ۲ داشته باشد.
ب) یک گراف ۶ رأسی احاطه‌گری ۲ رسم کنید که بیش از یک مجموعه احاطه‌گر با اندازه ۲ داشته باشد.

۱۴۴ الف) ثابت کنید هر مجموعه احاطه‌گر دلخواه غیر مینمال را میتوان با حذف برخی از رئوسش به یک مجموعه احاطه‌گر مینمال تبدیل کرد؟
ب) در گراف روبرو یک مجموعه احاطه‌گر مینمال ۵ عضوی را مشخص کنید.



www.akoedu.ir

تلفن تماس: ۰۲۶۳۳۴۰۸۹۴۴

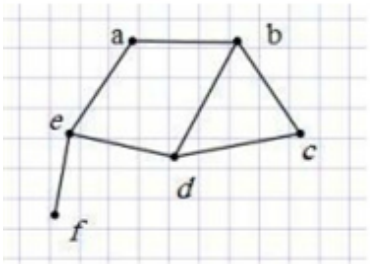
۱۴۵) گراف G_7 را در نظر بگیرید و به سؤالات زیر پاسخ دهید.

الف) یک مجموعه احاطه‌گر ۴ عضوی بنویسید.

ب) عدد احاطه‌گری G_7 را به دست آورید.

ج) دو مجموعه احاطه‌گر مینیمم متمایز بنویسید.

۱۴۶) شکل مقابل نمودار گراف G می‌باشد.



الف) مرتبه و اندازه گراف G را بنویسید.

ب) مجموعه $N_G(b)$ را بنویسید.

ج) مجموع درجه‌های رأس‌های گراف $\overline{G}$ را مشخص کنید.

۱۴۷) با تبدیل معادله سیاله خطی $5x + 2y = 18$ به معادله هم نهشتی و حل آن، جوابهای عمومی این معادله را بیابید.

۱۴۸) اگر در یک سال، شنبه روز اول مهر باشد، در این صورت با استفاده از هم نهشتی تعیین کنید ۱۲ بهمن، در همان سال چه روزی از هفته است؟

۱۴۹) اگر باقی‌مانده تقسیم m و n بر ۱۳ به ترتیب اعداد ۲ و ۹ باشد در این صورت باقی‌مانده تقسیم عدد $5n - 3m$ بر ۱۳ را بدست آورید.

۱۵۰) در جاهای خالی عبارت ریاضی مناسب قرار دهید.

الف) یک گراف کامل ۸ رأسی، ..... یال دارد.

ب) در یک گراف از مرتبه ۱۰ با $\Delta = 3$ حداقل ..... راس برای احاطه همه رئوس لازم است.

ج) اگر در گراف G از مرتبه P داشته باشیم $\gamma(G) = 1$ در این صورت $\Delta(G)$ برابر ..... است.

۱۵۱) حداقل چند نفر در یک سالن ورزشی مشغول تماشای مسابقه کشتی باشند تا مطمئن باشیم لااقل ۲۰ نفر از آن‌ها روز تولدشان یکسان است؟ (سال را غیرکبیسه درنظر بگیرید)

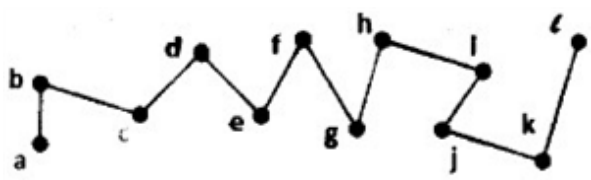
۱۵۲) به چند طریق می‌توان ۴ خودکار متفاوت را بین سه نفر توزیع کرد به شرط آن‌که به هر نفر حداقل ۱ خودکار داده باشیم؟ (راه حل نوشته شود.)

۱۵۳) دو مربع لاتین متعامد از مرتبه ۳ بنویسید و متعامد بودن آن‌ها را نشان دهید.

۱۵۴) به چند طریق می‌توان ۸ توپ یکسان را بین ۴ نفر توزیع کرد هرگاه بخواهیم هر نفر حداقل یک توپ داشته باشد؟

۱۵۵) اگر داشته باشیم $A = \{1, 2, 3, 4\}$ و $B = \{5, 6, 7, 8, 9\}$، در این صورت چند کد رمز ۵ رقمی می‌توان نوشت که هریک شامل دو رقمِ (متمایز) از A و سه رقمِ (متمایز) از B باشد؟

۱۵۶) گراف (P_{12}) در شکل مقابل رسم شده است.



الف) یک γ- مجموعه از آن‌را مشخص کنید.

ب) یک مجموعه‌ی احاطه‌گر مینمال ۶ عضوی از آن‌را مشخص نمایید.

www.akoedu.ir

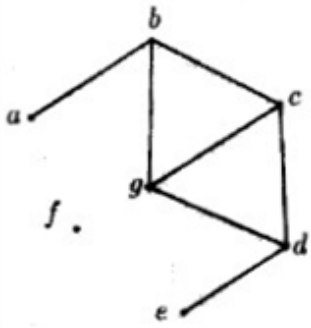
تلفن تماس: ۰۲۶۳۳۴۰۸۹۴۴

۱۵۷ گراف کامل k_p دارای ۳۶ یال است در این گراف، مرتبه گراف و $\Delta(G)$ را مشخص کنید.

۱۵۸ گراف G با مجموعه رأس‌های $V(G)=\{a, b, c, d, e\}$ و
مجموعه‌ی یال‌های $E(G)=\{ae, bc, bd, be, ec, ed\}$ مفروض است.
بدون کشیدن نمودار آن به قسمت‌های الف تا ج پاسخ دهید.
الف) مجموعه همسایگی باز رأس d را بنویسید.
ب) اندازه گراف را مشخص کنید.
ج) مجموع درجات رئوس این گراف برابر چند است؟

۱۵۹ ثابت کنید تعداد رأس‌های فرد هر گراف، عددی زوج است.

۱۶۰ با توجه به گراف G (شکل مقابل) به سؤالات زیر پاسخ دهید.



الف) یک a - c مسیر به ۳ بنویسید.
ب) یک دور به طول ۴ مشخص کنید.
ج) درجه رأس a در گراف $\overline{G}$ را تعیین کنید.
د) آیا گراف G همبند است؟ چرا؟
هـ) یک زیرگراف تهیِ ۵ رأسی، از گراف G رسم کنید.

۱۶۱ معادله همنهشتی $3x \overset{7}{\equiv} 13$ را حل و جواب عمومی آن‌را به دست آورید.

۱۶۲ پاسخ سوال زیر را به دست آورده و دلیل پاسخ خود را به طور کامل بنویسید.
مطلوبست باقی‌مانده‌ی تقسیم عدد $A=(1000)^{13}\times 12+10$ بر عدد ۷.

۱۶۳ پاسخ سوال زیر را به دست آورده و دلیل پاسخ خود را به طور کامل بنویسید.
اگر a عددی صحیح و فرد باشد و $b \mid a+2$ در این صورت باقی‌مانده تقسیم عدد a^2+b^2+3 را بر ۸ بیابید.

۱۶۴ اگر $a>1$ و $a \mid 9k+4$ و $a \mid 5k+3$ ثابت کنید a عددی اول است.

۱۶۵ گزاره زیر را به روش بازگشتی (گزاره‌های هم‌ارز) ثابت کنید:
(برای هر دو عدد حقیقی x و y داریم: $x^2+y^2+1 \geq xy+x+y$)

۱۶۶ اگر α و β دو عدد گنگ باشند ولی $\alpha+\beta$ گویا باشد، ثابت کنید $\alpha+2\beta$ گنگ است.

۱۶۷ درستی یا نادرستی گزاره‌های زیر را مشخص کنید.
الف) اگر k حاصل‌ضرب دو عدد طبیعی متوالی باشد آن‌گاه $4k+1$ مربع کامل است.
ب) هر دو عدد صحیح و متوالی نسبت به هم اول‌اند.
ج) گراف حاصل از مدل‌سازی پل کونیگسبرگ یک گراف ساده است.
د) گراف ۳- منتظم از مرتبه ۵ قابل رسم نیست.

www.akoedu.ir

تلفن تماس: ۰۲۶۳۳۴۰۸۹۴۴

۱۶۸ S یک زیر مجموعه ۳۷ عضوی از اعداد طبیعی است. اگر اعضای S را بر عدد ۳۶ تقسیم کنیم، حداقل چند عضو از این مجموعه دارای باقیمانده یکسانی بر ۳۶ هستند؟

۱۶۹ با استفاده از برهان خلف ثابت کنید اگر $\sqrt{۵}$ گنگ باشد $\sqrt{۵} + ۳$ هم گنگ است.

۱۷۰ با استفاده از استدلال استنتاجی ثابت کنید حاصل ضرب سه عدد زوج متوالی مضرب ۸ است.

۱۷۱ ۱۳ نفر در یک میهمانی حضور دارند. نشان دهید حداقل دو نفر از آن‌ها در یک ماه متولد شده‌اند.

۱۷۲ حکم زیر را به روش خواسته شده اثبات کنید.
اگر n عدد طبیعی و $n^۲$ فرد باشد، n نیز فرد است. (برهان خلف)

۱۷۳ حکم زیر را به روش خواسته شده اثبات کنید.
برای هر دو عدد حقیقی مثبت x , y نشان دهید: $x + y \geq ۲\sqrt{xy}$ (اثبات بازگشتی)

۱۷۴ نشان دهید هر زیرمجموعه‌ای از مجموعه $S = \{۱ , ۲ , ۳ , ۴ , ۶ , ۷ , ۸ , ۹\}$ که دارای ۵ عضو باشد، حداقل ۲ عضو دارد که مجموع آن‌ها برابر ۱۰ است.

۱۷۵ با استفاده از روش استدلالی برهان خلف ثابت کنید "$\sqrt{۳}$ عددی گنگ است."

۱۷۶ کدام‌یک از احکام زیر درست و کدام‌یک نادرست است؟ برای احکام نادرست مثال نقض ارائه دهید.
الف) هر دو زاویه متقابل به راس با هم برابرند.
ب) برای هر عدد طبیعی n ، $۲^n + ۱$ عددی اول است.

۱۷۷ با استفاده از استدلال استنتاجی نشان دهید "مجموع دو عدد زوج همواره عددی زوج است."

۱۷۸ شرکت‌کنندگان در یک آزمون ریاضی ۳۰۷۳ نفر می‌باشند. حداقل چند شرکت‌کننده وجود دارد که حرف اول نام و نام‌خانوادگی آن‌ها به زبان فارسی یکسان است؟ دلیل ارائه کنید.

۱۷۹ حکم درست را اثبات کرده و برای رد حکم نادرست مثال نقض ارائه دهید.
الف) حاصل‌ضرب هر دو عدد حقیقی، کوچک‌تر یا مساوی نصف مجموع مربع‌های آن‌هاست.
ب) حاصل جمع دو عدد گنگ، عددی گنگ است.

۱۸۰ در هر مورد نوع استدلال ریاضی را مشخص کنید.
الف) روش نتیجه‌گیری با استفاده از حقایقی که درستی آن‌ها را پذیرفته‌ایم.
ب) روش نتیجه‌گیری کلی بر مبنای مجموعه محدودی از مشاهدات است.
ج) روش اثباتی که در آن با استفاده از درستی حکم به یک رابطه بدیهی یا فرض مساله می‌رسیم.

۱۸۱ در یک کلاس ۳۰ نفر دانش‌آموز حضور دارند. حداقل چند نفر از دانش‌آموزان این کلاس در یک فصل از سال متولد شده‌اند؟ چرا؟

www.akoedu.ir

تلفن تماس: ۰۲۶۳۳۴۰۸۹۴۴

۱۸۲ با استفاده از برهان خلف، ثابت کنید اگر x گویا و y گنگ باشد، آن‌گاه $(x + y)$ گنگ است.

۱۸۳ اگر b و a دو عدد حقیقی باشند، با استفاده از استدلال بازگشتی درستی رابطه زیر را بررسی کنید:

$$a^{۲} + ۱ \geq b\,(۲ - b)$$

۱۸۴ با استفاده از استدلال استنتاجی ثابت کنید، اگر به سه برابر عددی فرد یک واحد اضافه شود، عددی زوج بدست می‌آید.

۱۸۵ S یک زیر مجموعه ۴۰ عضوی از اعداد طبیعی است. اگر اعضای S را بر عدد ۳۹ تقسیم کنیم، نشان دهید حداقل دو عضو از این مجموعه دارای باقی‌مانده‌ی یکسانی بر ۳۹ هستند.

۱۸۶ با استفاده از برهان خلف ثابت کنید اگر x و y دو عدد حقیقی، $x \neq ۳$ و $x + ۴y^{۲} = ۷$ آن‌گاه $y \neq -۱$ است.

۱۸۷ اگر a و b دو عدد حقیقی باشند، با استفاده از استدلال بازگشتی ثابت کنید:

$$a^{۲} + b^{۲} \geq ۲(b - ۱)$$

۱۸۸ درستی یا نادرستی حکم زیر را اثبات کنید و برای رد ا اثبات آن یک مثال نقض بیاورید.
حاصل‌ضرب دو عدد صحیح زوج متوالی مضرب ۸ است.

۱۸۹ درستی یا نادرستی حکم زیر را اثبات کنید و برای رد اثبات آن یک مثال نقض بیاورید.
توان دوم یک عدد همیشه از آن عدد بزرگ‌تر است.

۱۹۰ درستی یا نادرستی حکم زیر را تعیین کنید و در صورت نادرستی مثال نقض بیاورید.
اگر $n^{۲}$ مضرب ۳ باشد آنگاه n نیز مضرب ۳ است.

۱۹۱ اگر a , b دو عدد حقیقی مثبت باشند، با استفاده از اثبات بازگشتی ثابت کنید:

$$ab \leq \left(\frac{a+b}{۲}\right)^{۲}$$

۱۹۲ یک مدرسه حداقل چه تعداد دانش آموز باید داشته باشد تا دست کم ۱۳ دانش آموز در یک ماه از سال متولد شده باشند.

۱۹۳ با استفاده از استدلال استنتاجی نشان دهید مجموع مربعات هر دو عدد فرد همواره عددی زوج است.

۱۹۴ پنج نقطه داخل مربعی به ضلع ۲ واحد مفروض‌اند، ثابت کنید حداقل فاصله‌ی دو نقطه از این پنج نقطه کم‌تر از $\sqrt{۲}$ است.

۱۹۵ هفت نقطه درون مستطیلی به ابعاد ۴ و ۶ متر انتخاب می‌کنیم، ثابت کنید حداقل ۲ نقطه از آن‌ها فاصله‌ای کم‌تر از $۲\sqrt{۲}$ متر را دارند.

www.akoedu.ir

تلفن تماس: ۰۲۶۳۳۴۰۸۹۴۴

www.akoedu.ir

۱۹۶ اگر $۵\sqrt{}$ و $۷\sqrt{}$ دو عدد گنگ باشند، ثابت کنید $(۳\sqrt{۷} + ۲\sqrt{۵})$ نیز عددی گنگ است. (برهان خلف)

۱۹۷ آیا مجموع دو عدد گنگ، همواره عددی گنگ است؟ چرا؟

۱۹۸ با استفاده از استدلال ثابت کنید ۳ برابر مربع یک عدد فرد منهای ۳ ، مضرب ۱۲ است.

۱۹۹ ثابت کنید مجموعه تهی زیرمجموعه تمامی مجموعه‌ها است.

۲۰۰ اگر x و y دو عدد حقیقی و مثبت باشند، ثابت کنید رابطه زیر برقرار است.

$$xy \le \left(\frac{x+y}{۲}\right)^{۲}$$

۲۰۱ ۱۰ نقطه را درون مربعی به ضلع واحد انتخاب می‌کنیم، ثابت کنید فاصله حداقل دو نقطه از آن‌ها کمتر از $\frac{\sqrt{۲}}{۳}$ است.

۲۰۲ با استدلال برهان خلف ثابت کنید اگر $۷\sqrt{}$ عدد گنگ و x عدد گویا است آنگاه $x+۷\sqrt{}$ عددی گنگ است.

۲۰۳ با ذکر دلیل، درستی یا نادرستی عبارت زیر را بررسی کنید.
اگر $xy=۰$ آنگاه $x=۰$ و $y=۰$.

۲۰۴ با ذکر دلیل، درستی یا نادرستی عبارت زیر را بررسی کنید.
حاصلضرب هر دو عدد گویا همیشه عددی گویا است.

۲۰۵ با ذکر دلیل، درستی یا نادرستی عبارت زیر را بررسی کنید.
توان سوم هر عدد حقیقی از توان دوم همان عدد بزرگتر است.

۲۰۶ اگر a و b دو عدد حقیقی مثبت باشند، ثابت کنید که رابطه زیر برقرار است:

$$\frac{a}{b^{۲}}+\frac{b}{a^{۲}} \ge \frac{۱}{a}+\frac{۱}{b}$$

۲۰۷ با استفاده از برهان خلف، ثابت کنید که $۳\sqrt{}$ گنگ است.

۲۰۸

۲۰۹

۲۱۰

۲۱۱ پست‌خانه‌ای فقط تمبرهای ۶۰ ریالی و ۹۰ ریالی برای فروش دارد. شخصی برای فرستادن یک بسته که نیاز به ۸۷۰ ریال تمبر دارد از هر نوع تمبر چه تعداد باید بخرد. (تمام حالات ممکن برای خرید تمبر نوشته شود.)

www.akoedu.ir

تلفن تماس: ۰۲۶۳۳۴۰۸۹۴۴

www.akoedu.ir

۲۱۲ نشان دهید اگر $(a, b) = ۱$، آن‌گاه $(a, a - b) = ۱$.

۲۱۳ ثابت کنید بی‌نهایت عدد اول وجود دارند.

۲۱۴ ثابت کنید حاصل‌ضرب دو عدد زوج متوالی بر عدد ۸ تقسیم‌پذیر است.

۲۱۵ ثابت کنید حاصل‌ضرب سه عدد طبیعی متوالی بر ۶ تقسیم‌پذیر است.

۲۱۶ گراف کامل را تعریف کنید.

۲۱۷ «دنباله‌ی درجه‌های رأس‌های» این گراف را به‌صورت یک دنباله نزولی بنویسید.

۲۱۸ دو دور به طول ۵ در این گراف بنویسید.

۲۱۹ مجموعه‌ی رئوس و مجموعه‌ی یال‌های گراف را مشخص کنید.

۲۲۰ تعداد جواب‌های صحیح $x_۱ + x_۲ + x_۳ = ۱۴$ با شرط $x_i > ۲$ برای $i = ۱, ۲, ۳$ را پیدا کنید.

۲۲۱

۲۲۲ ثابت کنید اگر $a|bc$ و $(a, b) = ۱$، آن‌گاه $a|c$.

۲۲۳ ثابت کنید اگر $b|c$، آن‌گاه $(a, b) = (a + c, b)$.

۲۲۴ نشان دهید حاصل‌ضرب هر دو عدد به‌صورت $۶k + ۵$، عددی به‌صورت $۶k + ۱$ است.

۲۲۵ ثابت کنید مربع هر عدد فرد به‌صورت $۸q + ۱$ است.

۲۲۶ ثابت کنید تعداد رأس‌های فرد هر گراف، زوج است.

۲۲۷ مسیر از $v_۱$ به $v_۳$ بنویسید.

۲۲۸ نمودار این گراف را رسم کنید.

