AKO

گروه مشاوره و برنامه ریزی

WWW.AKOEDU.IR

اولین و با کیفیت ترین

آکادمی کنکور در ایران

کلاس های vip کنکور

جهت دریافت برنامه ی شخصی سازی شده یک هفته ای رایگان کلیک کنید و یا به شماره ی ۰۹۰۲۵۶۴۶۲۳۴ عدد ۱ را ارسال کنید.

تلفن تماس: ۰۲۶۳۳۴۰۸۹۴۴

۲۵۰ نمونه سوال تشریحی هندسه ۲ – نیمسال دوم

۱ حاده (تند)، قائمه یا منفرجه (باز) بودن زاویه‌ی A را در هر یک از مثلث‌های زیر تعیین کنید.

الف) $AB = ۱۰ \ , \ AC = ۶ \ , \ BC = ۹$

ب) $AB = ۸ \ , \ AC = ۴ \ , \ BC = ۹$

پ) $AB = ۸ \ , \ AC = ۱۵ \ , \ BC = ۱۷$

۲ به کمک قضیه‌ی کسینوس‌ها ثابت کنید در مثلث ABC:

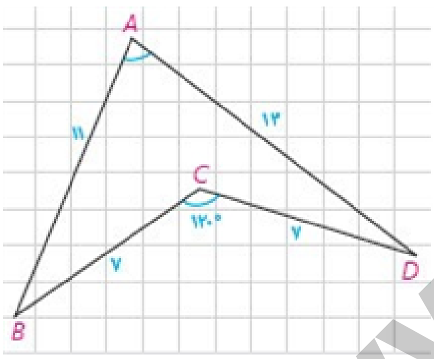
الف) $\hat{A} = ۹۰°$ اگر و تنها اگر $a^۲ > b^۲ + c^۲$

ب) $\hat{A} < ۹۰°$ اگر و تنها اگر $a^۲ < b^۲ + c^۲$

پ) $\hat{A} = ۹۰°$ اگر و تنها اگر $a^۲ = b^۲ + c^۲$

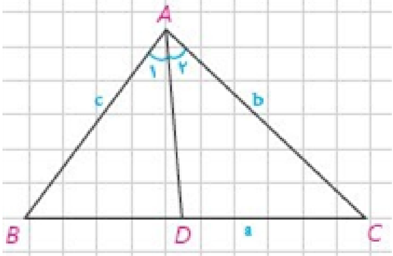
۳ ثابت کنید مساحت هر متوازی‌الاضلاع برابر است با حاصل‌ضرب دو ضلع مجاور در سینوس زاویه‌ی بین آن دو ضلع.

۴ در شکل، اولاً اندازه‌ی زاویه‌ی A را به دست آورید.
ثانیاً مساحت چهارضلعی ABCD را بیابید.



۵ در مثلث ABC به اضلاع ۵ و ۶ و ۷ سانتی‌متر، نقطه‌ای که از اضلاع به طول‌های ۵ و ۶، به فاصله‌ی ۲ و ۳ سانتی‌متر است از ضلع بزرگ‌تر چه فاصله‌ای دارد؟

۶ در شکل زیر AD نیمساز زاویه‌ی $\hat{A}$ است.
با پر کردن جاهای خالی، دستوری دیگر برای محاسبه‌ی طول نیمساز زاویه‌ی A به دست آورید.



$$S_{ABC} = S_{ABD} + S_{ACD} \Rightarrow \frac{۱}{۲}AB.\,AC.\,\sin A$$

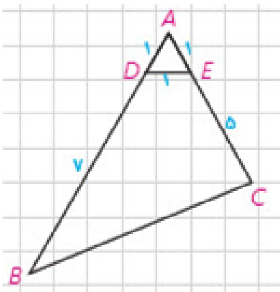
$$= \frac{۱}{۲}\ldots \times \ldots \times \sin\frac{A}{۲} + \frac{۱}{۲}\ldots \times \ldots \times \sin\frac{A}{۲}$$

$$\Rightarrow AB.\,AC.\,\sin A = AD.\,\sin\frac{A}{۲}(\ldots + \ldots)$$

$$\Rightarrow AD = \frac{AB.\,AC.\,\sin A}{(\ldots + \ldots)\,\sin\frac{A}{۲}} = \frac{۲AB.\,AC.\,\sin\frac{A}{۲}\cos\frac{A}{۲}}{(\ldots + \ldots)\sin\frac{A}{۲}} \Rightarrow AD = \ldots$$

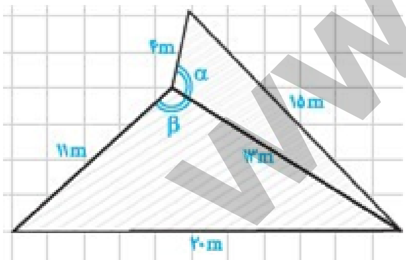
$$\Rightarrow (\text{نیمساز راس } A)\ d_a = \frac{۲bc.\,\cos\frac{A}{۲}}{b + c}$$

۷ در شکل مقابل، اولاً طول BC را به دست آورید. ثانیاً مساحت چهارضلعی DECB را بیابید.

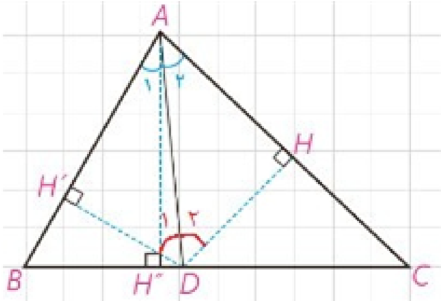


۸ دستور محاسبه‌ی مساحت مثلث متساوی‌الاضلاع به ضلع a را به کمک دستور هرون به دست آورید.

۹ دو زمین کوچک به شکل مثلث با یک دیوار به طول ۱۳ متر مطابق شکل از هم جدا شده‌اند. ابعاد زمین‌ها هم در شکل مشخص شده‌اند. اگر با برداشتن دیوار، دو زمین به یک زمین تبدیل شود، مساحت آن چه‌قدر می‌شود؟
نشان دهید دیوار مشترک با اضلاع ۴ متری و ۱۱ متری زاویه‌های برابر می‌سازد. $(\alpha = \beta)$



۱۰ در مثلث ABC، $AB = ۱۰$، $AC = ۶$ و $\hat{A} = ۶۰^\circ$. الف) طول BC را به دست آورید. ب) مساحت مثلث را تعیین کنید. پ) مقدار $\sin B$ را پیدا کنید.



۱۱ با پر کردن جاهای خالی با فرض این‌که در شکل مقابل AD نیمساز زاویه‌ی $\hat{A}$ است، روش دیگری برای اثبات قضیه‌ی نیمسازهای زوایای داخلی ارائه کنید:

الف) چرا $DH = DH'$؟

$$\frac{S_{ABD}}{S_{ACD}} = \frac{\frac{۱}{۲}DH' \times \dots}{\frac{۱}{۲}DH \times \dots} = \frac{\dots}{\dots} \quad (۱)$$

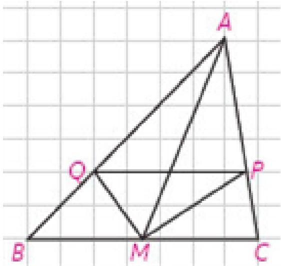
ب)

$$\frac{S_{ABD}}{S_{ACD}} = \frac{\frac{۱}{۲}BD \times \dots}{\frac{۱}{۲}CD \times \dots} = \frac{\dots}{\dots} \quad (۲)$$

از مقایسه‌ی ۱ و ۲ نتیجه می‌شود:

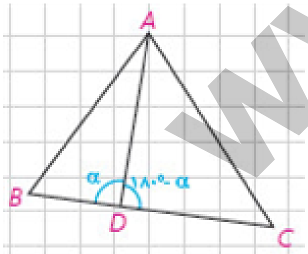
$$\frac{\dots}{\dots} = \frac{\dots}{\dots}$$

۱۲ در مثلث ABC، $AB = ۷$ و $AC = ۴$ و $BC = ۱۰$ است. طول نیمساز زاویه‌ی داخلی C را به دست آورید.



۱۳ در مثلث ABC، M وسط BC و MP و MQ نیمسازهای زوایای AMC و AMB هستند؛ ثابت کنید: $PQ \parallel BC$

۱۴ در مثلث متساوی‌الاضلاع ABC به ضلع ۸ واحد، نقطه‌ی D، که به فاصله‌ی ۷ واحد از رأس A قرار دارد از B و C چه فاصله‌ای دارد؟ $(CD > BD)$

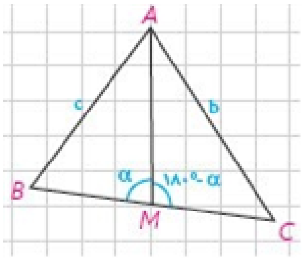


۱۵ در مثلث ABC، نقطه‌ی دلخواه D روی BC مفروض است. به کمک قضیه‌ی کسینوس‌ها در دو مثلث ADB و ADC درستی تساوی زیر را ثابت کنید:

$$AB^۲ . DC + AC^۲ . DB = AD^۲ . BC + DB . DC . BC$$ (قضیه‌ی استوارت)

به کمک قضیه‌ی استوارت، درستی قضیه‌ی میانه‌ها را نتیجه‌گیری کنید.

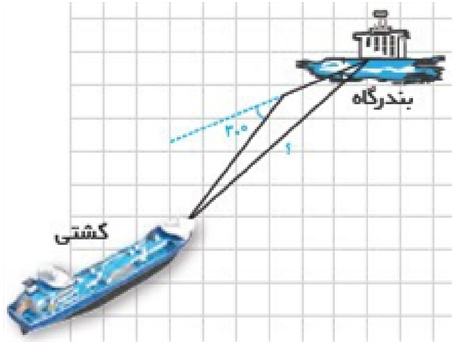
تلفن تماس: ۰۲۶۳۳۴۰۸۹۴۴



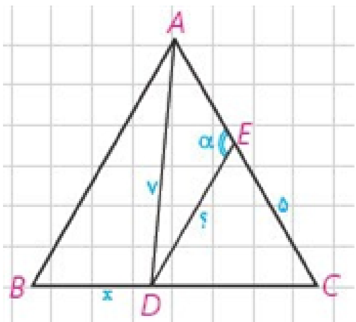
۱۶ در مثلث ABC، میانه‌ی AM را رسم کرده‌ایم $\left(MB = MC = \frac{a}{۲}\right)$. با نوشتن قضیه‌ی کسینوس‌ها در دو مثلث AMB و AMC، $b^۲$ و $c^۲$ را محاسبه، و با جمع کردن دو تساوی حاصل، درستی تساوی زیر را ثابت کنید:

$$b^۲ + c^۲ = ۲AM^۲ + \frac{a^۲}{۲}$$ (قضیه‌ی میانه‌ها)

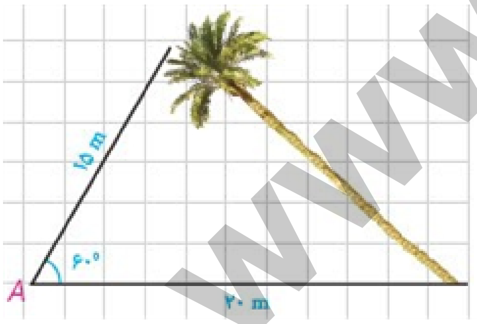
در حالت خاص $AB = ۴$ و $AC = ۶$ و $BC = ۸$، طول میانه AM را به دست آورید.



۱۷ یک کشتی از یک نقطه با سرعت ۶۰ کیلومتر در ساعت در یک جهت در حرکت است و یک ساعت بعد با °۳۰ انحراف به راست با سرعت ۴۰ کیلومتر در ساعت به حرکت خود ادامه می‌دهد و یک ساعت و نیم پس از آغاز حرکتش در یک بندرگاه پهلو می‌گیرد. فاصله‌ی بندرگاه از مبدأ حرکت کشتی چند کیلومتر است؟



۱۸ در مثلث متساوی‌الاضلاع ABC به ضلع ۸ واحد، نقطه‌ی D، که به فاصله‌ی ۷ واحد از رأس A قرار دارد از B و C چه فاصله‌ای دارد؟ $(CD > BD)$ نقطه‌ی E، که به فاصله‌ی ۵ واحد از C قرار دارد از D به چه فاصله‌ای است؟ اندازه‌ی زاویه‌ی AED چند درجه است؟



۱۹ یک درخت کج از نقطه‌ی A روی زمین، که در فاصله‌ی ۱۵ متری از نوک درخت است به زاویه‌ی °۶۰ دیده می‌شود. اگر فاصله‌ی A تا پای درخت ۲۰ متر باشد، مطلوب است:

الف) طول درخت

ب) سینوس زاویه‌ای که درخت با سطح زمین می‌سازد.

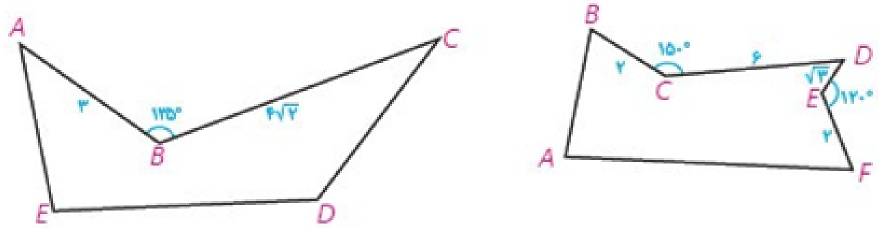
پ) فاصله‌ی نوک درخت از زمین

۲۰ ثابت کنید در هر مثلث قائم‌الزاویه‌ی $ABC\left(\hat{A} = ۹۰°\right)$ با ارتفاع $AH = h_a$ داریم:

$$\frac{۱}{h_a^۲} = \frac{۱}{b^۲} + \frac{۱}{c^۲}$$

تلفن تماس: ۰۲۶۳۳۴۰۸۹۴۴

۲۱ زمینی به شکل زیر داریم، می‌خواهیم بدون آن‌که محیط این زمین تغیر کند مساحتش را افزایش دهیم در هر مورد میزان افزایش مساحت را حساب کنید.

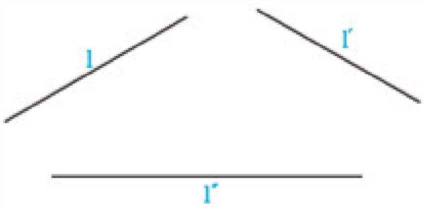


۲۲ فرض کنید G محل برخورد میانه‌های مثلث ABC (مرکز ثقل آن) باشد و مثلث A'B'C' مجانس مثلث ABC در تجانس به مرکز G و نسبت $K = -\frac{۱}{۲}$ باشد.

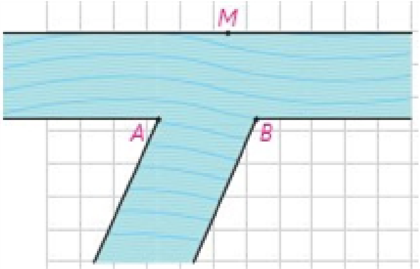
الف) جایگاه رأس‌های A' و B' و C' نسبت به مثلث ABC کجاست؟

ب) مساحت مثلث A'B'C' چه کسری از مساحت مثلث ABC است؟

۲۳ سه خط دو به دو ناموازی l و l' و l" در صفحه مفروض‌اند. پاره‌خطی به طول ۵ سانتی‌متر رسم کنید که دو سر آن روی l و l'، و موازی l" باشد.

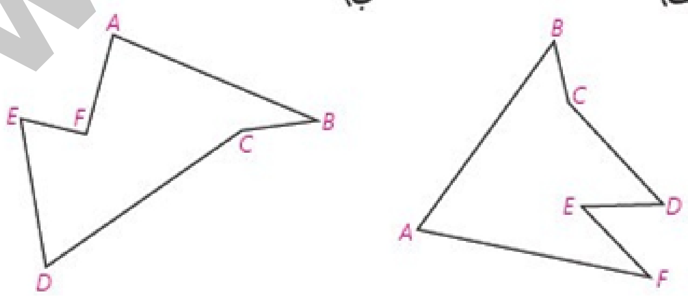


۲۴ می‌خواهیم کنار رودخانه‌ها، ۳ اسکله بسازیم. جای ۲ اسکله‌ی A و B مطابق شکل مشخص است. اسکله‌ی M را در چه نقطه‌ای از ساحل رودخانه بسازیم که قایق‌ها هنگام طی مسیر MABM کوتاه‌ترین مسیر را طی کنند؟

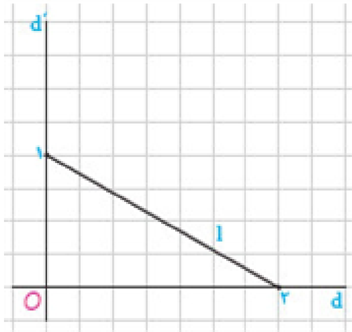


۲۵ دور زمین‌هایی مطابق شکل حصارکشی شده است. چطور می‌توان بدون کم و زیاد کردن حصارها، مساحت زمین را افزایش داد؟

ب) الف)



تلفن تماس: ۰۲٦۳۳٤۰۸۹٤٤



۲۶ در شکل روبه‌رو اگر خط l را در تجانس به مرکز O و نسبت تجانس $\frac{۷}{۲}$ تصویر کنیم و آن‌را 'l بنامیم، مساحت بین خط l و 'l و خطوط d و 'd چه‌قدر است؟

۲۷ یک مربع را در تجانسی با نسبت تجانس $\frac{۲}{۳}$ و به مرکز محل تلاقی قطرها تصویر کرده‌ایم. اگر مساحت بین مربع و تصویرش ۵ باشد، محیط مربع اولیه را محاسبه کنید.

۲۸ دایره $C(O , R)$ و نقطه‌ی M خارج این دایره مفروض است. مجانس این دایره را نسبت به نقطه‌ی M در هر حالت رسم کنید.

الف) $k = ۲$

ب) $k = -۲$

پ) $k = \frac{۱}{۲}$

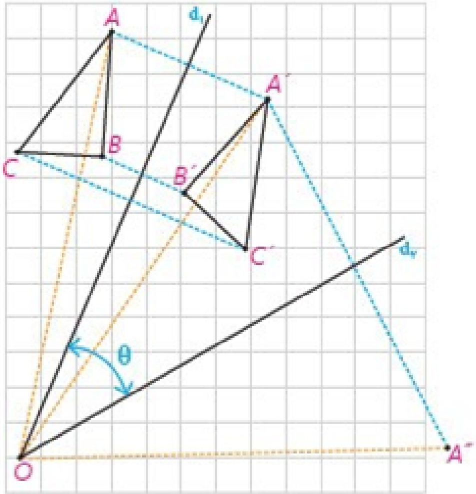
۲۹ در تجانسی با نسبت $۰ < k$ و مرکز تجانس O (نقطه O را خارج AB درنظر بگیرید) نشان دهید:

الف) تجانس شیب خط را حفظ می‌کند.

ب) تجانس زاویه بین خطوط را حفظ می‌کند.

۳۰ نقطه‌ی 'A تصویر نقطه‌ی A در بازتاب نسبت به خط l است. اگر $AA' = ۱۶$ و نقطه O روی خط l و $OA = ۱۰$ باشد، فاصله‌ی نقطه‌ی A از خط 'OA چه‌قدر است؟

۳۱ نقطه‌ی A به فاصله‌ی $۲\sqrt{۶}$ از خط d قرار دارد. تصویر نقطه‌ی A را تحت بازتاب نسبت به خط d، نقطه‌ی 'A می‌نامیم. نقطه‌ی A را حول نقطه‌ی 'A به اندازه‌ی ۱۲۰ درجه دوران می‌دهیم تا نقطه‌ی "A حاصل شود. طول پاره‌خط "AA را محاسبه کنید.

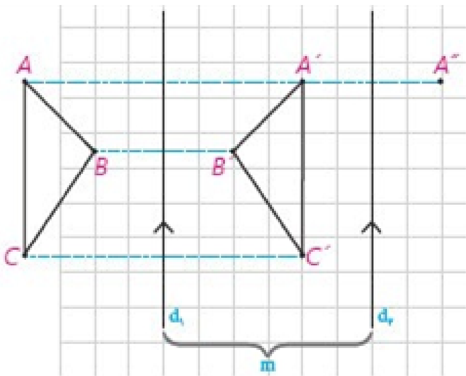


۳۲ در شکل، دو خط d_1 و d_2 با زاویه‌ی θ یک‌دیگر را قطع کرده‌اند. مثلث $A'\overset{\triangle}{B}'C'$ بازتاب مثلث $A\overset{\triangle}{B}C$ نسبت به خط d_1 است. بازتاب مثلث $A'\overset{\triangle}{B}'C'$ را نسبت به خط d_2 رسم کنید و آن‌را $A''\overset{\triangle}{B}''C''$ بنامید.

الف) نشان دهید: $\widehat{AOA''} = 2\theta$

ب) اندازه‌ی $\widehat{COC''}$ و $\widehat{BOB''}$ چه‌قدر است؟

پ) با چه تبدیلی می‌توان مثلث $A''\overset{\triangle}{B}''C''$ را تصویر $A\overset{\triangle}{B}C$ دانست؟ چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟



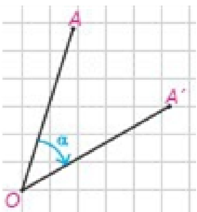
۳۳ در شکل، d_1 به موازات d_2 و به فاصله‌ی m از آن قرار دارد و مثلث $A'\overset{\triangle}{B}'C'$ بازتاب مثلث $A\overset{\triangle}{B}C$ نسبت به خط d_1 است. بازتاب مثلث $A'\overset{\triangle}{B}'C'$ را نسبت به خط d_2 رسم کنید و آن‌را $A''\overset{\triangle}{B}''C''$ بنامید.

الف) نشان دهید: $AA' = 2m$

ب) اندازه‌ی BB'' و CC'' چه‌قدر است؟

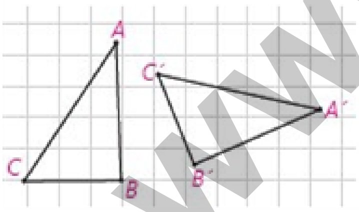
پ) با چه تبدیلی می‌توان مثلث $A''\overset{\triangle}{B}''C''$ را تصویر $A\overset{\triangle}{B}C$ دانست؟ چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟

۳۴ به سؤالات زیر پاسخ دهید.



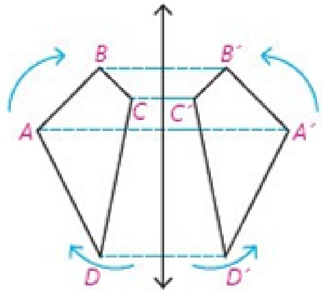
الف) در شکل مقابل نقطه‌ی A' دوران یافته‌ی نقطه‌ی A در دوران به مرکز O و زاویه‌ی α است. نشان دهید عمودمنصف AA' از نقطه‌ی O می‌گذرد.

ب) اگر بدانیم $A'\overset{\triangle}{B}'C$ دوران یافته‌ی $A\overset{\triangle}{B}C$ است، چگونه می‌توان مرکز دوران را مشخص کرد؟



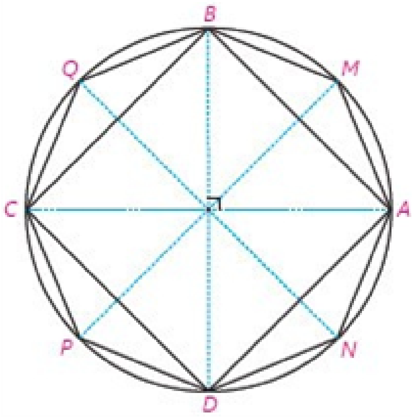
تلفن تماس: ۰۲۶۳۳۴۰۸۹۴۴

۳۵ در شکل زیر چهارضلعی $A'B'C'D'$ تصویر چهارضعلی محدب $ABCD$ تحت بازتاب است. در شکل اولیه وقتی به ترتیب A به B و C و D می‌رویم، جهت حرکت، موافق چند حرکت عقربه‌های ساعت است. جهت حرکت در بازتاب این نقاط چگونه است؟ آیا می‌توان گفت بازتاب، جهت شکل را حفظ می‌کند؟



۳۶ در حالتی‌که پاره‌خط AB در راستای عمود بر خط بازتاب قرار دارد، ثابت کنید که اگر $A'B'$ بازتاب AB باشد، AB و $A'B'$ هم‌اندازه‌اند.

۳۷ دو قطر عمود بر هم AC و BD از یک دایره را رسم می‌کنیم ؛ چهارضلعی $ABCD$ یک مربع است ؛ چرا؟ عمودمنصف‌های ضلع‌های این مربع را رسم کنید تا دایره را قطع کنند. نشان دهید هشت‌ضلعی $AMBQCPDN$ منتظم است.



۳۸ شش‌ضلعی منتظم $ABCDEF$ مفروض است با امتداد دادن اضلاع شش‌ضلعی، مطابق شکل، مثلث MNP را ساخته‌ایم.

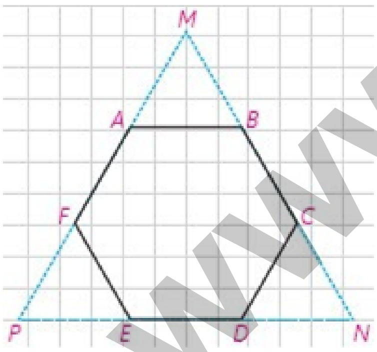
الف) نشان دهید MNP متساوی‌الاضلاع است.

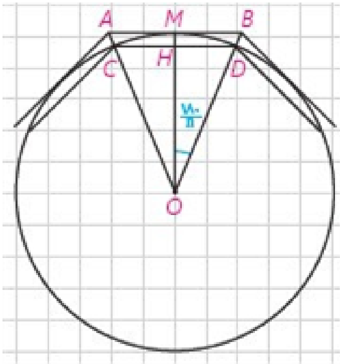
ب) نشان دهید مساحت شش‌ضلعی، دو سوم مساحت مثلث MNP است.

پ) از نقطه‌ی دلخواه T درون شش‌ضلعی عمودهای TH، TH' و TH'' را به ترتیب بر BC، ED و AF رسم کنید. مجموع طول‌های این سه عمود با کدام جزء از مثلث MNP برابر است؟

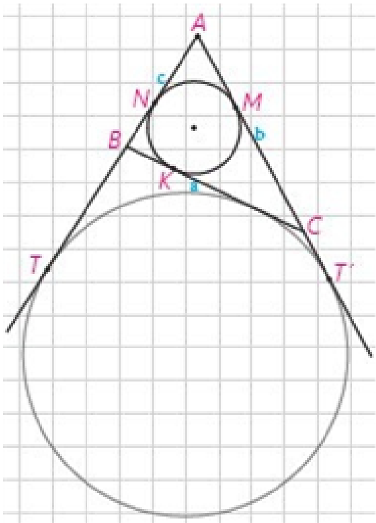
ت) مجموع مساحت‌های مثلث‌های TBC، TDE و TAF چه کسری از مساحت مثلث MNP است؟ نشان دهید:

$S_{TBC} + S_{TDE} + S_{TAF} = S_{TAB} + S_{TEF} + S_{TCD}$





۳۹) یک دایره به شعاع r و n ضلعی‌های منتظم محاطی و محیطی در آن درنظر بگیرید. نشان دهید اگر AB و CD اندازه‌های ضلعی‌های n ضلعی منتظم محیطی و محاطی باشند، آن‌گاه $AB = ۲r\,tg\frac{۱۸۰}{n}$ و $CD = ۲r\,Sin\frac{۱۸۰}{n}$.



۴۰) اگر نقاط تماس دایره محاطی داخلی مثلث ABC با اضلاع آن M، N و K باشند و T و T' نقطه‌های تماس دایره محاطی خارجی با خط‌های شامل دو ضلع باشند، نشان دهید:

$AM = AN = P - a$

$BN = BK = P - b\,,\ CM = CK = P - c$

$AT = AT' = P$

۴۱) الف) اگر r_a , r_b , r_c شعاع‌های سه دایره محاطی خارجی مثلث و r شعاع دایره محاطی داخلی باشد، نشان دهید:

$$\frac{۱}{r_a} + \frac{۱}{r_B} + \frac{۱}{r_c} = \frac{۱}{r}$$

ب) به همین ترتیب اگر h_a، h_b و h_c اندازه‌های سه ارتفاع باشند، نشان دهید:

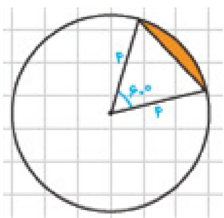
$$\frac{۱}{h_a} + \frac{۱}{h_b} + \frac{۱}{h_c} = \frac{۱}{r}$$

۴۲) یک ذوزنقه، هم محیطی است و هم محاطی. ثابت کنید مساحت این ذوزنقه برابر است با میانگین حسابی دو قاعده آن ضرب در میانگین هندسی آن‌ها.

۴۳) ثابت کنید عمودمنصف یک ضلع هر مثلث و نیمساز زاویه‌ی مقابل به آن ضلع، یک‌دیگر را روی دایره‌ی محیطی مثلث قطع می‌کنند.

۴۴) مساحت مثلث متساوی‌الاضلاعی را به دست آورید که در دایره‌ای به شعاع R محاط شده باشد.