۲۲۹ چند عدد ۳ رقمی وجود دارد که در آن هریک از ارقام ۲ و ۳ حداقل یک‌بار به‌کار رفته باشند.

۲۳۰ معادله‌ی سیاله‌ی $۵۱x + ۳۹y = ۳۰۰$ را در Z حل کنید.

۲۳۱ ثابت کنید $۸^{۲۳} - ۲$ بر ۳۱ بخش‌پذیر است.

۲۳۲ ثابت کنید از رابطه‌ی هم‌نهشتی (پیمانه‌ی m) $ac \equiv bc$ نتیجه می‌شود. (پیمانه $\frac{m}{d}$) $a \equiv b$ که در آن $d = (m, c)$.

۲۳۳ ثابت کنید بی‌نهایت عدد اول وجود دارند.

تلفن تماس: ۰۲۶۳۳۴۰۸۹۴۴

www.akoedu.ir

۲۳۴ اولاً: ثابت کنید اگر $a|b$ ، آن‌گاه $a|bc$ $(a, b, c \in Z)$. ثانیاً: برای مقادیر صحیح a, b, c مثالی بیاورید که $a|bc$ برقرار باشد ولی هر دو حکم $a|b$ و $a|c$ برقرار نباشد.

۲۳۵

۲۳۶ طولانی‌ترین مسیر از V_1 به V_3 را بنویسید.

۲۳۷ آیا G یک گراف بازه‌ها است؟ چرا؟

۲۳۸ اندازه‌ی گراف کامل مرتبه‌ی ۵ را محاسبه کنید.

۲۳۹ مرتبه و اندازه‌ی گراف را تعریف کنید.

۲۴۰ گراف ساده را تعریف کنید.

۲۴۱ تعداد اعداد صحیح مثبت کوچک‌تر از ۵۰۰ که نسبت به ۵۰۰ اولند را محاسبه کنید.

۲۴۲ اگر باقی‌مانده‌ی تقسیم اعداد A و B بر ۳۹ به ترتیب ۱۷ و ۲۳ باشد، باقی‌مانده‌ی $A - B$ بر ۳۹ را محاسبه کنید.

۲۴۳ رقم یکان $۳^{۲۵} + ۷^{۷۳}$ را محاسبه کنید.

۲۴۴ به ازای چه مقادیری از m معادله‌ی $۲۰x + ۱۴y = m$ جواب صحیح دارد؟

۲۴۵ معادله‌ی سیاله‌ی $x + ۲y = ۶$ را حل کنید.

۲۴۶ اگر $a \mid b$ و $c \mid b$ و $(a,c) = ۱$ باشد، ثابت کنید: $ac \mid b$

۲۴۷ a و b دو عدد صحیح که حداقل یکی از این دو ناصفر است. اگر برای هر m و n صحیح، $ma + nb = ۱$ باشد، ثابت کنید: $(a,b) = ۱$

۲۴۸ در یک گراف کامل تعداد رأس‌ها، $\frac{۱}{۳}$ تعداد یال‌هاست. مرتبه و اندازه‌ی این گراف را محاسبه کنید.

۲۴۹ گراف همبند را تعریف کنید.

۲۵۰ تعداد جواب‌های صحیح نامنفی معادله‌ی $x_۱ + x_۲ + x_۳ + x_۴ = ۲۱$ با شرط $x_۱ > ۰$ و $x_i > ۲ \quad (i = ۲,۳,۴)$ را محاسبه کنید.

۲۵۱ معادله‌ی سیاله‌ی $۲x - ۹y = ۵$ را حل کنید.

۲۵۲ اگر باقیمانده‌ی تقسیم عدد صحیح a بر ۷ و ۶ به‌ترتیب ۲ و ۳ باشد، باقیمانده‌ی تقسیم a بر ۴۲ را محاسبه کنید.

۲۵۳ باقی‌مانده‌ی تقسیم $۳^{۷۱} + ۵^{۱۱۲}$ بر ۱۳ را محاسبه کنید.

تلفن تماس: ۰۲۶۳۳۴۰۸۹۴۴

www.akoedu.ir

۲۵۴ ثابت کنید اگر $(a,b) = ۱$ و $(a,c) = ۱$ باشند، آنگاه $(a , bc) = ۱$

۲۵۵ برای این‌که این گراف بازه‌ای باشد، حداقل یال ممکن را رسم کنید.

۲۵۶ ثابت کنید گراف مقابل یک گراف بازه‌ای نیست.

۲۵۷ گراف همیلتنی را تعریف کنید و یک گراف همیلتنی مرتبه‌ی ۴ رسم کنید.

۲۵۸ تعداد جواب‌های صحیح نامنفی معادله‌ی $x_۱ + x_۲ + x_۳ = ۲۵$ با شرط $۱۰ > x_۲ \geq ۵$ و $۹ > x_۱ \geq ۶$ را محاسبه کنید.

۲۵۹ اگر $d = (a - ۵ , a^۲ - ۶a + ۳)$ و $a \in Z$، آنگاه d را محاسبه کنید.

۲۶۰ معادله‌ی سیاله‌ی $۳x + ۲y = ۷$ را حل کنید.

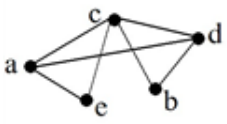
۲۶۱ رقم یکان $۷^{۳۲۷}$ را محاسبه کنید.

۲۶۲ اگر $a \mid bc$ و $(a,b) = ۱$، آنگاه ثابت کنید: $a \mid c$

۲۶۳ نمودار این گراف را رسم کنید.

۲۶۴ p و q را محاسبه کنید.

۲۶۵ در گراف مقابل تمام مسیرهای به طول ۳ از a به b را بنویسید.



۲۶۶ مسیر در گراف را تعریف کنید.

۲۶۷ هفت نقطه درون شش‌ضلعی منتظمی به‌طول ضلع ۱ انتخاب می‌کنیم، ثابت کنید فاصله‌ی دست کم دو تا از این نقطه‌ها از ۱ کم‌تر است.

۲۶۸ با استدلال برهان خلف ثابت کنید که اگر $\sqrt{۳}$ عددی گنگ است، $\sqrt{\sqrt{۳ + ۲}}$ نیز عددی گنگ است.

۲۶۹ اگر a, b, c سه عدد حقیقی باشند، ثابت کنید که: $a^۲ + b^۲ \geq -۴(a + b + ۲)$

۲۷۰ عبارت زیر را در نظر بگیرید و دلیل درستی یا نادرستی آن را بنویسید.
مکعب هر عدد فرد منهای یک، عددی زوج است.

۲۷۱ عبارت زیر را در نظر بگیرید و دلیل درستی یا نادرستی آن را بنویسید.
اگر $x > ۱$ آنگاه داریم: $۴ - x^۲ < ۳$

تلفن تماس: ۰۲۶۳۳۴۰۸۹۴۴

۲۷۲ تعداد جواب‌های صحیح و مثبت معادله $x_1 + x_2 + x_3 = 12$ را با شرط $x_1 \geq 2 , x_2 \geq 0 , x_3 \geq 1$ به‌دست آورید.

۲۷۳ معادله‌ی سیاله $18x + 30y = 42$ را در z حل کنید.

۲۷۴ باقیمانده‌ی تقسیم 2^{25} را بر ۱۷ به‌دست آورید.

۲۷۵ اگر a و b نسبت به هم اول باشند و $c \mid a + b$ ثابت کنید c نیز نسبت به a اول خواهد بود.

۲۷۶ نشان دهید مربع هر عدد فرد به‌صورت $8q + 1$ است.

۲۷۷ در گراف ۵- منتظم از مرتبه‌ی p و اندازه‌ی q رابطه $2q - 3p = 12$ برقرار می‌باشد، مقادیر p و q را به‌دست آورید.

۲۷۸ چند عضو از مجموعه‌ی $A = \{n \in N \mid 1 \leq n \leq 1262\}$ نه بر ۵ و نه بر ۳ بخش‌پذیر هستند؟

۲۷۹ معادله‌ی سیاله $13x + 17y = 100$ را در Z حل کنید.

۲۸۰ آخرین رقم سمت راست عدد 27^{1386} را به‌دست آورید.

۲۸۱ اگر مجموع دو عدد ۱۰۲ و کوچک‌ترین مضرب مشترک آن‌ها ۴۳۲ باشد، بزرگ‌ترین مقسوم علیه مشترک این دو عدد را بیابید.

۲۸۲ ثابت کنید حاصل ضرب سه عدد زوج طبیعی متوالی بر ۲۴ بخش‌پذیر است.

۲۸۳ فرض کنید G گرافی است از مرتبه‌ی ۷ و اندازه‌ی ۹ به‌طوری‌که درجه هر رأس آن ۲ یا ۳ می‌باشد. تعیین کنید این گراف چند رأس از درجه ۲ و چند رأس از درجه ۳ دارد؟

۲۸۴ می‌خواهیم رئوس G را طوری رنگ‌آمیزی کنیم که هیچ دو رأس مجاوری همرنگ نباشند. کم‌ترین تعداد رنگ را بیابید.

۲۸۵ آیا این گراف همیلتنی است؟ چرا؟

۲۸۶ دو مسیر از a به b بنویسید.

۲۸۷ با استفاده از برهان خلف، نشان دهید $\sqrt{2}$ عدد گنگ است.

۲۸۸ اگر x و y دو عدد حقیقی باشند، با استفاده از اثبات بازگشتی ثابت کنید: $x^2 + y^2 + 1 \geq xy + x + y$

۲۸۹ پنج نقطه داخل مربعی به ضلع ۲ مفروض‌اند، ثابت کنید حداقل فاصله دو نقطه از این پنج نقطه کم‌تر از $\sqrt{2}$ است.

۲۹۰ با استفاده از برهان خلف، ثابت کنید اگر $\sqrt{3}$ گنگ باشد، آن‌گاه $\sqrt{3} + \sqrt{2}$ نیز عددی گنگ است.

تلفن تماس: ۰۲۶۳۳۴۰۸۹۴۴

www.akoedu.ir

۲۹۱ اگر a و b دو عدد حقیقی باشند، با استفاده از اثبات بازگشتی ثابت کنید:

$$۲a^۲+b^۲+۱ \geq ۲(a-ba)$$

۲۹۲ پنج نقطه داخل مربعی به ضلع ۲ مفروض‌اند، ثابت کنید حداقل فاصله دو نقطه از این پنج نقطه کم‌تر از $\sqrt{۲}$ است.

۲۹۳ عبارت زیر درست است یا نادرست ؟ برای عبارت نادرست مثال نقض بیاورید.
برای هر عدد طبیعی n آنگاه $۲^n+۳$ عددی اول است.

۲۹۴ عبارت زیر درست است یا نادرست ؟ برای عبارت نادرست مثال نقض بیاورید.
مربع هر عدد فرد به اضافه یک، عددی زوج است.

۲۹۵ عبارت زیر درست است یا نادرست ؟ برای عبارت نادرست مثال نقض بیاورید.
حاصل ضرب هر دو عدد گنگ، عددی گویاست.

۲۹۶ جای خالی را با یکی از کلمات (شهودی - تمثیلی - استقرایی - استنتاجی) کامل کنید:
استدلال ..... روش نتیجه‌گیری کلی با استفاده از حقایقی است که درستی آن‌ها را پذیرفته‌ایم.

۲۹۷ مدرسه‌ای ۶۰۱ نفر دانش‌آموز دارد، حداقل چند نفر از آن‌ها ماه تولدشان یکسان است و چرا؟

۲۹۸ اگر a و b اعداد حقیقی باشند به طوری که $(ab<۰)$، ثابت کنید: $\frac{a}{b}+\frac{b}{a}<-۲$

۲۹۹ می‌دانیم که $\sqrt{۲}$ گنگ است، با استفاده از برهان خلف ثابت کنید $\sqrt[۳]{۱+\sqrt{۲}}$ نیز گنگ می‌باشد.

۳۰۰ با استدلال استنتاجی ثابت کنید که اگر x یک عدد صحیح و مضرب ۳ باشد، آنگاه $x(x+۳)$ مضرب ۱۸ است.

۳۰۱ با استفاده از برهان خلف، ثابت کنید اگر n یک عدد طبیعی و $(۵n+۳)$ زوج باشد آنگاه n یک عدد فرد است.

۳۰۲ اگر a و b و c سه عدد حقیقی باشند، ثابت کنید:

$$a^۲+b^۲+c^۲+۳\geq ۲(a+b+c)$$

۳۰۳

۳۰۴ عبارت زیر درست است یا نادرست؟ (با ذکر دلیل)
اگر a و b و c اعداد طبیعی باشند آنگاه $b\sqrt{ac}$ یک عدد گنگ است.

۳۰۵ عبارت زیر درست است یا نادرست؟ (با ذکر دلیل)
اگر a یک عدد حقیقی و $a^۲>۰$ آنگاه $a>۰$ است.

www.akoedu.ir

تلفن تماس: ۰۲۶۳۳۴۰۸۹۴۴

۳۰۶ عبارت زیر درست است یا نادرست؟ (با ذکر دلیل)
اگر a و b دو عدد صحیح و فرد به طوری که هر دو مضربی از ۵ باشند آن‌گاه مجموع آن‌ها مضرب ۱۰ است.

۳۰۷ درستی یا نادرستی عبارت زیر را تعیین کنید.
مثال نقض، برای اثبات درستی یک قضیه‌ی کلی به کار می‌رود.

۳۰۸ نشان دهید که اگر هر زیرمجموعه‌ی ۶ عضوی از مجموعه‌ی $S=\{۱,۲,۳,\ldots,۹\}$ را در نظر بگیریم، حداقل دو عضو وجود دارد که مجموع آن‌ها برابر ۱۰ باشد.

۳۰۹ اگر n عدد طبیعی و $(۳n+۲)$ عددی فرد باشد، با استدلال برهان خلف، نشان دهید که n نیز عددی فرد است.

۳۱۰ با ذکر دلیل بنویسید آیا $(۳^n+۴)$ همیشه یک عدد اول است؟

۳۱۱ با استدلال استنتاجی، نشان دهید حاصل‌ضرب دو عدد صحیح زوج متوالی، مضرب ۸ است.

۳۱۲ ثابت کنید اگر a و b دو عدد حقیقی باشند که $a+b>۰$، آن‌گاه رابطه‌ی زیر برقرار می‌باشد.

$$\frac{a^۳+b^۳}{a+b} \geq a\,b$$

۳۱۳

۳۱۴

۳۱۵

۳۱۶ می‌دانیم $\sqrt{۷}$ عدد گنگ است. با استفاده از برهان خلف ثابت کنید $\sqrt{۳+\sqrt{۷}}$ عددی گنگ است.

۳۱۷ دبیرستانی ۴۰۰ دانش‌آموز دارد. حداقل چند نفر وجود دارند که روز تولدشان در هفته یکسان است؟

۳۱۸ آیا حکم مقابل برقرار است؟ چرا؟ اگر $(a-۱)(b-۱)=۰$ آن‌گاه، $a=۱$ و $b=۱$ می‌باشد.

۳۱۹ با استدلال استنتاجی ثابت کنید اگر ۳ واحد به سه برابر عددی فرد اضافه کنیم، عدد حاصل‌ضرب ۶ می‌باشد.

۳۲۰ اگر ۱۰ نقطه داخل یک مثلث متساوی‌الاضلاع به ضلع واحد انتخاب شده باشد، ثابت کنید حداقل ۲ نقطه وجود دارد که فاصله‌ی آن‌ها کم‌تر از $\frac{۱}{۳}$ است.

۳۲۱ می‌دانیم $\sqrt{۲}$ عدد گنگ است. ثابت کنید عدد $x=\sqrt{۱+\sqrt{۲}}$ گنگ است. (برهان خلف)

www.akoedu.ir

تلفن تماس: ۰۲۶۳۳۴۰۸۹۴۴

۳۲۲

۳۲۳ با استفاده از استدلال استنتاجی نشان دهید حاصل‌ضرب دو عدد فرد، یک عدد فرد است.

۳۲۴ برای این‌که در یک مدرسه دست‌کم ۶ دانش‌آموز در یکی از ماه‌های سال متولد شده باشند، این مدرسه حداقل باید چند دانش‌آموز داشته باشد؟

۳۲۵ برای هر دو عدد حقیقی و مثبت x و y، ثابت کنید: $xy \leq \left(\frac{x+y}{2}\right)^2$

۳۲۶ عبارت زیر درست است یا نادرست؟ درصورت نادرست‌بودن دلیل بیاورید.
اگر x گنگ باشد، آن‌گاه x^2 گویا است.

۳۲۷ عبارت زیر درست است یا نادرست؟ درصورت نادرست‌بودن دلیل بیاورید.
توان دوم یک عدد همیشه از آن عدد بزرگ‌تر است.

۳۲۸ با استفاده از استدلال استنتاجی نشان دهید حاصل‌ضرب سه عدد صحیح زوج متوالی مضرب ۲۴ است.

۳۲۹ پنج نقطه داخل مربعی به ضلع ۲ مفروض‌اند. ثابت کنید حداقل فاصله‌ی دو نقطه از پنج نقطه کم‌تر از $\sqrt{2}$ است.

۳۳۰ می‌دانیم $\sqrt{5}$ گنگ است. با استفاده از برهان خلف ثابت کنید $\sqrt{5}+2$ گنگ است.

۳۳۱ با استفاده از استدلال استنتاجی نشان دهید اگر به مربع یک عدد فرد یک واحد اضافه کنیم یک عدد زوج حاصل می‌شود.

۳۳۲ برای هر دو عدد حقیقی و مثبت a و b ثابت کنید: $\frac{a}{b}+\frac{b}{a} \geq 2$

۳۳۳ S یک زیرمجموعه‌ی ۷۰ عضوی از اعداد طبیعی است. اگر اعضای S را بر ۳۰ تقسیم کنیم، نشان دهید که دست‌کم سه عضو S دارای یک باقی‌مانده‌اند.

۳۳۴ می‌دانیم $\sqrt{3}$ عددی گنگ و a^2 یک عدد گویا است. ثابت کنید $a^2+\sqrt{3}$ عدد گنگ است. (برهان خلف)

۳۳۵ برای هر سه عدد حقیقی و مثبت a و b و c، ثابت کنید: $a^2+b^2+c^2+3 \geq 2(a+b+c)$

۳۳۶ با استفاده از استدلال استنتاجی نشان دهید، مجموع مربعات دو عدد فرد، یک عدد زوج است.

۳۳۷ مثلث متساوی‌الاضلاع ABC به ضلع ۲ مفروض است. پنج نقطه را در داخل مثلث در نظر می‌گیریم. نشان دهید، حداقل دو نقطه وجود دارد که فاصله‌ی آن‌ها کم‌تر از ۱ است.

www.akoedu.ir

تلفن تماس: ۰۲۶۳۳۴۰۸۹۴۴

۳۳۸ با استفاده از برهان خلف ثابت کنید: اگر $x \neq ۴$ و $x^۳ + y^۳ = ۶۵$، آن‌گاه $y \neq ۱$ است.

۳۳۹ برای هر دو عدد حقیقی و مثبت a و b ثابت کنید: $\frac{a}{b^۲} + \frac{b}{a^۲} \geq \frac{۱}{a} + \frac{۱}{b}$

۳۴۰ با استفاده از استدلال استنتاجی نشان دهید، اگر به مربع یک عدد فرد ۳ واحد اضافه کنیم، عددی مضرب ۴ به‌دست می‌آید.

۳۴۱ شخصی برای مهمانی خود ۳۹ نفر را دعوت کرده است. حداقل چند نفر در این مهمانی هستند که روز تولد آن‌ها یک روز هفته است؟

۳۴۲ با استفاده از برهان خلف ثابت کنید اگر $n^۲$ مضربی از ۵ باشد، n نیز مضربی از ۵ است.

۳۴۳ کدام‌یک از عبارت زیر درست و کدام‌یک نادرست است؟ در صورت درست‌بودن آن را ثابت کنید و در صورت نادرست بودن یک مثال نقض پیدا کنید.
الف) مربع هر عدد حقیقی از مکعب آن کوچک‌تر است.
ب) حاصل ضرب هر دو عدد زوج، عددی زوج است.

۳۴۴ به روش استدلال استنتاجی نشان دهید که حاصل جمع سه برابر هر عدد زوج با یک عدد فرد همواره فرد است.

۳۴۵ درون یک مربع به ضلع واحد، ۱۰ نقطه انتخاب می‌کنیم. ثابت کنید حداقل فاصله‌ی دو نقطه از ده نقطه کمتر از $\frac{\sqrt{۲}}{۳}$ است.

۳۴۶ به روش اثبات بازگشتی ثابت کنید: $x^۲ + y^۲ + ۱ \geq xy + x + y$

۳۴۷

۳۴۸

۳۴۹

۳۵۰

۳۵۱

۳۵۲

www.akoedu.ir

تلفن تماس: ۰۲۶۳۳۴۰۸۹۴۴

www.akoedu.ir

۳۵۳ از ۱۸۵ نفر دانش‌آموز یک مدرسه دخترانه حداقل چند نفر دانش‌آموز در یک روز هفته متولد شده‌اند؟ چرا؟

۳۵۴ اگر n عدد طبیعی و n^2 مضرب ۳ باشد، آنگاه نشان دهید که n مضرب ۳ است. (برهان خلف)

۳۵۵ برای هر دو عدد حقیقی و مثبت x و y ثابت کنید: $\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\geq 2$

۳۵۶ با استفاده از استدلال استنتاجی نشان دهید، اگر از مربع یک عدد فرد یک واحد کم کنیم، یک عدد زوج حاصل می‌شود.

۳۵۷ ۵۰ ورزشکار مرد در رشته‌های فوتبال، والیبال و بسکتبال از شهرهای تهران، مشهد، اصفهان و بوشهر در یک اردوی ورزشی شرکت کرده‌اند. ثابت کنید حداقل چند ورزشکار هم‌رشته و هم‌شهری هستند.

۳۵۸

۳۵۹

۳۶۰

۳۶۱

۳۶۲

۳۶۳

۳۶۴

۳۶۵

۳۶۶

۳۶۷

۳۶۸ می‌دانیم $\sqrt{5}$ عددی گنگ است. با استفاده از برهان خلف ثابت کنید: $6+\sqrt{5}$ یک عدد گنگ است.

۳۶۹ هرگاه $x\in R^+$ و y گویا باشند ثابت کنید: $\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\geq 2$

www.akoedu.ir

تلفن تماس: ۰۲۶۳۳۴۰۸۹۴۴

۳۷۰

۳۷۱ ۷۰ عدد طبیعی متمایز داریم. نشان دهید اگر این ۷۰ عدد را بر ۳۰ تقسیم کنیم حداقل چند عدد دارای باقیمانده‌ی مساوی خواهند شد؟ چرا؟

۳۷۲ با استفاده از برهان خلف ثابت کنید اگر $y \neq ۱$ و $x^۳ + ۲y = ۱۰$ آن‌گاه $x \neq ۲$ است.

۳۷۳ با استفاده از استدلال استنتاجی نشان دهید اگر از مربع یک عدد فرد یک واحد کم کنیم، یک عدد زوج حاصل می‌شود.

۳۷۴

۳۷۵

۳۷۶

۳۷۷ ۲۰ عدد طبیعی دلخواه را بر ۶ تقسیم می‌کنیم، نشان دهید حداقل ۴ عدد آن‌ها باقیمانده‌ی مساوی دارند.

۳۷۸ می‌دانیم $\sqrt{۳}$ گنگ است، با استفاده از برهان خلف ثابت کنید $۷\sqrt{۳}$ گنگ است.

۳۷۹ با استفاده از استدلال استنتاجی نشان دهید: اگر به حاصل‌ضرب دو عدد فرد، ۱ واحد اضافه کنیم عددی زوج به‌دست می‌آید.

۳۸۰ S زیر مجموعه‌ی ۳۷ عضوی از اعداد طبیعی است اگر اعضای S را بر عدد ۳۶ تقسیم کنیم، حداقل دو عضو از این مجموعه دارای باقیمانده‌ی یکسانی بر ۳۶ هستند.

۳۸۱

۳۸۲

۳۸۳

۳۸۴

www.akoedu.ir

تلفن تماس: ۰۲۶۳۳۴۰۸۹۴۴

۳۸۵

۳۸۶

۳۸۷ با استفاده از استدلال استنتاجی نشان دهید، مجموع سه عدد زوج متوالی مضرب ۳ است.

۳۸۸ هفت نقطه داخل مستطیلی به ابعاد ۴ و ۶ مفروض‌اند. ثابت کنید حداقل فاصله دو نقطه از این هفت نقطه کمتر از $۲\sqrt{۲}$ است.

۳۸۹ ثابت کنید $\sqrt{۵}$ گنگ است. (برهان خلف)

۳۹۰ برای هر دو عدد حقیقی و مثبت x و y ثابت کنید: $xy \leq \frac{۱}{۲}(x^۲ + y^۲)$

۳۹۱

۳۹۲

۳۹۳

۳۹۴ می‌دانیم $\sqrt{۳}$ عدد گنگ است. ثابت کنید عدد $\sqrt{۳} + ۱$ گنگ است. (برهان خلف)

۳۹۵ اگر x و y دو عدد حقیقی باشند، ثابت کنید: $x^۲ + y^۲ \geq ۲(x + y - ۱)$

www.akoedu.ir

تلفن تماس: ۰۲۶۳۳۴۰۸۹۴۴

۱ (ص ۸۲) $k + ۱ = ۵ \Rightarrow k = ۴ , kn + ۱ = ۵۴ \Rightarrow ۴n = ۵۳ , n = \left[\frac{۵۳}{۴}\right] = ۱۳$

۲ $\binom{۸}{۴} \times ۴! = \frac{۸!}{۴!}$

↑ انتخاب ۴ نفر ↑ جایگشت ۴ کلاه

۳ هر کلاه ۳ حالت

کل $\longrightarrow ۳ \times ۳ \times ۳ \times ۳ = ۳^۴ = ۸۱$

غ ق ق ← حداقل یکی نگیرد :

$n(\bar{۱} \cup \bar{۲} \cup \bar{۳}) = n(\bar{۱}) + n(\bar{۲}) + n(\bar{۳}) - n(\bar{۱} \cap \bar{۲}) - n(\bar{۱} \cap \bar{۳}) - n(\bar{۲} \cap \bar{۳}) + n(\bar{۱} \cap \bar{۲} \cap \bar{۳})$

$= ۳ \times ۲^۴ - ۳ \times ۱^۴ + ۰ = ۴۵$

$\Rightarrow$ کل جواب - غ ق ق = ۳۶

www.akoedu.ir

تلفن تماس: ۰۲۶۳۳۴۰۸۹۴۴

۴
۵
۶
۷

www.akoedu.ir

تلفن تماس: ۰۲۶۳۳۴۰۸۹۴۴

۸

۹

۱۰

۱۱

۱۲

۱۳

۱۴

۱۵

۱۶

۱۷

۱۸

۱۹ الف) درست (ص ۱۷)

ب) نادرست ($x = 0 \xleftarrow{\text{مثال نقض}}$) (ص ۸)

۲۰ $k = 2 \Rightarrow k + 1 = 3 \quad , \quad n = 32 \times 31 = 992$ تعداد لانه‌ها =

تعداد کبوترها = $2 \times 992 + 1 = 1985$ (ص ۸۲)

www.akoedu.ir

تلفن تماس: ۰۲۶۳۳۴۰۸۹۴۴

۲۱

۲۲ الف)

$۱ \to ۳$
$۲ \to ۱$
$۳ \to ۲$

$B =$

۱	۳	۲
۲	۱	۳
۳	۲	۱

ب)

۲۱	۱۳	۳۲
۳۲	۲۱	۱۳
۱۳	۳۲	۲۱

متعامد نیستند. زیرا در مربع آخر، عدد دو رقمی تکراری داریم. (ص ۶۵)

۲۳

$y_۲ = x_۲ - ۳ , y_۲ \geq ۰ , x_۵ = ۲$

$x_۱ + y_۲ + ۳ + x_۳ + x_۴ + ۲ + x_۶ = ۱۷ \Rightarrow x_۱ + y_۲ + x_۳ + x_۴ + x_۶ = ۱۲$

$\Rightarrow$ تعداد جواب ها $= \binom{۱۶}{۴}$ (ص ۶۱)

۲۴ الف)

$۶ , ۸ , ۴ = x \to ۳!$

$۵ , ۲ , x \xrightarrow[\text{جایگشت}]{\text{۳ شی}} ۳!$

$\xrightarrow{\text{جواب}} ۳! \times ۳!$

ب)

$۳ , ۷ = x \to ۲!$

$۸ , ۶ , ۴ , x \xrightarrow[\text{جایگشت}]{\text{۴ شی}} ۴!$

$\xrightarrow{\text{جواب}} ۲! \times ۴!$

۲۵ $\{۱ , ۶ , ۴\}$ یا $\{۱ , ۵ , ۷\}$ (ص ۵۴)

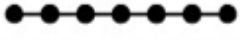
ب) $\gamma(G) \geq ۲$ بنابراین $\gamma(G) \leq ۲$ یک مجموعه احاطه‌گر است لذا $\gamma(G) = ۲$ (*). از سوی دیگر $\{۲ , ۵\}$

$\left\lceil \frac{۷}{۴+۱} \right\rceil = ۲$

(**). از (*) و (**) نتیجه می شود که $\gamma(G) = ۲$. (ص ۵۲)

۲۶ بله - تمام C_n ها ۲ منتظم هستند. (ص ۳۵)

۲۷ (ص ۳۸)



www.akoedu.ir

تلفن تماس: ۰۲۶۳۳۴۰۸۹۴۴

۲۸ گرافی که درجه تمام رئوس آن با هم مساوی و برابر با عدد k باشد. (ص ۳۵)

۲۹

۳۰ الف) رئوس (ص ۳۵) ب) طوقه (ص ۳۶) پ) مجاور (ص ۳۶) ت) زوج (ص ۴۰)

۳۱ $8x \overset{12}{\equiv} 20 \overset{12}{\equiv} 32 \xrightarrow{(8,12)=4} x \overset{\frac{12}{4}=3}{\equiv\equiv\equiv} 4 \Rightarrow x = 3k + 4$ (ص ۳۰)

۳۲ $38 \overset{4}{\equiv} 2 \Rightarrow 38^2 \overset{4}{\equiv} 4 \overset{4}{\equiv} 0 \Rightarrow 38^{36} \overset{4}{\equiv} 0 \;,\; 19 \overset{4}{\equiv} 3 \Rightarrow 38^{36} + 19 \overset{4}{\equiv} 3$ (ص ۲۹)

۳۳

۳۴
$$a = 17q + 5$$
$$b = 17q' + 3$$
$$\Rightarrow 2a - 5b = 17 \times 2q + 10 - 17 \times 5q' - 15 = 17\overbrace{(2q - 5q' - 1)}^{k \in Z} + 12 = 17k + 12 \Rightarrow r = 12$$
(ص ۱۴)

۳۵ فرض خلف: $\alpha - \beta$ گویاست. (ص ۸)

$$\left.\begin{matrix}\alpha - \beta = m \in Q \\ \alpha + \beta = n \in Q\end{matrix}\right\} \Rightarrow 2\alpha = m + n \Rightarrow \alpha = \frac{m+n}{2} \Rightarrow \alpha \in Q$$
(تناقض با فرض)

۳۶ الف) نادرست $15 \notin P$ (ص ۳) $n = 4 \Rightarrow 2^4 - 1 = 15$

ب) درست (ص ۱۳)

پ) درست (ص ۲۵)

۳۷ $f = \{(1, -)\ (2, -)\} \xrightarrow{\text{یک به یک}} 3\ 2 = 6$

ت) درست (ص ۷۸)

۳۸

۳۹

www.akoedu.ir

تلفن تماس: ۰۲۶۳۳۴۰۸۹۴۴

۴۰

۴۱ می‌دانیم: $\gamma \geq \left\lceil \frac{n}{\Delta+1} \right\rceil$ که در گراف C_n، P_n برابر $\left\lceil \frac{n}{\Delta+1} \right\rceil$ می‌باشد.

۴۲ در گراف همبند بین هر دو رأس آن حداقل یک مسیر داریم.

۴۳

۴۴ $۸^۴ = \underset{\text{مرحله چهارم}}{۸ \text{ حالت}} \times \underset{\text{مرحله سوم}}{۸ \text{ حالت}} \times \underset{\text{مرحله دوم}}{۸ \text{ حالت}} \times \underset{\text{مرحله اول}}{۸ \text{ حالت}}$

۴۵ $A = \{a_۱ , a_۲ , a_۳\} , b = \{b_۱ , b_۲ , \dots , b_۶\}$

اگر مجموعه ۳ عضوی را $\{۳ , ۲ , ۱\}$ در نظر بگیریم، در برد، ۳ جای خالی داریم که باید ۶ عدد پر کنیم، پس:

$f = \{(۱ , -) (۲ , -) (۳ , -)\} \Rightarrow \underline{۶} \ \underline{۵} \ \underline{۴} = ۶ \times ۵ \times ۴ = ۱۲۰$

۴۶ $|\overline{F \cup V}| = |S| - |F \cup V| = ۲۵ - (۱۵ + ۱۴ - ۹) = ۵$ (ص ۷۴)

۴۷

۱۱	۲۲	۳۳
۳۲	۱۳	۲۱
۲۳	۳۱	۱۲

در مربع لاتین مقابل، اعداد ۲ رقمی تکراری نداریم. پس دو مربع لاتین، متعامدند. (ص ۶۶)

۴۸

۴۹

۵۰

۵۱

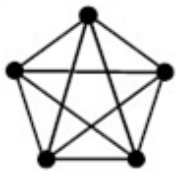
www.akoedu.ir

تلفن تماس: ۰۲۶۳۳۴۰۸۹۴۴

۵۲

۵۳

۵۴ با توجه به $\left\lceil \frac{۸}{۳+۱} \right\rceil = ۲$ داریم $\gamma(G) \geq ۲$. لذا حداقل عدد احاطه‌گری ۲ است. از طرفی $\{e, c\}$ یک مجموعه احاطه‌گر است. پس $\gamma(G) \leq ۲$. در نتیجه $\gamma(G) = ۲$ (عدد احاطه‌گری). (ص ۵۲)

۵۵ 

$\frac{p(p-۱)}{۲} = ۱۰ \Rightarrow p^۲ - p - ۲۰ = ۰ \Rightarrow p = ۵$ (ص ۴۲)

۵۶ الف) $\delta(G) = ۰ , \Delta(G) = ۴$ (ص ۳۲ تا ۳۹)

ب) $c, a, b, c, c, a, e, c, c, e, d, c$

پ) ۵

ت) $N_G(e) = \{a, c, d\}$

ث) خیر

۵۷

۵۸

۵۹

۶۰ هرگاه p را بر ۶ تقسیم کنیم، خواهیم داشت:

$p = ۶k$ (۱) , $p = ۶k+۱$ (۲) , $p = ۶k+۲ = ۲(۳k+۱)$ (۳)

$p = ۶k+۳ = ۳(۲k+۱)$ (۴) , $p = ۶k+۴ = ۲(۳k+۲)$ (۵) , $p = ۶k+۵$ (۶)

p در حالات ۱، ۳ و ۵ زوج و در ۴ بر ۳ بخش‌پذیر است که با اول بودن p تناقض دارد. بنابراین فقط در حالات ۲ یا ۶، p می‌تواند عددی اول باشد که حکم اثبات می‌شود. (ص ۱۵)

۶۱ $\begin{matrix} a|۳n+۴ \\ a|۲n+۳ \end{matrix} \Rightarrow a|-۲(۳n+۴)+۳(۲n+۳) \Rightarrow a|۱ \Rightarrow a = \pm ۱ \xrightarrow{a \in N} a = ۱$ (ص ۱۱)

www.akoedu.ir

تلفن تماس: ۰۲۶۳۳۴۰۸۹۴۴

۶۲

۶۳ الف) نادرست (ص ۳)　　ب) درست (ص ۴)　　پ) نادرست (ص ۷)　　ت) نادرست (ص ۳)

۶۴ برای برنامه‌ریزی دو مربع لاتین متعامد در نظر بگیریم. مربع A مربوط به ماشین‌ها و مربع B مشخص‌کننده الیاف است. (سوال ۱۴ ص ۷۲)

	W_1	W_2	W_3
روز اول	۱	۳	۲
روز دوم	۳	۲	۱
روز سوم	۲	۱	۳

$= A$

	W_1	W_2	W_3
روز اول	۲	۱	۳
روز دوم	۳	۲	۱
روز سوم	۱	۳	۲

$= B \Rightarrow$

	W_1	W_2	W_3
روز اول	۱۲	۳۱	۲۳
روز دوم	۳۳	۲۲	۱۱
روز سوم	۲۱	۱۳	۳۲

عدد سمت چپ هر در آیه نشان‌دهنده ماشین و عدد سمت راست آن مشخص‌کننده نوع الیاف است.

۶۵

۶۶ (مشابه کار در کلاس ص ۷۶)

$$A = \{n \in N \mid 1 \le n \le 100 , n = 6k\} \Rightarrow |A| = \left[\frac{100}{6}\right] = 16$$

$$B = \{n \in N \mid 1 \le n \le 100 , n = 10k\} \Rightarrow |B| = \left[\frac{100}{10}\right] = 10$$

$$A \cap B = \{n \mid 1 \le n \le 100 , n = 30k\} \Rightarrow |A \cap B| = \left[\frac{100}{30}\right] = 3$$

$$\Rightarrow |A \cup B| = 16 + 10 - 3 = 23$$

۶۷ ابتدا ۴ نفر انتخاب می‌کنیم و سپس ۴ خودکار متمایز را بین آنها جایگشت می‌دهیم: $\binom{8}{4} \times 4! = \frac{8!}{4!}$

(مثال پایین ص ۷۸)

www.akoedu.ir

تلفن تماس: ۰۲۶۳۳۴۰۸۹۴۴

۶۸

۶۹ فرض کنیم G یک گراف و A مجموعه همه رئوس فرد گراف و B مجموعه همه رئوس زوج گراف G باشد، در این صورت داریم:

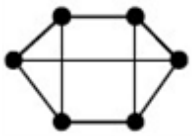
$$\sum_{v\in V(G)} deg(v) = \sum_{v\in A} deg(v) + \sum_{v\in B} deg(v)$$

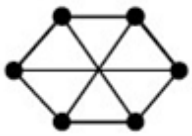
از طرفی $\sum_{v\in V(G)} deg(v) = ۲q$ و $\sum_{v\in B} deg(v) = ۲k$ زوج‌اند. لذا $\sum_{v\in A} deg(v) = ۲q - ۲k$ باید زوج باشد. می‌دانیم تعداد زوج عدد فرد، حاصل زوج را تولید می‌کنند بنابراین تعداد اعضای A باید زوج باشد. (ص ۴۰)

۷۰ الف) (تعریف گراف k- منتظم ص ۳۵)

$۳\times۶ = ۲q \Rightarrow q = ۹$

ب) رسم یکی از گراف‌های مقابل کافی است.