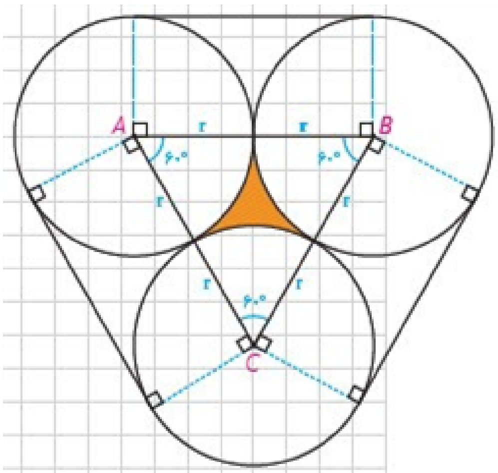
۴۵) ثابت کنید یک ذوزنقه، محاطی است، اگر و تنها اگر متساوی‌الساقین باشد.



۴۶) مطابق شکل دایره به شعاع ۴، مساحت ناحیه سایه زده را محاسبه کنید. این ناحیه، یک قطعه دایره نام دارد.

۴۷) طول خط المرکزین دو دایره‌ی مماس درونی ۲ سانتی‌متر و مساحت ناحیه‌ی محدود بین آن‌ها 16π سانتی‌متر مربع است. طول شعاع‌های دو دایره را به دست آورید.

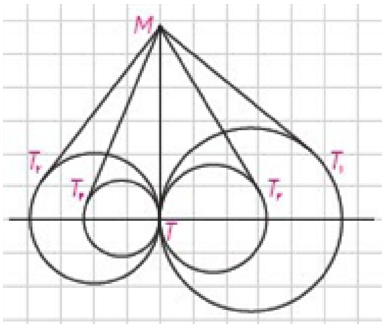
۴۸) سه دایره به شعاع‌های برابر r دو به دو بر هم مماس‌اند. مطابق شکل مقابل این سه دایره به وسیله‌ی نخی بسته شده‌اند. نشان دهید طول این نخ برابر $6r + 2\pi r$. همچنین نشان دهید مساحت ناحیه محدود به سه دایره برابر $r^2\left(\sqrt{3} - \frac{\pi}{2}\right)$ است.



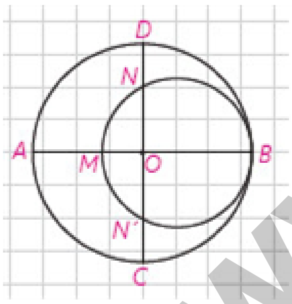
۴۹) طول شعاع‌های دو دایره‌ی متخارج را به دست آورید که طول مماس مشترک خارجی آن‌ها مساوی $3\sqrt{7}$ و طول مماس مشترک داخلی آن‌ها $\sqrt{15}$ و طول خط المرکزین آن‌ها مساوی ۸ واحد است.

۵۰) مطابق شکل مقابل، تمام دایره‌ها در نقطه T بر هم مماس‌اند و از نقطه M روی مماس مشترک آن‌ها بر دایره‌ها مماس رسم کرده‌ایم؛ ثابت کنید

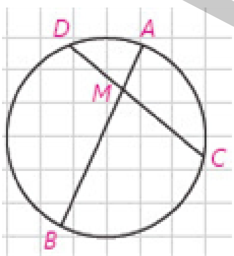
$$MT_1 = MT_2 = MT_3 = MT_4 = \dots$$



۵۱) در شکل مقابل، دو دایره بر هم مماس و دو قطر AB و CD از دایره بزرگ‌تر بر هم عمودند. اگر $AM = 16$ و $ND = 10$، شعاع‌های دو دایره را پیدا کنید.

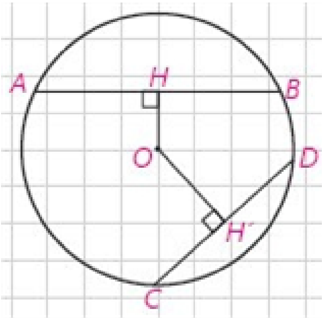


۵۲) در دایره‌ی $C(O , R)$ وتر AB، وتر CD به طول ۹ سانتی‌متر را به نسبت ۱ به ۲ تقسیم کرده است. اگر $AB = 11\,cm$، آن‌گاه وتر CD وتر AB را به چه نسبتی قطع می‌کند؟



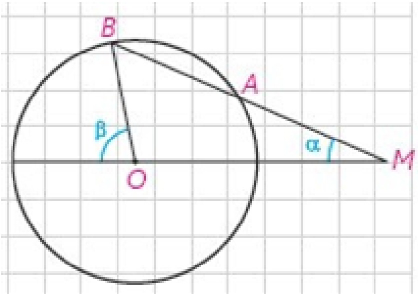
تلفن تماس: ۰۲۶۳۳۴۰۸۹۴۴

۵۳ در دایره‌ی $C(O , R)$ نشان دهید $AB > CD$ اگر و تنها اگر $OH < OH'$
(OH و OH' فاصله‌ی O از دو وتر AB و CD هستند.)

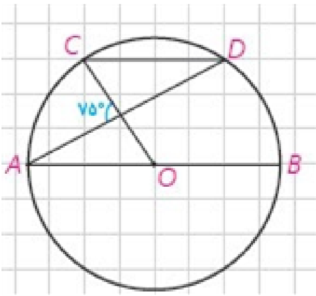


۵۴ در دایره‌ی $C(O , R)$، $\overset{\frown}{AB} = ۶۰^\circ$ و $AB = ۱۰$ فاصله‌ی O از وتر AB را به دست آورید.

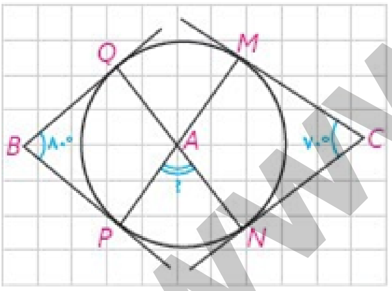
۵۵ دایره‌ی $C(O , R)$ مفروض است. از نقطه‌ی M در خارج دایره خطی چنان رسم کرده‌ایم که دایره را در دو نقطه‌ی A و B قطع کرده است و $MA = R$؛ نشان دهید: $\beta = ۳\alpha$



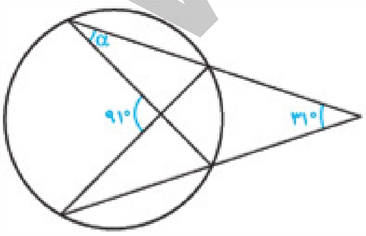
۵۶ در دایره رسم شده شکل مقابل $AB \parallel CD$، اندازه کمان CD را به دست آورید.



۵۷ در شکل اضلاع زاویه‌های B و C بر دایره مماس‌اند. اندازه‌ی زاویه‌ی $\hat{A}$ چند درجه است؟

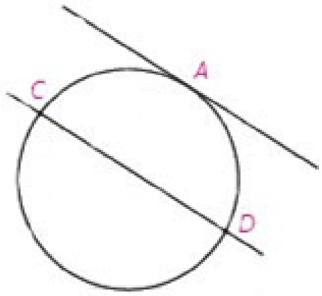


۵۸ در شکل مقابل اندازه‌ی زاویه‌ی α را به دست آورید.

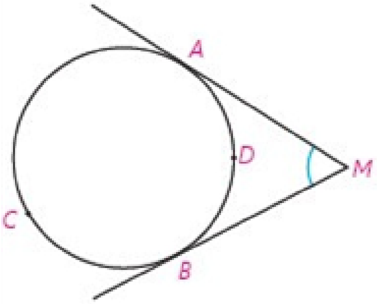


تلفن تماس: ۰۲۶۳۳۴۰۸۹۴۴

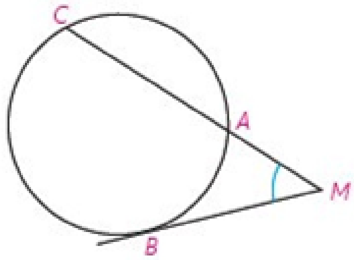
۵۹ در شکل‌های زیر ثابت کنید:



الف) $d_2 \parallel d_1$، ثابت کنید $\overset{\frown}{AC} = \overset{\frown}{AD}$

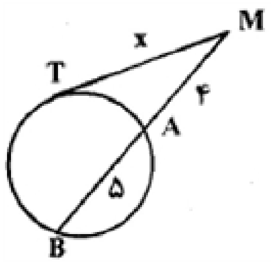


ب) $\widehat{M} = \dfrac{\overset{\frown}{ACB} - \overset{\frown}{ADB}}{2}$



پ) $\widehat{M} = \dfrac{\overset{\frown}{BC} - \overset{\frown}{AB}}{2}$

۶۰ در شکل زیر مقدار x را به دست آورید.



۶۱ قضیه: ثابت کنید طول مماس‌های رسم شده بر یک دایره از هر نقطه‌ی خارج آن با هم برابرند.

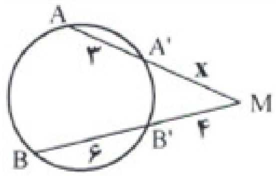
۶۲ ثابت کنید در یک دایره، کمان‌های نظیر دو وتر مساوی باهم برابرند.

۶۳ دو دایره به شعاع ۱ و ۴ سانتی‌متر، مماس برون هستند. مقدار x را چنان بیابید که اندازه مماس مشترک خارجی آن‌ها برابر ۱ + ۳x باشد.

۶۴ قضیه: ثابت کنید اندازه زاویه‌ای که از برخورد دو وتر در یک دایره ایجاد می‌شود، برابر نصف مجموع اندازه دو کمانی از دایره است که به ضلع‌ها و امتداد ضلع‌های آن زاویه محدودند.

تلفن تماس: ۰۲۶۳۳۴۰۸۹۴۴

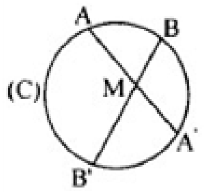
۶۵ در شکل زیر مقدار x را محاسبه کنید.



۶۶ قضیه: ثابت کنید در یک دایره، از دو وتر نابرابر، آن‌که بزرگ‌تر است، به مرکز دایره نزدیک‌تر است، و به عکس.

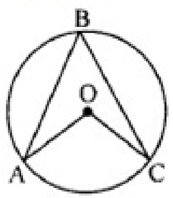
۶۷ مقدار x را چنان بیابید که اندازه مماس مشترک داخلی دو دایره به شعاع‌های ۲ و ۳ و خط المرکزین $d = ۱۳$، برابر $۸ - ۵x$ باشد.

۶۸ قضیه: از نقطه M واقع در داخل دایره (C) دو وتر دلخواه AA' و BB' رسم شده‌اند، ثابت کنید:



$$MA \times MA' = MB \times MB'$$

۶۹ در دایره به مرکز O ، اگر $A\hat{O}C = (۳\alpha + ۱۲)^\circ$ و $A\hat{B}C = (\alpha + ۱۶)^\circ$ باشد، مقدار α و اندازه زاویه مرکزی AOC و محاطی ABC را محاسبه کنید.



۷۰ در سوالات زیر گزینه درست را انتخاب کنید:

الف) مرکز دایره محاطی داخلی هر مثلث، محل برخورد .... آن مثلث است.

۱) ارتفاع‌های اضلاع ۲) عمود منصف‌های اضلاع

۳) نیم‌سازهای زاویه‌های درونی ۴) میانه‌های اضلاع

ب) مرکز دایره محیطی هر مثلث، محل برخورد .... آن مثلث است.

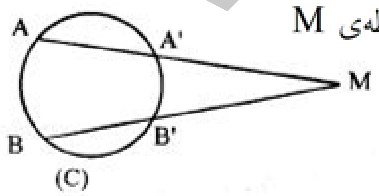
۱) ارتفاع‌های اضلاع ۲) عمودمنصف‌های اضلاع

۳) نیم‌سازهای زاویه‌های درونی ۴) میانه‌های اضلاع

۷۱ دایره ی C (O , R) و نقطه‌ی M واقع در خارج این دایره داده شده‌اند، از نقطه‌ی M بر این دایره دو مماس رسم کنید. (مراحل رسم را توضیح دهید.)

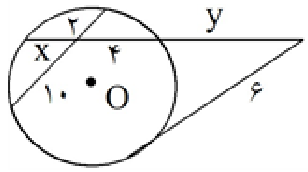
۷۲ ثابت کنید اگر امتداد وترهای AA' و BB' از دایره‌ی (C) یکدیگر را در نقطه‌ی M قطع کنند. آن‌گاه:

$$MA \times MA' = MB \times MB'$$

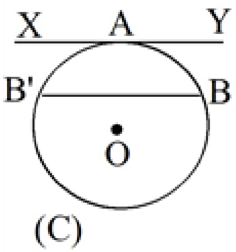


۷۳ «چند ضلعی محاطی» را تعریف کنید:

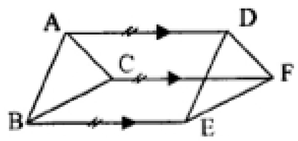
۷۴ در شکل مقابل مقدارهای x و y را به‌دست آورید.



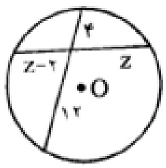
۷۵ خط XY در نقطه‌ی A بر دایره‌ی (C) مماس است، وتر BB' از دایره را موازی XY رسم کرده‌ایم. ثابت کنید: $\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{AB'}$



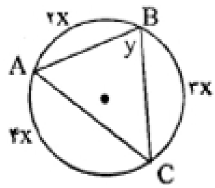
۷۶ پاره‌خطهای AD، BE و CF مساوی و موازی‌اند.
با استفاده از ویژگی‌های تبدیل انتقال ثابت کنید: $\overset{\triangle}{ABC} \cong \overset{\triangle}{DEF}$



۷۷ با توجه به شکل زیر اندازه‌ی z را تعیین کنید.



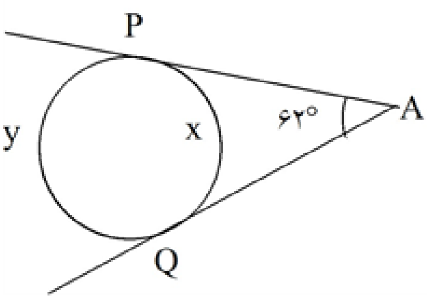
۷۸ با توجه به شکل زیر اندازه‌ی x و y را تعیین کنید.



۷۹ قضیه: ثابت کنید اگر از یک نقطه، یک مماس و یک قاطع نسبت به یک دایره رسم کنیم، قطعه‌ای از خط مماس محصور بین آن نقطه و نقطه‌ی مماس، واسطه‌ی هندسی بین دوقطعه‌ی قاطع است.

۸۰ درستی یا نادرستی جمله زیر را مشخص کنید.
مرکز دایره محیطی هر مثلث محل برخورد نیمسازهای زاویه‌های درونی مثلث است.

۸۱ با توجه به شکل x و y را بیابید.



تلفن تماس: ۰۲۶۳۳۴۰۸۹۴۴

۸۲ جای خالی را به طور مناسب پر کنید.

از هر نقطه خارج یک دایره فقط .... بر آن دایره می‌توان رسم نمود.

۸۳ در مثلث ABC میانه AM و نیمسازهای دو زاویه $A\hat{M}B$ و $A\hat{M}C$ را رسم کنید، این دو نیم‌ساز اضلاع AB و AC را قطع می‌کنند، این نقاط را به ترتیب P و Q بنامید. سپس ثابت کنید دو خط PQ و BC با هم موازیند.

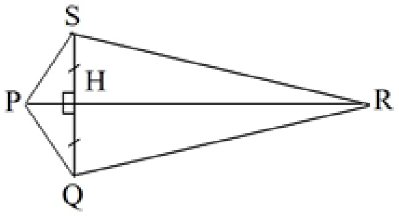
۸۴ درستی یا نادرستی عبارت زیر را تعیین کنید:

در هر دو دایره مماس مشترک‌های خارجی و خط المرکزین همرسند.

۸۵ درستی یا نادرستی عبارت زیر را تعیین کنید:

در هر چهارضلعی، اگر مجموع اضلاع مقابل یکسان باشد، آن چهارضلعی محیطی است.

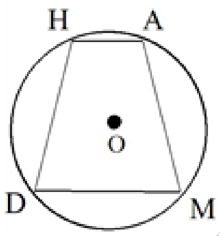
۸۶ در شکل روبه‌رو PR عمودمنصف QS است. با استفاده از ویژگی‌های تبدیل‌ها ثابت کنید: $S\hat{P}R = Q\hat{P}R$



۸۷ قضیه: ثابت کنید اگر در یک چهارضلعی، زاویه‌های روبه‌رو مکمل یک‌دیگر باشند. آن چهارضلعی محاطی است.

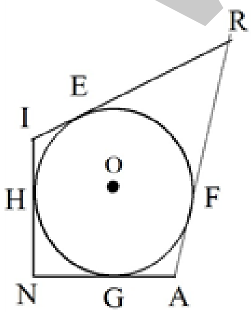
۸۸ دو دایره به شعاع‌های ۲ سانتی‌متر و ۷ سانتی‌متر و خط المرکزین برابر $2x + 1$ سانتی‌متر مفروضند. اگر اندازه‌ی مماس مشترک خارجی آن‌ها برابر $2x$ سانتی‌متر باشد، مقدار x را محاسبه کنید.

۸۹ در دایره $C(O,R)$ چهار ضلعی $HAMD$ محاط شده است و داریم $AM = HD$. نشان دهید: $AH \parallel MD$



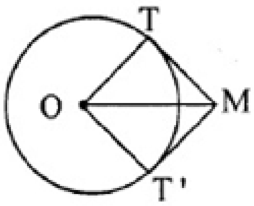
۹۰ ضلع‌های چهارضلعی محیطی $IRAN$ بر دایره مماس‌اند. (شکل روبه‌رو)

ثابت کنید: $IR + AN = RA + NI$



۹۱ اندازه‌ی سه ضلع مثلثی $AB = ۱۶$ و $AC = ۲۲$ و $BC = ۱۹$ ، سانتی‌متر هستند. اندازه‌ی پاره‌خط هایی که نیم‌ساز درونی زاویه‌ی $\hat{A}$ بر ضلع مقابل آن پدید می‌آورد را تعیین کنید.

۹۲ زاویه‌ی ظلی TAB در دایره‌ای به مرکز O داده شده است.



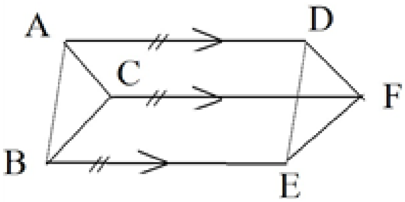
با استفاده از ویژگی قطر عمود بر وتر، ثابت کنید که $T\hat{A}B = \frac{\overset{\frown}{AB}}{۲}$

۹۳ دایره‌ی $C(O,۵)$ و نقطه‌ی M به فاصله‌ی $۵\sqrt{۲}$ از مرکز دایره‌ی C داده شده است. MT و MT' در نقاط T و T' بر این دایره مماسند.

الف) طول مماس‌های MT و MT' را به‌دست آورید.

ب) نوع چهارضلعی OTMT' را با ذکر دلیل مشخص کنید.

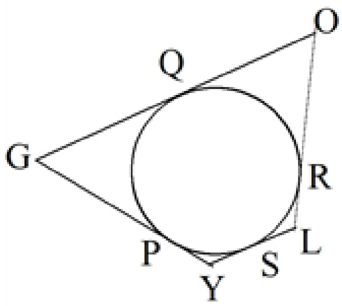
۹۴ پاره خط های AD , BE و CF مساوی و موازی‌اند.



با استفاده از ویژگی‌های تبدیل انتقال ثابت کنید: $A\overset{\triangle}{B}C \cong D\overset{\triangle}{E}F$

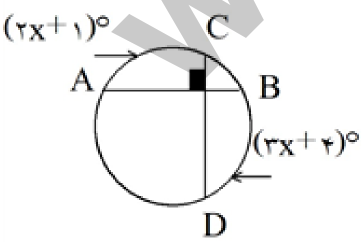
۹۵ ضلع‌های چهارضلعی محیطی GOLY بر دایره مماسند، ثابت کنید:

$GO + LY = OL + GY$



۹۶ قضیه: ثابت کنید در هر مثلث نیم‌ساز هر زاویه‌ی داخلی، ضلع روبه‌رو آن زاویه را به نسبت دو ضلع زاویه قطع می‌کند.

۹۷ مقدار x را در شکل زیر به دست آورید.



۹۸ با استفاده از تعریف زاویه‌ی محاطی، نشان دهید مجموع زاویه‌های داخلی هر مثلث $۱۸۰°$ است.

تلفن تماس: ۰۲۶۳۳۴۰۸۹۴۴

۹۹) وضعیت دو دایره را نسبت به هم در حالت زیر تعیین کنید.

$$R = \frac{۱}{۳} \quad , \quad R' = \frac{۱}{۲} \quad , \quad d = \frac{۵}{۶}$$

۱۰۰) وضعیت دو دایره را نسبت به هم در حالت زیر تعیین کنید.

$$R = ۱+\sqrt{۲} \quad , \quad R' = \sqrt{۲}-۱ \quad , \quad d = ۱$$

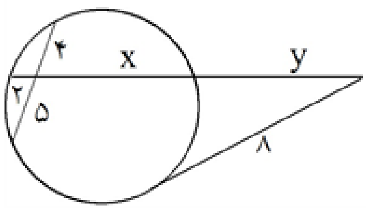
۱۰۱) دو دایره‌ی $C\ (O\ ,\ ۶)$ و $C'\ (O'\ ,\ ۴)$ مفروضند. اگر $OO' = d$ باشد، اوضاع دایره را در حالت‌های زیر بنویسید. (با ذکر دلیل)

۱) $d = ۲$ ۲) $d = ۷$

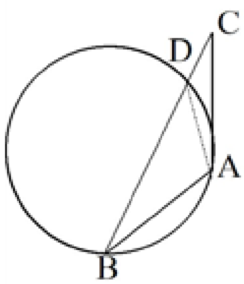
۱۰۲) سه ضلع مثلثی $BC = ۶\ ,\ AC = ۴$ و $AB = ۵$ سانتی‌متر می‌باشد. اندازه‌ی پاره‌خطهایی را که نیمساز داخلی زاویه‌ی C بر ضلع AB ایجاد می‌کند تعیین کنید.

۱۰۳) شعاع‌های دو دایره ۳ و ۵ سانتی‌متر است. اگر طول مماس مشترک داخلی آن‌ها ۶ سانتی‌متر باشد، فاصله‌ی بین مرکزهای دو دایره را بیابید.

۱۰۴) با توجه به شکل مقدار x و y را بیابید.

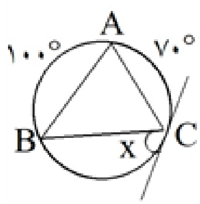


۱۰۵) در دایره $C\ (O\ ,\ R)$ مماس AC و وتر AB با یکدیگر مساوی‌اند خط BC دایره را در نقطه‌ی D قطع کرده‌است. ثابت کنید مثلث ADC متساوی‌الساقین است.



۱۰۶) مقدار a را چنان بیابید که اندازه‌ی مماس مشترک خارجی دو دایره به شعاع‌های ۸ و ۲ و خط المرکزین $d=۱۰$، برابر $۱ - ۳a$ باشد. سپس تعیین کنید این دو دایره چند مماس مشترک داخلی دارد؟

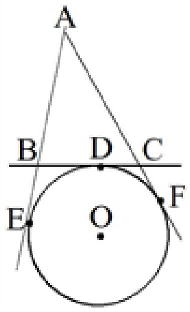
۱۰۷) مقدار x را به‌دست آورید.



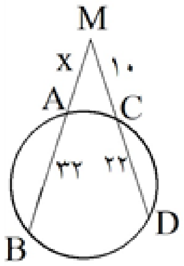
۱۰۸) طول خط المرکزین در دو دایره‌ی متقاطع به شعاع‌های ۴ و ۳ سانتی‌متر برابر ۶ سانتی‌متر است. طول مماس مشترک خارجی دو دایره را به دست آورید.

تلفن تماس: ۰۲۶۳۳۴۰۸۹۴۴

۱۰۹) خط های AE ، AF و BC به ترتیب در نقطه‌های E ، F و D بر دایره (O) مماس هستند. مماس BC، خط های AE و AF را به ترتیب در نقطه‌های B و C قطع کرده است. ثابت کنید که با تغییر مکان نقطه‌ی D روی دایره بین دو نقطه‌ی ثابت E و F، محیط مثلث ABC ثابت می‌ماند.



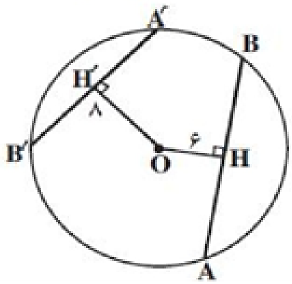
۱۱۰) x را در شکل بیابید.



۱۱۱) الف) در دایره‌ی C(O , ۱۰) فاصله وتر AB از مرکز دایره برابر ۶ وفاصله‌ی وتر A'B' از مرکز دایره مساوی ۸ است. طول وترهای AB و A'B' را به‌دست آورید.

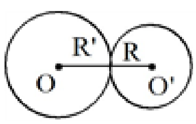
ب) چه رابطه‌ای بین فاصله‌ی وترها از مرکز دایره و طول آن‌ها می‌یابید؟

پ) آیا این رابطه همیشه برقرار است؟



۱۱۲) اگر R=۴ و R'=۹ ، آن‌گاه اندازه‌ی مماس مشترک خارجی آن‌ها را به دست آورید.

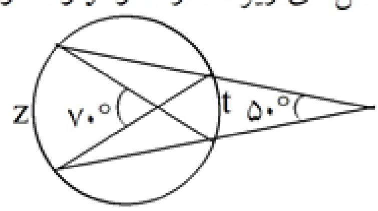
۱۱۳) این شکل دارای چند مماس مشترک خارجی و چند مماس مشترک داخلی است؟



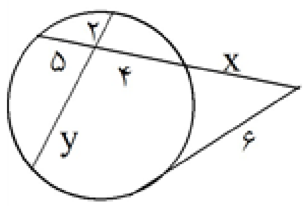
۱۱۴) قضیه: ثابت کنید اندازه‌ی زاویه‌ای که از برخورد امتداد دو وتر از یک دایره پدید می‌آید، برابر قدرمطلق نصف تفاضل اندازه‌ی کمان‌هایی از آن دایره است که به ضلع‌های آن زاویه محدودند.

۱۱۵) قضیه: ثابت کنید طول مماس‌های رسم شده بر یک دایره از هر نقطه‌ی خارج آن با هم برابرند.

۱۱۶) در هر یک از شکل‌های زیر مقدار x و y و z و t را به دست آورید.



(الف)



(ب)

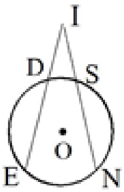
۱۱۷) ثابت کنید در هر چهارضلعی محاطی، زاویه‌های روبرو مکمل یکدیگرند.

تلفن تماس: ۰۲۶۳۳۴۰۸۹۴۴

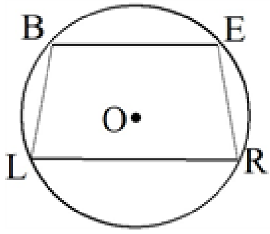
۱۱۸ با استفاده از تبدیل‌ها ثابت کنید:
قضیه: اگر خط موربی دو خط موازی را قطع کند، زاویه‌های نظیر برابر خواهند بود.

۱۱۹ قضیه: با استفاده از تبدیل‌ها ثابت کنید، زاویه‌های روبرو به ضلع‌های مساوی در مثلث متساوی‌الساقین با یکدیگر برابرند.

۱۲۰ در شکل زیر دو قاطع IE و IN با هم برابرند. ثابت کنید IS = ID.

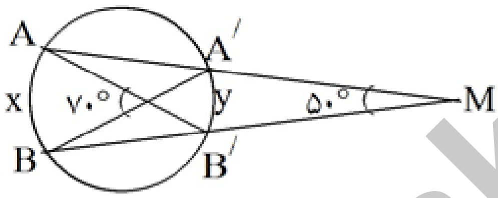


۱۲۱ در دایره‌ی $C(O,R)$، $BL = ER$ نشان دهید که $BE \parallel LR$

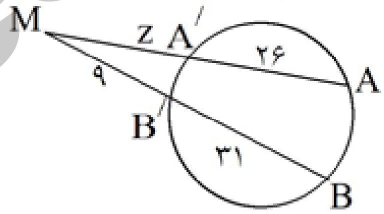


۱۲۲ در شکل‌های زیر x و y و z را به دست آورید.

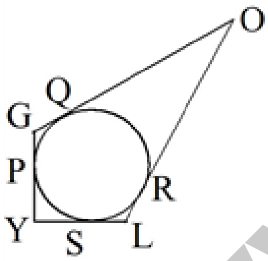
الف)



ب)

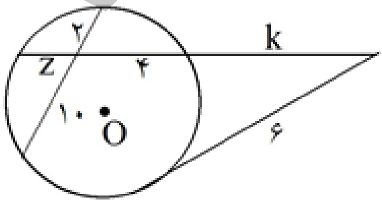


۱۲۳ ضلع‌های چهار ضلعی محیطی GOLY بر دایره مماسند. (شکل روبرو)
ثابت کنید: $GO + LY = OL + GY$

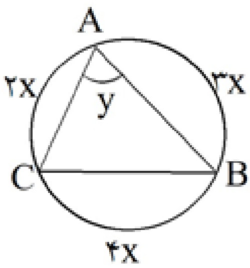


۱۲۴ اندازه‌ی k و z و y و x را در هر یک از شکل‌های زیر تعیین کنید.