۷۱

۷۲ الف)

۳۲	۲۱	۱۳
۱۱	۳۳	۲۲
۲۳	۱۲	۳۱

متعامدند. زیرا عدد دو رقمی تکراری در مربع وجود ندارد.

ب)

۱۳	۲۱	۳۲
۳۲	۱۳	۲۱
۲۱	۳۲	۱۳

متعامد نیستند. زیرا عدد دو رقمی تکراری در مربع وجود دارد. (مثال ص ۶۵)

۷۳ با استفاده از جایگشت $۱\to۴ , ۴\to۳ , ۳\to۲ , ۲\to۱$ مربع لاتین به صورت زیر داریم. (مشابه تمرین ۱۲ ص ۷۲)

۳	۲	۱	۴
۱	۴	۳	۲
۴	۱	۲	۳
۲	۳	۴	۱

۷۴ (قسمت پ تمرین ۸ ص ۷۱)

$$x_۱ + \ldots + x_۵ = ۱۱ , x_۲ \geq ۲ , x_۵ \geq ۴$$

$$x_۱ + y_۲ + ۲ + x_۳ + x_۴ + y_۵ + ۴ = ۱۱ \Rightarrow x_۱ + y_۲ + x_۳ + x_۴ + y_۵ = ۵$$

$$\Rightarrow \text{جواب} = \binom{۵ + ۵ - ۱}{۵ - ۱} = \binom{۹}{۴}$$

www.akoedu.ir

تلفن تماس: ۰۲۶۳۳۴۰۸۹۴۴

۷۵ (مشابه مثال پایین ص ۵۸) $\frac{۷!}{۲! \times ۳!} = ۴۲۰$

۷۶ برای گراف مورد سوال داریم $\left\lceil \frac{۱۰}{۳+۱} \right\rceil = ۳ \leq \gamma(G) \Rightarrow \left\lceil \frac{n}{\Delta+۱} \right\rceil \leq \gamma(G)$. از طرفی مجموعه $\{g, h, d\}$ یک مجموعه احاطه‌گر برای گراف است. لذا $\gamma(G) \leq ۳$. بنابراین $\gamma(G) = ۳$. (قسمت دوم کار در کلاس ص ۵۰)

۷۷

۷۸ (مساله ۱ ص ۳۸) $\deg_G(v) + \deg_{\overline{G}}(v) = p - ۱ \Rightarrow ۹ + ۱۲ = p - ۱ \Rightarrow p = ۲۲$

۷۹ الف) (مشابه مثال ص ۳۶) $N_G[a] = \{a, b, e, d\}$

ب) دور به طول ۴، a, b, e, d, a (تعریف دور ص ۳۸)

پ) مسیر به طول ۳، a, e, b, c و مسیر به طول ۴، a, d, e, b, c (مشابه مثال ص ۳۸)

۸۰ الف) دو برابر (نتیجه ابتدای ص ۴۰) ب) k (تعریف گراف منتظم ص ۳۵)

پ) مینیمم (تعریف ص ۴۴) ت) مینیمال (تعریف ص ۴۶)

۸۱ $۲ \overset{۱۱}{\equiv} ۳۵ \Rightarrow ۵x \overset{۱۱}{\equiv} ۳۵ \xrightarrow[(\div ۵)]{(۵, ۱۱) = ۱} x \overset{۱۱}{\equiv} ۷ \Rightarrow x = ۱۱k + ۷$

(مشابه سؤال ۱۴ ص ۳۰)

۸۲ $۷^۲ = ۴۹ \overset{۱۵}{\equiv} ۴ \Rightarrow ۷^۴ \overset{۱۵}{\equiv} ۱۶ \overset{۱۵}{\equiv} ۱ \Rightarrow ۷^{۲۸} \overset{۱۵}{\equiv} ۱ \xrightarrow{\times ۷^۲ \overset{۱۵}{\equiv} ۴} ۷^{۳۰} \overset{۱۵}{\equiv} ۴$

(مشابه سوال ۸ و ۹ ص ۲۹)

۸۳ (مثال ص ۱۲) $\begin{matrix} n|۹k+۷ \times (-۷) \\ n|۷k+۶ \end{matrix} \Rightarrow n|-۶۳k - ۴۹ + ۶۳k + ۵۴ \Rightarrow n|۵ \xrightarrow{n \in N} n = ۱$ یا ۵

۸۴ (مشابه مثال ص ۱۴) $a = ۴q + ۳ \Rightarrow ۲a + ۳ = ۸q + ۹ = ۸(q+۱) + ۱ = ۸q' + ۱ \Rightarrow r = ۱$

www.akoedu.ir

تلفن تماس: ۰۲۶۳۳۴۰۸۹۴۴

۸۵ الف) نادرست (مشابه قسمت ت کار در کلاس ص ۳)

$$\sqrt{۲}, -\sqrt{۲} \in Q^c, \sqrt{۲} + \left(-\sqrt{۲}\right) = ۰ \notin Q^c$$

ب) درست (مساله ۳ ص ۱۵)

$$(۲k+۱)^۲ - ۱ = ۴k^۲ + ۴k + ۱ - ۱ = ۴k(k+۱) = ۴ \times ۲q = ۸q$$

۸۶ تعداد کبوترها = ۴۳ و تعداد لانه‌ها = ۴۲ و به صورت زیر هستند.

$$\underbrace{\quad}_{۱,۸۴}, \underbrace{\quad}_{۲,۸۳}, \underbrace{\quad}_{۳,۸۲}, \dots\dots, \underbrace{\quad}_{۴۲,۴۳}$$

چنان‌چه قرار باشد کبوترها لانه‌ها را اشغال کنند، آن‌گاه طبق اصل لانه کبوتری حداقل دو عدد وجود دارد که در یک لانه جای می‌گیرند و مجموعشان ۸۵ است. (ص ۸۳)

۸۷

$$۱ \le j \le ۳ \qquad A_j = \{f : A \to B \mid f(a_i) \neq b_j \quad ۱ \le i \le ۴\}$$

$$A = \{a_۱, a_۲, a_۳, a_۴\}, B = \{b_۱, b_۲, b_۳\}$$

$$|S| = ۳^۴, |A_i| = ۲^۴, |A_i \cap A_j| = ۱^۴, |A_۱ \cap A_۲ \cap A_۳| = ۰$$

$$\left|\overline{A_۱ \cup A_۲ \cup A_۳}\right| = |S| - |A_۱ \cup A_۲ \cup A_۳| = ۸۱ - (۳ \times ۱۶ - ۳ \times ۱ + ۰) = ۳۶ \qquad \text{(ص ۷۷)}$$

۸۸

۱۱	۲۲	۳۳
۳۲	۱۳	۲۱
۲۳	۳۱	۱۲

متعامدند. زیرا در جدول ترکیب شده از دو مربع لاتین، عدد تکراری نداریم. (ص ۶۶)

۸۹

$$y_۱ + ۳ + x_۲ + y_۳ + ۴ + x_۴ + x_۵ = ۱۴ \Rightarrow y_۱ + x_۲ + y_۳ + x_۴ + x_۵ = ۷$$

$$\Rightarrow \binom{n + k - ۱}{k - ۱} = \binom{۱۱}{۴} \qquad \text{(ص ۶۱)}$$

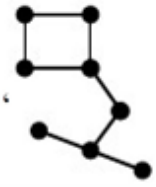
۹۰ الف) $۶! \times ۵!$

ب) $۶! \times ۵! \times ۲!$ (ص ۵۷)

۹۱ (ص ۵۸)

$$\frac{۸!}{۴! \times ۲!} = \frac{۸ \times ۷ \times ۶ \times ۵}{۲} = ۸۴۰$$

۹۲ الف) برای مثال اگر $n = ۱۰$، رسم $C_{۱۰}$ یا $P_{۱۰}$. در این گراف‌ها: $\gamma(G) = \left|\frac{n}{\Delta + ۱}\right|$. (ص ۴۹)

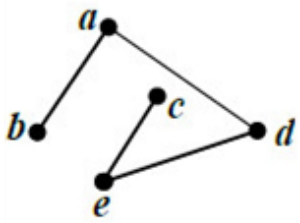
ب) در گرافی مشابه  ، $\left|\frac{n}{\Delta + ۱}\right|$ ولی $\gamma(G) = ۳$. (ص ۵۰)

۹۳

www.akoedu.ir

تلفن تماس: ۰۲۶۳۳۴۰۸۹۴۴

۹۴ الف) a , c , d , b , e , a



ب)

(ص ۳۷ و ۳۸)

۹۵ وجود ندارد. زیرا: تناقض $\sum_{i=1}^{5} \deg v_i = 2q \Rightarrow 5 \times 3 = 2q$

(ص ۴۲)

۹۶ گرافی از مرتبه n که درجه تمام رئوس آن با هم مساوی و برابر با عدد $k\ (0 \le k < n)$ باشد. (ص ۳۵)

۹۷ الف) $\delta(G) = 1$ ب) $q = 6$

پ) $N_G[b] = \{b , a , c , d\}$ ت) $x = c$ (ص ۴۱)

۹۸ $13y \overset{9}{\equiv} 7 , \left(13 \overset{9}{\equiv} 4 , 7 \overset{9}{\equiv} 16\right) \rightarrow 4y \overset{9}{\equiv} 16 \xrightarrow{(4,9)=1} y \overset{9}{\equiv} 4$

$y = 9k + 4 , x = -13k - 5$ (ص ۲۹)

۹۹ $a \overset{m}{\equiv} b \Rightarrow m|a - b \Rightarrow m|c(a - b) \Rightarrow m|ac - bc \Rightarrow ac \overset{m}{\equiv} bc$ (ص ۱۹)

۱۰۰

۱۰۱ $A = 21a^2 = 3 \times 7 \times a^2 , B = 35a^3 = 5 \times 7 \times a^3 \Rightarrow [A , B] = 105a^3$ (ص ۱۷)

۱۰۲ $\begin{matrix} a|4k + 9 \\ a|6k + 14 \end{matrix} \Rightarrow a|-6(4k + 9) + 4(6k + 14) \Rightarrow a|2 \xrightarrow{a > 1} a = 2$ (ص ۱۱)

۱۰۳ $a + \frac{1}{a} \ge 2 \Leftrightarrow a^2 + 1 \ge 2a \Leftrightarrow a^2 - 2a + 1 \ge 0 \Leftrightarrow (a - 1)^2 \ge 0$

همواره برقرار است، پس با برگشت روابط حکم برقرار می‌باشد. (ص ۷)

۱۰۴ درست (ص ۱۳)

www.akoedu.ir

تلفن تماس: ۰۲۶۳۳۴۰۸۹۴۴

۱۰۵

۱۰۶

$$|\overline{A}_1 \cap \overline{A}_2| = |\overline{A_1 \cup A_2}| = |S| - |A_1| - |A_2| + |A_1 \cap A_2|$$

$$= ۳۵۰ - \left[\frac{۳۵۰}{۴}\right] - \left[\frac{۳۵۰}{۶}\right] + \left[\frac{۳۵۰}{۱۲}\right] = ۲۳۴ \quad \text{(ص ۸۴)}$$

توجه: تعداد مضارب k از ۱ تا n برابر است با $\left[\frac{n}{k}\right]$.

۱۰۷

	۱	۲	۳	۴
C_1	T_1	T_2	T_3	T_4
C_2	T_4	T_1	T_2	T_3
C_3	T_3	T_4	T_1	T_2
C_4	T_2	T_3	T_4	T_1

(ص ۷۳)

۱۰۸

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 = ۱۲ \rightarrow y_1 + ۳ + x_2 + x_3 + x_4 + y_5 + ۴ + x_6 = ۱۲$$

$$y_1 + x_2 + x_3 + x_4 + y_5 + x_6 = ۵ \xrightarrow{\binom{n+k-۱}{k-۱}} \binom{۵+۶-۱}{۶-۱} \quad \text{(ص ۷۲)}$$

۱۰۹

الف) $۶! \times ۴!$

ب) $۴! \times ۵!$

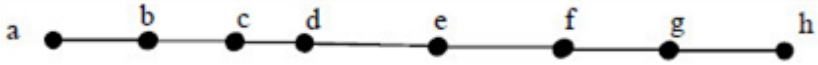
ج) $۷! \times ۳!$ (ص ۷۲)

www.akoedu.ir

تلفن تماس: ۰۲۶۳۳۴۰۸۹۴۴

۱۱۰ یک مجموعه احاطه‌گر غیرمینیمال به صورت $\{a, h, f, b\}$ است.
اکنون با حذف رأس a از آن، یک مجموعه احاطه‌گر مینیمال به دست می‌آید. (ص ۴۷)

۱۱۱ الف)

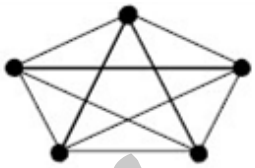


ب) $\{a, d, g\}$

ج) $\{a, d, e, h\}$

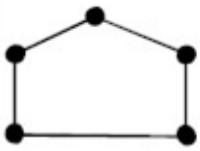
(ص ۵۴)

۱۱۲ الف)



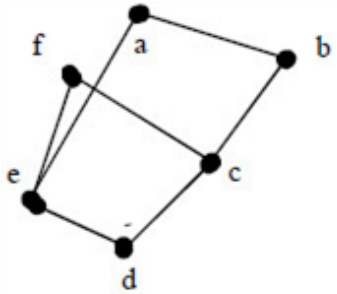
(ص ۴۲)

ب)



۱۱۳

الف)



ب) $N_G[b] = \{a, b, c\}$

ج) b , a , e , f , c , d

(ص ۳۶ و ۳۹)

۱۱۴

$$۲x + ۵y = ۲۹ \Rightarrow ۲x \overset{۵}{\equiv} ۲۹ \Rightarrow ۲x \overset{۵}{\equiv} ۴ \Rightarrow x = ۵k + ۲$$
$$y = -۲k + ۵$$ (ص ۲۷)

۱۱۵

$$۷ \overset{۱۳}{\equiv} ۱۹^{۷} \overset{۱۳}{\equiv} ۱^{۷} + ۱۹ \Rightarrow (۲۷)^{۷} \overset{۱۳}{\equiv} ۱^{۷} + ۱۹ \Rightarrow (۲۷)^{۷} + ۱۹ = ۲۰ \Rightarrow (۲۷)^{۷} + ۱۹ \overset{۱۳}{\equiv} ۷$$
$$۲۷ \overset{۱۳}{\equiv} ۱$$
(ص ۲۱)

www.akoedu.ir

تلفن تماس: ۰۲۶۳۳۴۰۸۹۴۴

۱۱۶ $x^۲ + y^۲ + z^۲ \geq xy + yz + xz \Leftrightarrow ۲x^۲ + ۲y^۲ + ۲z^۲ \geq ۲xy + ۲yz + ۲xz$

$\Leftrightarrow (x^۲ + y^۲ - ۲xy) + (y^۲ + z^۲ - ۲yz) + (x^۲ + z^۲ - ۲xz) \geq ۰$

$\Leftrightarrow (x - y)^۲ + (y - z)^۲ + (x - z)^۲ \geq ۰$

چون نابرابری آخری همواره درست است پس با بازگشت روابط حکم برقرار است. (ص ۱۱)

۱۱۷ $\forall m > ۰ , a|m , b|m \Rightarrow c \leq m$

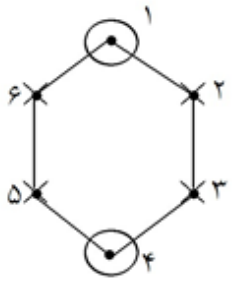
۱۱۸ الف) درست ب) نادرست (ص ۳)

۱۱۹ الف) $\frac{n(n - ۱)}{۲}$

می‌دانیم : $q_G + q_{\overline{G}} = q_{\text{کامل}} = \binom{p}{۲} = \frac{p(p - ۱)}{۲}$

ب) ۲

$C_۶$:



مجموعه : $\gamma = \{۱ , ۴\} \Rightarrow \gamma = ۲$

هر کدام (۰/۵)

۱۲۰ ۱۵، چون اعداد ۱ تا ۵ در هر سطر می‌چینیم پس مجموع درایه‌ها برابر است با: $۱ + ۲ + ۳ + ۴ + ۵ = ۱۵$

۱۲۱ در این مسأله $k + ۱ = ۷$ یعنی $k = ۶$ است و تعداد لانه‌ها همان تعداد ماه‌های سال یعنی $n = ۱۲$ است. (۰/۵)
طبق اصل لانه کبوتری، تعداد کبوترها یا معادل آن تعداد دانش‌آموزان حداقل باید $kn + ۱$ باشد (۰/۵)
$(۱۲ \times ۶) + ۱ = ۷۳$
(صفحه: ۸۳)

۱۲۲ $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$ (۰/۲۵)

$n(A \cup B) = \left[\frac{۲۰۰}{۴}\right] + \left[\frac{۲۰۰}{۳}\right] - \left[\frac{۲۰۰}{۱۲}\right]$ (۰/۷۵)

$n(A \cup B) = ۱۰۰$ (۰/۲۵)

$۱ - n(A \cup B) = ۲۰۰ - ۱۰۰ = ۱۰۰$ (۰/۲۵)

(صفحات: ۷۵ و ۷۶)

www.akoedu.ir

تلفن تماس: ۰۲۶۳۳۴۰۸۹۴۴

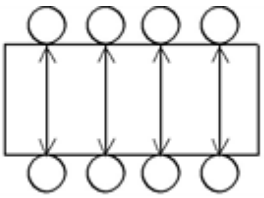
۱۲۳

۲	۳	۱
۱	۲	۳
۳	۱	۲

۱	۳	۲
۳	۲	۱
۲	۱	۳

هر کدام (۰/۷۵)

۱۲۴



(صفحه: ۷۲)

$۴! \times ۲^{۴}$ (۰/۷۵) = ۳۸۴ (۰/۲۵)

۱۲۵ (صفحه: ۷۲)

$$x_۱ + x_۲ + x_۳ + x_۴ + x_۵ = ۱۲ \xrightarrow[۰/۵]{x_۱ = y_۱ + ۳ \;\; x_۵ = y_۵ + ۴} \underbrace{y_۱ + ۳ + x_۲ + x_۳ + x_۴ + y_۵ + ۴ = ۱۲}_{(۰/۲۵)} \cdot \xrightarrow[(۰/۲۵)]{\binom{n + k - ۱}{k - ۱}} \binom{۵ + ۵ - ۱}{۵ - ۱} (۰/۵)$$

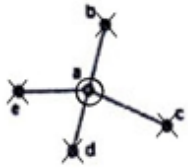
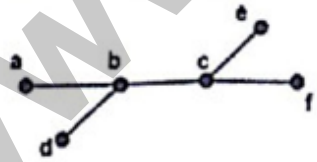
۱۲۶ $\underbrace{\binom{۹}{۲} \times \binom{۷}{۳} \times \binom{۴}{۴}}_{(۰/۷۵)} = ۱۲۶۰$ (۰/۲۵)

۱۲۷ زمانی که $\gamma = ۱$ باشد یعنی حداقل یک رأس از درجه $p - ۱$ داریم پس چون $p = ۵ \leftarrow \Delta = ۴$

$\Delta = ۴ \xrightarrow{\text{حداقل یال}}$ $q = ۴$

$\Delta = ۴ \xrightarrow{\text{حداکثر یال}} k_۵ \rightarrow q = \binom{۵}{۲} = ۱۰$

۱۲۸

الف) $C_۸$ ب)  ج) 

هر کدام (۰/۵) (صفحه: ۵۳)

۱۲۹ الف) $\{f , d\}$ (۰/۵) ب) $\{e , f , g , h\}$ (۰/۵) (صفحه: ۴۷)

۱۳۰ الف) $V(G) = \{a , b , c , d\}$ (۰/۵) و $E(G) = \{ab , ac , bc , bd , cd , de\}$ (۰/۵)

ب) abca یا bcdb (۰/۲۵)

ج) درجه e در گراف مکمل ۳ خواهد بود (۰/۲۵) (صفحات: ۳۹ و ۴۱)

www.akoedu.ir

تلفن تماس: ۰۲۶۳۳۴۰۸۹۴۴

۱۳۱

$$۴x \overset{۵}{\equiv} ۱۷ \to ۴x \overset{۵}{\equiv} ۲ \quad (۰/۲۵) \to ۴x \overset{۵}{\equiv} ۲ + ۱۰ \quad (۰/۲۵) \Rightarrow ۴x \overset{۵}{\equiv} ۱۲ \xrightarrow{(۴,۵)=۱} x \overset{۵}{\equiv} ۳ \quad (۰/۲۵)$$

$$\Rightarrow x = ۵k + ۳ \quad (۰/۲۵)$$

(صفحه: ۲۵)

۱۳۲

$$\begin{cases} ۵|۴k+۱ \xrightarrow{()^۲} ۲۵|\ ۱۶k^۲ + ۸k + ۱ & (۰/۵) \xrightarrow{+} ۲۵|۱۶k^۲ + ۲۸k + ۶ \quad (۰/۲۵) \\ ۵|۴k+۱ \xrightarrow{\times ۵} ۲۵|\ ۲۰k + ۵ & (۰/۵) \end{cases}$$

(صفحه: ۱۶)

۱۳۳ (صفحه: ۷)

$$a + \frac{۱}{a} \geq ۲ \Leftrightarrow a^۲ + ۱ \geq ۲a \quad (۰/۲۵) \Leftrightarrow a^۲ + ۱ - ۲a \geq ۰ \quad (۰/۲۵) \Leftrightarrow (a-۱)^۲ \geq ۰$$

۱۳۴ فرض کنیم که r یک عدد گویا و x یک عدد گنگ باشد نشان می‌دهیم که $r + x$ یک عدد گنگ است (۰/۲۵)
فرض خلف اگر $r + x$ گنگ نباشد (۰/۲۵) بنابراین عددی گویا است از طرفی میدانیم که تفاضل دو عدد گویا، گویا است (۰/۲۵) پس تفاضل $r + x$ و r باید عددی گویا باشد یعنی $r + x - r \in Q$ و از آنجا (۰/۲۵) $x \in Q$ که با فرض ما در تناقض است در نتیجه فرض خلف باطل است و حکم ثابت می‌گردد (۰/۲۵)

روش دوم:

گویا $= x = \frac{m}{n}$; m و $n \in Z$ فرض خلف : $x + y =$ گنگ نیست

گنگ $= y$

$$\Rightarrow x + y = \text{گویا} = \frac{a}{b}, \quad a,b \in Z \Rightarrow \frac{m}{n} + y = \frac{a}{b} \Rightarrow y = \frac{a}{b} - \frac{m}{n} = \frac{\overbrace{an - bm}^{\in Z}}{\underbrace{bn}_{\in Z}} = \text{گویا}$$

$\Rightarrow$ تناقض با گنگ بودن y

www.akoedu.ir

تلفن تماس: ۰۲۶۳۳۴۰۸۹۴۴

۱۳۵ الف) نادرست

$$x_{\text{فرد}} = ۲q + ۱ \Rightarrow x^۲ = \underbrace{۴q^۲ + ۴q}_{۴q(q+۱)} + ۱ = ۸t + ۱$$

ضرب ۲ عدد متوالی $= ۲t$

ب) درست

$p_۵$: ✕ ⊙ ✕ ✕ ⊙ (۱ ۲ ۳ ۴ ۵) $\gamma = ۲$: $\gamma_{\text{مجموعه}} = \{۲ , ۵\}$:

ج) درست

می‌دانیم : $\gamma = $ عدد احاطه گر $\geq \left[\frac{p}{\Delta + ۱}\right]$

د) درست

طبق متن کتاب درسی گزاره درست است.

هر کدام (۰/۲۵) (صفحات: ۱۵ و ۴۸ و ۵۴ و ۶۷)

۱۳۶ ۱۲

$$[۱۲ , \cancel{(۶ , ۸)}] = \underbrace{[۱۲ , ۲]}_{\text{ک.م.م}} = \frac{۱۲ \times ۲}{\cancel{(۱۲ , ۲)}} = ۱۲$$

ب.م.م ۶ , ۸ = ۲

۱۳۷ تعداد لانه‌ها: ۸۴ = ۱۲ × ۷ (۰/۲۵) تعداد کبوترها: ۵۰۵ دانش‌آموز (۰/۲۵)

۵۰۵	۸۴
−۵۰۴	۶
۱	

۶ + ۱ = ۷ (۰/۵)

طبق اصل لانه کبوتری لااقل ۷ نفر آنها روز هفته و ماه تولدشان یکسان است. (۰/۲۵)

۱۳۸

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B) \quad (۰/۲۵)$$

$$n(A \cup B) = \left[\frac{۹۰}{۲}\right] + \left[\frac{۹۰}{۳}\right] - \left[\frac{۹۰}{۶}\right] \quad (۰/۷۵)$$

$$n(A \cup B) = ۶۰ \quad (۰/۲۵)$$

(صفحه: ۸۴)

www.akoedu.ir

تلفن تماس: ۰۲۶۳۳۴۰۸۹۴۴

۱۳۹

	شنبه	یکشنبه	دوشنبه
A	۱	۲	۳
B	۳	۱	۲
C	۲	۳	۱

(۰/۵)

و

	شنبه	یکشنبه	دوشنبه
A	۲	۱	۳
B	۱	۳	۲
C	۳	۲	۱

(۰/۵)

⇨

	شنبه	یکشنبه	دوشنبه
A	۱۲	۲۱	۳۳
B	۳۱	۱۳	۲۲
C	۲۳	۳۲	۱۱

(۰/۵) (صفحه: ۶۹)

۱۴۰

$x_۱ + x_۲ + x_۳ + x_۳ + x_۵ = ۱۰ \rightarrow x_۱ + y_۲ + ۱ + y_۳ + ۱ + y_۴ + ۱ + y_۵ + ۱ = ۱۰$

$x_۱ + y_۲ + y_۳ + y_۴ + y_۵ = ۶$ (۰/۲۵) $\xrightarrow[(۰/۲۵)]{\binom{n + k - ۱}{k - ۱}} \binom{۶ + ۵ - ۱}{۵ - ۱}$ (۰/۵)

(صفحه: ۷۲)

۱۴۱ الف) $۶! \times ۵!$ (۰/۵)

دوازدهم = a

یازدهم = b

: $a_۱\ b_۱\ a_۲\ b_۲\ a_۳\ b_۳\ a_۴\ b_۴\ a_۵\ b_۵\ a_۶$

(۶ ۵ ۴ ۳ ۲ ۱)

اصل ضرب ← $۶!$

همزمان ← $۵! \times ۶!$

اصل ضرب ← $۵!$

ب) $۵! \times ۷!$ (۰/۵)

$X = ۵$ تا یازدهم $\Rightarrow$ جایگشت داخلی $= (۵!)$ $\xrightarrow{\text{جواب}}$ $(۵!) \times ۷!$

$X = ۷$ نفر $\Rightarrow ۷!$ با ۶ تا دوازدهم

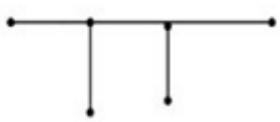
ج) $۱۰! \times ۲!$ (۰/۵)

$a_i b_i = Y \Rightarrow$ جایگشت داخلی $= (۲!)$ $\xrightarrow{\text{جواب}}$ $۲! \times ۱۰!$

$Y \Rightarrow ۱۰!$ با بقیه $= ۱۰$ نفر

۱۴۲ $P = \frac{۹!}{۳! \times ۲! \times ۲!}$ (۰/۷۵) $\rightarrow P = ۳ \times ۷!$ (۰/۲۵) (صفحه: ۵۸)

۱۴۳ الف) (۰/۵)



ب) (۰/۵) (صفحه: ۵۳)

۱۴۴ الف) اگر $\{a_۱, a_۲, \dots, a_n\}$ یک مجموعه احاطه‌گر غیر مینمال باشد در این صورت یک یا چند عضو وجود دارند که با حذف آنها مجموعه احاطه‌گر مینمال باقی می‌ماند. (۰/۲۵) بنا بر این عضوی مانند $a_۱$ را در نظر میگیریم اگر با حذف آن هنوز مجموعه احاطه گر بماند آن را حذف می‌کنیم (۰/۲۵) در غیر این‌صورت آن را نگه داشته و همین کار را برای سایر رئوس انجام میدهیم. (۰/۲۵)

ب) (۰/۷۵) $A = \{h, g, f, i, j\}$ (صفحه: ۴۶)

www.akoedu.ir

تلفن تماس: ۰۲۶۳۳۴۰۸۹۴۴

۱۴۵ الف) $\{v_1, v_3, v_4, v_5\}$ (۰/۵)

ب) $\gamma(G) = ۳$ (۰/۵)

ج) $\{v_2, v_4, v_6\}$ و $\{v_1, v_3, v_5\}$ (۰/۵)

(صفحه: ۴۵)

۱۴۶ الف) $q = ۷$ (۰/۲۵) , $p = ۶$ (۰/۲۵)

ب) $N_{G(b)} = \{a, d, c\}$ (۰/۲۵)

ج) $\overline{G}$ تعداد یال‌های گراف + G تعداد یال‌های گراف $= \frac{P(P-۱)}{۲}$ (۰/۲۵)

$\overline{G}$ تعداد یال‌های گراف $= ۸$ (۰/۲۵) $\Rightarrow$ $\overline{G}$ مجموع درجه‌های رئوس گراف $= ۱۶$ (۰/۲۵)

(صفحه: ۴۱)

۱۴۷ $\underbrace{۲y \overset{۵}{\equiv} ۱۸}_{(۰/۲۵)} \xrightarrow{(۲,۵)=۱} y \overset{۵}{\equiv} ۹$ (۰/۵) $\Rightarrow y \overset{۵}{\equiv} ۹ \overset{۵}{\equiv} ۴$ (۰/۲۵)

$x = -۲k + ۲$ (۰/۲۵) و $y = ۵k + ۴$ (۰/۲۵)

(صفحه: ۲۵)

۱۴۸ روز اول مهر، شنبه را برابر صفر در نظر می‌گیریم ۲۹ روز در مهر و سه ماه آبان و آذر و دی و ۱۲ بهمن، فاصله اول مهر تا ۱۲ بهمن است، پس داریم:

ش	ی	د	س	چ	پ	ج
۰	۱	۲	۳	۴	۵	۶

(۰/۲۵)

$۲۹ + ۳۰ + ۳۰ + ۳۰ + ۱۲ = ۱۳۱ \rightarrow ۱۳۱ \overset{۷}{\equiv} ۵$ (۰/۵)

که متناظر این عدد در جدول روز پنج‌شنبه را نشان می‌دهد. (۰/۲۵) (صفحه ۲۴)

۱۴۹ $m = ۱۳q_1 + ۲ \quad ۳m = ۱۳(۳q_1) + ۶$

$n = ۱۳q_2 + ۹ \quad ۵n = ۱۳(۵q_2) + ۴۵$ (۰/۵) $\rightarrow ۵n - ۳m = ۱۳q' + ۳۹$ (۰/۲۵)

(صفحه‌ی: ۱۴)

$\rightarrow ۵n - ۳m = ۱۳q'' + ۰ \rightarrow r = ۰$ (۰/۲۵)

www.akoedu.ir

تلفن تماس: ۰۲۶۳۳۴۰۸۹۴۴

۱۵۰

۱۵۱ $k + ۱ = ۲۰ \Rightarrow k = ۱۹$ (۰/۵)

طبق تعمیم اصل لاله کبوتری، تعداد لانه‌ها همان روزهای سال می‌باشد. $n = ۳۶۵$ (۰/۵)

بنابراین تعداد کبوترها برابر است با: $kn + ۱ = ۳۶۵ \times ۱۹ + ۱ = ۶۹۳۶$ (۰/۵)

(ص ۸۴)

۱۵۲ تعداد حالت‌های ممکن برای انجام این عمل معادل است با پیدا کردن تعداد تابع‌های پوشا از یک مجموعه‌ی ۴ عضوی مانند A به یک مجموعه‌ی ۳ عضوی مانند B.

$A_i = \{f : A \to B \mid f(a_i) \neq b_j \ , \ i = ۱, ۲, ۳, ۴ \ , \ j = ۱, ۲, ۳\}$ (۰/۲۵)

$|S| = |B|^{|A|} = ۳^۴ = ۸۱$ (۰/۲۵) , $|A_۱| = |A_۲| = |A_۳| = ۲^۴ = ۱۶$ (۰/۲۵)

$|A_۱ \cap A_۲| = |A_۱ \cap A_۳| = |A_۲ \cap A_۳| = ۱$ (۰/۲۵) , $|A_۱ \cap A_۲ \cap A_۳| = ۰$ (۰/۲۵) ,

$|\overline{A_۱} \cap \overline{A_۲} \cap \overline{A_۳}| = |\overline{A_۱ \cup A_۲ \cup A_۳}| = |S| - |A_۱ \cup A_۲ \cup A_۳|$

(۰/۲۵) (۰/۲۵)

$= ۸۱ - (۳ \times ۱۶ - ۳ \times ۱ + ۰) = ۳۶$ (۰/۲۵)

(ص ۷۸ و ۷۹)

۱۵۳

۱۵۴ $x_۱ + x_۲ + x_۳ + x_۴ = ۸$ (۰/۲۵) $\quad x_i \geq ۱ \ , \ i = ۱, ۲, ۳, ۴$ (۰/۲۵)

$\Rightarrow \binom{۸ - ۱}{۴ - ۱} = \binom{۷}{۳} = ۳۵$ (۰/۵)

(ص ۷۳)

۱۵۵ $\underset{(۰/۲۵)}{۵!} \times \underset{(۰/۲۵)}{\binom{۵}{۳}} \times \underset{(۰/۲۵)}{\binom{۴}{۲}} = ۷۲۰۰$ (۰/۲۵)

۱۵۶ الف) $\{b, e, h, k\}$ (۰/۵) ب) $\{a, c, e, g, i, k\}$ (۰/۵)

(ص ۵۴)

۱۵۷

www.akoedu.ir

تلفن تماس: ۰۲۶۳۳۴۰۸۹۴۴

۱۵۸ الف) $N_G(d) = \{b , e\}$ (۰/۵)

ب) $q = ۶$ (۰/۲۵)

ج) مجموع درجات رئوس $= ۱۲$ (۰/۲۵) (ص ۴۱)

۱۵۹ فرض کنیم G یک گراف و A مجموعه‌ی همه‌ی رئوس فرد گراف G و B مجموعه‌ی همه‌ی رئوس زوج گراف G باشد. در این صورت داریم: $\sum_{v \in V(G)} deg(v) = \sum_{v \in A} deg(v) + \sum_{v \in B} deg(v)$ (۰/۲۵)

از طرفی می‌دانیم که مجموع درجات رئوس یک گراف G عددی زوج است یعنی $\sum_{v \in V(G)} deg(v)$ زوج (۰/۲۵)

و $\sum_{v \in B} deg(v)$ زوج است بنابراین تفاضل آن‌ها نیز زوج خواهد شد. (۰/۲۵)

بنابراین $\sum_{v \in A} deg(v)$ زوج و نتیجه می‌شود که $n(A)$ عددی زوج است. (۰/۲۵) (ص ۴۰)

۱۶۰

۱۶۱ $۳x \overset{۷}{\equiv} ۱۳ \Rightarrow ۳x \overset{۷}{\equiv} ۶$ (۰/۲۵) $\xrightarrow[(۰/۲۵)]{(۳ , ۷) = ۱} x \overset{۷}{\equiv} ۲$ (۰/۲۵) $\Rightarrow x = ۷k + ۲$ (۰/۲۵) (ص ۲۵)

۱۶۲ $۱۰۰۰ \overset{۷}{\equiv} ۶ \overset{۷}{\equiv} -۱$ (۰/۲۵) $\Rightarrow (۱۰۰۰)^{۱۳} \times ۱۲ + ۱۰ \overset{۷}{\equiv} -۱۲ + ۱۰$ (۰/۲۵)

$\Rightarrow (۱۰۰۰)^{۱۳} \times ۱۲ + ۱۰ \overset{۷}{\equiv} -۲ \overset{۷}{\equiv} ۵$ (۰/۲۵) $\Rightarrow r = ۵$ (۰/۲۵) (ص ۱۶ و ۲۱)

۱۶۳

۱۶۴ $\begin{matrix} a \mid ۹k + ۴ \\ a \mid ۵k + ۳ \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} a \mid ۴۵k + ۲۰ \\ a \mid ۴۵k + ۲۷ \end{matrix}$ (۰/۲۵) $\Rightarrow a \mid ۷$ (۰/۲۵) $\xrightarrow{a > ۱} a = ۷$ (۰/۲۵) (ص ۱۶)

۱۶۵ $\underbrace{۲x^۲ + ۲y^۲ + ۲ \geq ۲xy + ۲x + ۲y}_{(۰/۲۵)} \Leftrightarrow \underbrace{(x^۲ - ۲x + ۱) + (y^۲ - ۲y + ۱) + (x^۲ - ۲xy + y^۲) \geq ۰}_{(۰/۲۵)}$

$\Leftrightarrow (x - ۱)^۲ + (y - ۱)^۲ + (x - y)^۲ \geq ۰$ (۰/۲۵)

$\Leftrightarrow (x - ۱)^۲ \geq ۰ , (y - ۱)^۲ \geq ۰ , (x - y)^۲ \geq ۰$ (۰/۲۵) (ص ۸)

www.akoedu.ir

تلفن تماس: ۰۲۶۳۳۴۰۸۹۴۴

۱۶۶ اگر $\alpha + ۲\beta$ گنگ نباشد (فرض خلف) پس عددی گویا است. (۰/۲۵)
از طرفی طبق فرض $\alpha + \beta$ نیز عددی گویا است. (۰/۲۵)
می‌دانیم تفاضل دو عدد گویا، عددی گویاست در نتیجه: $(\alpha + ۲\beta) - (\alpha + \beta) = \beta \in Q$ (۰/۲۵)
اما با توجه به فرض مسأله: β گنگ است. (۰/۲۵)
با توجه به تناقض ایجاد شده، فرض خلف باطل و حکم ثابت می‌شود. (۰/۲۵) (ص ۸)