الف)



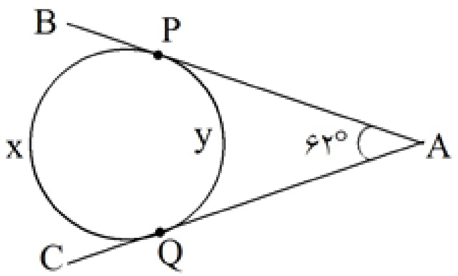
ب)



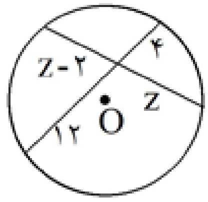
تلفن تماس: ۰۲٦۳۳٤۰۸۹٤٤

۱۲۵ در هر یک از شکل‌های زیر x و y و z را به دست آورید.

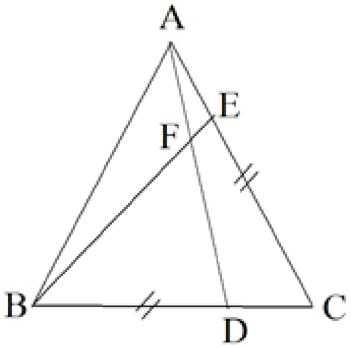
الف)



ب)

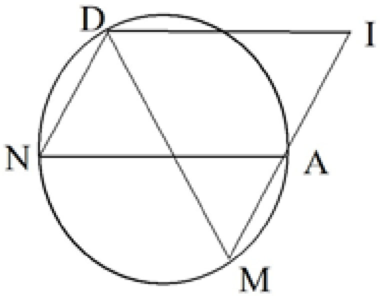


۱۲۶ مثلث ABC متساوی‌الاضلاع است و BD = CE
با استفاده از تبدیلات ثابت کنید AD = BE

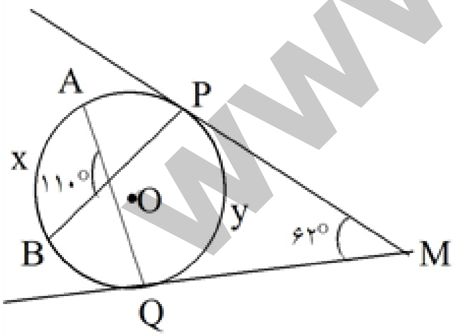


۱۲۷ دو دایره به شعاع‌های ۴ و ۹ سانتی‌متر، مماس برون هستند، مقدار x را چنان تعیین کنید که اندازه‌ی مماس مشترک خارجی آن‌ها برابر (۲ - ۲x) باشد.

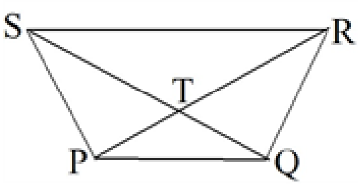
۱۲۸ در شکل روبرو چهارضلعی DIAN یک متوازی‌الاضلاع است، و نقطه‌های I و A و M روی یک خط راست قرار دارند، ثابت کنید: DM = DI



۱۲۹ در شکل زیر، مقادیر x و y را به دست آورید.
$\overset{\frown}{AB} = x$ و $\overset{\frown}{PQ} = y$



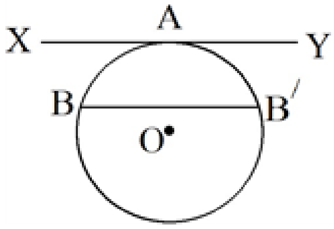
۱۳۰ در شکل روبرو RP و QS قطرها، PT = QT و RT = ST ، با استفاده از تبدیل‌ها ثابت کنید: $P\hat{Q}S = Q\hat{P}R$



۱۳۱ دو دایره به شعاع‌های ۹ سانتی‌متر و ۴ سانتی‌متر مفروضند. اگر اندازه‌ی مماس مشترک خارجی آنها ۱۲ سانتی‌متر باشد. طول خط المرکزین دو دایره را بدست آورید. این دو دایره نسبت به هم چه وضعی دارند؟

۱۳۲ قضیه: ثابت کنید اگر از یک نقطه، یک مماس و یک قاطع نسبت به یک دایره رسم کنیم، قطعه‌ای از خط مماس محصور بین آن نقطه و نقطه‌ی تماس، واسطه‌ی هندسی بین دو قطعه‌ی قاطع است.

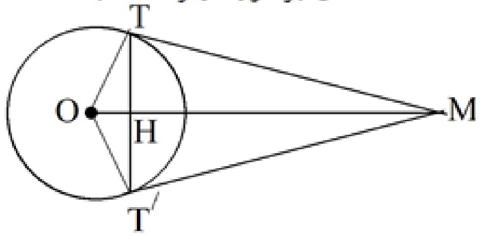
۱۳۳ خط XY در نقطه‌ی A بر دایره‌ی (C) مماس است.
وتر BB' از دایره را موازی XY رسم کرده‌ایم.
ثابت کنید کمان AB برابر با کمان AB' است.



۱۳۴ دو خط MT و MT' در نقطه‌های T و T' بر دایره‌ی $C(O,R)$ مماسند. H نقطه‌ی برخورد وتر TT' با خط OM است. ثابت کنید:

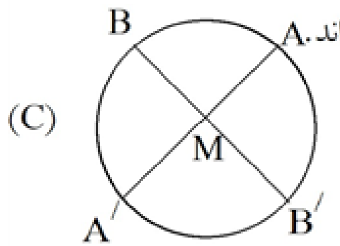
الف) خط OM نیمساز زاویه‌های $T\hat{M}T'$ و $T\hat{O}T'$ است.

ب) $TT' . OM = ۲R . MT$

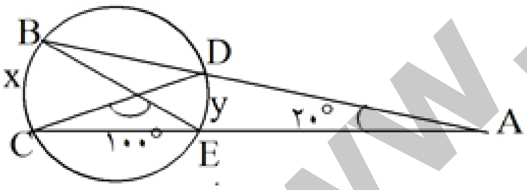


۱۳۵ شعاع‌های دو دایره‌ی هم‌مرکز ۵ و ۳ سانتی‌متر است. اندازه‌ی وتری از دایره‌ی بزرگ‌تر را که بر دایره‌ی کوچک‌تر مماس است، پیدا کنید.

۱۳۶ قضیه: از نقطه‌ی M واقع در داخل دایره‌ی (C) دو تر دلخواه AA' و BB' رسم شده‌اند.
ثابت کنید: $MA . MA' = MB . MB'$

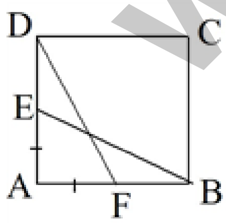


۱۳۷ در شکل زیر مقادیر x و y را بدست آورید.



۱۳۸ قضیه: ثابت کنید در یک دایره از دو وتر نابرابر آن که به مرکز دایره نزدیک‌تر است، بزرگ‌تر است؟

۱۳۹ چهارضلعی $ABCD$ یک مربع است و $AE = AF$.
با استفاده از تبدیل‌ها ثابت کنید: $BE = DF$

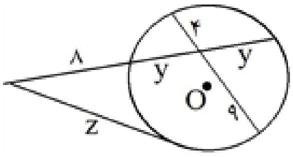


۱۴۰ قضیه: ثابت کنید اندازه‌ی زاویه‌ای که از برخورد دو وتر در یک دایره ایجاد می‌شود، برابر نصف مجموع اندازه‌ی کمانی از دایره است که به ضلع‌ها و امتداد ضلع‌های آن زاویه محدودند.

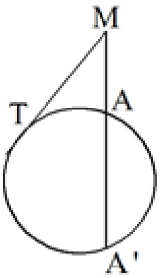
۱۴۱) در مثلث ABC میانه‌ی AM و نیمسازهای دو زاویه‌ی AMB و AMC را رسم می‌کنیم، این دو نیمساز اضلاع AB و AC را به ترتیب در نقاط P و O قطع می‌کنند. ثابت کنید دو خط PQ و BC موازیند.

۱۴۲) با استفاده از تبدیل‌ها ثابت کنید اگر خط موربی دو خط موازی را قطع کند، زاویه‌های نظیر برابر خواهند بود.

۱۴۳) در شکل زیر y و z را بیابید.

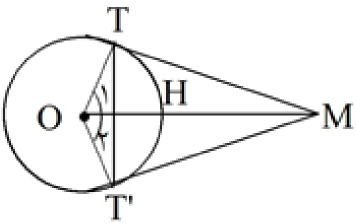


۱۴۴) در شکل مقابل $MA' =$ ۱۸ و $MT =$ ۱۲ می‌باشند. طول AA' را بیابید.

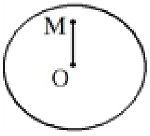


۱۴۵) در دایره‌ی $C(O,$۱۰$)$ اگر فاصله‌ی مرکز از وتر AB برابر ۶ باشد اندازه‌ی وتر AB را بیابید.

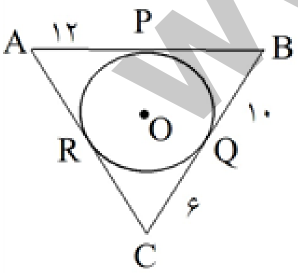
۱۴۶) در شکل زیر دو خط MT و MT' در نقطه‌های T و T' بر دایره‌ی $C(O,R)$ مماسند.
ثابت کنید خط OM نیمساز زاویه‌های TMT' و TOT' است.



۱۴۷) در شکل مقابل $OM =$ ۳ و $C(O,$۵$)$، اندازه‌ی کوتاه‌ترین وتری که از نقطه‌ی M می‌گذرد را بیابید.



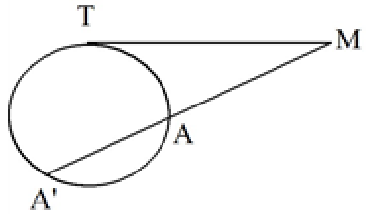
۱۴۸) محیط مثلث ABC در شکل زیر را بیابید.



۱۴۹) به کمک تبدیل‌ها، ثابت کنید زاویه‌های روبه‌رو به ضلع‌های مساوی در مثلث متساوی‌الساقین با هم برابرند.

تلفن تماس: ۰۲۶۳۳۴۰۸۹۴۴

۱۵۰ در شکل زیر خط MT مماس بر دایره در نقطه‌ی T و MA قاطع دایره است.

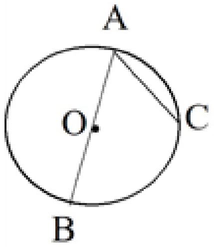


الف) اگر $MA = ۴$, $AA' = ۵$ باشد، اندازه‌ی MT را تعیین کنید.

ب) اگر $\widehat{M} = ۸۰$ و $\overset{\frown}{AT} = ۱۰۰°$، مطلوب است محاسبه‌ی $\overset{\frown}{A'T}$

۱۵۱ قضیه: از نقطه‌ی M واقع در داخل دایره‌ی (C) دو وتر دلخواه 'AA و 'BB رسم شده‌اند. ثابت کنید:
$MA . MA' = MB . MB'$

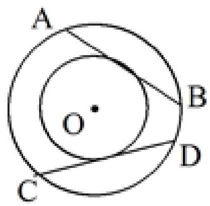
۱۵۲ در شکل مقابل ثابت کنید:



اندازه‌ی زاویه‌ی محاطی $\widehat{BAC}$ برابر با نصف کمان مقابل است. (O مرکز دایره است)

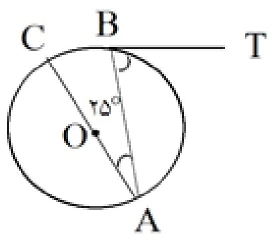
یعنی: $\widehat{A} = \frac{\overset{\frown}{BC}}{۲}$

۱۵۳ دو دایره به مرکز O داده شده است:



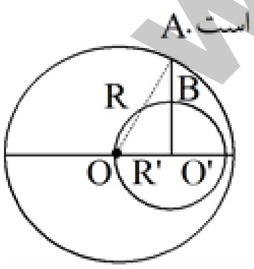
ثابت کنید کمان AB برابر کمان CD است. $(\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{CD})$

۱۵۴ در شکل روبه‌رو اندازه‌ی زاویه‌ی ظلی $\widehat{ABT}$ را به دست آورید. $(\widehat{BAC} = ۲۵°)$



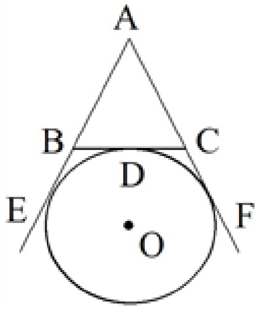
۱۵۵ دو دایره به شعاع‌های $R_۱ = ۳$ و $R_۲ = ۴$ و طول خط المرکزین $d = \sqrt{۲} - ۱$ است. این دو دایره نسبت به هم چه وضعی دارند؟

۱۵۶ در شکل مقابل O مرکز دایره‌ی بزرگ و (O') مرکز دایره‌ی کوچک و AO عمود بر OO' است.
اگر شعاع دایره‌ی بزرگ $۶\sqrt{۳}$ سانتی‌متر باشد، آن‌گاه AB را حساب کنید.

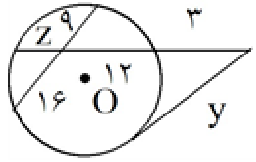


تلفن تماس: ۰۲۶۳۳۴۰۸۹٤٤

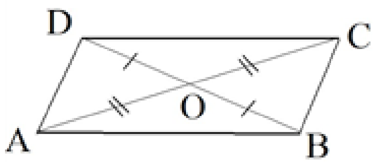
۱۵۷ در شکل مقابل خطهای AE و AF بر دایره مماس هستند.
نشان دهید با تغییر مکان نقطه‌ی D روی دایره بین دو نقطه‌ی ثابت E و F محیط مثلث ABC ثابت می‌ماند.



۱۵۸ در شکل زیر y , z را به دست آورید.

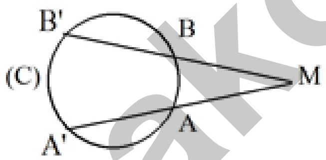


۱۵۹ قطرهای چهارضلعی $ABCD$ یکدیگر را نصف کرده‌اند. با استفاده از تبدیل‌ها، ثابت کنید: $ABCD$ یک متوازی‌الاضلاع است.



۱۶۰ دو دایره به شعاع‌های ۴ و ۹ سانتی‌متر، مماس برون هستند، مقدار m را چنان تعیین کنید که اندازه‌ی مماس مشترک خارجی آن‌ها برابر ۲ - ۲m باشد.

۱۶۱ ثابت کنید اگر امتداد وترهای AA' و BB' از دایره‌ی (C) یکدیگر را در نقطه‌ی M قطع کنند، آن‌گاه $MA \,.\, MA' = MB \,.\, MB'$

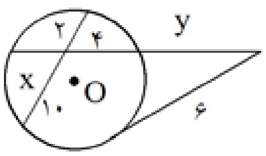


۱۶۲ قضیه: ثابت کنید در یک دایره دو وتر نابرابر، آن که بزرگ‌تر است، به مرکز دایره نزدیک‌تر است.

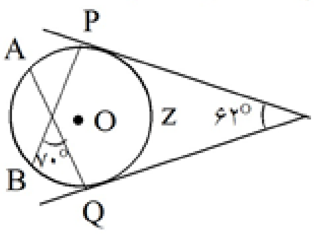
۱۶۳ دو دایره به شعاع‌های ۹ و ۴ مفروضند. اگر اندازه مماس مشترک خارجی آنها ۱۲ باشد، طول خط المرکزین این دو دایره را به‌دست آورید.

۱۶۴ در شکل‌های زیر مقادیر x,y,z و t را به‌دست آورید.

الف)



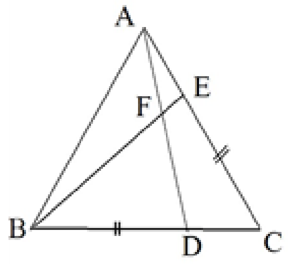
ب)



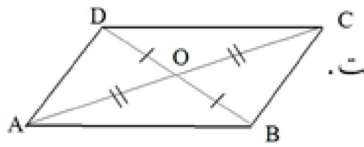
۱۶۵ قضیه: ثابت کنید در هر مثلث، نیمساز هر زاویه، ضلع روبرو به آن زاویه را به نسبت دو ضلع زاویه قطع می‌کند.

تلفن تماس: ۰۲۶۳۳۴۰۸۹۴۴

۱۶۶ مثلث ABC متساوی‌الاضلاع است.
با استفاده از دوران ثابت کنید:
$AD = BE$ و $\widehat{BFD} = 60^\circ$

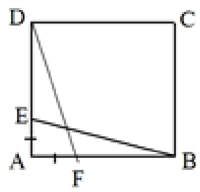


۱۶۷ قطرهای چهارضلعی ABCD یکدیگر را نصف کرده‌اند.
با استفاده از دوران ثابت کنید: ABCD یک متوازی‌الاضلاع است.

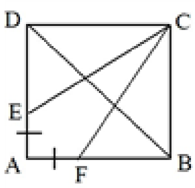


۱۶۸ با استفاده از دوران ثابت کنید هر گاه دو خط یکدیگر را قطع کنند، زاویه‌های مقابل مساوی یکدیگرند.

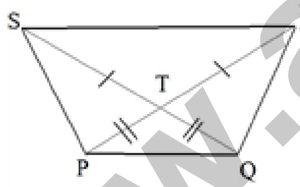
۱۶۹ چهارضلعی ABCD، یک مربع است و $AE = AF$.
با استفاده از بازتاب ثابت کنید: $BE = DF$



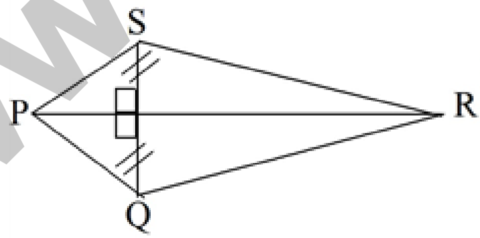
۱۷۰ چهارضلعی ABCD، یک مربع است و $AE = AF$.
با استفاده از بازتاب ثابت کنید: $CE = CF$



۱۷۱ در شکل روبه‌رو PR و QS قطرها، $PT = QT$ و $RT = ST$
با استفاده از بازتاب ثابت کنید: $PQS \cong QPR$



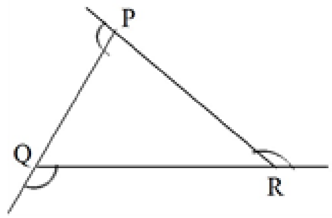
۱۷۲ در شکل روبه‌رو PR عمودمنصف QS است.
با استفاده از بازتاب ثابت کنید: $\widehat{SPR} = \widehat{QPR}$



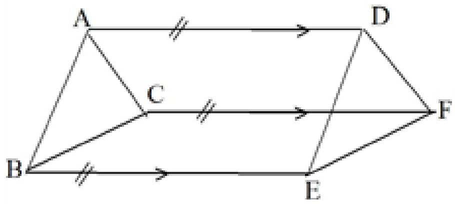
۱۷۳ با استفاده از بازتاب ثابت کنید:
فاصله‌ی هر نقطه روی عمودمنصف یک پاره‌خط
تا دو سر آن به یک اندازه است.

تلفن تماس: ۰۲۶۳۳۴۰۸۹۴۴

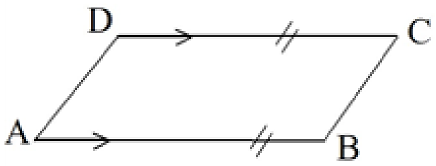
۱۷۴ در مثلث دلخواه PQR، با استفاده از انتقال ثابت کنید:
مجموع زاویه‌های خارجی 360° است.



۱۷۵ پاره‌خطهای AD، BE، CF مساوی و موازیند.
با استفاده از انتقال ثابت کنید: $ABC \cong DEF$.



۱۷۶ در چهارضلعی ABCD، $AB \parallel DC$ و $AB = DC$،
با استفاده از انتقال ثابت کنید: $AD \parallel BC$ و $AD = BC$



۱۷۷ در مورد همرسی مماس مشترکهای خارجی دو دایره و خط المرکزین آنها چه می‌توان گفت؟

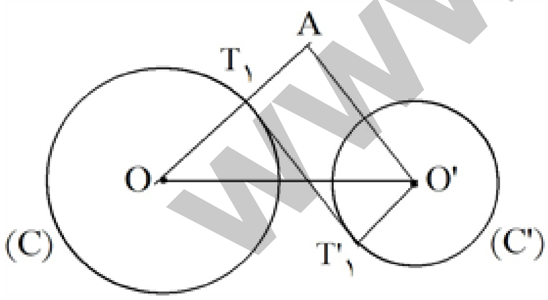
۱۷۸ ثابت کنید مماس مشترکهای داخلی و خط المرکزین دو دایره همرسند.

۱۷۹ مقدار a را چنان بیابید که اندازه‌ی مماس مشترک خارجی دو دایره به شعاعهای ۸ و ۳ و خط المرکزین ۱۳ = d، ۵a-۳

۱۸۰ دو دایره به شعاعهای ۹ سانتی‌متر و ۴ سانتی‌متر، مماس برون هستند. اندازه ی مماس مشترک خارجی آنها را به دست آورید.

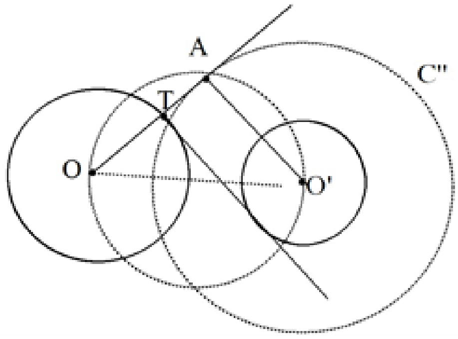
۱۸۱ وضعیت دو دایره را در حالتهای مختلف در نظر بگیرید، سپس در هر حالت مماس مشترکهای آنها را در صورت وجود رسم کنید.

۱۸۲ اندازه‌ی مماس مشترک داخلی دو دایره‌ی $C(O,R)$ و $C'(O',R')$
را بر حسب R و R' و $OO' = d$ به دست آورید.

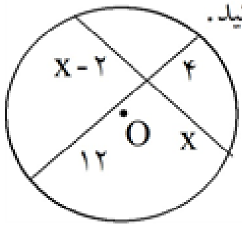


تلفن تماس: ۰۲۶۳۳۴۰۸۹۴۴

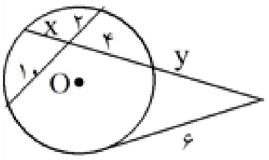
۱۸۳ دو دایره‌ی $C(O\ ,\ R)$ و $C'(O'\ ,\ R')$ داده شده‌اند. مماس مشترک‌های داخلی این دو دایره را رسم کنید و مراحل کار خود را توضیح دهید. در چه صورت دو دایره مماس مشترک داخلی دارند؟



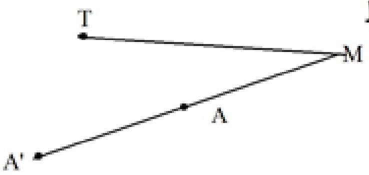
۱۸۴ در هر یک از شکل‌های زیر x و y را محاسبه کنید.



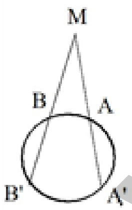
۱۸۵ در هریک از شکل‌های زیر x و y را محاسبه کنید.



۱۸۶ سه نقطه‌ی M، A و A' روی یک خط راست و نقطه‌ی T خارج این خط به قسمی واقعند که $MT^2 = MA\ .\ MA'$ است.
ثابت کنید دایره‌ای که بر سه نقطه‌ی A و A' و T می‌گذرد در نقطه‌ی T بر خط MT مماس است.



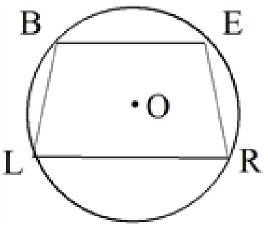
۱۸۷ ثابت کنید اگر امتداد وترهای AA' و BB' از دایره‌ی (C) یکدیگر را در نقطه‌ی M قطع کنند، آنگاه:



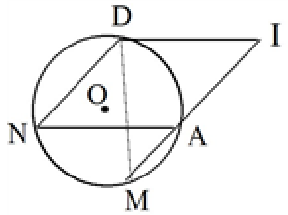
$MA\ .\ MA' = MB\ .\ MB'$.

۱۸۸ در دایره‌ی (C) مماس AC و وتر AB با یکدیگر مساوی‌اند. خط BC دایره را در نقطه‌ی D قطع کرده است. ثابت کنید مثلث ADC متساوی الساقین است.

۱۸۹

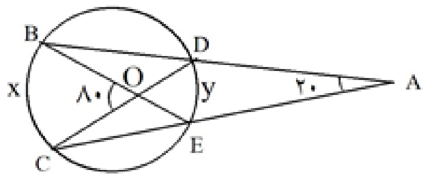


در دایره‌ی (O)، $BL = ER$. نشان دهید $BE \| LR$.

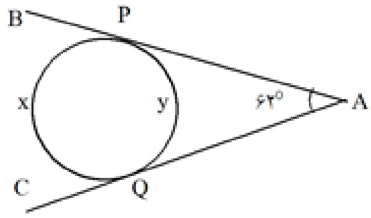


۱۹۰ در شکل روبه‌رو چهارضلعی DIAN یک متوازی‌الاضلاع است و نقطه‌های I، A، M روی یک خط راست قرار دارند. ثابت کنید: $DM = DI$.

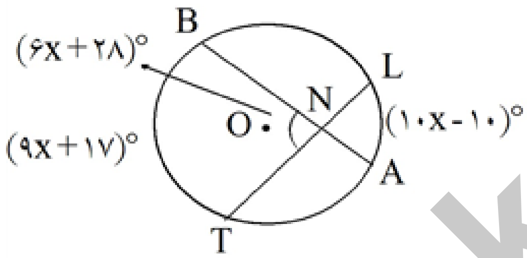
۱۹۱ در هرکدام از شکل‌های زیر x و y را بیابید.



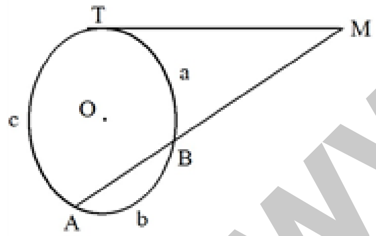
۱۹۲ در هر کدام از شکلهای زیر x و y را بیابید.



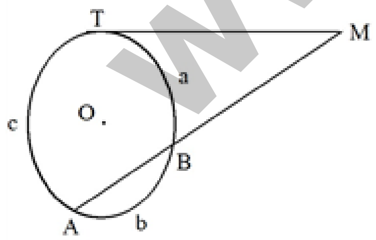
۱۹۳ در شکل زیر x و اندازه‌ی زاویه‌ی $\widehat{BNT}$ را تعیین کنید.



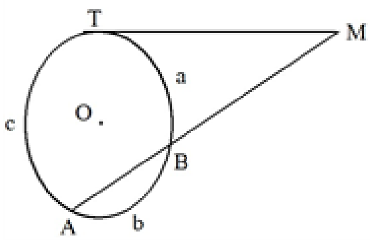
۱۹۴ خط مماس بر دایره در نقطه‌ی T و امتداد وتر AB در نقطه‌ی M متقاطعند. با فرض $\overset{\frown}{TB} = a$، $\overset{\frown}{BA} = b$ و $\overset{\frown}{AT} = c$:
تعیین کنید:
a را در صورتی که $b = ۱۰۰^\circ$, $\widehat{M} = ۶۰^\circ$ باشد.



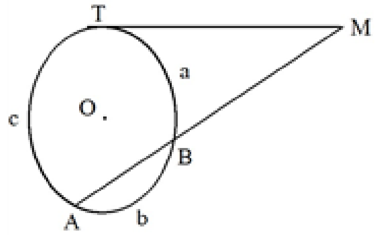
۱۹۵ خط مماس بر دایره در نقطه‌ی T و امتداد وتر AB در نقطه‌ی M متقاطعند. با فرض $\overset{\frown}{TB} = a$، $\overset{\frown}{BA} = b$ و $\overset{\frown}{AT} = c$:
تعیین کنید:
a را در صورتی که $c = ۳a$, $\widehat{M} = ۴۵^\circ$ باشد.



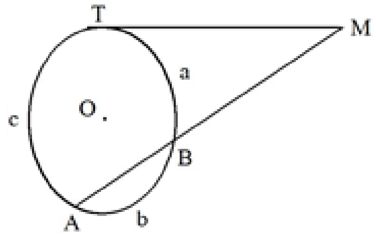
۱۹۶ خط مماس بر دایره در نقطه‌ی T و امتداد وتر AB در نقطه‌ی M متقاطعند. با فرض $\overset{\frown}{TB} = a$، $\overset{\frown}{BA} = b$ و $\overset{\frown}{AT} = c$:
تعیین کنید:
c را در صورتی که $a = ۵۵^\circ$ و $\widehat{M} = ۳۰^\circ$ باشد.