۱۶۷

۱۶۸

۱۶۹

۱۷۰ $x = ۲k , y = ۲k + ۲ , z = ۲k + ۴$

$xyz = (۲k)(۲k + ۲)(۲k + ۴)$ (۰/۵) $= ۲k۲ (k + ۱) ۲ (k + ۲)$ (۰/۲۵) $= ۸k (k + ۱) (k + ۲) = ۸k'$ (۰/۲۵)
$(k + ۱) (k + ۲) = ۸k'$ (۰/۲۵)

۱۷۱ ۱۳ (تعداد دانش‌آموزان) تعداد کبوتر (۰/۲۵) و ۱۲ (تعداد ماه‌های سال) تعداد لانه است (۰/۲۵).
$۱۳ = ۱ + ۱ \times ۱۲$ (۰/۲۵). طبق اصل لانه کبوتری حداقل دو نفر در یک ماه متولد شده‌اند. (۰/۲۵) تمرین صفحه ۳۰

۱۷۲ فرض کنیم n زوج باشد. $n = ۲k$ (۰/۲۵) پس $n^۲ = ۲(۲k^۲)$ (۰/۲۵) و این با فرد بودن $n^۲$ تناقض دارد. (۰/۲۵) پس فرض خلف باطل است. تمرین صفحه ۲۸

۱۷۳ $(x + y)^۲ \geq ۴xy$ (۰/۲۵) $\Rightarrow x^۲ + y^۲ + ۲xy \geq ۴xy \Rightarrow x^۲ + y^۲ - ۲xy \geq ۰$ (۰/۲۵)
$\Rightarrow (x - y)^۲ \geq ۰$ (۰/۲۵)
رابطه بدیهی است و تمامی تمامی مراحل بازگشت‌پذیر است. (۰/۲۵) صفحه ۲۱

۱۷۴ اگر تعداد عضوهای زیرمجموعه را به منزله کبوتر $m = ۵$ درنظر بگیریم (۰/۲۵) و کبوترها را تعداد مجموع هر دو عدد از S که به صورت زیر برابر ۱۰ می‌شود، $n = ۴$ درنظر بگیریم (۰/۵)
$\{۱ , ۹\} , \{۲ , ۸\} , \{۳ , ۷\} , \{۴ , ۶\}$
طبق اصل لانه کبوتری (۰/۲۵) حداقل ۲ عضو وجود دارد که مجموعه‌شان برابر ۱۰ می‌شود. صفحه ۳۰

www.akoedu.ir

تلفن تماس: ۰۲۶۳۳۴۰۸۹۴۴

۱۷۵ فرض خلف: فرض کنیم $\sqrt{۳}$ عددی گویا باشد. صفحه ۲۸

$\sqrt{۳} = \frac{a}{b}, (a, b) = ۱$ (۰/۲۵) $\Rightarrow a^۲ = ۳b^۲ \Rightarrow$ (۰/۲۵) a مضرب ۳ است $\Rightarrow a^۲$ مضرب ۳ است

$\Rightarrow a = ۳k \Rightarrow ۹k^۲ = ۳b^۲ \Rightarrow$ (۰/۲۵) $b^۲$ مضرب ۳ است $\Rightarrow$ (۰/۲۵) b مضرب ۳ است

$\Rightarrow$ تناقض $(a, b) \neq ۱$ (۰/۲۵)

۱۷۶ الف) درست (۰/۲۵) ب) نادرست (۰/۲۵) مثال نقض (۰/۵)

۱۷۷ صفحه ۱۷

$a = ۲k, b = ۲k'$ (۰/۲۵) $\Rightarrow a + b = ۲k + ۲k' = \underbrace{۲(k + k')}_{(۰/۲۵)} = ۲k''$ (۰/۲۵)

۱۷۸ چون حرف اول نام ۳۲ حرف و حرف اول نام‌خانوادگی نیز ۳۲ حرف می‌تواند باشد، تعداد لانه‌ها برابر $۳۲ \times ۳۲ = ۱۰۲۴$ است. (۰/۲۵) از طرفی تعداد شرکت‌کنندگان (کبوتر) برابر ۳۰۷۳ (۰/۲۵) است.

طبق اصل لانه کبوتری $۱۰۲۴ \times ۳ + ۱ = ۳۰۷۳$ (۰/۲۵)، حداقل $۳ + ۱ = ۴$ شرکت‌کننده وجود دارند که حرف اول نام و نام‌خانوادگی آن‌ها یکی است. (۰/۲۵) صفحه ۳۰

۱۷۹ الف) درست (۰/۲۵)

$xy \leq \frac{x^۲ + y^۲}{۲}$ (۰/۲۵) $\Rightarrow ۲xy \leq x^۲ + y^۲ \Rightarrow x^۲ + y^۲ - ۲xy \geq ۰ \Rightarrow (x - y)^۲ \geq ۰$ (۰/۲۵)

رابطه بدیهی است بنابراین تمامی مراحل بازگشت‌پذیر است. (۰/۲۵) تمرین صفحه ۲۵

ب) نادرست (۰/۲۵) ارائه مثال نقض (۰/۵)

$\begin{cases} a = \sqrt{۲} \\ b = -\sqrt{۲} \end{cases} : a + b = ۰$

۱۸۰ الف) استدلال استنتاجی ب) استدلال استقرایی ج) اثبات بازگشتی

۱۸۱ ۳۰ دانش‌آموز: ۳۰ کبوتر ۴ فصل سال: ۴ لانه (۰/۲۵)

طبق اصل لانه کبوتری (۰/۲۵)، $۳۰ = ۴ \times ۷ + ۲$ حداقل $۷ + ۱ = ۸$ دانش‌آموز در یک فصل از سال متولد شده‌اند. (۰/۲۵)

۱۸۲ فرض خلف: فرض می‌کنیم $(x + y)$ گنگ نباشد، بنابراین عددی گویا است.

$x + y = a$ گویا $\xrightarrow[(۰/۲۵)]{}$ $y = a - x$ (۰/۲۵) یا $(y = a + (-x))$

می‌دانیم تفاضل (یا جمع) دو عدد گویا، عددی گویا است در نتیجه y گویا است. (۰/۲۵)

که این خلاف فرض مسأله است. پس فرض خلف باطل و حکم برقرار است. (۰/۲۵)

۱۸۳ $a^۲ + ۱ \geq b(۲ - b) \Leftrightarrow a^۲ + ۱ \geq ۲b - b^۲ \Leftrightarrow a^۲ + ۱ - ۲b + b^۲ \geq ۰$ (۰/۲۵)

$\Leftrightarrow a^۲ + (۱ - b)^۲ \geq ۰$ (۰/۲۵)

درستی عبارت فوق بدیهی است، تمامی روابط برگشت‌پذیر می‌باشند در نتیجه حکم برقرار است. (۰/۲۵)

www.akoedu.ir

تلفن تماس: ۰۲۶۳۳۴۰۸۹۴۴

۱۸۴ عددی فرد : $۲k+۱ \xrightarrow{(۰/۲۵)} ۳(۲k+۱)+۱ \ (۰/۲۵) = ۶k+۴ = ۲(۳k+۲) \ (۰/۲۵) = ۲k'$

عددی زوج است.

۱۸۵ می‌دانیم مجموعه باقی‌مانده‌های هر عدد طبیعی بر ۳۹ به‌صورت $\{۰, ۱, ۲, \ldots, ۳۸\}$ است. (۰/۲۵)
اگر اعضای S (۴۰نفر) را تعداد کبوترها و تعداد باقی‌مانده (۳۹) را لانه کبوترها در نظر بگیریم. (۴۰>۳۹) (۰/۵) طبق اصل لانه کبوتری حداقل دو عضو از این مجموعه وجود دارد که دارای باقی‌مانده یکسانی بر ۳۹ است. (۰/۲۵)

۱۸۶ خلاف فرض مساله (۰/۲۵) $\Rightarrow x+۴(-۱)^۲=۷ \Rightarrow x=۳$ (۰/۲۵) $y=-۱$: (فرض خلف)
پس فرض خلف باطل و حکم $y \neq -۱$ برقرار است. (۰/۲۵)

۱۸۷

۱۸۸ درست (۰/۲۵)

$$\left.\begin{array}{l} x=۲k \\ y=۲k+۲ \\ K \in Z \end{array}\right\} \Rightarrow xy = ۲k(۲k+۲) \ (۰/۲۵) = \underbrace{۴k(k+۱)}_{۲k'} \ (۰/۲۵) = ۸k'$$

۱۸۹ نادرست (۰/۲۵) - ارائه مثال نقض (۰/۲۵)

۱۹۰ درست (۰/۲۵)

۱۹۱ $$ab < \left(\frac{a+b}{۲}\right)^۲ \Leftrightarrow ab < \frac{a^۲+۲ab+b^۲}{۴} \Leftrightarrow (a-b)^۲ > ۰ \ (۰/۵)$$

(۰/۵)

با توجه به این‌که عبارت فوق همواره درست است و بر طبق استدلال برگشتی تمامی روابط برگشت پذیر می‌باشد. (۰/۲۵)

۱۹۲ تعداد کبوتر = m
تعداد لانه = ۱۲ = n

طبق اصل لانه کبوتری حداقل در یکی از لانه‌ها ۱۳ = ۱ + ۱۲ کبوتر است. (۰/۲۵)
و همچنین (۰/۲۵) $m = (۱۲ \times ۱۲) + ۱ = ۱۴۵$ بنابراین در این مدرسه حداقل ۱۴۵ دانش‌آموز وجود دارد. (۰/۲۵)

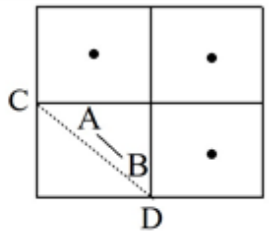
۱۹۳ $$\left.\begin{array}{l} x = ۲n+۱ \\ y = ۲m+۱ \end{array}\right\} \Rightarrow x^۲ + y^۲ = (۲n+۱)^۲ + (۲m+۱)^۲ = ۲\left(۲n^۲ + ۲n + ۲m^۲ + ۲m + ۱\right) = ۲k$$

(۰/۲۵) (۰/۲۵) (۰/۲۵) (۰/۲۵)

www.akoedu.ir

تلفن تماس: ۰۲۶۳۳۴۰۸۹۴۴

۱۹۴ ۵ نقطه: ۵ کبوتر



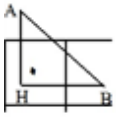
۴ مربع کوچک به ضلع ۱ واحد: ۴ لانه (۰/۲۵) ۵ > ۴

ابتدا سطح مربع را به ۴ مربع مساوی به ضلع ۱ واحد تقسیم می‌کنیم (مطابق شکل روبه‌رو) بنابر اصل لانه‌ی کبوتری و روابط بالا حداقل دو نقطه درون یکی از مربع‌های کوچک واقع می‌شوند، داریم: (رسم شکل (۰/۲۵))

$CD^2 = 1^2 + 1^2 = 1 \rightarrow CD = \sqrt{2}$ (۰/۲۵)

می‌دانیم فاصله ی دو نقطه درون مربع از قطر مربع کوچک‌تر است در نتیجه $AB < CD$ (۰/۲۵)

۱۹۵ ۶ = تعداد لانه‌ها



(۰/۲۵)

۷ = تعداد کبوترها

بر طبق اصل لانه کبوتری حداقل ۲ نقطه درون یک مربع قرار می‌گیرند. (۰/۲۵)

$AB^2 = AH^2 + BH^2 < 2^2 + 2^2 \Rightarrow AB^2 < 8 \Rightarrow AB < 2\sqrt{2}$ (۰/۲۵)

۱۹۶ فرض خلف : $2\sqrt{5} + 3\sqrt{7} \notin Q' \Rightarrow 2\sqrt{5} + 3\sqrt{7} = \frac{a}{b} - 3\sqrt{7} \Rightarrow$

(۰/۲۵) (۰/۲۵)

$20 = \frac{A^2}{B^2} + 63 - 6\sqrt{7}\,\frac{a}{b} \Rightarrow 6\sqrt{7}\,\frac{a}{b} = \frac{a^2}{b^2} + 43$ (۰/۲۵)

طرف راست رابطه مجموع دو عدد گویا است و طرف چپ رابطه عددی گنگ است. پس به تناقض رسیده و همان حکم اولیه درست است. (۰/۲۵)

۱۹۷ خیر - مثال نقض

$a = \sqrt{2},\ b = 1 - \sqrt{2} \Rightarrow a + b = 1 \in Q$

(۰/۲۵) (۰/۲۵)

۱۹۸ حکم : $x = 2k + 1$ عدد فرد $\rightarrow 3(2k + 1)^2 - 3 = 12\,k'$ (۰/۵)

$3\left(4k^2 + 4k + 1\right) - 3 = 12k^2 + 12k = 12\left(k^2 + k\right) = 12k'$ (۰/۵)

۱۹۹ مجموعه دلخواه را A در نظر می‌گیریم به برهان خلف $\phi \subset A$ (۰/۲۵) پس باید ϕ عضوی داشته باشد که در A نیست و این با تعریف تهی تناقض دارد. (۰/۲۵)

۲۰۰ $xy \le \frac{x^2+2xy+y^2}{4} \Leftrightarrow (x-y)^2 \ge 0$ (۰/۲۵)

(۰/۲۵)

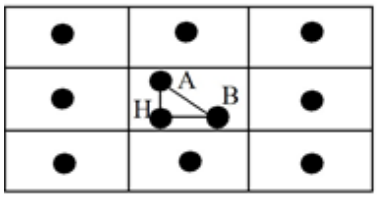
گزاره همواره درست و بر طبق استدلال برگشتی درست است. (۰/۲۵)

www.akoedu.ir

تلفن تماس: ۰۲۶۳۳۴۰۸۹۴۴

۲۰۱ بر طبق اصل لانه کبوتر، ۱۰ نقطه = تعداد کبوترها و ۹ مربع = تعداد لانه‌ها

۱۰>۹ پس حداقل ۲ نقطه درون یک مربع قرار دارند. (۰/۲۵)



(۰/۲۵)

$$AB^2=AH^2+BH^2 < \frac{1}{9}+\frac{1}{9}=\frac{2}{9} \rightarrow AB < \frac{\sqrt{2}}{3}$$ (۰/۲۵)

۲۰۲

فرض $\sqrt{7} \in Q'$, $x \in Q$

حکم $x+\sqrt{7} \in Q'$ (۰/۲۵)

خلاف حکم $x+\sqrt{7}=\frac{a}{b} \in Q \Rightarrow \sqrt{7}=\frac{a}{b}-x \Rightarrow$ (۰/۲۵)

تفریق دو گویا، گویا است و مساوی گنگ نمی‌شود پس به تناقض رسیده یعنی حکم برقرار است. (۰/۲۵)

۲۰۳ نادرست (۰/۲۵) یک مثال نقض ارائه شود، مثل $x=۴$, $y=۰ \Rightarrow xy=۰$ (۰/۲۵)

۲۰۴

فرض $x=\frac{a}{b} \in Q$, $y=\frac{c}{d} \in Q$

حکم $xy=\frac{p}{q} \in Q$ (۰/۲۵)

درست (۰/۲۵) و آن را اثبات می‌کنیم:

$$xy=\frac{a}{b}\times\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd}=\frac{p}{q}$$ (۰/۲۵)

چون a , b , c , d همگی عدد صحیح هستند و اعداد صحیح نسبت به جمع و ضرب و تفریق بسته هستند پس p , q هم عدد صحیح بوده و همچنین $b\neq ۰$ و $d\neq ۰$ پس $bd=q\neq ۰$ پس $\frac{p}{q} \in Q$ (۰/۲۵)

۲۰۵ نادرست (۰/۲۵) یک مثال نقض ارائه شود، مثل $x=۱$ (۰/۲۵)

www.akoedu.ir

تلفن تماس: ۰۲۶۳۳۴۰۸۹۴۴

۲۰۶

$$\frac{a}{b^2}+\frac{b}{a^2}\geq\frac{1}{a}+\frac{1}{b} \Leftrightarrow \frac{a^3+b^3}{a^2b^2}\geq\frac{a+b}{ab} \Leftrightarrow \frac{(a+b)(a^2-ab+b^2)}{ab}\geq a+b$$

(۰/۲۵) (۰/۲۵)

$$\Leftrightarrow a^2-ab+b^2\geq ab \Leftrightarrow a^2-2ab+b^2\geq 0 \Leftrightarrow (a-b)^2\geq 0$$ (۰/۲۵)

گزاره همواره درست و برطبق استدلال برگشتی و برگشت‌پذیربودن روابط حکم درست است. (۰/۲۵)

۲۰۷

برهان خلف: $\sqrt{3}\in Q \Rightarrow \sqrt{3}=\frac{a}{b}\ ,\ (a,b)=1 \Rightarrow 3=\frac{a^2}{b^2} \Rightarrow a^2=3b^2 \Rightarrow (a=3k)$

(۰/۲۵) (۰/۲۵) (۰/۲۵)

$$\Rightarrow (3k)^2=3b^2 \Rightarrow 9k^2=3b^2 \Rightarrow (b=3k') \Rightarrow (a,b)=3$$

(۰/۲۵)

پس a ، b هر دو مضربی از ۳ هستند و نسبت به هم اول نیستند، پس به تناقض رسیده و حکم اصلی درست است. (۰/۲۵)

۲۰۸

تعداد کبوترها، $\{0,1,\ldots,25\}$ = باقیمانده های تقسیم بر ۲۶ = تعداد لانه ها

(۰/۲۵) (۰/۲۵)

۲۷ عدد را در لانه‌ها پخش می‌کنیم، در هر لانه یکی قرار می‌گیرد، اگر عدد بیست و هفتم را نیز پخش کنیم، لانه‌ای وجود دارد که بیش از یک عضو دارد، یعنی حداقل ۲ تا. (۰/۲۵)

۲۰۹ نادرست (۰/۲۵)

۲۱۰ توجه: تعداد مضارب k از ۱ تا n برابر است با: $\left[\frac{n}{k}\right]$

کل اعداد = ۴۲۰۰ = n(s)

مضرب ۵ = A
مضرب ۷ = B
: $n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$

$$=\left[\frac{4200}{5}\right]+\left[\frac{4200}{7}\right]-\left[\frac{4200}{35}\right]=840+600-120=1220$$

$$\Rightarrow n(A'\cap B')=n(s)-n(A\cup B)=4200-1220=2980$$

www.akoedu.ir

تلفن تماس: ۰۲۶۳۳۴۰۸۹۴۴

۲۱۱ x = تعداد ۶۰ ریالی
y = تعداد ۹۰ ریالی

$$۶۰x + ۹۰y = ۸۷۰ \xrightarrow{\div ۳۰} ۲x + ۳y = ۱۹$$

شرط جواب $(۶۰ , ۹۰) = ۳۰ | ۸۷۰$

به پیمانه‌ی ۲ می‌رویم:

$$۲x + ۳y \overset{۲}{\equiv} ۱۹ : y \overset{۲}{\equiv} ۱ \to y = ۲k + ۱ \geqslant ۰ : k \geqslant -\frac{۱}{۲} \xrightarrow{\text{اشتراک}} k = \begin{cases} ۰ \\ ۱ \\ ۲ \end{cases}$$

$$\xrightarrow[\text{جاگذاری}]{} x = -۳k + ۸ \geqslant ۰ : k \leqslant \frac{۸}{۳}$$

$$k = ۰ : \begin{cases} x = ۸ \\ y = ۱ \end{cases} \qquad k = ۱ : \begin{cases} x = ۵ \\ y = ۳ \end{cases} \qquad k = ۲ : \begin{cases} x = ۲ \\ y = ۵ \end{cases}$$

۲۱۲

$$(a, a - b) = d \Rightarrow \begin{cases} d|a \\ d|a - b \end{cases} \xrightarrow{\text{تفاضل}} \begin{cases} d|b \\ d|a \text{ از طرفی} \end{cases} \Rightarrow d|\underbrace{(a, b)}_{۱} \Rightarrow d = ۱$$

توجه:

$$\begin{matrix} a|b \\ a|c \end{matrix} \Rightarrow a|(b, c)$$

۲۱۳ اثبات به روش برهان خلف: فرض کنیم $P_۱, P_۲, \dots, P_n$ تنها اعداد اول باشند.
عدد $m = P_۱ \times P_۲ \times \dots \times P_n + ۱$ را در نظر می‌گیریم. m باید مرکب باشد یعنی یک مقسوم‌علیه اول مانند P_j دارد به‌طوری که $P_j|m$ و $P_j|P_۱ \times P_۲ \times \dots \times P_n$ بنابراین $P_j|m - (P_۱ \times P_۲ \times \dots \times P_n)$ پس $P_j|۱$ که ممکن نیست.

۲۱۴ ۲ عدد زوج متوالی $\begin{cases} a = ۲q \\ b = ۲q + ۲ = ۲(q + ۱) \end{cases} : a \times b = ۲q \times ۲(q + ۱) = \underbrace{۴q(q + ۱)}_{\text{ضرب ۲ عدد متوالی مضرب ۲}} = ۴(۲k) = ۸k$

۲۱۵ می دانیم : $\binom{n}{k} \in N \Rightarrow \binom{n}{۳} = q \in N \Rightarrow \frac{n!}{۳! \times (n - ۳)!} = q \Rightarrow \frac{n(n - ۱)(n - ۲)}{۳!} = q$

$$\Rightarrow n(n - ۱)(n - ۲) = ۳! \times q = ۶q \Rightarrow ۶|\overbrace{n(n - ۱)(n - ۲)}^{\text{۳ عدد متوالی}}$$

۲۱۶ به گرافی که بین هر ۲ رأس آن یال باشد، گراف کامل گوییم.

۲۱۷ ۲ , ۲ , ۲ , ۳ , ۳ , ۴

۲۱۸ $V_۱V_۲V_۳V_۴V_۶V_۱ , V_۲V_۳V_۴V_۵V_۶V_۲$

۲۱۹

$$V = \{V_۱ , V_۲ , V_۳ , V_۴ , V_۵ , V_۶\}$$
$$E = \{V_۱V_۲ , V_۱V_۶ , V_۲V_۳ , V_۲V_۶ , V_۳V_۴ , V_۴V_۵ , V_۴V_۶ , V_۵V_۶\}$$

www.akoedu.ir

تلفن تماس: ۰۲۶۳۳۴۰۸۹۴۴

۲۲۰

$x_i > ۲ : x_i \geq ۳ \Rightarrow x_i - ۳ \geq ۰ \xrightarrow{\text{جاگذاری در معادله}} (y_۱ + ۳) + (y_۲ + ۳) + (y_۳ + ۳) = ۱۴$

$: \begin{cases} y_۱ + y_۲ + y_۳ = ۵ \\ y \geq ۰ \end{cases} \xrightarrow{\text{حسابی}} \binom{۵ + ۳ - ۱}{۳ - ۱} = \binom{۷}{۲} = ۲۱$

۲۲۱

$۳۸x + ۳۴y = ۱۲۰ \xrightarrow{\div ۲} ۱۹x + ۱۷y = ۶۰$

شرط جواب $(۳۸, ۳۴) = ۲ | ۱۲۰$

معادله را به پیمانه‌ی ۱۷ می‌بریم:

$۱۹x + ۱۷y \overset{۱۷}{\equiv} ۶۰ : ۲x \overset{۱۷}{\equiv} ۶۰ \xrightarrow{\div ۲} x \overset{۱۷}{\equiv} ۳۰ \overset{۱۷}{\equiv} -۴ : x = ۱۷q - ۴ \xrightarrow[\text{جاگذاری}]{} y = -۱۹q + ۸$

۲۲۲

۲۲۳

$(a, b) = d \Rightarrow \begin{cases} d|a \\ d|b \xrightarrow{b|c} d|c \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d|a + c \\ d|b \text{ از طرفی} \end{cases} \Rightarrow d|(a + c, b) : d|d' \quad (I)$

$(a + c, b) = d' \Rightarrow \begin{cases} d'|a + c \\ d'|b \xrightarrow{b|c} d'|c \end{cases} \xrightarrow{\text{تفاضل}} \begin{cases} d'|a \\ d'|b \text{ از طرفی} \end{cases} \Rightarrow d'|(a, b) : d'|d \quad (II)$

$\xrightarrow[II]{I} d = d'$

توجه:

$\begin{cases} (۱) \ \begin{matrix} a|b \\ a|c \end{matrix} \Rightarrow a|bx + cy \\ (۲) \ \begin{matrix} a|b \\ a|c \end{matrix} \Rightarrow a|(b, c) \end{cases}$

۲۲۴

$\begin{matrix} a = ۶k + ۵ \\ b = ۶q + ۵ \end{matrix} \Rightarrow a \times b = \underbrace{۳۶kq + ۳۰k + ۳۰q + ۲۵}_{۲۴ + ۱} = ۶q' + ۱$

فاکتور ۶ می دهند.

۲۲۵

$\text{فرد } a = ۲k + ۱ \xrightarrow{\uparrow ۲} a^۲ = \underbrace{۴k^۲ + ۴k}_{۴k \text{ فاکتور می دهد.}} + ۱ = \underbrace{۴k(k + ۱)}_{\text{ضرب ۲ عدد متوالی، مضرب ۲ می باشد.}} + ۱ = ۴(۲q) + ۱ = ۸q + ۱$

۲۲۶

می‌دانیم در هر گراف ساده $\sum_{i=۱}^{p} \deg(V_i) = ۲q$ می‌باشد، یعنی جمع درجه ی رئوس زوج است، آن‌هایی که درجه‌ی زوج دارند مجموعشان زوج است ولی آن‌هایی که درجه‌ی فرد دارند مجموعشان زوج است که حتماً تعداد آن‌ها زوج است.

www.akoedu.ir

تلفن تماس: ۰۲۶۳۳۴۰۸۹۴۴

۲۲۷ $V_1V_2V_3$, $V_1V_4V_3$, $V_1V_5V_4V_3$

۲۲۸

۲۲۹ کل سه رقمی $= \underline{9}\ \underline{10}\ \underline{10} = 900$

A : ۲ نباشد
B : ۳ نباشد

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

$$\underline{8}\ \underline{9}\ \underline{9} = 648 \quad \underline{8}\ \underline{9}\ \underline{9} = 648 \quad \underline{7}\ \underline{8}\ \underline{8} = 448$$

$\Rightarrow$ جواب $=$ کل $- n(A \cup B) = 42$

۲۳۰ طرفین معادله را بر ۳ تقسیم می‌کنیم.

$$51x + 39y = 300 \xrightarrow{\div 3} 17x + 13y = 100$$

شرط جواب : $(51 \text{ و } 39) = 3 | 300$

تساوی را به پیمانه‌ی ۱۳ می‌بریم:

$$17x + 13y \overset{13}{\equiv} 100 : 4x \overset{13}{\equiv} 100 \xrightarrow{\div 4} x \overset{13}{\equiv} 25 \overset{13}{\equiv} -1 : x = 13q - 1$$

$$\xrightarrow{\text{جاگذاری}} y = -17q + 9$$

۲۳۱

$$2^5 \overset{31}{\equiv} 1 \xrightarrow{\uparrow 4} 2^{20} \overset{31}{\equiv} 1 \xrightarrow{\times 2^3}$$

توجه: $a \overset{m}{\equiv} b \Rightarrow a^n \overset{m}{\equiv} b^n$

$$(2^5)^4 \times 2^3 \overset{31}{\equiv} 2^3 = 8 \Rightarrow 2^{23} - 8 \overset{31}{\equiv} 0$$

۲۳۲

$$ac \overset{m}{\equiv} bc : m | ac - bc \xrightarrow{\div d = (m, c)}$$

$$\frac{m}{d} \Big| \frac{c}{d}(a - b) \quad \text{و} \quad \left(\frac{m}{d}, \frac{c}{d}\right) = 1$$

$$\xrightarrow{\text{لم}} \frac{m}{d} | a - b \Rightarrow a \overset{\frac{m}{d}}{\equiv} b$$

بنا به لم اقلیدس داریم:

www.akoedu.ir

تلفن تماس: ۰۲۶۳۳۴۰۸۹۴۴

۲۳۳ اثبات به روش برهان خلف: فرض کنیم $P_1, P_2, \ldots, P_n$ تنها اعداد اول باشند.
عدد $m = P_1 \times P_2 \times \ldots \times P_n + 1$ را در نظر می‌گیریم. m باید مرکب باشد یعنی یک مقسوم‌علیه اول مانند P_j دارد به‌طوری که $P_j | m$ و $P_j | P_1 \times P_2 \times \ldots \times P_n$ بنابراین $P_j | m - (P_1 \times P_2 \times \ldots \times P_n)$ پس $P_j | 1$ که ممکن نیست.

۲۳۴ اولاً: $a | \Rightarrow b = aq \quad (a, q \in Z)$

$\xrightarrow{\times c} bc = a(cq) = aq' \Rightarrow a | bc$

ثانیاً: $۸ | ۴$ و $۸ | ۶$ ولی $۸ | ۶ \times ۴$ یک مثال $a = ۸, b = ۶, c = ۴$

۲۳۵ V_1, V_2, V_5, V_4, V_1 و V_1, V_2, V_3, V_4, V_1 و V_2, V_3, V_4, V_5, V_2

۲۳۶ V_1, V_2, V_5, V_4, V_3

۲۳۷ خیر زیرا لازم است راس‌های V_1, V_5 یا V_2, V_4 مجاور باشند یا در چهارضلعی $V_1V_2V_3V_4$ هیچ‌کدام از قطرها موجود نیست یعنی گراف حفره دارد پس گراف بازه‌ها نیست.

۲۳۸ می دانیم: $q_{\text{کامل}} = \binom{p}{۲} = \frac{p(p-۱)}{۲}$

$$\frac{P(p-۱)}{۲} = q \Rightarrow \frac{۵(۵-۱)}{۲} = q \Rightarrow q = ۱۰$$

۲۳۹ اعضای V را رأس‌های گراف $G(V, E)$ و اعضای E را یال‌های گراف می‌گویند.

۲۴۰ گراف ساده‌ی G زوج مرتبی چون (V, E) است که در آن V مجموعه ای متناهی و ناتهی است و E مجموعه‌ای از زیر مجموعه‌های دوعضوی V است.

۲۴۱ $۵۰۰ = ۵^۳ \times ۲^۲ \qquad S = \{۱, ۲, \ldots, ۵۰۰\} \Rightarrow |s| = ۵۰۰$

$|A_1| = \left[\frac{۵۰۰}{۲}\right] = ۲۵۰$: تعداد اعضای s که بر ۲ بخش‌پذیر است.

$|A_2| = \left[\frac{۵۰۰}{۵}\right] = ۱۰۰$: تعداد اعضای s که بر ۵ بخش‌پذیر است.

$|A_1 \cap A_2| = \left[\frac{۵۰۰}{۱۰}\right] = ۵۰$: تعداد اعضای s که بر ۱۰ بخش‌پذیر است.

$|A'_1 \cap A'_2| = |(A_1 \cup A_2)'| = |S| - |A_1 \cup A_2| = ۵۰۰ - (۲۵۰ + ۱۰۰ - ۵۰) = ۲۰۰$

۲۴۲ $A \overset{۳۹}{=} ۱۷ \Rightarrow A - B \overset{۳۹}{=} ۱۷ - ۲۳ = -۶ \overset{۳۹}{=} ۳۳$
$B \overset{۳۹}{=} ۲۳$

۲۴۳ $۳^۲ \overset{۱۰}{=} -۱ \Rightarrow ۳^{۲۴} \overset{۱۰}{=} ۱ \Rightarrow ۳^{۲۵} \overset{۱۰}{=} ۳$

$۷^۲ \overset{۱۰}{=} -۱ \Rightarrow ۷^{۷۲} \overset{۱۰}{=} ۱ \Rightarrow ۷^{۷۳} \overset{۱۰}{=} ۷$

$\Rightarrow ۳^{۲۵} + ۷^{۷۳} \overset{۱۰}{=} ۰$

www.akoedu.ir

تلفن تماس: ۰۲۶۳۳۴۰۸۹۴۴

۲۴۴ باید m زوج باشد. $(۲۰,۱۴) = ۲ \mid m \Rightarrow n = ۲t \Rightarrow$

۲۴۵ $y = \frac{-x + ۶}{۲} = -\frac{x}{۲} + ۳$ معادله جواب دارد $\Rightarrow (۱,۲) = ۱ \mid ۶$

$$-\frac{x}{۲} = t \in z \Rightarrow x = -۲t \qquad y = t + ۳$$

۲۴۶

$$a \mid b \Rightarrow \exists\, q \in z \;;\; b = aq$$
$$c \mid b \Rightarrow \exists\, t \in z \;;\; b = ct$$

$$(a,c) = ۱ \Rightarrow \exists\, m,n \in z;\ ma + nc = ۱ \xrightarrow{\times b} mab + nbc = b \Rightarrow$$
$$mact + nacq = b \Rightarrow ac(mt + nq) = b \Rightarrow ac \mid b$$

۲۴۷ فرض کنیم $d = (a,b)$ باشد، آن‌گاه داریم:

$$\left.\begin{matrix} d \mid a \Rightarrow d \mid ma \\ d \mid b \Rightarrow d \mid nb \end{matrix}\right\} \Rightarrow d \mid ma + nb = ۱ \Rightarrow d \mid ۱ \Rightarrow d = ۱$$

۲۴۸ فرض کنید G یک گراف کامل مرتبه‌ی p و اندازه‌ی q باشد.

$$q = \frac{p(p-۱)}{۲} \text{ و } p = \frac{۱}{۳}q \Rightarrow p = \frac{p(p-۱)}{۶} \Rightarrow p^۲ - ۷p = ۰ \Rightarrow p = ۷ \Rightarrow q = ۲۱$$

۲۴۹ گراف G را همبند گوییم هرگاه بین هر دو رأس آن حداقل یک مسیر وجود داشته باشد.

۲۵۰

$$\left.\begin{matrix} x_۱ \leqslant ۱ \Rightarrow y_۱ = x_۱ - ۱ \geqslant ۰ \Rightarrow x_۱ = y_۱ + ۱ \\ x_i \leqslant ۳ \Rightarrow y_i = x_i - ۳ \geqslant ۰ \Rightarrow x_i = y_i + ۳ \end{matrix}\right\} \Rightarrow y_۱ + y_۲ + y_۳ + y_۴ = ۱۱ \quad (*)$$

$$y_i \geqslant ۰$$

$$i = ۲ \;,\; ۳ \;,\; ۴$$

$$(*) \text{ تعداد جواب های صحیح نامنفی} = \binom{۱۱ + ۴ - ۱}{۴ - ۱} = \binom{۱۴}{۳} = ۳۲۴$$

۲۵۱ $(۲,-۹) = ۱ \mid ۵ \Rightarrow$ معادله جواب دارد $۲x = ۹y + ۵ \Rightarrow x = ۴y + ۲ + \frac{y+۱}{۲} \in z$

$$\frac{y+۱}{۲} = t \Rightarrow y = ۲t - ۱ \quad (۱) \qquad x = ۴(۲t - ۱) + ۲ + t = ۹t - ۲$$

روش دوم: به پیمانه‌ی یکی از ضرایب می‌رویم:

$$۲x - ۹y \equiv ۵ \pmod{۲} : y \equiv ۱ \pmod{۲} \Rightarrow y = ۲k + ۱ \xrightarrow{\text{جاگذاری}} x = ۹k + ۷$$

www.akoedu.ir

تلفن تماس: ۰۲۶۳۳۴۰۸۹۴۴

۲۵۲ می دانیم $\begin{cases} a \overset{m}{\equiv} b \\ a \overset{n}{\equiv} b \end{cases} \Rightarrow a \overset{[m,n]}{\equiv} b$

$$\begin{cases} a \overset{۷}{\equiv} ۲ \overset{۷}{\equiv} ۹ \\ a \overset{۶}{\equiv} ۳ \overset{۶}{\equiv} ۹ \end{cases} \Rightarrow a \overset{[۶,۷]}{\equiv} ۹ : a \overset{۴۲}{\equiv} ۹$$

۲۵۳

$$۳^{۳} \overset{۱۳}{\equiv} ۱ \Rightarrow ۳^{۶۹} \overset{۱۳}{\equiv} ۱ \Rightarrow ۳^{۶۹} \times ۳^{۲} \overset{۱۳}{\equiv} ۹ \Rightarrow ۳^{۷۱} \overset{۱۳}{\equiv} ۹ \quad (۱)$$

$$۵^{۲} \overset{۱۳}{\equiv} -۱ \Rightarrow (۵^{۲})^{۵۶} \overset{۱۳}{\equiv} ۱ \Rightarrow ۵^{۱۱۲} \overset{۱۳}{\equiv} ۱ \quad (۲)$$

$$(۱)+(۲) \Rightarrow ۳^{۷۱} + ۵^{۱۱۲} \overset{۱۳}{\equiv} ۱۰$$

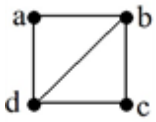
۲۵۴

$$(a,b)=۱ \Rightarrow \exists\, m,n \in z \;;\; ma+nb=۱ \quad (۱)$$
$$(a,c)=۱ \Rightarrow \exists\, x,y \in z \;;\; xa+yc=۱ \quad (۲)$$

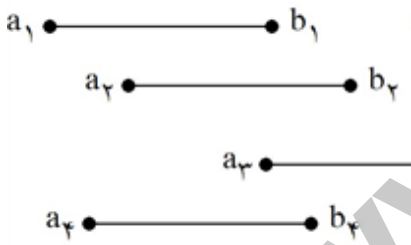
$$(۱)\times(۲) \Rightarrow mxa^{۲} + nyac + nxab + nybc = ۱ \Rightarrow a(\underbrace{max + myc + nxb}_{t}) + bc(\underbrace{ny}_{p}) = ۱$$

$$\Rightarrow at + (bc)p = ۱ \Rightarrow (a\,,\,bc) = ۱$$

۲۵۵

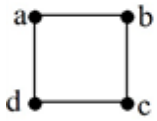


۲۵۶ بازه‌های $(a_i\,,\,b_i)$ و $i = ۱,۲,۳,۴$ نظیر راس‌های d,c,b,a در نظر می‌گیریم.



برهان خلف: فرض کنیم گراف بازه‌ای باشد. (بنا به مجاورت راس‌ها) داریم:
که با توجه به نمودار مقابل $(a_۲\,,\,b_۲) \cap (a_۴\,,\,b_۴) \neq \varnothing$ است.
یعنی b با c مجاور است که یک تناقض است.