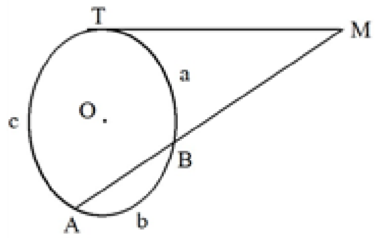
تلفن تماس: ۰۲۶۳۳۴۰۸۹۴۴



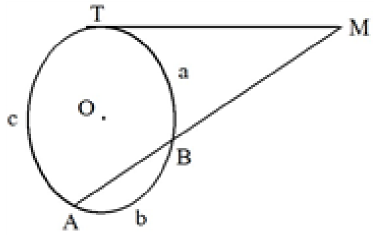
۱۹۷) خط مماس بر دایره در نقطه‌ی T و امتداد وتر AB در نقطه‌ی M متقاطعند. با فرض $\overset{\frown}{TB} = a$، $\overset{\frown}{BA} = b$ و $\overset{\frown}{AT} = c$:
تعیین کنید:
a را در صورتی که $c = ۲۰۰^\circ$ و $\widehat{M} = ۴۵^\circ$ باشد.



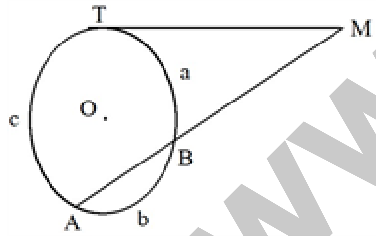
۱۹۸) خط مماس بر دایره در نقطه‌ی T و امتداد وتر AB در نقطه‌ی M متقاطعند. با فرض $\overset{\frown}{TB} = a$، $\overset{\frown}{BA} = b$ و $\overset{\frown}{AT} = c$:
اندازه‌ی زاویه‌ی M را در حالت زیر تعیین کنید.
$\frac{a}{۱} = \frac{b}{۴} = \frac{c}{۷}$



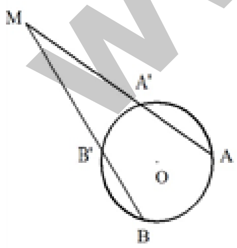
۱۹۹) خط مماس بر دایره در نقطه‌ی T و امتداد وتر AB در نقطه‌ی M متقاطعند. با فرض $\overset{\frown}{TB} = a$، $\overset{\frown}{BA} = b$ و $\overset{\frown}{AT} = c$:
اندازه‌ی زاویه‌ی M را در حالت زیر تعیین کنید.
$b = ۱۲۰^\circ \,,\, c = ۲۰۰^\circ$



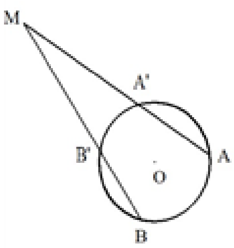
۲۰۰) خط مماس بر دایره در نقطه‌ی T و امتداد وتر AB در نقطه‌ی M متقاطعند. با فرض $\overset{\frown}{TB} = a$، $\overset{\frown}{BA} = b$ و $\overset{\frown}{AT} = c$:
اندازه‌ی زاویه‌ی M را در حالت زیر تعیین کنید.
$c - a = ۷۴^\circ$



۲۰۱) خط مماس بر دایره در نقطه‌ی T و امتداد وتر AB در نقطه‌ی M متقاطعند. با فرض $\overset{\frown}{TB} = a$، $\overset{\frown}{BA} = b$ و $\overset{\frown}{AT} = c$:
اندازه‌ی زاویه‌ی M را در حالت زیر را تعیین کنید.
$c = ۱۵۰^\circ \,,\, a = ۶۰^\circ$



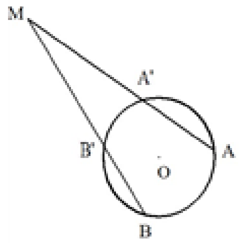
۲۰۲) امتدادهای دو وتر 'AA و 'BB از دایره‌ی O در نقطه‌ی M متقاطعند. تعیین کنید:
اندازه‌ی کمان $\overset{\frown}{A'B'}$ را، اگر $\overset{\frown}{AB} = ۳\overset{\frown}{A'B'}$ و $\widehat{M} = ۲۵^\circ$ باشد.



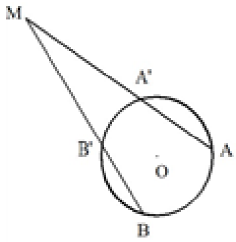
۲۰۳) امتدادهای دو وتر 'AA و 'BB از دایره‌ی O در نقطه‌ی M متقاطعند. تعیین کنید:
اندازه‌ی $\overset{\frown}{AB} - \overset{\frown}{A'B'}$ را، اگر $\widehat{M} = ۴۵^\circ$ باشد.

تلفن تماس: ۰۲٦۳۳٤۰۸۹٤٤

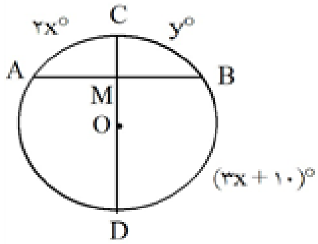
۲۰۴ امتدادهای دو وتر 'AA و 'BB از دایره‌ی O در نقطه‌ی M متقاطعند. تعیین کنید:
اندازه‌ی کمان $\overset{\frown}{AB}$ را، اگر $\overset{\frown}{A'B'} = ۶۰^\circ$ و $\widehat{M} = ۳۵^\circ$ باشد.



۲۰۵ امتدادهای دو وتر 'AA و 'BB از دایره‌ی O در نقطه‌ی M متقاطعند. تعیین کنید:
اندازه‌ی کمان $\overset{\frown}{A'B'}$ را، اگر $\overset{\frown}{AB} = ۱۶۰^\circ$ و $\widehat{M} = ۲۰^\circ$ باشد.

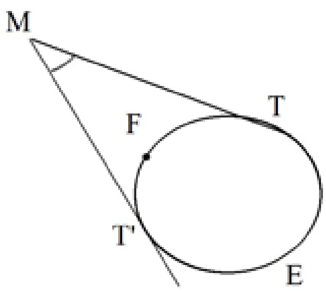


۲۰۶ قطر CD در نقطه‌ی M بر وتر AB از دایره به مرکز O عمود است. اگر $\overset{\frown}{AC} = ۲x^\circ$, $\overset{\frown}{BC} = y^\circ$ و $\overset{\frown}{BD} = (۳x+۱۰)^\circ$ باشد، x و y را بیابید.

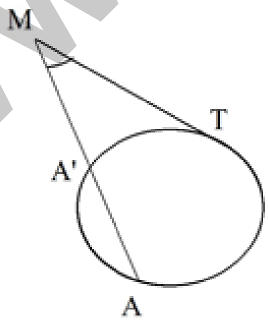


۲۰۷ ثابت کنید زاویه‌ی بین دو خط مماس رسم شده از دو نقطه‌ی T و 'T بر یک دایره، برابر قدرمطلق نصف تفاضل دو کمان ایجاد شده بین نقطه‌های T و 'T است.

راهنمایی: در شکل داده شده ثابت کنید: $\widehat{TMT'} = \left|\dfrac{\overset{\frown}{TET'} - \overset{\frown}{TFT'}}{۲}\right|$

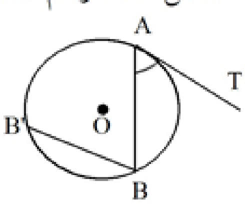


۲۰۸ خط مماس بر دایره‌ی (C) در نقطه‌ی T امتداد وتر 'AA از این دایره را در نقطه‌ی M قطع کرده است.
(شکل روبه‌رو) ثابت کنید: $\widehat{AMT} = \dfrac{\overset{\frown}{AT} - \overset{\frown}{A'T}}{۲}$



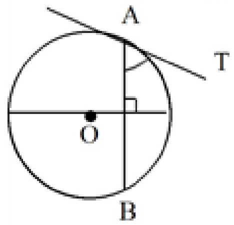
۲۰۹ با استفاده از تعریف زاویه‌ی محاطی، نشان دهید مجموع زاویه‌های داخلی هر مثلث ۱۸۰° است.

۲۱۰ زاویه‌ی ظلی TAB در دایره‌ی به مرکز O داده شده است. به کمک خط 'BB که موازی خط مماس AT رسم شده است. ثابت کنید که: $\widehat{TAB} = \dfrac{\overset{\frown}{AB}}{۲}$.



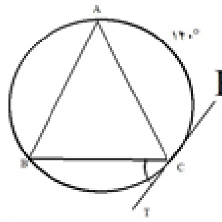
تلفن تماس: ۰۲۶۳۳۴۰۸۹۴۴

۲۱۱) زاویه‌ی ظلی TAB در دایره‌ی به مرکز O داده شده است. با استفاده از ویژگی قطر عمود بر وتر، ثابت کنید که:

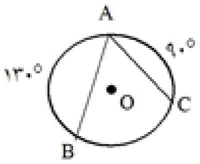


$$\widehat{TAB} = \frac{\overset{\frown}{AB}}{۲}$$

۲۱۲) در شکل روبه‌رو، $AB = AC$، CT مماس بر دایره در نقطه‌ی C و $\overset{\frown}{AC} = ۱۴۰^\circ$ است. اندازه‌ی زاویه‌ی BCT را بیابید.



۲۱۳) زاویه‌ی محاطی BAC در دایره‌ی به مرکز O داده شده است. اگر $\overset{\frown}{AB} = ۱۳۰^\circ$ و $\overset{\frown}{AC} = ۹۰^\circ$ باشد، اندازه‌ی زاویه‌ی BAC را تعیین کنید.

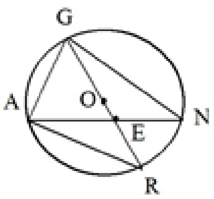


۲۱۴) در دایره‌ی به مرکز O، GR قطر دایره است. $\overset{\frown}{AG} = ۷۰^\circ$، $\widehat{NAR} = ۳۰^\circ$.
اندازه‌های زیر را به دست آورید و در جای مناسب روی شکل یادداشت کنید.

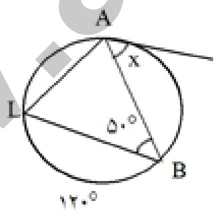
الف) $\hat{N}$ ب) $\hat{R}$

پ) $\overset{\frown}{NR}$ ت) $\overset{\frown}{GN}$

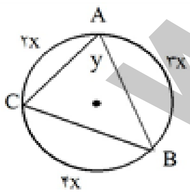
ث) $\overset{\frown}{GAN}$ ج) $\overset{\frown}{GAR}$



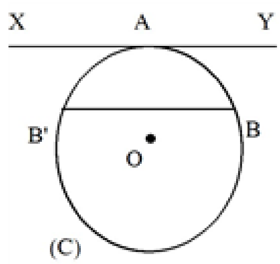
۲۱۵) اندازه‌ی x را در شکل مقابل تعیین کنید.



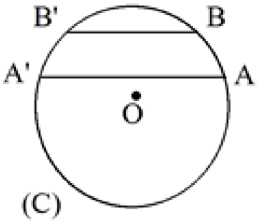
۲۱۶) اندازه‌ی x و y را در شکل مقابل تعیین کنید.



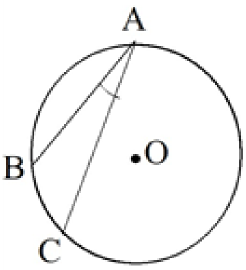
۲۱۷) خط XY در نقطه‌ی A بر دایره‌ی (C) مماس است.
وتر BB' از دایره را موازی XY رسم کرده‌ایم.
ثابت کنید: $\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{AB'}$.



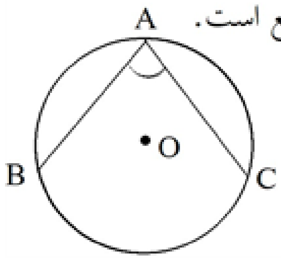
۲۱۸ ثابت کنید در هر دایره کمانهای محصور بین دو وتر موازی با هم برابرند.
راهنمایی: از ویژگی زاویه‌ی محاطی، یا قطر عمود بر وتر استفاده کنید.



۲۱۹ دو ضلع زاویه‌ی محاطی BAC در یک طرف نقطه‌ی O مرکز دایره‌ی (C) قرار دارد. ثابت کنید، $\widehat{BAC} = \frac{\overset{\frown}{BC}}{۲}$.

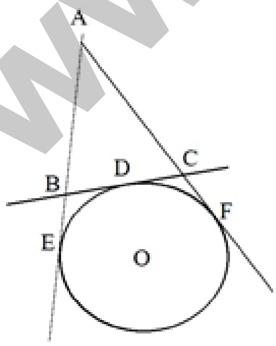


۲۲۰ دو ضلع زاویه‌ی محاطی BAC در دو طرف نقطه‌ی O مرکز دایره‌ی (C) واقع است.
ثابت کنید $\widehat{BAC} = \frac{\overset{\frown}{BC}}{۲}$.
راهنمایی: قطری از دایره را که از رأس A می‌گذرد رسم کنید.

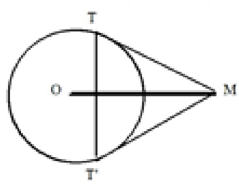


۲۲۱ شعاعهای دو دایره‌ی هم‌مرکز ۵ و ۳ سانتی‌متر هستند. اندازه‌ی وتری از دایره‌ی بزرگتر را که بر دایره‌ی کوچکتر مماس است پیدا کنید.

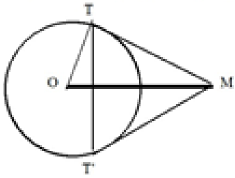
۲۲۲ خطهای AF ،AE و BC به ترتیب در نقطه‌های F ،E و D بر دایره‌ی (O) مماس هستند. مماس BC، خطهای AE و AF را به ترتیب در نقطه‌های B و C قطع کرده است. ثابت کنید با تغییر مکان نقطه‌ی D روی دایره بین دو نقطه‌ی ثابت E و F، محیط مثلث ABC ثابت می‌ماند.



۲۲۳ دایره‌ی $C(O,۶)$ و نقطه‌ی M به فاصله‌ی ۱۲ سانتی‌متر از مرکز این دایره را در نظر بگیرید. خطهای MT و MT' بر این دایره مماسند. (T و T' نقطه‌های تماسند).
طول وتر TT' را به دست آورید.

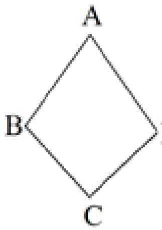


۲۲۴ دایره‌ی $C(O,6)$ و نقطه‌ی M به فاصله‌ی ۱۲ سانتی‌متر از مرکز این دایره را در نظر بگیرید. خطهای MT و 'MT بر این دایره مماسند. (T و 'T نقطه‌های تماسند).
طول مماسهای MT و 'MT را تعیین کنید.

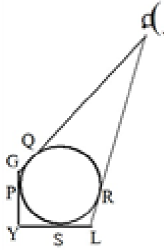


۲۲۵ زاویه‌ی بین دو مماس رسم شده از نقطه‌ی A بر دایره‌ی $C(O\ ،\ 5)$، برابر 60° است. طول پاره‌خط OA را به دست آورید.

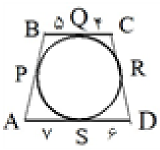
۲۲۶ در چهارضلعی ABCD (شکل روبه‌رو)، $AB+CD=AD+BC$ است. ثابت کنید که این چهارضلعی محیطی است.
راهنمایی: روی ضلع AB، پاره‌خط $AM=AD$ و روی ضلع BC پاره‌خط $CN=CD$ را جدا کرده، از ویژگی مثلثهای متساوی‌الساقین استفاده کنید.



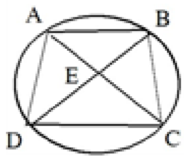
۲۲۷ ضلعهای چهارضلعی محیطی GOLY بر دایره مماسند (شکل روبه‌رو). ثابت کنید: $GO+LY=OL+GY$



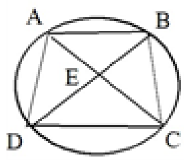
۲۲۸ اگر P ، Q، R، S، نقطه‌های تماس ضلعهای چهارضلعی ABCD با دایره باشند، آنگاه محیط این چهارضلعی را به دست آورید.



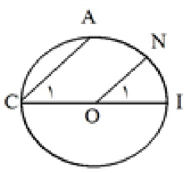
۲۲۹ با توجه به شکل مقابل نشان دهید:
اگر $AC=BD$ آنگاه $AD=BC$.



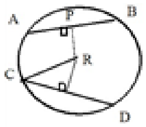
۲۳۰ با توجه به شکل نشان دهید:
اگر $AD=BC$، آنگاه $AC=BD$.



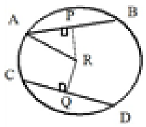
۲۳۱ در دایره‌ی به مرکز O و به قطر CI، داریم $CA \| ON$ ثابت کنید $\overset{\frown}{AN}=\overset{\frown}{NI}$.



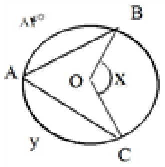
۲۳۲) با توجه به شکل روبه‌رو، اگر $RC = \sqrt{۲}$ و $CQ = RQ$، آنگاه طول پاره‌خطهای CQ، DQ و CD را به دست آورید.



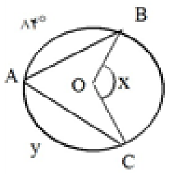
۲۳۳) با توجه به شکل روبه‌رو، اگر طول شعاع، ۱۰ و $PR = ۶$، آنگاه طول AP و AB را به دست آورید.



۲۳۴) اگر $\hat{x} = ۱۶۵^\circ$، آنگاه اندازه‌ی کمان $\overset{\frown}{y}$ را به دست بیاورید.



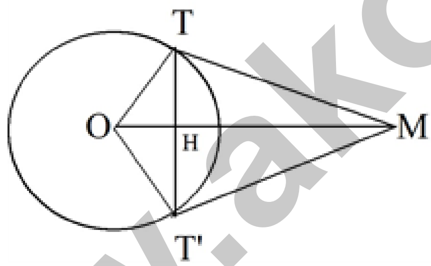
۲۳۵) اگر $\overset{\frown}{y} = ۱۴۰^\circ$، آنگاه زاویه‌ی x را به دست آورید.



۲۳۶) در شکل مقابل ثابت کنید.

الف) $TT'^{۲} = ۴OH \cdot HM$

ب) $TT' \cdot OM = ۲R \cdot MT$

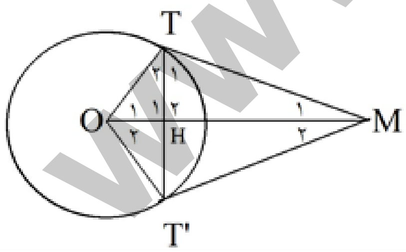


۲۳۷) دو خط MT و MT' در نقطه‌های T و T' بر دایره‌ی C(O,R) مماسند. H نقطه‌ی برخورد وتر TT' با خط OM است. ثابت کنید.

الف) خط OM نیمساز زاویه‌های TMT' و TOT' است.

ب) خط OM عمودمنصف پاره‌خط TT' است.

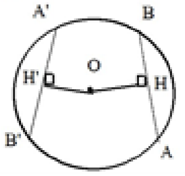
پ) $OH \cdot OM = R^{۲}$



۲۳۸) ثابت کنید طول مماسهای رسم شده بر یک دایره از هر نقطه‌ی خارج آن با هم برابرند.

۲۳۹) ثابت کنید کوچکترین وتری که از یک نقطه، واقع در درون یک دایره می‌توان رسم کرد، وتری است که بر قطر گذرنده از آن نقطه، عمود است.

۲۴۰ ثابت کنید در هر دایره، وترهای متساوی، از مرکز دایره به یک فاصله‌اند و برعکس.
یعنی در شکل زیر: $AB = A'B' \Leftrightarrow OH = OH'$

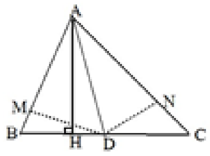


۲۴۱ ثابت کنید در یک دایره، کمانهای نظیر دو وتر مساوی، با هم برابرند، و برعکس.

۲۴۲ ثابت کنید در هر دایره، خطی که مرکز دایره را به وسط کمان نظیر یک وتر از آن دایره وصل می‌کند بر آن وتر عمود است.

۲۴۳ ثابت کنید در هر دایره، خطی که مرکز دایره را به وسط یک وتر از آن دایره که از مرکز دایره نگذشته باشد، وصل می‌کند، بر آن وتر عمود است.

۲۴۴ در مثلث ABC ، AH ارتفاع و AD نیمساز است. مساحت مثلث ABD و ACD را به ترتیب با S و S' نشان می‌دهیم.



الف) با در نظر گرفتن BD و DC به عنوان قاعده‌ی این مثلثها، نسبت $\frac{S}{S'}$ را به دست آورید.

ب) از D عمودهایی بر اضلاع AB و AC رسم کنید و پای آنها را M و N بنامید.
DM و DN چه رابطه‌ای با هم دارند؟

پ) با در نظر گرفتن AB و AC به عنوان قاعده‌ی مثلثهای ABD و ADC ، نسبت $\frac{S}{S'}$ را به دست آورید.

از مقایسه‌ی نسبتها در بند (الف) و (پ) چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟

۲۴۵ در مثلث ABC میانه‌ی AM و نیمسازهای دو زاویه AMB و AMC را رسم کنید، این دو نیمساز، اضلاع AB و AC را قطع می‌کنند، این نقاط را به ترتیب P و Q بنامید. سپس ثابت کنید دو خط PQ و BC با هم موازیند.

۲۴۶ سه ضلع مثلثی ۸، ۱۲، ۱۵ سانتی‌مترند. اندازه‌ی پاره‌خطهایی که نیمساز درونی زاویه‌ی بزرگتر مثلث بر ضلع مقابل آن پدید می‌آورد، را تعیین کنید.

۲۴۷ در حالتی که یک شش ضلعی در دایره به شعاع ۱ محاط شده باشد، در نظر بگیرید و طول ضلع دوازده ضلعی منتظم محاط در دایره را بدست آورید.

۲۴۸ طول ضلع هشت‌ضلعی منتظمی که در این دایره محاط می‌شود را محاسبه کنید.

۲۴۹ طول OM را به‌دست آورید.

۲۵۰ فاصله مرکز دایره تا نقطه M وسط ضلع مربع را بیابید.

تلفن تماس: ۰۲۶۳۳۴۰۸۹۴۴

۱

الف) $a = ۹ \ , \ b = ۶ \ , \ c = ۱۰$

$a^۲ = ۸۱ \ , \ b^۲ + c^۲ = ۱۳۶ \Rightarrow a^۲ < b^۲ + c^۲ \Rightarrow \widehat{A} < ۹۰^\circ$

ب) $a = ۹ \ , \ b = ۴ \ , \ c = ۸$

$a^۲ = ۸۱ \ , \ b^۲ + c^۲ = ۸۰ \Rightarrow a^۲ > b^۲ + c^۲ \Rightarrow \widehat{A} > ۹۰^\circ$

پ) $a = ۱۷ \ , \ b = ۱۵ \ , \ c = ۸$

$a^۲ = ۲۸۹ \ , \ b^۲ + c^۲ = ۲۸۹ \Rightarrow a^۲ = b^۲ + c^۲ \Rightarrow \widehat{A} = ۹۰^\circ$

۲

الف) $\widehat{A} > ۹۰^\circ \Leftrightarrow \operatorname{Cos} A < ۰ \underset{\div bc}{\overset{\times bc}{\rightleftarrows}} bc.\operatorname{Cos} A < ۰ \Leftrightarrow -bc.\operatorname{Cos} A > ۰$

$\underset{-(b^۲+c^۲)}{\overset{+(b^۲+c^۲)}{\rightleftarrows}} b^۲ + c^۲ - bc.\operatorname{Cos} A > b^۲ + c^۲ \Leftrightarrow a^۲ > b^۲ + c^۲$

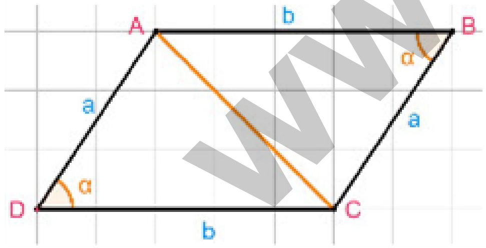
ب) $\widehat{A} < ۹۰^\circ \Leftrightarrow \operatorname{Cos} A > ۰ \underset{\div bc}{\overset{\times bc}{\rightleftarrows}} bc.\operatorname{Cos} A > ۰ \Leftrightarrow -bc.\operatorname{Cos} A < ۰$

$\underset{-(b^۲+c^۲)}{\overset{+(b^۲+c^۲)}{\rightleftarrows}} b^۲ + c^۲ - bc.\operatorname{Cos} a < b^۲ + c^۲ \Leftrightarrow a^۲ < b^۲ + c^۲$

پ) $\widehat{A} = ۹۰^\circ \Leftrightarrow \operatorname{Cos} A = ۰ \underset{\div bc}{\overset{\times bc}{\longrightarrow}} bc.\operatorname{Cos} A = ۰ \Leftrightarrow -bc.\operatorname{Cos} A = ۰$

$\underset{-(b^۲+c^۲)}{\overset{+(b^۲+c^۲)}{\rightleftarrows}} b^۲ + c^۲ - bc.\operatorname{Cos} A = b^۲ + c^۲ \Leftrightarrow a^۲ = b^۲ + c^۲$

۳ با توجه به خواص متوازی‌الاضلاع داریم:



$S_{ABCD} = ۲S_{ABC} = ۲ \times \frac{۱}{۲} \times a \times b \times \operatorname{Sin}\alpha$

$\Rightarrow S_{ABCD} = a.b\operatorname{Sin}\alpha$

تلفن تماس: ۰۲۶۳۳۴۰۸۹۴۴

۴ مثلث BCD متساوی‌الساقین است و با توجه به اندازه‌ی زاویه C، اندازه‌ی دو زاویه دیگر هر کدام 30° خواهد بود.

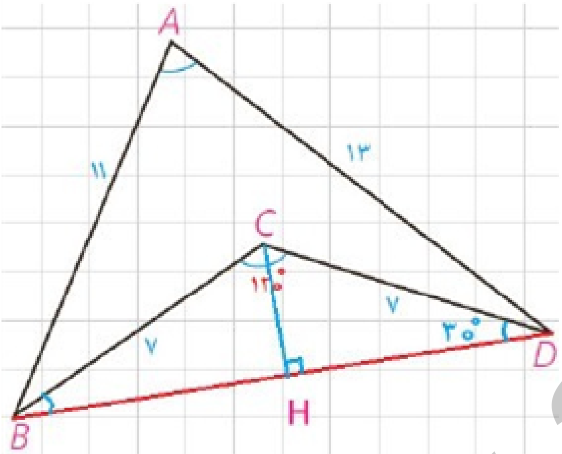
در این مثلث ارتفاع CH را رسم می‌کنیم. در مثلث قائم‌الزاویه CHD، $\widehat{CDH} = 30^\circ$ در نتیجه: $CH = \frac{7}{2}$

$$\left.\begin{array}{l} S_{BCD} = \frac{1}{2} \times \frac{7}{2} \times BD = \frac{7}{4}BD \\ S_{BCD} = \frac{1}{2} \times 7 \times 7 \times \sin 120^\circ = \frac{49\sqrt{3}}{4} \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{7}{4}BD = \frac{49\sqrt{3}}{4} \Rightarrow BD = 7\sqrt{3}$$

$$P_{ABD} = \frac{11 + 13 + 7\sqrt{3}}{2} = 12 + \frac{7}{2}\sqrt{3}$$

$$S_{ABD} = \sqrt{\left(12 + \frac{7}{2}\sqrt{3}\right)\left(12 + \frac{7}{2}\sqrt{3} - 7\sqrt{3}\right)\left(12 + \frac{7}{2}\sqrt{3} - 11\right)\left(12 + \frac{7}{2}\sqrt{3} - 13\right)}$$

$$S_{ABD} = \sqrt{\left(12 + \frac{7}{2}\sqrt{3}\right)\left(12 - \frac{7}{2}\sqrt{3}\right)\left(\frac{7}{2}\sqrt{3} + 1\right)\left(\frac{7}{2}\sqrt{3} - 1\right)}$$



$$S_{ABD} = \sqrt{\left(144 - \frac{147}{4}\right)\left(\frac{147}{4} - 1\right)} = \frac{143}{4}\sqrt{3} \quad (1)$$

$$S_{ABD} = \frac{1}{2} \times 11 \times 13 \times \sin A = \frac{143}{2}\sin A \quad (2)$$

$$\xrightarrow{(1),(2)} \frac{143}{2}\sin A = \frac{143}{4}\sqrt{3} \Rightarrow \sin A = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\Rightarrow \hat{A} = 60$$

$$S_{ABCD} = S_{ABD} - S_{BCD} \Rightarrow S_{ABCD} = \frac{143}{4}\sqrt{3} - \frac{49}{4}\sqrt{3} = \frac{94}{4}\sqrt{3}$$

راه حل دوم: با استفاده از قضیه کسینوس‌ها می‌نویسیم:

$$B\overset{\triangle}{C}D : BD^2 = 7^2 + 7^2 - 2(7)(7)\cos 120^\circ$$

$$\xrightarrow{\cos 120^\circ = \frac{-1}{2}} BD^2 = 49 + 49 + 49 = 3 \times 49 \Rightarrow BD = 7\sqrt{3}$$

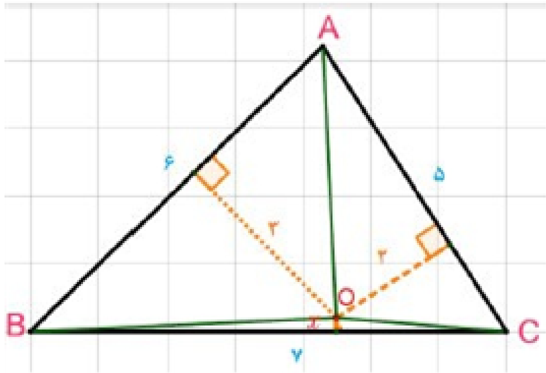
$$A\overset{\triangle}{B}D : BD^2 = AB^2 + AD^2 - 2AB \times AD\cos A$$

$$\Rightarrow 3 \times 49 = 11^2 + 13^2 - 2(11)(13)\cos A \Rightarrow \cos A = \frac{1}{2} \Rightarrow \hat{A} = 60^\circ$$

$$S_{ABCD} = S_{ABD} - S_{BCD} = \frac{1}{2}(11)(13)\sin 60 - \frac{1}{2}(7)(7)\sin 120 = \frac{143\sqrt{3}}{4} - \frac{49\sqrt{3}}{4} = \frac{94\sqrt{3}}{4}$$

تلفن تماس: ۰۲۶۳۳۴۰۸۹۴۴

۵ فاصله‌ی O تا ضلع بزرگتر را x در نظر می‌گیریم. داریم:



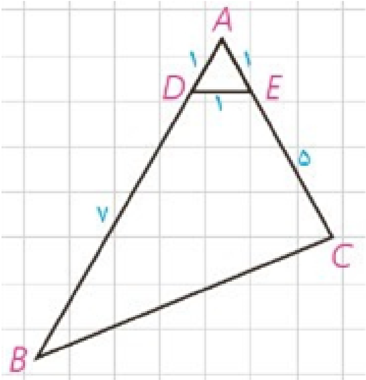
$$S_{ABC} = S_{OAB} + S_{OAC} + S_{OBC}$$
$$P_{ABC} = \frac{۵+۶+۷}{۲} = ۹$$
$$S_{ABC} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$
$$= \sqrt{۹ \times ۲ \times ۳ \times ۴} = ۶\sqrt{۶}$$
$$S_{AOB} = \frac{۱}{۲} \times ۶ \times ۳ = ۹$$
$$S_{AOC} = \frac{۱}{۲} \times ۵ \times ۲ = ۵$$
$$S_{BOC} = \frac{۱}{۲} \times ۷ \times x = \frac{۷}{۲}x$$
$$۶\sqrt{۶} = ۹ + ۵ + \frac{۷}{۲}x \Rightarrow ۶\sqrt{۶} - ۱۴ = \frac{۷}{۲}x \Rightarrow x = \frac{۲}{۷}\left(۶\sqrt{۶} - ۱۴\right) \approx ۰/۲$$

۶

$$S_{ABC} = S_{ABD} + S_{ACD}$$
$$\frac{۱}{۲}AB.AC.\sin A = \frac{۱}{۲}AB \times AD \times \sin\frac{A}{۲} + \frac{۱}{۲}AC \times AD \times \sin\frac{A}{۲}$$
$$\Rightarrow AB.AC.\sin A = AD.\sin\frac{A}{۲}(AB + AC) \Rightarrow AD = \frac{AB.AC.\sin A}{(AB+AC)\sin\frac{A}{۲}}$$
$$= \frac{۲AB.AC.\sin\frac{A}{۲}\cos\frac{A}{۲}}{(AB+AC)\sin\frac{A}{۲}} \Rightarrow AD = d_a \Rightarrow (\text{نیمساز راس } A)\ d_a = \frac{۲bc.\cos\frac{A}{۲}}{b+c}$$

تلفن تماس: ۰۲۶۳۳۴۰۸۹۴۴

۷ با توجه به این‌که مثلث ADE متساوی‌الساقین است پس $\widehat{DAE} = ۶۰^\circ$ در نتیجه:



$$BC^۲ = AC^۲ + AB^۲ - ۲AC.AB.\cos A$$

$$BC^۲ = ۳۶ + ۶۴ - ۲ \times ۶ \times ۸ \times \frac{۱}{۲} = ۵۲$$

$$\Rightarrow BC = ۲\sqrt{۱۳}$$

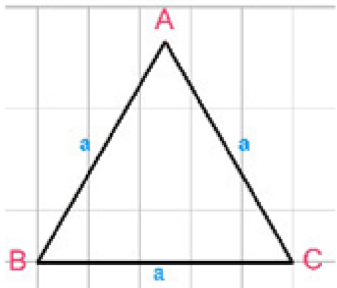
$$S_{BCED} = S_{ABC} - S_{ADE}$$

$$S_{ABC} = \frac{۱}{۲}.AB.AC.\sin A \Rightarrow S_{ABC} = \frac{۱}{۲} \times ۸ \times ۶ \times \frac{\sqrt{۳}}{۲} = ۱۲\sqrt{۳}$$

$$S_{ADE} = \frac{\sqrt{۳}}{۴}a^۲ \Rightarrow S_{ADE} = \frac{\sqrt{۳}}{۴} \times ۱^۲ = S_{ADE} = \frac{\sqrt{۳}}{۴}$$

$$S_{BCED} = ۱۲\sqrt{۳} - \frac{\sqrt{۳}}{۴} = \frac{۴۷}{۴}\sqrt{۳}$$

۸



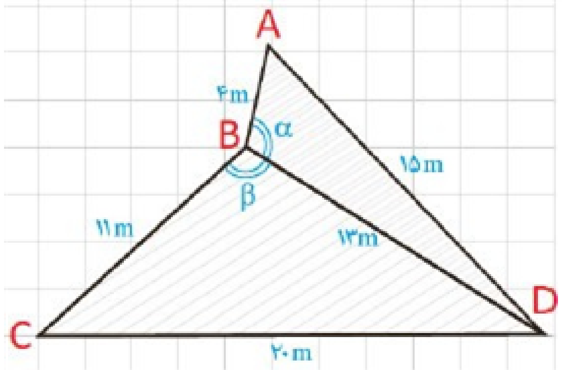
$$AB = AC = BC = a \Rightarrow P_{ABC} = \frac{۳a}{۲}$$

$$S_{ABC} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

$$= \sqrt{\frac{۳a}{۲} \times \left(\frac{۳a}{۲} - a\right)^۳} = \sqrt{\frac{۳a}{۲} \times \left(\frac{a}{۲}\right)^۳} = \sqrt{\frac{۳a^۴}{۱۶}} = \frac{\sqrt{۳}}{۴}a^۲$$

تلفن تماس: ۰۲۶۳۳۴۰۸۹۴۴

۹



$$S_{ABCD}=S_{ABD}+S_{BCD}$$

$$P_{ABD}=\frac{۴+۱۳+۱۵}{۲}=۱۶m$$

$$P_{BCD}=\frac{۱۱+۱۳+۲۰}{۲}=۲۲m$$

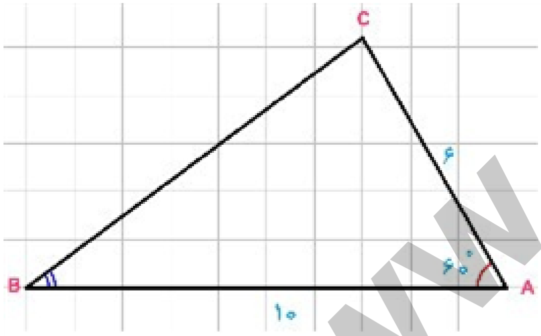
$$S_{ABD}=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}=\sqrt{۱۶\times۱۲\times۳\times۱}=۲۴m^{۲}$$

$$S_{BCD}=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}=\sqrt{۲۲\times۱۱\times۹\times۲}=۶۶m^{۲}$$

$$S_{ABCD}=۲۴+۶۶=۹۰\,m^{۲}$$

$$\left.\begin{array}{l} S_{ABD}=\frac{۱}{۲}AB.BD.\sin\alpha\Rightarrow۲۴=\frac{۱}{۲}\times۴\times۱۳\sin\alpha\Rightarrow\sin\alpha=\frac{۱۲}{۱۳} \\ S_{BCD}=\frac{۱}{۲}BC.DB.\sin\beta\Rightarrow۶۶=\frac{۱}{۲}\times۱۱\times۱۳\sin\beta\Rightarrow\sin\beta=\frac{۱۲}{۱۳}\end{array}\right\}\Rightarrow\sin\alpha=\sin\beta$$

۱۰



الف) $BC^{۲}=AC^{۲}+AB^{۲}-۲AC.AB.\cos A$

$$BC^{۲}=۳۶+۱۰۰-۲\times۶\times۱۰\times\frac{۱}{۲}=۷۶\Rightarrow BC=۲\sqrt{۱۹}$$

ب) $\frac{۱}{۲}AC.AB.\sin A\Rightarrow S=\frac{۱}{۲}\times۶\times۱۰\times\frac{\sqrt{۳}}{۲}=۱۵\sqrt{۳}$

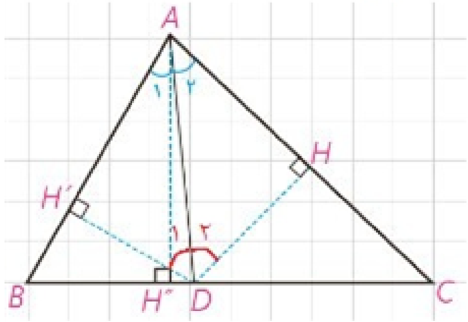
پ) $\frac{\sin B}{b}=\frac{\sin A}{a}\Rightarrow\frac{\sin B}{۶}=\frac{\frac{\sqrt{۳}}{۲}}{۲\sqrt{۱۹}}\Rightarrow\sin B=\frac{۳}{۲}\sqrt{\frac{۳}{۱۹}}\Rightarrow\sin B=\frac{۳\sqrt{۵۷}}{۳۸}$

۱۱ الف) راه اول:

$$\left.\begin{array}{l}\hat{A}_۱+\hat{D}_۱=۹۰^\circ\\ \hat{A}_۲+\hat{D}_۲=۹۰^\circ\end{array}\right\}\Rightarrow \hat{A}_۱+\hat{D}_۱=\hat{A}_۲+\hat{D}_۲ \xrightarrow{\hat{A}_۱=\hat{A}_۲} \hat{D}_۱=\hat{D}_۲$$

پس دو مثلث قائم‌الزاویه‌ی ADH و 'ADH به حالت (ز ض ز) همنهشت هستند بنابراین $DH = DH'$

راه دوم: هر نقطه روی نیمساز یک زاویه از دو ضلع آن زاویه به یک فاصله است. پس $DH = DH'$



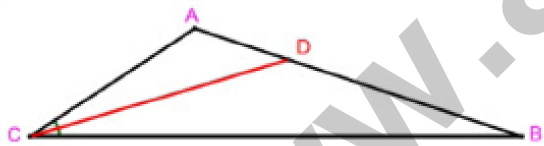
ب)

$$\frac{S_{ABD}}{S_{ACD}}=\frac{\frac{۱}{۲}DH'\times AB}{\frac{۱}{۲}DH\times AC}=\frac{AB}{AC}\quad (۱)$$

$$\frac{S_{ABD}}{S_{ACD}}=\frac{\frac{۱}{۲}BD\times AH''}{\frac{۱}{۲}CD\times AH''}=\frac{BD}{CD}\quad (۲)$$

از مقایسه‌ی ۱ و ۲ نتیجه می‌شود: $\frac{AB}{AC}=\frac{BD}{CD}$

۱۲



$$CD^۲ = AC\,.\,BC - AD\,.\,BC$$

$$\frac{BC}{AC}=\frac{BD}{DA}\Rightarrow\frac{۱۰}{۴}=\frac{BD}{DA}\Rightarrow\frac{۱۰+۴}{۴}=\frac{BD+DA}{DA}$$

$$\Rightarrow\frac{۱۴}{۴}=\frac{۷}{DA}\Rightarrow DA=\frac{۲۸}{۱۴}=۲\Rightarrow BD=۷-۲=۵$$

$$CD^۲=۴\times۱۰-۲\times۵=۳۰\Rightarrow CD=\sqrt{۳۰}$$

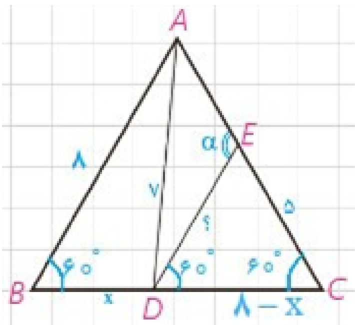
تلفن تماس: ۰۲۶۳۳۴۰۸۹۴۴

۱۳ در مثلث AMB پاره‌خط MQ نیمساز زاویه $\widehat{AMB}$ و در مثلث AMC پاره‌خط MP نیمساز زاویه $\widehat{AMC}$ است. پس داریم:

$$\left.\begin{array}{l}\frac{AM}{MB}=\frac{AQ}{QB}\xrightarrow{MB=MC}\frac{AM}{MC}=\frac{AQ}{QB}\\ \frac{AM}{MC}=\frac{AP}{PC}\end{array}\right\}\Rightarrow\frac{AQ}{QB}=\frac{AP}{PC}$$

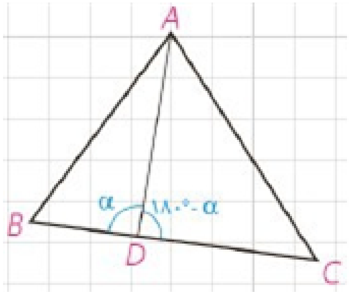
$$\xrightarrow{\text{عکس ق تالس}} PQ \parallel BC$$

۱۴



$$AB = AC = BC = ۸\ ,\ AD = ۷\ ,\ DB = x$$
$$DC = x - ۸\ ,\ DB < DC$$
$$AB^{۲}.DC + AC^{۲}.DB = AD^{۲}.BC + DB.DC.BC$$
$$\Rightarrow ۶۴(۸ - x) + ۶۴x = ۴۹ \times ۸ + ۸x(۸ - x)$$
$$\Rightarrow ۶۴ \times ۸ - \cancel{۶۴x} + \cancel{۶۴x} = ۴۹ \times ۸ + ۸x(۸ - x)$$
$$\xrightarrow{\div ۸} ۶۴ = ۴۹ + ۸x - x^{۲} \Rightarrow x^{۲} - ۸x + ۱۵ = ۰ \Rightarrow (x - ۳)(x - ۵) = ۰ \Rightarrow x = ۳\ ,\ x = ۵$$
$$\xrightarrow{DB < DC} x = DB = ۳\ ,\ DC = ۵$$

تلفن تماس: ۰۲۶۳۳۴۰۸۹۴۴



$$\overset{\triangle}{ABD}: AB^{۲} = AD^{۲} + DB^{۲} - ۲AD.DB.\cos\alpha \xrightarrow{\times DC}$$

$$AB^{۲}.DC = DC.AD^{۲} + DC.DB^{۲} - ۲DC.AD.DB.\cos\alpha \quad (۱)$$

$$\overset{\triangle}{ACD}: AC^{۲} = AD^{۲} + CD^{۲} - ۲AD.DC.\cos(۱۸۰^\circ - \alpha)$$

$$\xrightarrow{\times DB} AC^{۲}.DB = DB.AD^{۲} + DB.DC^{۲} + ۲DB.AD.DC.\cos\alpha \quad (۲)$$

$$\xrightarrow{(۱)+(۲)} AB^{۲}.DC + AC^{۲}.DB = DC.AD^{۲} + DC.DB^{۲} - \cancel{۲DC.AD.DB.\cos\alpha}$$

$$+ DB.AD^{۲} + DB.DC^{۲} + \cancel{۲DB.AD.DC.\cos\alpha} \Rightarrow AB^{۲}.DC + AC^{۲}.DB$$

$$= AD^{۲}\underbrace{(DC + DB)}_{BC} + BD.DC\underbrace{(DC + DB)}_{BC}$$

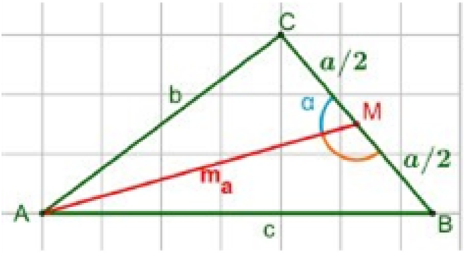
$$AB^{۲}.DC + AC^{۲}.DB = AD^{۲}.BC + DB.DC.BC$$

$$DC = DB = \frac{a}{۲}, AC = b, \Rightarrow AB = c$$

$$\Rightarrow \frac{a}{۲}\times c^{۲} + \frac{a}{۲}\times b^{۲} = AD^{۲}\times a + \frac{a}{۲}\times\frac{a}{۲}\times a \Rightarrow \frac{a}{۲}(c^{۲} + b^{۲}) = \frac{a}{۲}\left(۲AD^{۲} + \frac{a^{۲}}{۲}\right)$$

$$\Rightarrow b^{۲} + c^{۲} = ۲AD^{۲} + \frac{a^{۲}}{۲}$$

۱۶



$$\overset{\triangle}{ACM}: b^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + AM^2 - 2\times\frac{a}{2}\times AM\times \cos\alpha$$

$$b^2 = \frac{a^2}{4} + AM^2 - a.AM.\cos\alpha \quad (1)$$

$$\overset{\triangle}{ABM}: c^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + AM^2 - 2\times\frac{c}{2}\times AM\times \cos(180^\circ - \alpha)$$

$$c^2 = \frac{a^2}{4} + AM^2 + a.AM.\cos\alpha \quad (2)$$

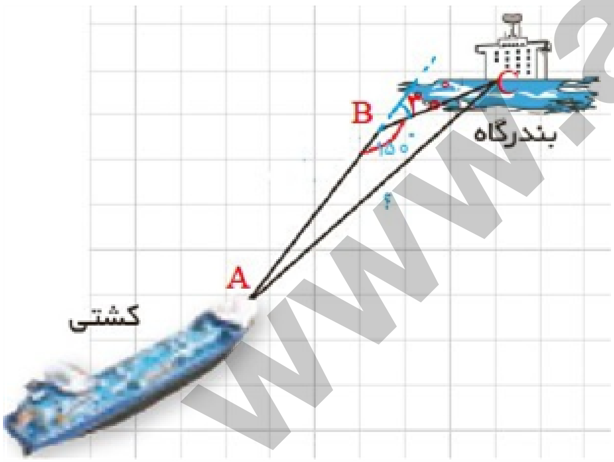
$$\xrightarrow{(1)+(2)} b^2 + c^2 = \frac{a^2}{4} + AM^2 - a.AM.\cos\alpha + \frac{a^2}{4} + AM^2 + a.AM.\cos\alpha$$

$$\Rightarrow b^2 + c^2 = \frac{a^2}{2} + 2AM^2$$

$AB = c = 4\ ,\ AC = b = 6\ ,\ BC = a = 8$

$$b^2 + c^2 = \frac{a^2}{2} + 2AM \Rightarrow AM = \frac{2\left(b^2 + c^2\right) - a^2}{4} \Rightarrow AM = \frac{2(36+16) - 64}{4} \Rightarrow AM = 10$$

۱۷



$AB = 60\times 1 = 60\,km\ ,\ BC = 40\times 0/5 = 20\,km$

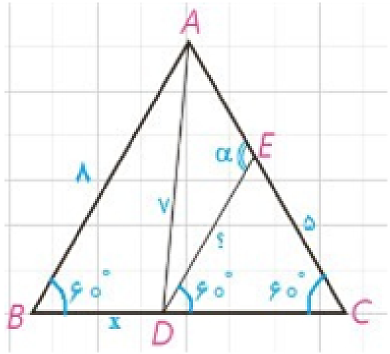
$$AC^2 = 60^2 + 20^2 - 2\times 60\times 20\times \cos 150^\circ$$

$$= 3600 + 400 - 2\times 1200\times\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$\Rightarrow AC^2 = 4000 + 1200\sqrt{3} = 400\left(10 + 3\sqrt{3}\right)$$

$$\Rightarrow AC = 20\sqrt{10 + 3\sqrt{3}}$$

۱۸



$$۷^۲ = x^۲ + ۸^۲ - ۲ \times x \times ۸ \times \cos ۶۰° \Rightarrow ۴۹ = x^۲ + ۶۴ - ۸x$$

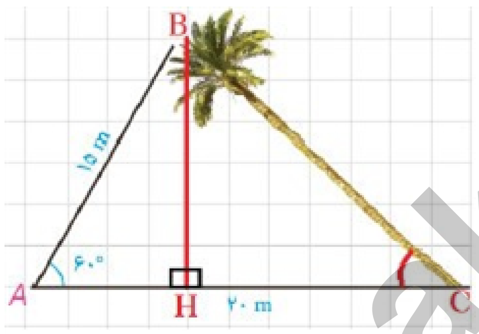
$$\Rightarrow x^۲ - ۸x + ۱۵ = ۰ \Rightarrow (x-۵)(x-۳) = ۰ \Rightarrow x = ۵ \,,\, x = ۳$$

$$\xrightarrow{BD < DC} BD = ۳ \,,\, DC = ۵$$

$DC = CE = ۵$ در نتیجه مثلث DCE متساوی‌الساقین است و چون یک زاویه $۶۰°$ دارد پس متساوی‌الاضلاع است یعنی $DE = ۵$. در مثلث DCE زاویه‌ی α یک زاویه خارجی است پس:

$$\alpha = ۶۰° + ۶۰° \Rightarrow \alpha = ۱۲۰°$$

۱۹



الف) $a^۲ = ۲۰^۲ + ۱۵^۲ - ۲ \times ۲۰ \times ۱۵ \times \cos ۶۰°$

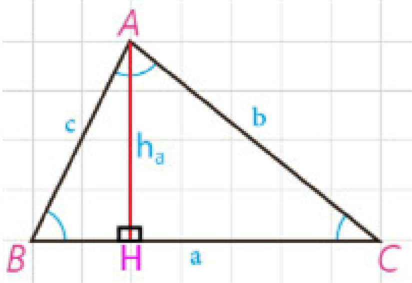
$$۴۰۰ + ۲۲۵ - ۳۰۰ \Rightarrow a^۲ = ۳۲۵ \Rightarrow a = ۵\sqrt{۱۳}$$

ب) $\dfrac{۵\sqrt{۱۳}}{\sin ۶۰°} = \dfrac{۱۵}{\sin C} \Rightarrow \sin C = \dfrac{۱۵ \times \frac{\sqrt{۳}}{۲}}{۵\sqrt{۱۳}} = \dfrac{۳\sqrt{۳}}{۲\sqrt{۱۳}} \approx ۰/۷۲$

پ) $\sin ۶۰° = \dfrac{BH}{AB} \Rightarrow \dfrac{\sqrt{۳}}{۲} = \dfrac{BH}{۱۵} \Rightarrow BH = \dfrac{۱۵\sqrt{۳}}{۲}$

تلفن تماس: ۰۲۶۳۳۴۰۸۹۴۴

۲۰



$$\left.\begin{array}{l} S = \frac{۱}{۲}bc \\ S = \frac{۱}{۲}a.h_a \end{array}\right\} \Rightarrow bc = ah_a \xrightarrow{\text{دو طرف به توان ۲}}$$

$$(bc)^۲ = (ah_a)^۲ \Rightarrow b^۲c^۲ = a^۲h_a^۲$$

$$\Rightarrow b^۲c^۲ = (b^۲+c^۲)h_a^۲ \Rightarrow b^۲c^۲ = b^۲h_a^۲ + c^۲h_a^۲ \xrightarrow{\div b^۲c^۲h_a^۲}$$

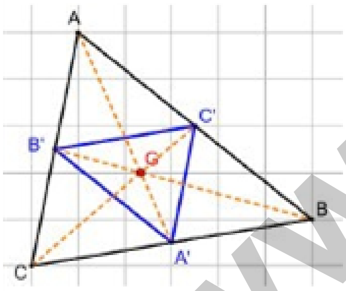
$$\frac{b^۲c^۲}{b^۲c^۲h_a^۲} = \frac{b^۲h_a^۲}{b^۲c^۲h_a^۲} + \frac{c^۲h_a^۲}{b^۲c^۲h_a^۲} \Rightarrow \frac{۱}{h_a^۲} = \frac{۱}{c^۲} + \frac{۱}{b^۲}$$

۲۱ در شکل راست اگر بازتاب C نسبت به خط BD و بازتاب E نسبت به DE و در شکل چپ اگر بازتاب B نسبت به خط AC را رسم کنیم بدون آنکه محیط تغییر کند، مساحت افزایش می‌یابد. منظور بازتاب مثلث BCD نسبت به BD و بازتاب مثلث EDF نسبت به DF و در شکل راست بازتاب مثلث ABC نسبت به AC در شکل چپ است.

$$\text{افزایش مساحت شکل چپ} = ۲\left(\frac{۱}{۲}\times ۳\times ۴\sqrt{۲}\times \text{Sin}\,۱۳۵\right) = ۱۲$$

$$\text{افزایش مساحت شکل راست} = ۲\left(\frac{۱}{۲}\times ۲\times ۶\times \text{Sin}\,۱۵۰ + \frac{۱}{۲}\times \sqrt{۳}\times ۲\times \text{Sin}\,۱۲۰\right) = ۹$$

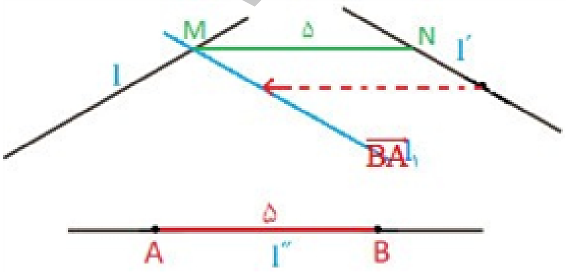
۲۲ الف) 'A وسط BC، 'B وسط AC و 'C وسط AB قرار دارند.



با توجه به خاصیت مرکز ثقل می‌دانیم که $GA' = \frac{۱}{۲}GA$ همچنین نقطه‌ی G بین A و 'A پس نقطه‌ی 'A مجانس نقطه‌ی A به مرکز تجانس G و نسبت تجانس $-\frac{۱}{۲}$ است. همین مطلب در مورد نقاط 'B و 'C نیز صدق می‌کند.

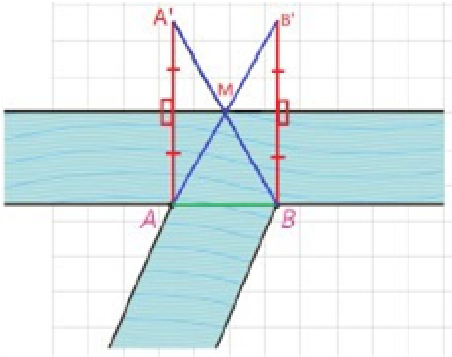
ب) با توجه به ویژگی تجانس مساحت مثلث 'A'B'C، $\frac{۱}{۴}$ مساحت مثلث ABC است.

۲۳ ابتدا روی خط "l پاره‌خط دلخواه AB به طول ۵ سانتی‌متر را مشخص می‌کنیم. خط 'l را تحت بردار $\overrightarrow{BA}$ انتقال می‌دهیم تا خط $l_۱$ به دست آید این خط l را در نقطه‌ای مانند M قطع می‌کند. از نقطه‌ی M موازی خط "l خطی رسم می‌کنیم تا خط 'l را در نقطه‌ی N قطع کند. پاره‌خط MN جواب مسئله است.

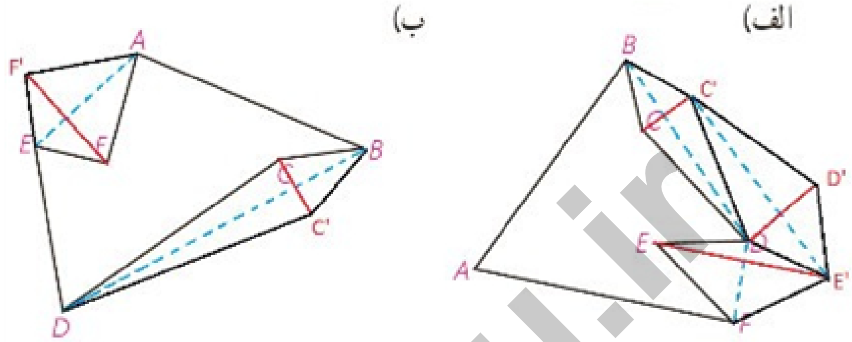


تلفن تماس: ۰۲۶۳۳۴۰۸۹۴۴

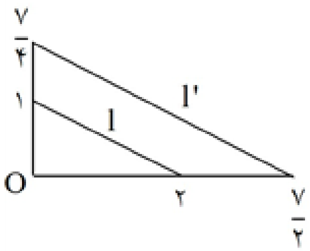
۲۴ با توجه به شکل واضح است که عرض رودخانه در طول مسیر ثابت درنظر گرفته شده است. پس یا از نقطه‌ی B یا از A روش هرون را برای پیدا کردن نقطه‌ی M اجرا می‌کنیم.