۲۵۷ گراف G از مرتبه‌ی P (که $P \geq ۳$) را همیلتنی گوئیم هرگاه دارای دوری از مرتبه‌ی P باشد.
گراف G از مرتبه‌ی P (که $P \geq ۳$) را همیلتنی گوئیم، هرگاه دارای دوری باشد که از تمام رئوس G بگذرد.



www.akoedu.ir

تلفن تماس: ۰۲۶۳۳۴۰۸۹۴۴

۲۵۸

$$0 \leq x_1 - 6 < 3 \;;\; y_1 = x_1 - 6 \Rightarrow x_1 = y_1 + 6 \;,\; 0 \leq y_1 < 3$$
$$0 \leq x_2 - 5 < 5 \;;\; y_2 = x_2 - 5 \Rightarrow x_2 = y_2 + 5 \;,\; 0 \leq y_2 < 5$$
$$\Rightarrow y_1 + 6 + y_2 + 5 + x_3 = 25 \Rightarrow y_1 + y_2 + x_3 = 14 \quad (*)$$

$|A_1|$: تعداد جواب های صحیح نامنفی $(*)$ با شرط : $\binom{13}{2}$

$y_1 \geq 3$

$|A_2|$: تعداد جواب های صحیح نامنفی $(*)$ با شرط : $\binom{11}{2}$

$y_2 \geq 5$

$|S|$: تعداد جواب های صحیح نامنفی $(*)$ با شرط : $\binom{16}{2}$

$*$ معادله

$|A_1 \cap A_2|$: تعداد جواب های صحیح نامنفی $(*)$ با شرط : $\binom{8}{2}$

شرط $y_1 \geq 3 \;,\; y_2 \geq 5$

$$|A'_1 \cap A'_2| = |(A_1 \cup A_2)'| = |S| - |(A_1 \cup A_2)'| = \binom{16}{2} - \binom{13}{2} - \binom{11}{2} + \binom{8}{2} =$$
$$120 - 78 - 55 + 28 = 15$$

۲۵۹

$$\begin{cases} d \mid a - 5 \Rightarrow d \mid (a-1)(a-5) = a^2 - 6a + 5 \quad (1) \\ d \mid a^2 - 6a + 3 \quad (2) \end{cases}$$
$$(1) \;,\; (2) \Rightarrow d \mid (a^2 - 6a + 5) - (a^2 - 6a + 3) = 2 \Rightarrow d = 1 \text{ یا } 2$$

۲۶۰

$$(3,2) = 1 \mid 7 \Rightarrow \text{معادله جواب دارد } 2y = 7 - 3x \Rightarrow y = 3 - 2x + \frac{x+1}{2} \quad (1)$$

باید $\frac{x+1}{2} \in z \Rightarrow \frac{x+1}{2} = m \Rightarrow x = 2m - 1 \;,\; m \in z \quad (2)$

$$\xrightarrow[(2)]{(1)} y = 3 - 2(2m - 1) + m \Rightarrow y = 5 - 3m$$

روش دوم:

$$3x + 2y = 7 \xrightarrow{\text{پیمانه } 2} \cancel{3}^{1}x + \cancel{2}^{0}y \overset{2}{\equiv} \cancel{7}^{1} : x \overset{2}{\equiv} 1 : x = 2k + 1 \xrightarrow{\text{جاگذاری}} y = -3k + 2$$

www.akoedu.ir

تلفن تماس: ۰۲۶۳۳۴۰۸۹۴۴

۲۶۱

$$۷^{۲} \overset{۱۰}{=} -۱ \Rightarrow (۷^{۲})^{۱۶۳} \overset{۱۰}{=} (-۱)^{۱۶۳} \Rightarrow ۷^{۳۲۶} \overset{۱۰}{=} -۱ \xrightarrow{\times ۷} ۷^{۳۲۷} \overset{۱۰}{=} -۷ \Rightarrow -۷ \overset{۱۰}{=} ۳$$

رقم یکان ۳ می‌باشد.

روش دوم: می‌دانیم $\begin{cases} a^{۴k+r} \overset{۱۰}{=} a^{r} \\ r \neq ۰ \end{cases}$

$$۷^{۳۲۷} = ۷^{(۴\times ۸۱+۳)} = ۷^{۴k+۳} \overset{۱۰}{=} ۷^{۳} = ۷^{۲} \times ۷ = ۴۹ \times ۷ \overset{۱۰}{=} ۶۳ \overset{۱۰}{=} ۳$$

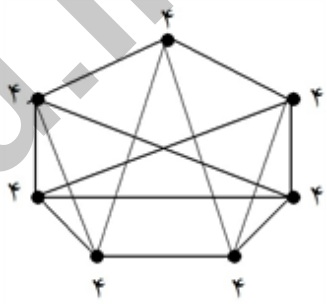
۲۶۲

$$a \mid bc \Rightarrow \exists\, q \in z \;;\; bc = aq \quad (۱)$$

$$(a,b) = ۱ \Rightarrow \exists\, m,n \in z \;;\; am + bn = ۱ \xrightarrow{\times c} amc + (bc)n = c$$

$$\xrightarrow{(۱)} amc + aqn = c \Rightarrow a(mc + nq) = c \Rightarrow a \mid c$$

۲۶۳



۲۶۴

$$۴p = ۲q \Rightarrow q = ۲p \;,\; p+q = ۲۱ \Rightarrow ۳p = ۲۱ \Rightarrow p = ۷ \;,\; q = ۱۴$$

۲۶۵

acdb , aecb , adcb

۲۶۶

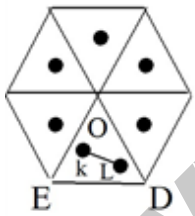
اگر u و v دو رأس متفاوت گراف G باشند، یک مسیر از u به v دنباله‌ای متشکل از رأس‌های دوبه‌دو متفاوت G است که از u آغاز به v ختم می‌شود.

۲۶۷

تعداد کبوترها = ۷ نقطه

تعداد لانه‌ها = ۶ مثلث

بر طبق اصل لانه کبوتر، $(۶ < ۷)$ یعنی حداقل دو نقطه وجود دارد که درون مثلثی قرار دارد.



$$kL < OD \Rightarrow kL < ۱$$

۲۶۸

فرض خلف : $\sqrt{\sqrt{۳}+۲} \notin Q' \Rightarrow \sqrt{\sqrt{۳}+۲} = \frac{a}{b} \Rightarrow \sqrt{۳}+۲ = \frac{a^{۲}}{b^{۲}} \Rightarrow \sqrt{۳} = \frac{a^{۲}}{b^{۲}} - ۲ \Rightarrow \sqrt{۳} = \frac{a^{۲} - ۲b^{۲}}{b^{۲}}$

به تناقض رسیده‌ایم و همان حکم اولیه برقرار است.

۲۶۹

$$a^{۲} + b^{۲} + ۴(a+b+۲) \geq ۰ \Leftrightarrow (a^{۲} + ۴a + ۴) + (b^{۲} + ۴b + ۴) \geq ۰ \Leftrightarrow (a+۲)^{۲} + (b+۲)^{۲} \geq ۰$$

گزاره همواره درست و بر طبق استدلال برگشتی برقرار است.

۲۷۰

درست

$$x = ۲k + ۱ \Rightarrow (۲k+۱)^{۳} - ۱ = ۸k^{۳} + ۱۲k^{۲} + ۶k + ۱ - ۱ = ۲(۴k^{۳} + ۶k^{۲} + ۳k) = ۲k'$$

www.akoedu.ir

تلفن تماس: ۰۲۶۳۳۴۰۸۹۴۴

۲۷۱ درست

$۴ - x^۲ < ۳ \Rightarrow ۱ < x^۲ \Rightarrow x > ۱$ یا $x < -۱$

۲۷۲

$x_۱ \geq ۲ \Rightarrow x_۱ - ۲ \geq ۰ \Rightarrow y_۱ = x_۱ - ۲ \Rightarrow y_۱ \geq ۰ \;,\; y_۲ = x_۲ \geq ۰$

$x_۳ \geq ۱ \Rightarrow x_۳ - ۱ \geq ۰ \Rightarrow y_۳ = x_۳ - ۱ \Rightarrow y_۳ \geq ۰$

$y_۱ + ۲ + y_۲ + y_۳ + ۱ = ۱۲ \Rightarrow y_۱ + y_۲ + y_۳ = ۹$

تعداد جواب ها $\binom{n + k - ۱}{n} = \binom{۹ + ۳ - ۱}{۹} = \binom{۱۱}{۹} = ۵۵$

۲۷۳ روش اول:

$۱۸x + ۳۰y = ۴۲ \Rightarrow ۳x + ۵y = ۷ \qquad (۳,۵) = ۱ \Rightarrow ۱ | ۷$

$۳x = ۷ - ۵y \Rightarrow x = \frac{۶ + ۱ - ۶y + y}{۳} = ۲ - ۲y + \frac{۱ + y}{۳} \Rightarrow \frac{۱ + y}{۳} = m \Rightarrow m \in Z$

$y = ۳m - ۱ \;,\; x = ۴ - ۵m$

روش دوم:

$۱۸x + ۳۰y = ۴۲ \xrightarrow{\div ۶} ۳x + ۵y = ۷ \xrightarrow{\text{به پیمانه } ۳ \text{ می رویم}}$

$\not{۳}x + ۵y \equiv_{۳} ۷ \Rightarrow -y \equiv_{۳} ۱ \Rightarrow y \equiv_{۳} -۱ \longrightarrow y = ۳k - ۱$

۲۷۴

$۲^{۴} \equiv_{۱۷} -۱ \Rightarrow (۲^{۴})^{۶} \equiv_{۱۷} ۱ \Rightarrow ۲^{۲۵} \equiv_{۱۷} ۲$

۲۷۵

$c | a + b \Rightarrow a + b = cq \Rightarrow b = cq - a$

$(a,b) = ۱ \Rightarrow ma + nb = ۱ \Rightarrow ma + n(cq - a) = ۱ \qquad m , n \in Z$

$ma + ncq - na = ۱ \Rightarrow (m - n)a + (nq)c = ۱$

$m'a + n'c = ۱ \Rightarrow (a,c) = ۱$

۲۷۶

$x = ۲k + ۱ \Rightarrow x^۲ = (۲k + ۱)^۲ = ۴k^۲ + ۴k + ۱ = ۴k(k + ۱) + ۱ = ۴(۲q) + ۱ = ۸q + ۱$

۲۷۷

$pr = ۲q \Rightarrow ۵p = ۲q \;,\; ۲q - ۳p = ۱۲ \Rightarrow ۵p - ۳p = ۱۲ \Rightarrow p = ۶ \;,\; q = ۱۵$

۲۷۸

$|A_۱| = \left[\frac{۱۲۶۲}{۳}\right] = ۴۲۰$ و $|A_۲| = \left[\frac{۱۲۶۲}{۵}\right] = ۲۵۲$ و $|A_۱ \cap A_۲| = \left[\frac{۱۲۶۲}{۳ \times ۵}\right] = ۸۴$

$|A_۱ \cup A_۲| = |A_۱| + |A_۲| - |A_۱ \cap A_۲| = ۴۲۰ + ۲۵۲ - ۸۴ = ۵۸۸$

$|\overline{A_۱ \cup A_۲}| = ۱۲۶۲ - ۵۸۸ = ۶۷۴$

www.akoedu.ir

تلفن تماس: ۰۲۶۳۳۴۰۸۹۴۴

۲۷۹ $(۱۳,۱۷) = ۱ \Rightarrow$ ۱۱۰۰

$$۱۳x = ۱۰۰ - ۱۷y \Rightarrow x = \frac{۹۱ + ۹ - ۱۳y - ۴y}{۱۳} = ۷ - y + \frac{۹ - ۴y}{۱۳}$$

$$\frac{۹ - ۴y}{۱۳} = m \Rightarrow y = \frac{۹ - ۱۳m}{۴} = \frac{۸ + ۱ - ۱۲m - m}{۴} = ۲ - ۳m + \frac{۱ - m}{۴}$$

$$\frac{۱ - m}{۴} = k \Rightarrow m = ۱ - ۴k \Rightarrow y = ۱۳k - ۱ \text{ و } x = ۹ - ۱۷k \qquad k, m \in Z \text{ که}$$

روش دوم:

$$۱۳x + ۱۷y = ۱۰۰ \xrightarrow[\text{می رویم}]{\text{به پیمانه } ۱۳} \cancel{۱۳x} + ۱۷y \overset{۱۳}{\equiv} ۱۰۰$$

$$۴y \overset{۱۳}{\equiv} -۴ \xrightarrow{\div ۴} y \overset{۱۳}{\equiv} -۱ \Rightarrow y = ۱۳k - ۱$$

۲۸۰ $۲۷ \overset{۱۰}{\equiv} -۳ \to ۲۷^۲ \overset{۱۰}{\equiv} ۹ \to ۲۷^۴ \overset{۱۰}{\equiv} -۱ \to (۲۷^۲)^{۶۹۳} = ۲۷^{۱۳۸۶} \overset{۱۰}{\equiv} -۱ \overset{۱۰}{\equiv} ۹$

۲۸۱ $(a', b') = ۱$ که

$$a'd + b'd = ۱۰۲ \to d(a' + b') = ۱۰۲ \quad (I)$$

$$c = \frac{ab}{d} \to ۴۳۲d = a'db'd \to ۴۳۲ = a'b'd$$

$$\frac{d(a' + b')}{da'b'} = \frac{۱۰۲}{۴۳۲} \to \frac{a' + b'}{a'b'} = \frac{۱۷}{۷۲} \Rightarrow ۴۳۲ = ۷۲d \Rightarrow d = \frac{۴۳۲}{۷۲} = ۶$$

$$\begin{cases} a' + b' = ۱۷ \\ a'b' = ۷۲ \end{cases} \xrightarrow{d(a' + b') = ۱۰۲} d = ۶$$

۲۸۲ $(۲k)(۲k + ۲)(۲k + ۴) = ۲^۳ (k)(k + ۱)(k + ۲) = ۸ \times ۶k' = ۴۸k' = ۲۴k''$

۲۸۳

درجه	تعداد
۲	x
۳	y
	۷

$$x + y = ۷ \quad (I)$$

$$\sum \deg(V_i) = ۲q \Rightarrow ۲x + ۳y = ۱۸ \quad (II)$$

$$\Rightarrow (I) \text{ و } (II) \Rightarrow \begin{cases} x + y = ۷ \\ ۲x + ۳y = ۱۸ \end{cases} : x = ۳ , y = ۴$$

۲۸۴ کم‌ترین تعداد رنگ = ۴، مثلاً رئوس f , g قرمز و رئوس c , d آبی و رئوس b , e سبز و راس a زرد.

۲۸۵ بله چون دارای دور همیلتونی ad egbcfa است.

۲۸۶ دو مسیر از a به b : afcb / afb

www.akoedu.ir

تلفن تماس: ۰۲۶۳۳۴۰۸۹۴۴

۲۸۷ اگر $\sqrt{۲}$ گنگ نباشد پس گویاست بنابراین $\sqrt{۲}=\frac{p}{q}$ که در آن p و $q \neq ۰$ اعداد صحیحی می‌باشند که نسبت به هم اول هستند. (۰/۲۵)

$$\sqrt{۲}=\frac{p}{q} \Rightarrow ۲=\frac{p^۲}{q^۲} \Rightarrow ۲q^۲=p^۲ \Rightarrow p^۲ \text{ زوج است} \Rightarrow p \text{ زوج است} \Rightarrow p=۲k \ (۰/۵) \Rightarrow p^۲=۴k^۲$$

$$\Rightarrow ۲q^۲=۴k^۲ \Rightarrow q^۲=۲k^۲ \Rightarrow q^۲ \text{ زوج است} \ (۰/۲۵) \Rightarrow q \text{ زوج است}$$

با فرض اول بودن p و q به تناقض رسیده‌ایم یعنی حکم اولیه درست است. (۰/۲۵)

۲۸۸

۲۸۹

۲۹۰

۲۹۱

www.akoedu.ir

تلفن تماس: ۰۲۶۳۳۴۰۸۹۴۴

۲۹۲

۲۹۳

۲۹۴

۲۹۵ نادرست (۰/۲۵) مثال نقض (۰/۲۵)

۲۹۶ استنتاجی (۰/۲۵)

۲۹۷

۲۹۸

۲۹۹

۳۰۰

۳۰۱

www.akoedu.ir

تلفن تماس: ۰۲۶۳۳۴۰۸۹۴۴

۳۰۲
۳۰۳
۳۰۴
۳۰۵
۳۰۶
۳۰۷
۳۰۸
۳۰۹
۳۱۰

www.akoedu.ir

تلفن تماس: ۰۲۶۳۳۴۰۸۹۴۴

۳۱۱
۳۱۲
۳۱۳
۳۱۴
۳۱۵
۳۱۶
۳۱۷
۳۱۸

www.akoedu.ir

تلفن تماس: ۰۲۶۳۳۴۰۸۹۴۴

۳۱۹

۳۲۰

۳۲۱

۳۲۲

۳۲۳

۳۲۴

www.akoedu.ir

تلفن تماس: ۰۲۶۳۳۴۰۸۹۴۴

۳۲۵
۳۲۶
۳۲۷
۳۲۸
۳۲۹
۳۳۰
۳۳۱
۳۳۲

www.akoedu.ir

تلفن تماس: ۰۲۶۳۳۴۰۸۹۴۴

۳۳۳

۳۳۴

۳۳۵

۳۳۶

۳۳۷

www.akoedu.ir

تلفن تماس: ۰۲۶۳۳۴۰۸۹۴۴

۳۳۸
۳۳۹
۳۴۰
۳۴۱
۳۴۲
۳۴۳

www.akoedu.ir

تلفن تماس: ۰۲۶۳۳۴۰۸۹۴۴

۳۴۴
۳۴۵
۳۴۶
۳۴۷
۳۴۸
۳۴۹

www.akoedu.ir

تلفن تماس: ۰۲۶۳۳۴۰۸۹۴۴

۳۵۰

۳۵۱

۳۵۲

۳۵۳

۳۵۴

۳۵۵

۳۵۶

www.akoedu.ir

تلفن تماس: ۰۲۶۳۳۴۰۸۹۴۴

۳۵۷

۳۵۸

۳۵۹

۳۶۰

www.akoedu.ir

تلفن تماس: ۰۲۶۳۳۴۰۸۹۴۴

۳۶۱

۳۶۲

۳۶۳

۳۶۴

۳۶۵

www.akoedu.ir

تلفن تماس: ۰۲۶۳۳۴۰۸۹۴۴

۳۶۶
۳۶۷
۳۶۸
۳۶۹
۳۷۰
۳۷۱
۳۷۲
۳۷۳

www.akoedu.ir

تلفن تماس: ۰۲۶۳۳۴۰۸۹۴۴

۳۷۴
۳۷۵
۳۷۶
۳۷۷
۳۷۸
۳۷۹
۳۸۰

www.akoedu.ir

تلفن تماس: ۰۲۶۳۳۴۰۸۹۴۴

۳۸۱

۳۸۲

۳۸۳

۳۸۴

۳۸۵

www.akoedu.ir

تلفن تماس: ۰۲۶۳۳۴۰۸۹۴۴

۳۸۶

۳۸۷

۳۸۸

۳۸۹

۳۹۰

۳۹۱

۳۹۲

www.akoedu.ir

تلفن تماس: ۰۲۶۳۳۴۰۸۹۴۴

۳۹۳

۳۹۴

۳۹۵

www.akoedu.ir

تلفن تماس: ۰۲۶۳۳۴۰۸۹۴۴