۲۵ الف) ب)



۲۶ با توجه به نسبت تجانس $\frac{۷}{۴}$ مثلث بزرگتر با وتر l' ایجاد می‌شود. حال اختلاف مساحت‌های مثلث‌ها برابر مساحت خواسته شده است:



$$S_{\text{مطلوب}} = S_{\text{مثلث بزرگ}} - S_{\text{مثلث کوچک}} = \frac{۱}{۲} \times \frac{۷}{۴} \times \frac{۷}{۲} - \frac{۱}{۲} \times ۱ \times ۲ = \frac{۳۳}{۱۶}$$

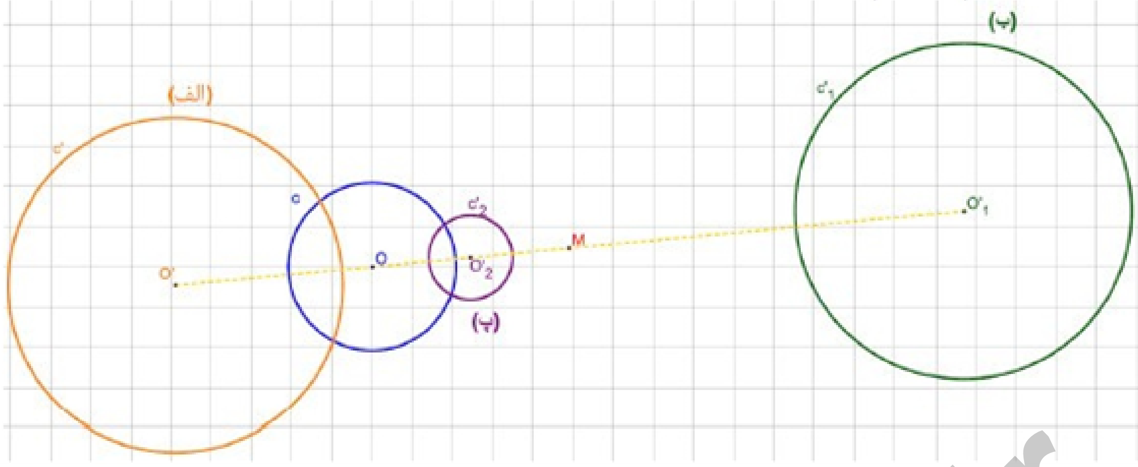
۲۷

$$\frac{S_{\text{تصویر مربع}}}{S_{\text{مربع اولیه}}} = \left(\frac{۲}{۳}\right)^{۲} = \frac{۴}{۹} \Rightarrow S_{\text{تصویر}} = \frac{۴}{۹} S_{\text{مربع}} \quad \text{و} \quad S_{\text{مربع}} - S_{\text{تصویر}} = ۵ \Rightarrow \frac{۵}{۹} S_{\text{مربع}} = ۵$$

$$\Rightarrow S_{\text{مربع اولیه}} = ۹ = a^{۲} \Rightarrow a = ۳ \quad \text{و} \quad \text{محیط مربع اولیه} = ۴a = ۱۲$$

تلفن تماس: ۰۲۶۳۳۴۰۸۹۴۴

۲۸ برای پیدا کردن مجانس دایره، مجانس مرکز دایره را به دست آورده، به مرکز نقطه‌ی به دست آمده و k برابر شعاع دایرهٔ اول، دایره‌ای ترسیم می‌کنیم.



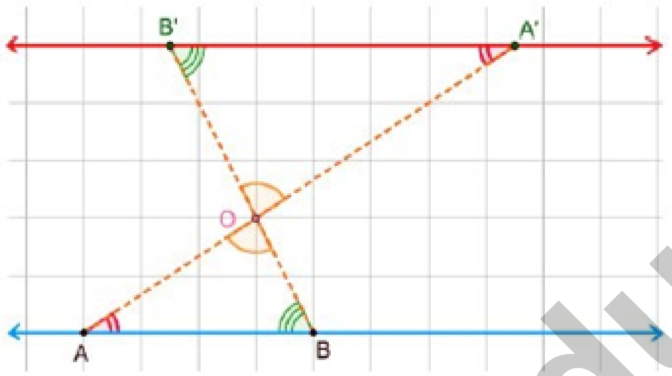
تلفن تماس: ۰۲۶۳۳۴۰۸۹۴۴

۲۹ الف) ۱) در حالتی که نقطه‌ی O روی خط AB قرار دارد و $k<0$ بدیهی است که نقاط A' و B' مجانس‌های نقاط A و B روی خط AB واقع می‌شوند؛ بنابراین $A'B'$ بر AB واقع است و شیب تغییر نمی‌کند.

۲) در حالتی‌که نقطه‌ی O روی خط AB قرار ندارد و $k<0$ در این صورت اگر نقاط A' و B' به‌ترتیب، مجانس‌های نقاط A و B باشند، طبق تعریف داریم:

$$\left.\begin{array}{l}\left.\begin{array}{l}OA'=k\,.\,OA\\ OB'=k\,.\,OB\end{array}\right\}\Rightarrow \dfrac{OA'}{OA}=\dfrac{OB'}{OB}=k\\ \widehat{A'OB'}=\widehat{AOB}\end{array}\right\}\xrightarrow{\text{(ض ز ض)}}\overset{\triangle}{AOB}\sim\overset{\triangle}{A'OB'}$$

$$\Rightarrow \widehat{OB'A'}=\widehat{OBA}\ ,\ \widehat{OA'B'}=\widehat{OAB}$$



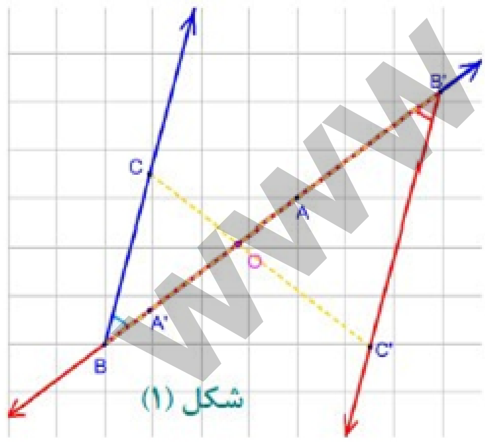
پس بنابر عکس قضیه خطوط موازی خط AB موازی خط $A'B'$ است بنابراین شیب خط ها در تجانس حفظ می‌شود.

ب) زاویه‌ی $\widehat{ABC}$ را در صفحه درنظر می‌گیریم:

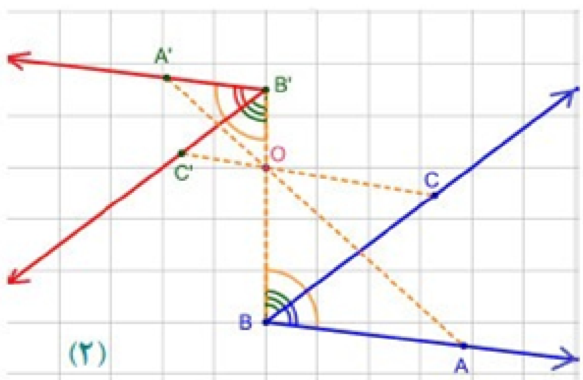
۱) اگر نقطه‌ی O روی رأس زاویه یعنی نقطه‌ی B باشد آن‌گاه مجانس زاویه یعنی $\widehat{A'B'C'}$ روی زاویه $\widehat{ABC}$ منطبق می‌شود. پس اندازه‌ی آن حفظ می‌شود.

۲) اگر نقطه‌ی O روی یکی از اضلاع باشد مانند شکل ۱ آن‌گاه با توجه به قضیه، تجانس شیب خط را حفظ می‌کند پس:

$$BC\parallel B'C'\ ,\ BB'\ \text{مورب}\xrightarrow{\text{ق خطوط موازی}}\widehat{ABC}=\widehat{A'B'C'}$$



شکل (۱)



(۲)

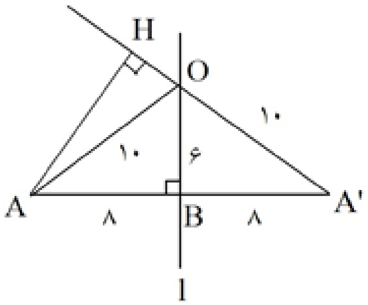
۳) اگر نقطه‌ی O نه روی اضلاع و نه روی رأس زاویه باشد مانند شکل ۲ با توجه به بند قبلی، تجانس شیب خط را حفظ می‌کند پس:

$$\left.\begin{array}{l}BC\parallel B'C'\ ,\ BB'\ \text{مورب}\xrightarrow{\text{ق خطوط موازی}}\widehat{CBB'}=\widehat{C'B'B}\\ AB\parallel A'B'\ ,\ BB'\ \text{مورب}\xrightarrow{\text{ق خطوط موازی}}\widehat{ABB'}=\widehat{A'B'B}\end{array}\right\}$$

$$\Rightarrow \widehat{ABB'}-\widehat{CBB'}=\widehat{A'B'B}-\widehat{C'B'B}\Rightarrow\widehat{ABC}=\widehat{A'B'C'}$$

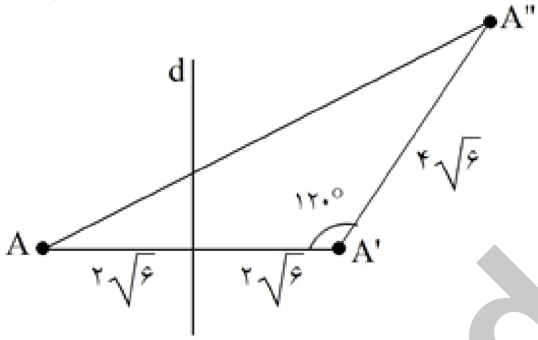
تلفن تماس: ۰۲۶۳۳۴۰۸۹۴۴

۳۰ بنا بر فرض سؤال، شکل مقابل را داریم و مساحت مثلث AOA' را از دو طریق نوشته و برابر می‌گذاریم تا AH حاصل شود:



$$2S_{AOA'} = AH \times OA' = OB \times AA' \Rightarrow AH = \frac{6 \times 16}{10} = 9/6$$

۳۱ بنا بر فرض سؤال، شکل زیر را داریم و برای آن قضیه کسینوس‌ها را می‌نویسیم:



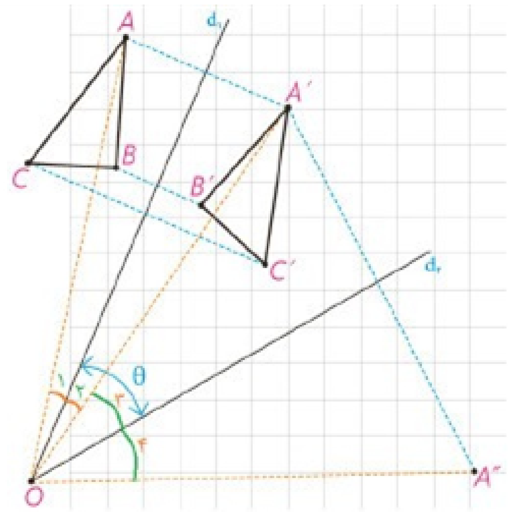
$$AA''^2 = \left(4\sqrt{6}\right)^2 + \left(4\sqrt{6}\right)^2 - 2 \times 4\sqrt{6} \times 4\sqrt{6} \times \cos 120 \Rightarrow AA'' = \sqrt{288}$$

۳۲ الف) خط d_1 محور بازتاب است پس نیمساز زاویه AOA' است

یعنی: $\hat{O}_1 = \hat{O}_2$

خط d_2 محور بازتاب است پس نیمساز زاویه $A'OA''$ است یعنی:

$\hat{O}_3 = \hat{O}_4$



$$\widehat{AOA''} = \hat{O}_1 + \hat{O}_2 + \hat{O}_3 + \hat{O}_4 \xrightarrow[\hat{O}_3 = \hat{O}_4]{\hat{O}_1 = \hat{O}_2}$$

$$\widehat{AOA''} = ۲\hat{O}_2 + ۲\hat{O}_3 \Rightarrow \widehat{AOA''} = ۲\underbrace{(\hat{O}_2 + \hat{O}_3)}_{\theta}$$

$$\Rightarrow \widehat{AOA''} = ۲\theta$$

ب) بنابر اثبات الف به روش مشابه:

$$\widehat{BOB''} = \widehat{COC''} = ۲\theta$$

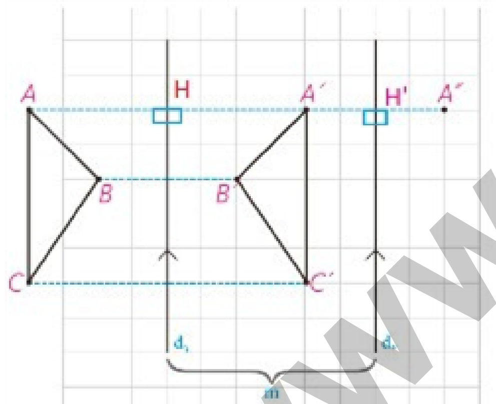
پ) با دورانی به مرکز O نقطه‌ی برخورد دو خط بازتاب d_1 و d_2 و زاویه‌ای به اندازه‌ی دو برابر زاویه بین دو خط (۲θ) می‌توان مثلث $A''\overset{\triangle}{B}''C''$ را تصویر مثلث $A\overset{\triangle}{B}C$ دانست.

نتیجه می‌گیریم، ترکیب دو بازتاب که محورهای بازتاب متقاطع باشند یک دوران است.

۳۳ الف) $AA'' = AH + HA' + A'H' + H'A''$

$$\xrightarrow[A'H' = H'A'']{AH = HA'} AA' = ۲HA' + ۲A'H'$$

$$\Rightarrow AA'' = ۲\underbrace{(HA' + A'H')}_{m} \Rightarrow AA'' = ۲m$$



ب) بنا بر اثبات قسمت الف به روش مشابه نتیجه می‌گیریم که:

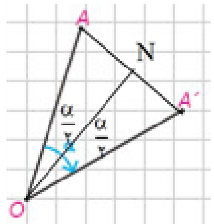
$BB'' = CC'' = ۲m$

پ) با انتقالی تحت بردار انتقالی که اندازه‌ی آن دو برابر فاصله‌ی بین دو خط بازتاب d_1 و d_2 یعنی $۲m$ و راستای آن عمود بر این دو خط است، می‌توان مثلث $A''\overset{\triangle}{B}''C''$ را تصویر مثلث $A\overset{\triangle}{B}C$ دانست.

نتیجه می‌گیریم، ترکیب دو بازتابی که محورهای بازتاب موازی یک‌دیگر هستند یک انتقال است.

تلفن تماس: ۰۲۶۳۳۴۰۸۹۴۴

۳۴ الف) نیمساز زاویه $A\hat{O}A'$ را رسم می‌کنیم.



$$\left.\begin{array}{l} ON = ON \\ \frac{\alpha}{2} = \frac{\alpha}{2} \\ AO = A'O \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{ض ز ض}} \overset{\triangle}{AON} = \overset{\triangle}{A'ON} \Rightarrow \begin{cases} AN = A'N \\ A\hat{N}O = A'\hat{N}O \end{cases}$$

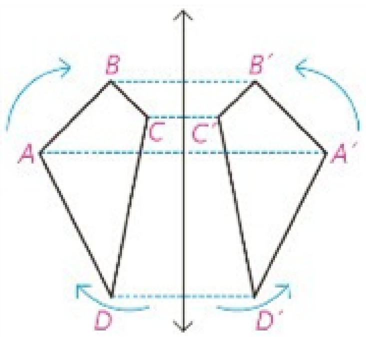
$$A\hat{N}O + A'\hat{N}O = 180 \Rightarrow A\hat{N}O = A'\hat{N}O = 90^\circ$$

پس ON عمودمنصف 'AA است و از نقطه O می‌گذرد.

ب) کافیست عمودمنصف 'AA و 'BB را رسم کنیم، محل تلاقی مرکز دوران مثلث ABC می‌باشد.

۳۵ جهت حرکت در بازتاب این نقاط خلاف جهت عقربه‌های ساعت است.

خیر نمی‌توان گفت بازتاب، جهت شکل را حفظ می‌کند.

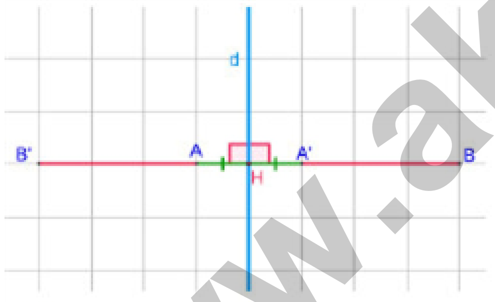


۳۶

$B'H = BH$ بنا بر تعریف بازتاب $\Rightarrow B'A + AH$

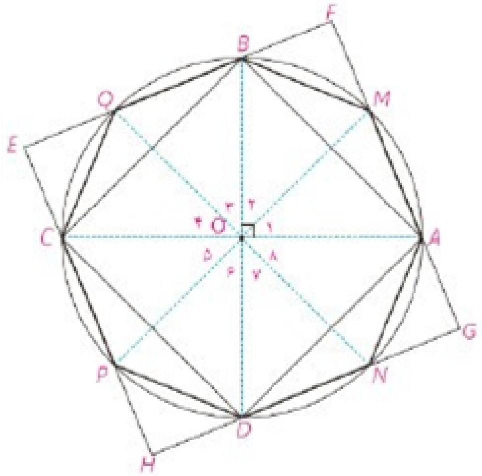
$$= BA' + A'H \xrightarrow[\text{بنا بر تعریف بازتاب}]{AH = A'H}$$

$$B'A = BA'$$



$$\left.\begin{array}{l} AB = AA' + A'B \\ A'B' = AA' + B'A \\ B'A = BA' \end{array}\right\} \Rightarrow AB = A'B'$$

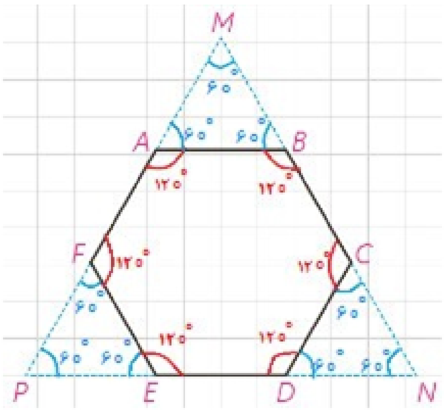
۳۷ در چهارضلعی $ABCD$ قطر هم‌دیگر را نصف می‌کنند و با هم برابرند پس مستطیل است و چون قطرها بر هم عمودند نتیجه می‌گیریم که مربع است.
عمودمنصف هر ضلع نیمساز رأس مقابل نیز هست. پس:



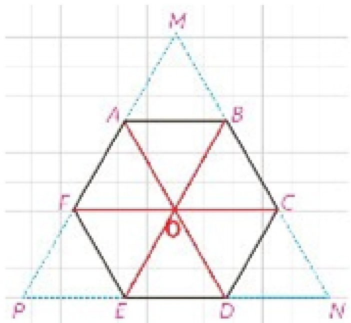
$$O_1 = O_2 = O_3 = O_4 = O_5 = O_6 = O_7 = O_8 = 45^\circ$$
$$\Rightarrow \overset{\frown}{AM} = \overset{\frown}{MB} = \overset{\frown}{BQ} = \overset{\frown}{QC} = \overset{\frown}{CP} = \overset{\frown}{PD} = \overset{\frown}{DN} = \overset{\frown}{NA}$$
$$\Rightarrow AM = MB = BQ = QC = CP = PD = DN = NA$$

تلفن تماس: ۰۲۶۳۳۴۰۸۹۴۴

۳۸ الف) اندازه هر زاویه داخلی شش ضلعی منتظم $120°$ است. بنابراین زاویه‌های خارجی $60°$ است. با توجه به شکل و مجموع زوایای داخلی هر مثلث نتیجه می‌گیریم که $\widehat{M} = \widehat{N} = \widehat{P} = 60°$ و در نتیجه مثلث MNP متساوی‌الساقین است.

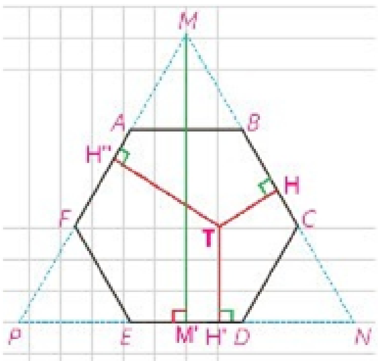


ب) اگر قطرهای شش‌ضلعی منتظم را رسم کنیم آن‌را به شش مثلث متساوی‌الاضلاع تقسیم می‌کنیم و در مثلث MNP، ۹ مثلث هم‌نهشت ایجاد می‌شود.



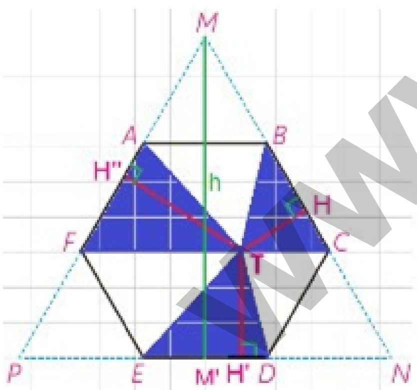
$$\frac{S_{\text{شش ضلعی}}}{S_{MNP}} = \frac{6S_{MAB}}{9S_{MAB}} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$$

پ) مجموع فواصل هر نقطه درون مثلث متساوی‌الاضلاع مقداری ثابت است و این مقدار با طول ارتفاع مثلث برابر است:



$$TH + TH' + TH'' = MM'$$

ت)



$$S_{TBC} + S_{TDE} + S_{TAF} = S_{TAB} + S_{TEF} + S_{TCD}$$

$$S_{TAF} + S_{TDE} + S_{TBC} = \frac{1}{2}AF.TH'' + \frac{1}{2}DE.TH' + \frac{1}{2}BC.TH$$

$$\xrightarrow{AF = ED = BC = a} S_{TAF} + S_{TDE} + S_{TBC}$$

$$= \frac{1}{2}a\underbrace{(TH'' + TH' + TH)}_{h} = \frac{1}{2}ah \Rightarrow S_{TAF} + S_{TDE} + S_{TBC} = \frac{1}{2}ah$$

$$S_{\overset{\Delta}{MNP}} = \frac{1}{2}NP.h \xrightarrow{NP = 3a} S_{\overset{\Delta}{MNP}} = \frac{3}{2}a.h \Rightarrow \frac{S_{TAF} + S_{TDE} + S_{TBC}}{S_{MNP}} = \frac{\frac{1}{2}ah}{\frac{3}{2}a.h}$$

$$\Rightarrow \frac{S_{TAF} + S_{TDE} + S_{TBC}}{S_{MNP}} = \frac{1}{3}$$

مساحت مثلث‌های آبی رنگ $\frac{1}{3}$ مساحت مثلث MNP است و مساحت شش‌ضلعی $\frac{2}{3}$ مساحت مثلث MNP

مساحت مثلث‌های سفید و آبی برابر با مساحت شش‌ضلعی است پس مساحت مثلث‌های سفید هم برابر با

$S_{TBC} +$

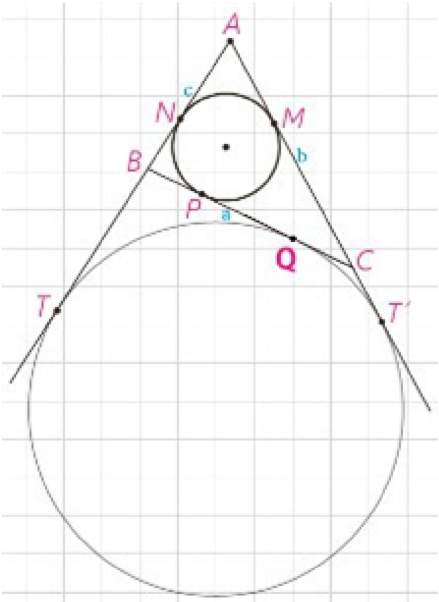
۳۹

$\overset{\triangle}{OHD} : \hat{H} = ۹۰^\circ \xrightarrow{OD = r} \sin\frac{۱۸۰}{n} = \frac{HD}{r} \xrightarrow{\times ۲} ۲\sin\frac{۱۸۰}{n} = \frac{۲HD}{r} \xrightarrow{۲HD = CD}$

$CD = ۲r\sin\frac{۱۸۰}{n}$

$\overset{\triangle}{OMB} : \hat{M} = ۹۰^\circ \xrightarrow{OM = r} tg\frac{۱۸۰}{n} = \frac{MB}{r} \xrightarrow{\times ۲} ۲tg\frac{۱۸۰}{n} = \frac{۲MB}{r} \xrightarrow{۲MB = AB}$

$AB = ۲r\,tg\frac{۱۸۰}{n}$



$$\left.\begin{array}{l} AM = AN = P - a \\ AN = c - BN \\ AM = b - CM \end{array}\right\} \Rightarrow AM + AN = b + c - (BN + CM) \xrightarrow[CM = CP\,,\ BN = BP]{AM = AN}$$

$$2AM = b + c - \underbrace{(BP + CP)}_{a} = b + c - a \Rightarrow 2AM = 2p - 2a \Rightarrow AM = AN = p - a$$

$$\left.\begin{array}{l} BN = BP = P - b \\ BN = c - AN \\ BP = a - CP \end{array}\right\} \Rightarrow BN + BP = a + c - (AN + CP) \xrightarrow[AN = AM\,,\ CP = CM]{BP = BN}$$

$$2BN = a + c - \underbrace{(AM + CM)}_{b} = a + c - b \Rightarrow 2BN = 2p - 2b \Rightarrow BN = BP = p - b$$

$$\left.\begin{array}{l} CM = CP = P - C \\ CM = b - AM \\ CP = a - BP \end{array}\right\} \Rightarrow CM + CP = b + A - (AM + BP) \xrightarrow[AN = AM\,,\ BP = BN]{CM = CP}$$

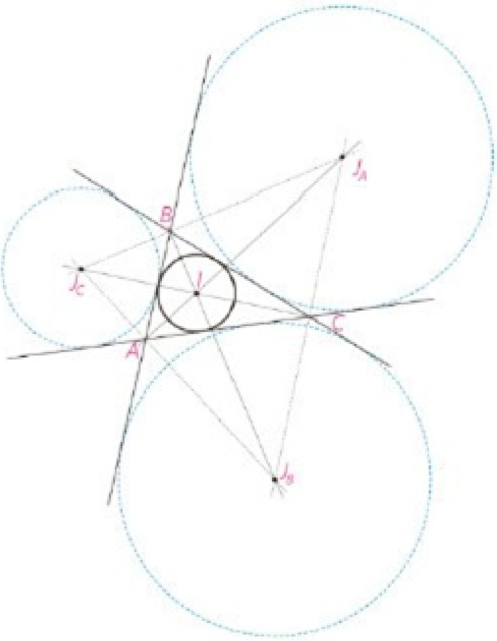
$$2CM = b + a - \underbrace{(AN + BN)}_{c} = b + a - c \Rightarrow 2CM = 2p - 2c \Rightarrow CM = CP = p - c$$

$$AT = AT' = P$$

$$AT + AT' - c + BT + b + CT' \xrightarrow[BT = BQ\,,\ CT' = CQ]{AT = AT'} 2AT = c + b + \underbrace{BQ + CQ}_{a}$$

$$\Rightarrow 2AT = 2p \Rightarrow AT = AT' = p$$

۴۱ الف)



$$S = rp \Rightarrow \frac{۱}{r} = \frac{p}{s}$$

$$r_a = \frac{S}{p-a} \Rightarrow \frac{۱}{r_a} = \frac{p-a}{S}$$

$$r_b = \frac{S}{p-b} \Rightarrow \frac{۱}{r_b} = \frac{p-b}{S}$$

$$r_c = \frac{S}{p-c} \Rightarrow \frac{۱}{r_c} = \frac{p-c}{S}$$

$$\frac{۱}{r_a} + \frac{۱}{r_b} + \frac{۱}{r_c} = \frac{p-a}{S} + \frac{p-b}{S} + \frac{p-c}{S}$$

$$= \frac{۳p-(a+b+c)}{S} = \frac{۳p-۲p}{S} = \frac{p}{S} = \frac{۱}{r}$$

$$\Rightarrow \frac{۱}{r_a} + \frac{۱}{r_b} + \frac{۱}{r_c} = \frac{۱}{r}$$

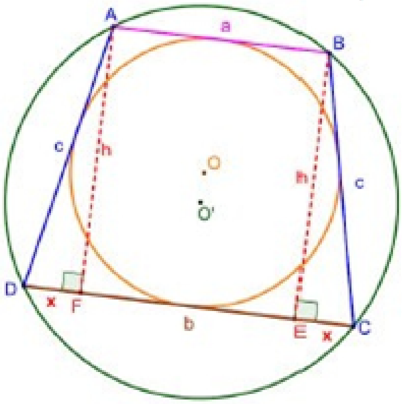
ب)

$$\left.\begin{array}{l} S = \frac{۱}{۲}ah_a \Rightarrow h_a = \frac{۲S}{a} \Rightarrow \frac{۱}{h_a} = \frac{a}{۲S} \\ S = \frac{۱}{۲}bh_b \Rightarrow h_b = \frac{۲S}{b} \Rightarrow \frac{۱}{h_b} = \frac{b}{۲S} \\ S = \frac{۱}{۲}ch_c \Rightarrow h_c = \frac{۲S}{c} \Rightarrow \frac{۱}{h_c} = \frac{c}{۲s} \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{۱}{h_a} + \frac{۱}{h_b} + \frac{۱}{h_c} = \frac{a}{۲S} + \frac{b}{۲S} + \frac{c}{۲S}$$

$$= \frac{a+b+c}{۲S} = \frac{۲p}{۲S} = \frac{p}{S} = \frac{۱}{r} \Rightarrow \frac{۱}{h_a} + \frac{۱}{h_b} + \frac{۱}{h_c} = \frac{۱}{r}$$

تلفن تماس: ۰۲۶۳۳۴۰۸۹۴۴

۴۲ چون ذوزنقه‌ی ABCD محاطی است پس متساوی‌الساقین است و چون محیطی است مجموع دو ضلع مقابل با مجموع دو ضلع مقابل دیگر برابر است. در نتیجه: $۲c = a + b$ و مثلث ADF قائم‌الزاویه است.



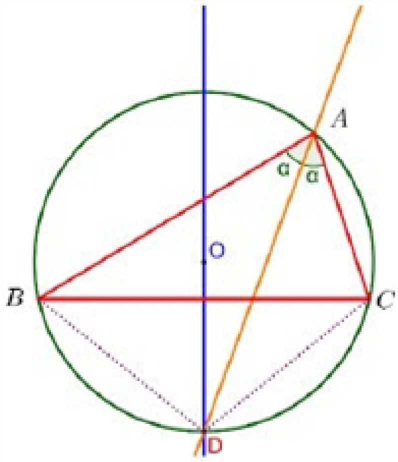
$$۲c = a + b \Rightarrow c = \frac{a+b}{۲} , b = ۲x + a \Rightarrow x = \frac{b-a}{۲}$$

$$h^۲ = c^۲ - x^۲ \Rightarrow h^۲ = \left(\frac{a+b}{۲}\right)^۲ - \left(\frac{b-a}{۲}\right)^۲$$

$$\Rightarrow h^۲ = \frac{۴ab}{۴} \Rightarrow h = \sqrt{ab}$$

$$S_{ABCD} = \frac{۱}{۲}(a+b) \times h \Rightarrow S_{ABCD} = \frac{۱}{۲}(a+b)\sqrt{ab}$$

۴۳ فرض کنیم نیمساز زاویه‌ی BAC دایره‌ی محاطی را در نقطه‌ی D قطع کند:



$$\widehat{BAD} = \widehat{CAD} \xrightarrow{\text{محاطی}} \overset{\frown}{BD} = \overset{\frown}{CD}$$

$$\xrightarrow{\text{ق کمان ها و وترهای مساوی}} BD = CD$$

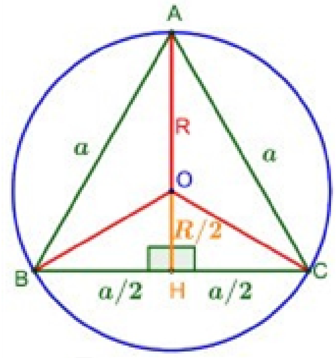
فاصله‌ی نقطه‌ی D از دو نقطه‌ی B و C به یک اندازه است پس بنا بر خاصیت عمودمنصف نقطه‌ی D روی عمودمنصف پاره‌خط BC نیز قرار دارد.

تلفن تماس: ۰۲۶۳۳۴۰۸۹۴۴

۴۴ مرکز دایره‌ی محیطی نقطه‌ی O محل برخورد عمودمنصف‌های اضلاع مثلث است و چون مثلث متساوی‌الاضلاع است نقطه‌ی O محل برخورد میانه‌ها هم هست. بنابراین:

راه اول:

$$AB = BC = AC = a \quad , \quad BH = CH = \frac{a}{۲}$$

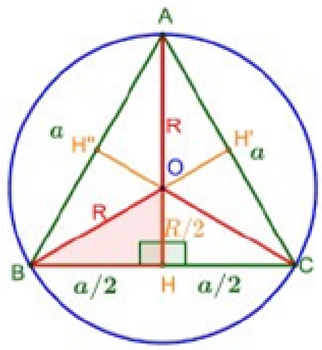


$$\left.\begin{array}{l} OH = \frac{OA}{۲} \Rightarrow OH = \frac{R}{۲} \Rightarrow AH = R + \frac{R}{۲} = \frac{۳}{۲}R \\ \overset{\triangle}{ACH} : H = ۹۰^\circ \Rightarrow AH = \sqrt{AC^۲ + CH^۲} \\ \Rightarrow AH = \frac{\sqrt{۳}}{۲}a \end{array}\right\}$$

$$\Rightarrow \frac{\sqrt{۳}}{۲}a = \frac{۳}{۲}R \Rightarrow a = \frac{۳R}{\sqrt{۳}} \Rightarrow a = R\sqrt{۳}$$

$$S_{ABC} = \frac{\sqrt{۳}}{۴}a^۲ \Rightarrow S_{ABC} = \frac{\sqrt{۳}}{۴}\left(R\sqrt{۳}\right)^۲ \Rightarrow S_{ABC} = \frac{۳\sqrt{۳}}{۴}R^۲$$

راه دوم: با توجه به شکل مثلث ABC از شش مثلث هم‌نهشت ساخته شده است. این مثلث‌های به حالت (ض ز ض) هم‌نهشت هستند.



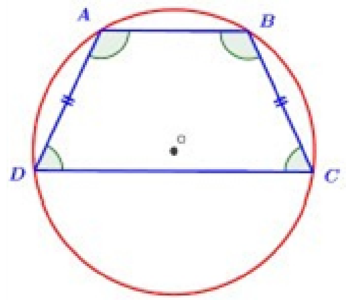
$$\overset{\triangle}{OBH} : H = ۹۰^\circ \Rightarrow BH = \sqrt{R^۲ - \left(\frac{R}{۲}\right)^۲} = \frac{R}{۲}\sqrt{۳}$$

$$S_{ABC} = ۶S_{OBH} \Rightarrow S_{ABC} = ۶ \times \frac{۱}{۲} \times \frac{R}{۲} \times \frac{R}{۲}\sqrt{۳}$$

$$\Rightarrow S_{ABC} = \frac{۳\sqrt{۳}}{۴}R^۲$$

تلفن تماس: ۰۲۶۳۳۴۰۸۹۴۴

۴۵ فرض: ذوزنقه متساوی‌الساقین است. حکم: ذوزنقه محاطی است.



$$\left.\begin{array}{l}\hat{A}+\hat{D}=180^\circ \xrightarrow{\hat{C}=\hat{D}} \hat{A}+\hat{C}=180^\circ \\ \hat{A}+\hat{D}=180^\circ \xrightarrow{\hat{A}=\hat{B}} \hat{B}+\hat{D}=180^\circ\end{array}\right\}$$

$\Rightarrow$ ذوزنقه ABCD محاطی است

فرض: ذوزنقه محاطی است. حکم: ذوزنقه متساوی‌الساقین است.

$$AB \parallel DC \ , \ AD \text{ مورب } \xrightarrow{\text{ق خطوط موازی}} \left.\begin{array}{l}\hat{A}+\hat{D}=180^\circ \\ \hat{A}+\hat{C}=180^\circ\end{array}\right\}$$

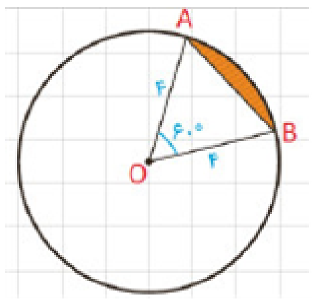
$$\Rightarrow \hat{A}+D=\hat{A}+\hat{C} \Rightarrow \hat{D}=\hat{C} \xrightarrow{\text{ق زاویه های مکمل}} \hat{A}=\hat{B}$$

در این ذوزنقه زاویه‌های مجاور به ساق برابرند در نتیجه ذوزنقه متساوی‌الساقین است.

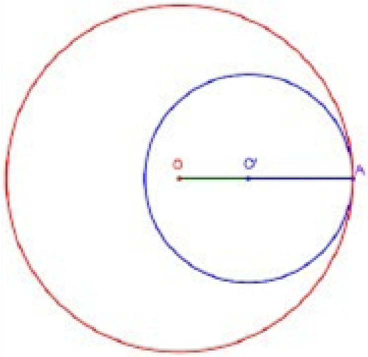
۴۶ مثلث OAB متساوی‌الساقین است و $\hat{O}=60^\circ$ پس این مثلث متساوی‌الاضلاع است.

مساحت مثلث OAB - مساحت قطاع ۶۰ درجه = مساحت قسمت رنگی (A)

$$A=\frac{\pi r^2}{360}\alpha-\frac{\sqrt{3}}{4}\times r^2 \Rightarrow A=\frac{16\pi}{360}\times 60-4\sqrt{3}=\frac{8}{3}\pi-4\sqrt{3}$$



۴۷ با توجه به شکل $OA = R$ و $O'A = R'$ در نتیجه:



مساحت ناحیه محدود بین دو دایره $= \pi R^2 - \pi R'^2 = 16\pi$

$$\Rightarrow R^2 - R'^2 = 16 \Rightarrow (R - R')(R + R') = 16$$

$$\xrightarrow{OO' = R - R' = 2} 2(R + R') = 16 \Rightarrow R + R' = 8$$

$$\begin{cases} R + R' = 8 \\ R - R' = 2 \end{cases} \Rightarrow 2R = 10 \Rightarrow R = 5 \,,\, R' = 3$$

۴۸ مجموع سه قطاع با زاویه‌ی ۱۲۰ درجه تشکیل یک دایره کامل می‌دهد بنابراین داریم:

طول نخ $= 2r + 2r + 2r +$ محیط یک دایره $= 6r + 2\pi r$

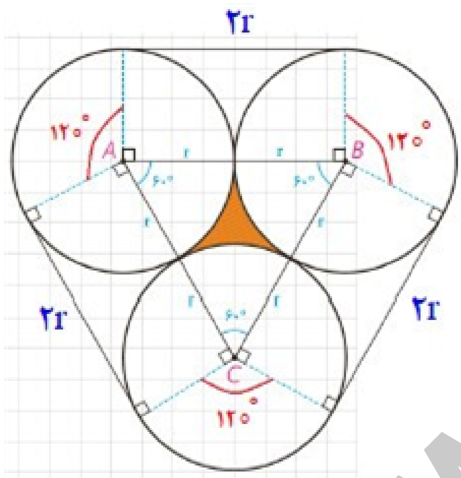
مجموع سه قطاع با زاویه ۶۰ درجه تشکیل یک نیم‌دایره می‌دهد بنابراین داریم:

مساحت ناحیه هاشور خورده =

مساحت مثلث ABC - مساحت نیم‌دایره

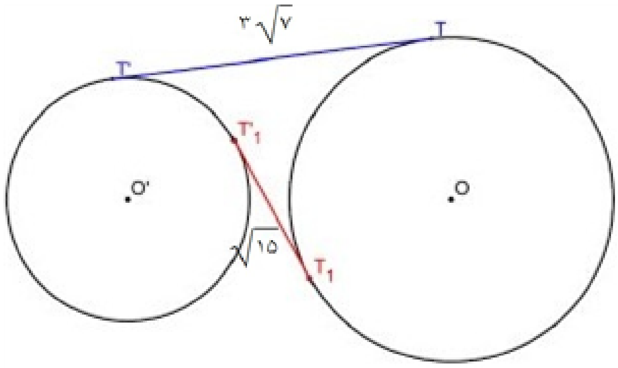
مساحت ناحیه هاشور خورده =

$$\frac{\sqrt{3}}{4}(2r)^2 - \frac{\pi r^2}{2} = \frac{4\sqrt{3}}{4}r^2 - \frac{\pi r^2}{2} = r^2\left(\sqrt{3} - \frac{\pi}{3}\right)$$



تلفن تماس: ۰۲۶۳۳۴۰۸۹۴۴

۴۹

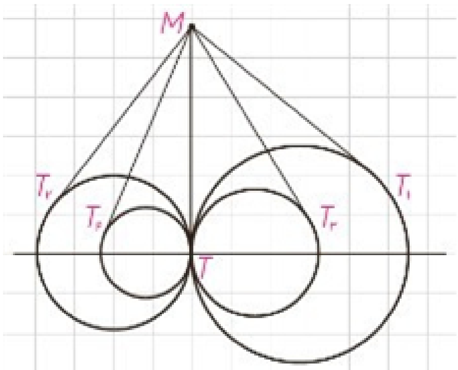


$$\begin{cases} TT'^{۲} = d^{۲} - (R^{۲} - R')^{۲} \\ T_{۱}T_{۲}^{۲} = d^{۲} - (R + R')^{۲} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} ۶۳ = ۶۴ - (R - R')^{۲} \\ ۱۵ = ۶۴ - (R + R')^{۲} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} R - R' = ۱ \\ R + R' = ۷ \end{cases} \Rightarrow ۲R = ۸ \Rightarrow R = ۴ \Rightarrow R' = ۳$$

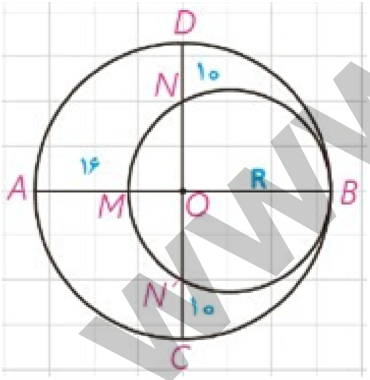
۵۰ از هر نقطه خارج دایره طول مماس‌های رسم شده با هم برابرند. بنابراین داریم:



$$\left.\begin{matrix} MT = MT_{۲} \\ MT = MT_{۴} \\ MT = MT_{۱} \\ MT = MT_{۲} \end{matrix}\right\}$$

$$\Rightarrow MT = MT_{۱} = MT_{۲} = MT_{۳} = MT_{۴}$$

۵۱



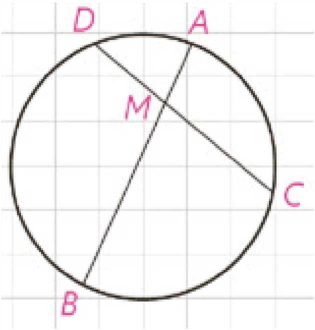
$$OB \,.\, OM = ON \,.\, ON' \Rightarrow R(R - ۱۶) = (R - ۱۰)(R - ۱۰)$$

$$R^{۲} - ۱۶R = R^{۲} - ۲۰R + ۱۰۰ \Rightarrow ۴R = ۱۰۰ \Rightarrow R = ۲۵$$

$$R' = \frac{MB}{۲} \Rightarrow R' = \frac{۲R - ۱۶}{۲} \Rightarrow R' = \frac{۵۰ - ۱۶}{۲} = ۱۷$$

تلفن تماس: ۰۲۶۳۳۴۰۸۹۴۴

۵۲



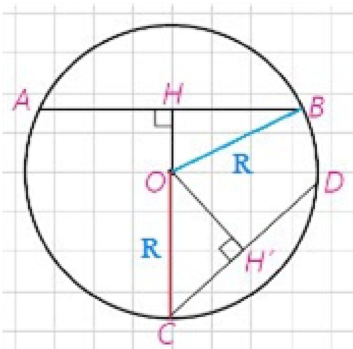
$$\frac{DM}{MC}=\frac{۱}{۲}\Rightarrow\frac{DM}{DC}=\frac{۱}{۳}\Rightarrow\frac{DM}{۹}=\frac{۱}{۳}\Rightarrow DM=۳\Rightarrow MC=۶$$

$$DM.MC=AM.BM\xrightarrow{AM=x}۳\times۶=x(۱۱-x)$$

$$x^{۲}-۱۱x+۱۸=۰\Rightarrow(x-۹)(x-۲)=۰\Rightarrow x=۲\quad,\quad x=۹$$

پس $\frac{AM}{MB}=\frac{۲}{۹}$ یا $\frac{AM}{MB}=\frac{۹}{۲}$

۵۳



فرض : $AB>CD$ حکم : $OH<OH'$

$$OB=OC=R\quad,\quad BH=\frac{AB}{۲}\quad,\quad CH'=\frac{CD}{۲}\quad(۱)$$

$$\overset{\triangle}{OBH}:H=۹۰^{\circ}\Rightarrow BH^{۲}=R^{۲}-OH^{۲}$$

$$\overset{\triangle}{OCH'}=H'=۹۰^{\circ}\Rightarrow CH'^{۲}=R^{۲}-OH'^{۲}$$

$$AB>CD\Rightarrow\frac{AB}{۲}>\frac{CD}{۲}\xrightarrow{(۱)}BH>CH'\Rightarrow BH^{۲}>CH'^{۲}\Rightarrow R^{۲}-OH^{۲}>R^{۲}-OH'^{۲}$$

$$\Rightarrow -OH^{۲}>-OH'^{۲}\xrightarrow{\times(-۱)}OH^{۲}<OH'^{۲}\xrightarrow[OH'>۰]{OH>۰}OH<OH'$$

فرض : $OH<OH'$ حکم : $AB>CD$

$$OB=OC=R\quad,\quad ۲BH=AB\quad,\quad ۲CH'=CD\quad(۱)$$

$$\overset{\triangle}{OBH}:H=۹۰^{\circ}\Rightarrow OH^{۲}=R^{۲}-BH^{۲}$$

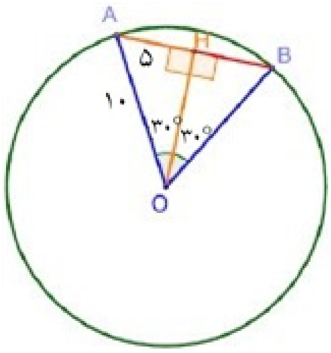
$$\overset{\triangle}{OCH'}:H'=۹۰^{\circ}\Rightarrow OH'^{۲}=R^{۲}-CH'^{۲}$$

$$OH<OH'\Rightarrow R^{۲}-BH^{۲}<R^{۲}-CH'^{۲}\Rightarrow -BH^{۲}<-CH'^{۲}\xrightarrow{\times(-۱)}BH^{۲}>CH'^{۲}$$

$$\xrightarrow[CH'>۰]{BH>۰}BH>CH'\xrightarrow{(۱)}AB>CD$$

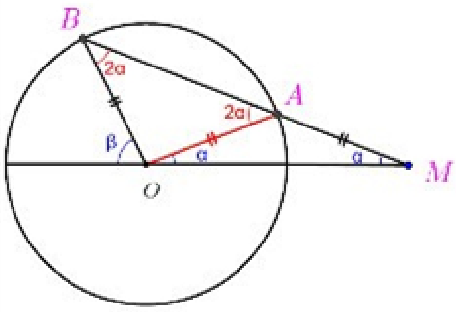
تلفن تماس: ۰۲۶۳۳۴۰۸۹۴۴

۵۴ می‌دانیم که مثلث OAB متساوی‌الاضلاع است. و برای پیدا کردن فاصله‌ی وتر از مرکز باید نقطه‌ی O را بر وتر عمود کنیم سپس طول پاره‌خط OH را به دست آوریم. قطر عمود بر وتر، وتر را نصف می‌کند بنابراین $AH = ۵$ پس در مثلث قائم‌الزاویه‌ی OAH داریم:



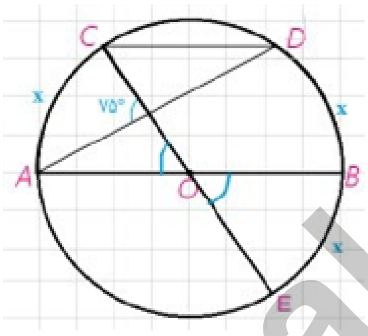
$$OH = \sqrt{OA^{۲} - AH^{۲}} \Rightarrow OH = \sqrt{۱۰^{۲} - ۵^{۲}} = \sqrt{۷۵} = ۵\sqrt{۳}$$

۵۵ با توجه به فرض مسئله، مثلث‌های OAM و OAB متساوی‌الساقین هستند.
در مثلث OBM داریم:



$$\beta = ۲\alpha + \alpha = ۳\alpha$$

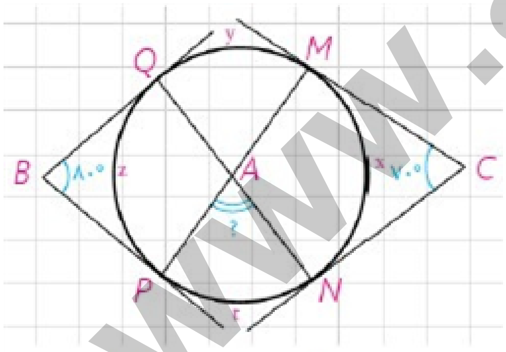
۵۶



$$۷۵° = \frac{(x + x) + x}{۲} \Rightarrow ۱۵۰° = ۳x \Rightarrow x = ۵۰°$$

$$\overset{\frown}{CD} = ۱۸۰° - ۲x \Rightarrow \overset{\frown}{CD} = ۱۸۰° - ۱۰۰° = ۸۰°$$

۵۷



$$۷۰° = \frac{(y + z + t) - x}{۲} \Rightarrow ۱۴۰° = (y + z + t) - x$$

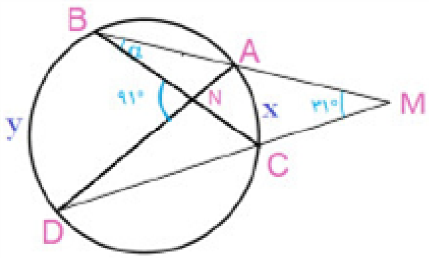
$$۸۰° = \frac{(y + x + t) - z}{۲} \Rightarrow ۱۸۰° = (y + x + t) - z$$

$$\begin{cases} ۱۴۰° = y + z + t - x \\ ۱۶۰° = y + x + t - z \end{cases} \Rightarrow ۳۰۰° = ۲(y + t)$$

$$\Rightarrow y + t = ۱۵۰°$$

$$\hat{A} = \frac{y + t}{۲} \Rightarrow \hat{A} = \frac{۱۵۰°}{۲} = ۷۵°$$

۵۸

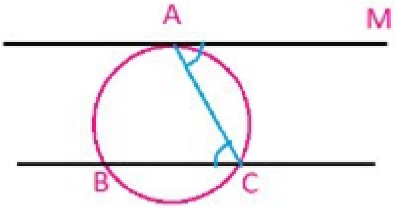


$$\hat{M} = \frac{y - x}{۲} \Rightarrow ۲ \times ۳۱^\circ = y - x$$

$$\hat{N} = \frac{y + x}{۲} \Rightarrow ۲ \times ۹۱^\circ = y + x$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y - x = ۶۲^\circ \\ y + x = ۱۸۲^\circ \end{cases} \Rightarrow ۲y = ۲۴۴^\circ \Rightarrow y = ۱۲۲^\circ \Rightarrow x = ۶۰^\circ$$

۵۹ ثابت می‌شود که کمان‌های محصور بین یک مماس و وتر موازی در یک دایره با هم برابرند.

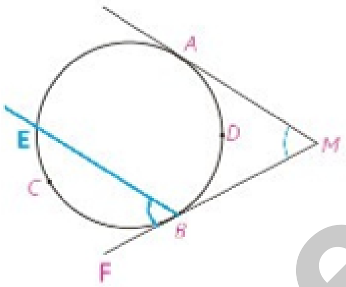


الف) در شکل مقابل بنا بر قضیه خطوط موازی $\widehat{MAC}=\widehat{ACB}$:

$$\left.\begin{array}{l}\text{ظلی}\ \widehat{MAC}=\frac{1}{2}\overset{\frown}{AC}\\ \text{محاطی}\ \widehat{ACB}=\frac{1}{2}\overset{\frown}{AB}\end{array}\right\}\xrightarrow{\widehat{MAC}=\widehat{ACB}}\frac{1}{2}\overset{\frown}{AC}=\frac{1}{2}\overset{\frown}{AB}\Rightarrow\overset{\frown}{AC}=\overset{\frown}{AB}$$

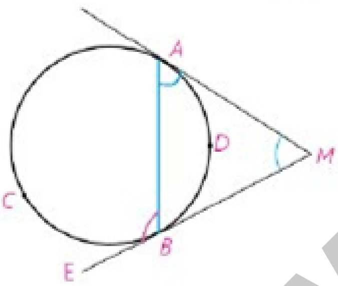
ب) $\widehat{M}=\dfrac{\overset{\frown}{ACB}-\overset{\frown}{ADB}}{2}$

راه اول: از B وتر BE را موازی AM رسم می‌کنیم. بنا بر قضیه خطوط موازی $\widehat{AMB}=\widehat{EBF}$



$$\widehat{AMB}=\widehat{EBF}=\frac{\overset{\frown}{EB}}{2}=\frac{\overset{\frown}{ACB}-\overset{\frown}{AE}}{2}\xrightarrow{\overset{\frown}{AE}=\overset{\frown}{ADB}}\widehat{AMB}=\frac{\overset{\frown}{ACB}-\overset{\frown}{ADB}}{2}$$

راه دوم: از نقطه‌ی A به B وصل می‌کنیم. در مثلث AMB زاویه $E\hat{B}A$ خارجی است پس:

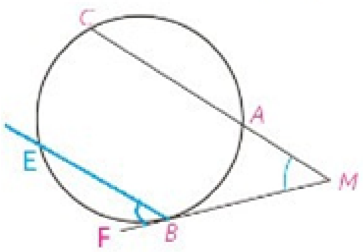


$$E\hat{B}A=M\hat{A}B+\hat{M}\Rightarrow\hat{M}=\underset{\text{ظلی}}{E\hat{B}A}-\underset{\text{ظلی}}{M\hat{A}B}$$

$$\Rightarrow\hat{M}=\frac{1}{2}\overset{\frown}{ACB}-\frac{1}{2}\overset{\frown}{ADB}\Rightarrow\hat{M}=\frac{\overset{\frown}{ACB}-\overset{\frown}{ADB}}{2}$$

پ) $\hat{M}=\dfrac{\overset{\frown}{BC}-\overset{\frown}{AB}}{2}$

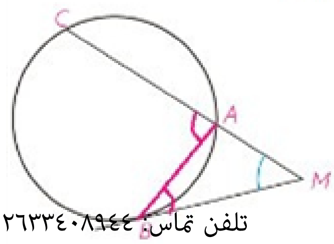
راه اول: از B خطی موازی MC رسم می‌کنیم تا دایره را در E قطع کند. بنا بر قضیه خطوط موازی $\widehat{CMB}=\widehat{EBF}$



$$\widehat{CMB}=\widehat{EBF}=\frac{\overset{\frown}{EB}}{2}=\frac{\overset{\frown}{BC}-\overset{\frown}{CE}}{2}\xrightarrow{\overset{\frown}{CE}=\overset{\frown}{AB}}$$

$$\widehat{CMB}=\widehat{EBF}=\frac{\overset{\frown}{BC}-\overset{\frown}{AB}}{2}$$

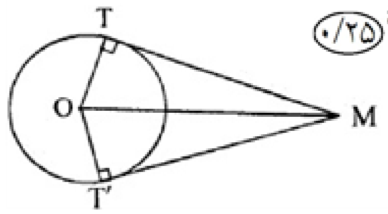
راه دوم: از نقطه‌ی A به B وصل می‌کنیم. در مثلث AMB زاویه $B\hat{A}C$ خارجی است پس:



$$\widehat{BAC}=\widehat{MBA}+\hat{M}\Rightarrow\hat{M}=\underset{\text{محاطی}}{\widehat{BAC}}-\underset{\text{ظلی}}{\widehat{MBA}}$$

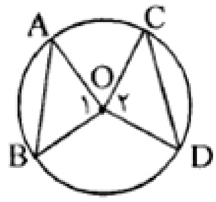
$$\Rightarrow\hat{M}=\frac{1}{2}\overset{\frown}{BC}-\frac{1}{2}\overset{\frown}{AB}\Rightarrow\hat{M}=\frac{\overset{\frown}{BC}-\overset{\frown}{AB}}{2}$$

۶۰ $MT^{۲}=MA\times MB$ (۰/۲۵) $\Rightarrow x^{۲}=۴\times ۹$ (۰/۲۵) $\Rightarrow x=۶$ (۰/۲۵)



۶۱ چون شعاع در نقطه‌ی تماس بر خط مماس عمود است نتیجه می‌گیریم: $\hat{T}=\hat{T}'=۹۰^\circ$ (۰/۲۵)

$$\begin{cases} \hat{T}=\hat{T}'=۹۰^\circ \\ OT=OT' \\ OM=OM \end{cases} (۰/۲۵) \Rightarrow O\overset{\triangle}{M}T \cong O\overset{\triangle}{M}T' \Rightarrow MT=MT' \ (۰/۲۵)$$



۶۲
$$\begin{cases} OA=OC \\ OB=OD \\ AB=BC \end{cases} (۰/۲۵) \Rightarrow O\overset{\triangle}{A}B \cong O\overset{\triangle}{C}D \ (۰/۲۵)$$

$\Rightarrow$ زاویه مرکزی $\hat{O}_{۱}=\hat{O}_{۲}$ (۰/۲۵) $\Rightarrow \overset{\frown}{AB}=\overset{\frown}{CD}$ (۰/۲۵)

۶۳
$$\begin{matrix} R=۴ \\ R'=۱ \end{matrix} \Rightarrow d=۵ \quad (۰/۲۵) \qquad TT'=\sqrt{d^{۲}-(R-R')^{۲}} \quad (۰/۲۵)$$

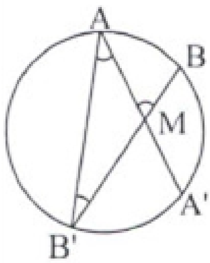
$$۳x+۱=\sqrt{۵^{۲}-(۴-۱)^{۲}}$$

$$۳x+۱=\sqrt{۲۵-۹}=\sqrt{۱۶}=۴ \quad (۰/۲۵)$$

$$\Rightarrow x=۱ \quad (۰/۲۵)$$

ص ۸۲

۶۴ وترهای AA' و BB' از دایره C در نقطه M یک‌دیگر را قطع کرده‌اند. پاره‌خط AB' را رسم می‌کنیم. زاویه‌های $AB'B$ و $A'AB'$ محاطی هستند. (۰/۲۵)



$$\begin{cases} A\hat{B}'B=\dfrac{\overset{\frown}{AB}}{۲} \\ A'\hat{A}B'=\dfrac{\overset{\frown}{A'B'}}{۲} \end{cases}$$

($A\overset{\triangle}{M}B'$ زاویه خارجی مثلث) $A\hat{M}B=A\hat{B}'B+A'\hat{A}B'$ (۰/۲۵)

رسم شکل (۰/۲۵)

$$\Rightarrow A\hat{M}B=\frac{\overset{\frown}{AB}+\overset{\frown}{A'B'}}{۲} \quad (۰/۲۵)$$

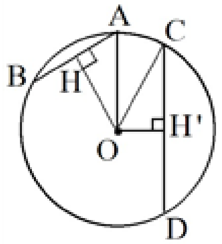
ص ۶۸

تلفن تماس: ۰۲۶۳۳۴۰۸۹۴۴

۶۵ با توجه به رابطهٔ طولی در مثلث داریم:

$$MA'\times MA = MB'\times MB$$
$$x(x+۳)=۴(۴+۶)$$
$$x^۲+۳x-۴۰=۰\Rightarrow (x+۸)(x-۵)=۰\Rightarrow x=۵$$

۶۶ فرض کنید در دایره به مرکز O وتر CD بزرگتر از وتر AB باشد. از O عمودهای OH و OH' را بر این دو وتر وارد می‌کنیم. می‌دانیم اگر از مرکز دایره به وتری از دایره عمود کنیم، آن وتر نصف می‌شود. داریم:



$$\left.\begin{array}{l} O\overset{\triangle}{A}H:\ OA^۲=OH^۲+AH^۲ \\ O\overset{\triangle}{C}H':\ OC^۲=OH'^۲+CH'^۲ \end{array}\right\}\xrightarrow{OA=OC} OH^۲+AH^۲=OH'^۲+CH'^۲$$

$$\Rightarrow OH^۲-OH'^۲=CH'^۲-AH^۲$$

چون $CH'=\frac{CD}{۲}$ و $AH=\frac{AB}{۲}$ نتیجه می‌گیریم: $OH^۲-OH'^۲=\frac{CD^۲}{۴}-\frac{AB^۲}{۴}\quad (۱)$

اگر $AB < CD$ باشد، با توجه به (۱) نتیجه می‌گیریم $OH > OH'$ و برعکس.

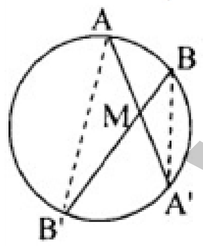
۶۷ ص ۸۲

$$R=۲,\quad R'=۳,\quad d=۱۳ \qquad TT'=\sqrt{d^۲-(R+R')^۲}\quad (۰/۲۵)$$

$$۵x-۸=\sqrt{۱۳^۲-(۲+۳)^۲}$$

$$۵x-۸=\sqrt{۱۶۹-۲۵}=\sqrt{۱۴۴}=۱۲\quad (۰/۲۵)\Rightarrow x=۴\quad (۰/۲۵)$$

۶۸ برهان: از A به B' و از B به A' وصل می‌کنیم، دو مثلث AMB' و BMA' متشابه‌اند. (۰/۲۵) زیرا:



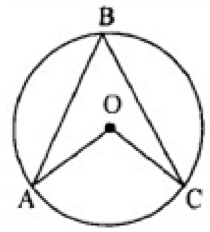
$$\left\{\begin{array}{l} A\hat{M}B'=A'\hat{M}B \\ \hat{A}=\hat{B}=\frac{\overset{\frown}{A'B'}}{۲} \end{array}\right.\quad (۰/۵)\Rightarrow \frac{MA}{MB}=\frac{MB'}{MA'}(۰/۲۵)$$

$$\Rightarrow MA\times MA'=MB\times MB'$$

ص ۷۴

تلفن تماس: ۰۲۶۳۳۴۰۸۹۴۴

۶۹



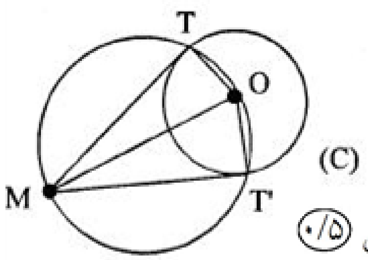
$$\begin{cases} A\hat{B}C = \dfrac{\overset{\frown}{AC}}{۲} \\ A\hat{O}C = \overset{\frown}{AC} \end{cases} (۰/۵) \Rightarrow \alpha + ۱۶ = \dfrac{۳\alpha + ۱۲}{۲} \Rightarrow \alpha = ۲۰ \, (۰/۲۵)$$

$$\Rightarrow \begin{matrix} A\hat{B}C = ۳۶^\circ \\ A\hat{O}C = ۷۲^\circ \end{matrix} \quad (۰/۲۵)$$

ص ۶۷

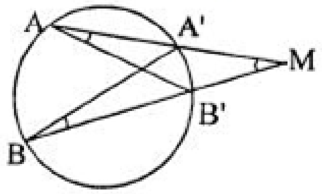
۷۰ الف) گزینه ۳ پاسخ صحیح است. (۰/۲۵) ص ۵۳
ب) گزینه ۲ پاسخ صحیح است. (۰/۲۵) ص ۵۹

۷۱ نقطه‌ی M را به O مرکز دایره‌ی (C) وصل کرده، دایره‌ی به قطر OM را رسم می‌کنیم. تا دایره‌ی (C) را در نقاط T و T' قطع کند.
زاویه‌های $O\hat{T}M = O\hat{T'}M = ۹۰^\circ$ (۰/۲۵) زیرا زاویه‌های محاطی و روبه‌رو قطر هستند (۰/۲۵) پس در نتیجه MT در نقطه‌ی T و MT' در نقطه‌ی T بر دایره‌ی (C) مماسند. (۰/۲۵)



رسم شکل (۰/۵)

۷۲ ابتدا A را به B' و B را به A' وصل می‌کنیم. دو مثلث AMB' و A'MB متشابه‌اند (۰/۲۵) زیرا:

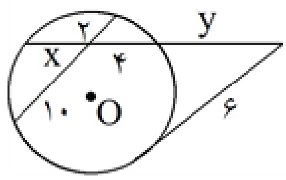


$$\begin{cases} \text{زاویه ی محاطی } \hat{A} = \hat{B} = \dfrac{\overset{\frown}{A'B'}}{۲} (۰/۵) \\ \text{مشترک } \hat{M} \end{cases} \Rightarrow \dfrac{MA}{MB} = \dfrac{MB'}{MA'} (۰/۲۵)$$

$$\Rightarrow MA \times MA' = MB \times MB'$$

۷۳ اگر همه‌ی رأس‌های یک چند ضلعی روی یک دایره قرار داشته باشند، آن چند ضلعی محاطی نامیده می‌شود. (۰/۲۵)

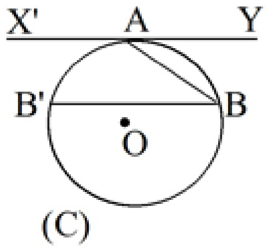
۷۴



$$۴ \times x = ۲ \times ۱۰ \, (۰/۲۵) \Rightarrow x = ۵ \quad (۰/۲۵)$$

$$۶^۲ = y(y+۹) \, (۰/۲۵) \Rightarrow y^۲ + ۹y - ۳۶ = ۰ \Rightarrow y = ۳ \quad (۰/۲۵)$$

۷۵ A را B وصل می‌کنیم زاویه‌ی BAY ظلی و زاویه‌ی 'ABB محاطی هستند بنابراین:

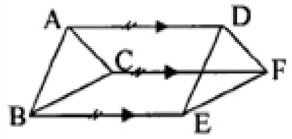


$$A\hat{B}B' = \frac{\overset{\frown}{AB'}}{۲}\ (۰/۲۵),\quad B\hat{A}Y = \frac{\overset{\frown}{AB}}{۲}\ (۰/۲۵)$$

با توجه به فرض $XY \parallel BB'$ و AB مورب، پس:

$$A\hat{B}B' = B\hat{A}Y\ (۰/۲۵) \Rightarrow \overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{AB'}\ (۰/۲۵)$$

۷۶ بردار AD را بردار انتقال در نظر می‌گیریم (۰/۲۵) چون خطهای AD و CF و BE موازی و مساویند: بنابراین تحت



این انتقال $\begin{cases} A \to D \\ C \to F \\ B \to E \end{cases}$ پس (۰/۲۵) $\begin{cases} AC \to DF \\ AB \to DE \\ CB \to FE \end{cases}$

چون انتقال ایزومتری است پس $CB = FE\ ,\ AB = DE\ ,\ AC = DF$ (۰/۲۵)

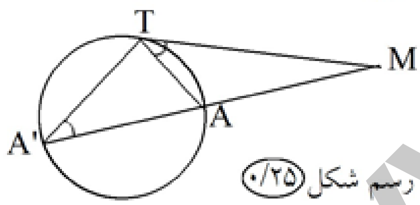
بنابراین $\overset{\triangle}{ABC} \cong \overset{\triangle}{DEF}$ (۰/۲۵)

۷۷ $۴ \times ۱۲ = z(z - ۲)$ (۰/۵)

$z^۲ - ۲z - ۴۸ = ۰ \Rightarrow (z - ۸)(z + ۶) = ۰$ (۰/۲۵) $\Rightarrow z = ۸\ ,\ z = -۶ \Rightarrow z = ۸$ ق ق (۰/۲۵)

۷۸ $\begin{cases} ۲x + ۳x + ۴x = ۳۶۰\ (۰/۲۵) \Rightarrow x = ۴۰\ (۰/۲۵) \\ y = \frac{۴x}{۲}\ (۰/۲۵) \Rightarrow y = ۲x \Rightarrow y = ۸۰\ (۰/۲۵) \end{cases}$

۷۹ دایره‌ی C و نقطه‌ی M را خارج آن درنظر می‌گیریم. مماس MT و قاطع 'MAA را نسبت به این دایره رسم می‌کنیم. از T به A و 'A وصل می‌کنیم. دو مثلث $\overset{\triangle}{MAT}$ و $\overset{\triangle}{MA'T}$ متشابهند، زیرا:



رسم شکل (۰/۲۵)

$$\left.\begin{array}{l} A\hat{T}M = A\hat{A'}T = \frac{\overset{\frown}{AT}}{۲} \\ \hat{M} = \hat{M} \end{array}\right\}\ (۰/۲۵) \Rightarrow \frac{MT}{MA} = \frac{MA'}{MT}\ (۰/۲۵)$$

$$\Rightarrow MT^۲ = MA.MA'\ (۰/۲۵)$$

۸۰ غلط (۰/۲۵)

۸۱ $\frac{y - x}{۲} = ۶۲^\circ$ (۰/۲۵)

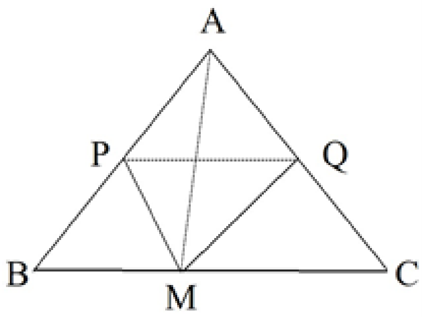
$\rightarrow y = ۲۴۲^\circ\ ,\ x = ۱۱۸^\circ$ (۰/۲۵)

$x + y = ۳۶۰^\circ$ (۰/۲۵)

۸۲ دو مماس (۰/۲۵)

۸۳

$$\left.\begin{aligned}\widehat{AMC} \xrightarrow[\text{نیمساز}]{MQ} \frac{MA}{MC}=\frac{AQ}{QC}\ \text{۰/۲۵}\\ \widehat{AMB} \xrightarrow[\text{نیمساز}]{MP} \frac{MA}{MB}=\frac{AP}{PB}\ \text{۰/۲۵}\end{aligned}\right\} \xrightarrow{MC=MB} \frac{AQ}{QC}=\frac{AP}{PB} \xrightarrow{\text{عکس قضیه تالس}} PQ \parallel BC\ \text{۰/۲۵}$$



۸۴ نادرست ۰/۲۵

۸۵ درست ۰/۲۵

۸۶ راه‌حل اول: PR را به عنوان محور تقارن در نظر می‌گیریم تحت بازتاب نسبت به خط PR داریم:

$$\left.\begin{aligned}P &\to P\\ S &\to Q\\ R &\to R\end{aligned}\right\} \to \left\{\begin{aligned}PS &\to PQ\\ PR &\to PR\\ SR &\to QR\end{aligned}\right.$$

$$\to PS=PQ\ ,\ PR\ ,\ SR=QR \xrightarrow{(\text{ض ض ض})} \widehat{PSR}=\widehat{PQR} \to S\hat{P}R=Q\hat{P}R$$

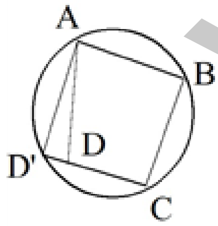
بازتاب ایزومتری است.

راه حل دوم: PR را به عنوان محور تقارن در نظر می‌گیریم تحت بازتاب نسبت به خط PR داریم:

$$\left.\begin{aligned}S &\to Q\\ P &\to P\\ R &\to R\end{aligned}\right\} \to S\hat{P}R \to Q\hat{P}R \Rightarrow S\hat{P}R=Q\hat{P}R$$

۸۷ برهان: از سه نقطه‌ی A و B و C از چهارضلعی ABCD یک دایره می‌گذرد با استفاده از برهان خلف ثابت می‌کنیم این دایره از نقطه‌ی D نیز می‌گذرد. فرض می‌کنیم نقطه‌ی برخورد خط CD با دایره D' باشد. از D' به A وصل می‌کنیم. چون چهارضلعی ABCD' محاطی است بنابراین: $\hat{B}+\hat{D}'=۱۸۰^\circ$

بنابراین: $\hat{D}=\hat{D}'$ به تناقض رسیدیم: زیرا $\hat{D}>\hat{D}'$ (D زاویه خارجی $\widehat{ADD'}$) پس حکم برقرار است.



۸۸

$$TT'=\sqrt{d^{۲}-(R-R')^{۲}} \quad \text{مماس مشترک خارجی}$$

$$۲x=\sqrt{(۲x+۱)^{۲}-(۷-۲)^{۲}}$$

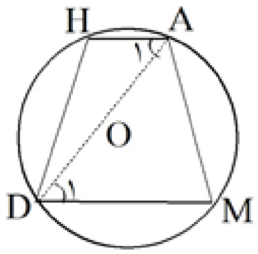
$$\to ۴x^{۲}=۴x^{۲}+۴x+۱-۲۵ \to x=۶$$

تلفن تماس: ۰۲۶۳۳۴۰۸۹۴۴

۸۹ از A به D وصل می‌کنیم با توجه به رابطه‌ی $AM = HD$ نتیجه می‌گیریم $\overset{\frown}{AM} = \overset{\frown}{HD}$ داریم:

$$\begin{cases} \hat{A}_۱ = \dfrac{\overset{\frown}{HD}}{۲} & \text{زاویه محاطی} \\ \hat{D}_۱ = \dfrac{\overset{\frown}{AM}}{۲} & \text{زاویه محاطی} \end{cases} \xrightarrow{\overset{\frown}{HD} = \overset{\frown}{AM}} \hat{A}_۱ = \hat{D}_۱$$

$AH \parallel MD \rightarrow$ طبق عکس قضیه موازی و خط مورب



۹۰ می‌دانیم اگر از هر نقطه دو مماس بر دایره رسم کنیم آن‌گاه اندازه‌های دو مماس برابرند، بنابراین:

$$\begin{cases} RE = RF \\ IE = IH \\ NG = NH \\ AG = AF \end{cases}$$

رابطه‌ها را با هم جمع می‌کنیم.

$$\Rightarrow RE + IE + NG + AG = RF + IH + NH + AF$$

$$\Rightarrow IR + AN = RA + NI$$

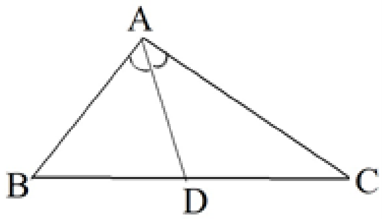
۹۱ نیمساز زاویه $\hat{A}$ ضلع BC را در نقطه‌ی D قطع می‌کند. بنابراین:

$$\frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AC}$$

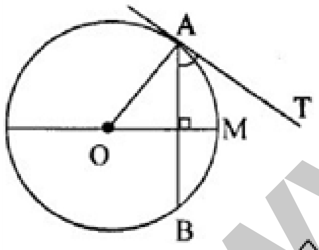
$$\Rightarrow \frac{BD}{DC + BD} = \frac{AB}{AC + AB} \rightarrow \frac{BD}{BC} = \frac{AB}{AC + AB}$$

$$\Rightarrow \frac{BD}{۱۹} = \frac{۱۶}{۳۸} \Rightarrow BD = ۸$$

$$\Rightarrow DC = ۱۹ - ۸ = ۱۱$$



۹۲ زاویه‌ی ظلی $B\hat{A}T$ را در دایره‌ای به مرکز O در نظر می‌گیریم، شعاع OA از این دایره را رسم می‌کنیم. می‌دانیم شعاع در نقطه‌ی تماس بر خط مماس عمود است، پس:



(۰/۲۵) $O\hat{A}B + B\hat{A}T = ۹۰^\circ$ (۱)

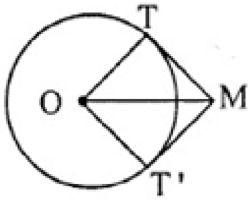
قطر عمود بر هر وتر، آن وتر و کمان‌های نظیر آن وتر را نصف می‌کند. پس $\overset{\frown}{AM} = \dfrac{\overset{\frown}{AB}}{۲}$ (۰/۲۵) و اندازه‌ی زاویه‌ی مرکزی $A\hat{O}M = \overset{\frown}{AM} = \dfrac{\overset{\frown}{AB}}{۲}$ (۲) (۰/۲۵) از طرفی

(۰/۲۵) $O\hat{A}B + A\hat{O}M = ۹۰^\circ$ (۳)

از روابط (۱) و (۳) نتیجه می‌شود $B\hat{A}T = A\hat{O}M$ (۰/۲۵) و با توجه به (۲) نتیجه می‌شود $B\hat{A}T = \dfrac{\overset{\frown}{AB}}{۲}$ (۰/۲۵).

تلفن تماس: ۰۲۶۳۳۴۰۸۹۴۴

۹۳



رسم شکل (۰/۲۵)

الف) $O\overset{\triangle}{T}M:\ OT \perp MT \Rightarrow O\overset{\triangle}{T}M = 90^\circ$ (۰/۲۵)

$\Rightarrow MT = \sqrt{OM^2 - OT^2} = \sqrt{50 - 25} = 5$ (۰/۲۵)

ب) $\Rightarrow MT = MT' = 5$ (۰/۲۵)

$\left.\begin{array}{l} MT = MT' = OT = OT' = 5 \\ T = 90^\circ \end{array}\right\} \Rightarrow OTMT'$ مربع است. (۰/۲۵)

۹۴ بردار AD را بردار انتقال در نظر می‌گیریم (۰/۲۵) چون خط های AD و CF و BE موازی و مساویند.

بنابراین تحت این انتقال (۰/۲۵) $\begin{cases} A \to D \\ C \to F \\ B \to E \end{cases}$ پس (۰/۲۵) $\begin{cases} AC \to DF \\ AB \to DE \\ CB \to FE \end{cases}$

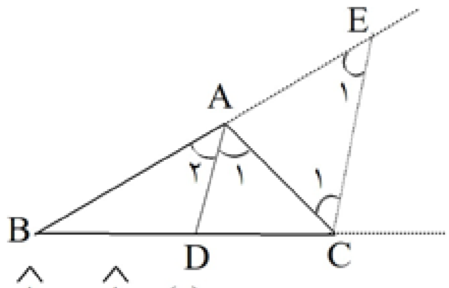
چون انتقال ایزومتری است پس $AC=DF$, $AB=DE$ و $CB=FE$ (۰/۲۵) بنابراین $D\overset{\triangle}{E}F \cong A\overset{\triangle}{B}C$ (۰/۲۵)

۹۵

$\left.\begin{array}{l} \begin{cases} OQ = OR \\ GQ = GP \end{cases} \\ \begin{cases} YS = YP \\ LS = LR \end{cases} \end{array}\right\}$ (۰/۵) $\Rightarrow OQ + GQ + YS + LS = OR + GP + YP + LR$ (۰/۵)

$\Rightarrow OG + YL = OL + GY$ (۰/۵)

۹۶

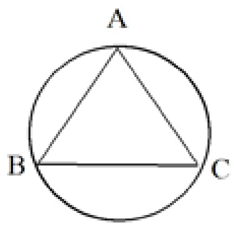


برهان: فرض کنیم AD نیمساز داخلی زاویه‌ی A باشد ضلع‌های BA و BC را امتداد می‌دهیم و از رأس C خطی به موازات نیمساز زاویه‌ی A (یعنی AD) رسم می‌کنیم تا امتداد BA را در E قطع کند. (۰/۲۵) چون AD موازی CE است، اگر AC را به‌عنوان خط مورب در نظر بگیریم آن‌گاه: $\hat{A}_1 = \hat{C}_1$ (۱) ، و اگر BE را به‌عنوان خط مورب آن‌ها در نظر بگیریم آن‌گاه (۲) $\hat{A}_2 = \hat{E}_1$ (۰/۲۵) ، از طرفی طبق فرض مسأله، AD نیمساز است در نتیجه: (۳) $\hat{A}_1 = \hat{A}_2$ ،

حال از رابطه‌های (۱)، (۲) و (۳) می‌توان نتیجه گرفت: $\hat{C}_1 = \hat{E}_1$ (۰/۲۵) ، پس مثلث AEC متساوی‌الساقین است و (۴) $AE = AC$ (۰/۲۵) ، در مثلث BEC ، AD موازی EC است، پس طبق قضیه‌ی تالس داریم: (۵) $\frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AE}$ (۰/۲۵) ، با توجه به رابطه‌ی (۴) اگر در رابطه‌ی (۵) به‌جای AE مساوی آن AC را جایگزین کنیم، خواهیم داشت: (۰/۲۵) $\frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AC}$ که حکم ثابت می‌شود.

۹۷ (۰/۲۵) $\frac{2x+1+3x+4}{2} = 90^\circ$ (۰/۲۵) $\rightarrow 5x+5=180 \Rightarrow x=35^\circ$ (۰/۲۵)

تلفن تماس: ۰۲۶۳۳۴۰۸۹۴۴



۹۸ $\hat{C}=\frac{۱}{۲}\overset{\frown}{AB}\quad,\quad \hat{A}=\frac{۱}{۲}\overset{\frown}{BC}\quad,\quad \hat{B}=\frac{۱}{۲}\overset{\frown}{AC}$ (۰/۲۵)

$\hat{A}+\hat{B}+\hat{C}=\frac{۱}{۲}(\overset{\frown}{AC}+\overset{\frown}{AB}+\overset{\frown}{BC})$ (۰/۲۵)

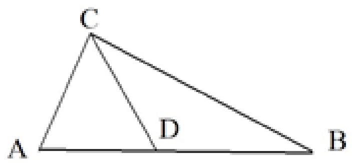
$\hat{A}+\hat{B}+\hat{C}=\frac{۱}{۲}(۳۶۰^\circ)=۱۸۰^\circ$ (۰/۲۵)

۹۹ مماس برون (۰/۲۵)

۱۰۰ متداخل (۰/۲۵)

۱۰۱ ۱) (۰/۲۵) دو دایره مماس درون $d=۲\ ,\ R=۶\ ,\ R'=۴\rightarrow d=R-R'$ (۰/۲۵)

۲) (۰/۲۵) دو دایره متقاطع $d=۷\ ,\ R=۶\ ,\ R'=۴\rightarrow R-R'<d<R+R'$ (۰/۲۵)



۱۰۲ $\frac{AD}{DB}=\frac{AC}{BC}$ (۰/۲۵) $\Rightarrow\frac{AD}{DB}=\frac{۴}{۶}\Rightarrow\frac{AD}{AD+DB}=\frac{۴}{۴+۶}$ (۰/۲۵)

$\Rightarrow\frac{AD}{۵}=\frac{۴}{۱۰}\Rightarrow AD=۲$ (۰/۲۵)

$\Rightarrow BD=AB-AD=۳$ (۰/۲۵)

۱۰۳ $TT'=\sqrt{d^۲-(R+R')^۲}$

$۶=\sqrt{d^۲-(۵+۳)^۲}\rightarrow ۳۶=d^۲-۶۴$ (۰/۲۵) $\rightarrow d^۲=۱۰۰\rightarrow d=۱۰$ (۰/۲۵)

۱۰۴ $۲x=۲۰\Rightarrow x=۱۰$ (۰/۲۵)

$y(y+۱۰+۲)=۶۴$ (۰/۲۵) $\Rightarrow y^۲+۱۲y-۶۴=۰$

$\Rightarrow(y+۱۶)(y-۴)=۰\Rightarrow\begin{cases}y=۴ & (۰/۲۵)\\ y=-۱۶ & \text{غ ق ق}\ (۰/۲۵)\end{cases}$

۱۰۵ $\begin{cases}AC=AB\Rightarrow\hat{B}=\hat{C} & (۰/۲۵)\\ \hat{B}=D\hat{A}C=\frac{AD}{۲} & (۰/۲۵)\end{cases}\Rightarrow D\hat{A}C=\hat{C}\Rightarrow DC=DA$ (۰/۲۵)

محاطی ظلی

۱۰۶ $TT'=\sqrt{d^۲-(R-R')^۲}$ (۰/۲۵) $\Rightarrow ۳a-۱=\sqrt{۱۰۰-۳۶}$ (۰/۲۵) $=۸\Rightarrow a=۳$ (۰/۲۵)

این دو دایره یک مماس مشترک داخلی دارند. (۰/۲۵) زیرا مماس برون هستند. $(d=R+R')$

تلفن تماس: ۰۲۶۳۳۴۰۸۹۴۴

۱۰۷ $\overset{\frown}{BC} + ۱۰۰^\circ + ۷۰^\circ = ۳۶۰^\circ \xrightarrow{۰/۲۵} \overset{\frown}{BC} = ۱۹۰^\circ$

(زاویه ظلی) $\hat{x} = \dfrac{\overset{\frown}{BC}}{۲} \xrightarrow{۰/۲۵} \dfrac{۱۹۰^\circ}{۲} = ۹۵^\circ$ ۰/۲۵

۱۰۸ $TT' = \sqrt{d^۲ - (R - R')^۲}$ ۰/۲۵ $\Rightarrow TT' = \sqrt{۳۶ - ۱}$ ۰/۲۵ $\Rightarrow TT' = \sqrt{۳۵}$

۱۰۹ می‌دانیم که طول مماس‌های رسم شده از نقطه‌ای خارج از یک دایره با هم برابر است.

محیط مثلث $= AB + AC + BC = AB + AC + BD + DC = AB + AC + BE + CF$ ۰/۷۵

$= AE + AF = ۲AE$ ۰/۲۵

بنابراین محیط مثلث ABC مستقل از نقطه‌ی D بوده و مقدار آن ثابت است.

۱۱۰ $x(x+۳۲) = ۱۰ \times ۳۲ \xrightarrow{۰/۲۵} x^۲ + ۳۲x - ۳۲۰ = ۰ \rightarrow \begin{cases} x = ۸ & \text{(ق ق)} \ ۰/۲۵ \\ x = -۴۰ & \text{(غ ق ق)} \ ۰/۲۵ \end{cases}$

۱۱۱ الف) در مثلث قائم‌الزاویه‌ی OAH داریم:

$AH^۲ = OA^۲ - OH^۲ = ۱۰۰ - ۳۶ = ۶۴ \Rightarrow AH = ۸ \Rightarrow AB = ۱۶$

در مثلث قائم‌الزاویه‌ی OA'H' داریم:

$A'H'^۲ = OA'^۲ - OH'^۲ = ۱۰۰ - ۶۴ = ۳۶ \Rightarrow A'H' = ۶ \Rightarrow A'B' = ۱۲$

ب) وتری که از مرکز دایره دورتر است کوچک‌تر است.

پ) بله

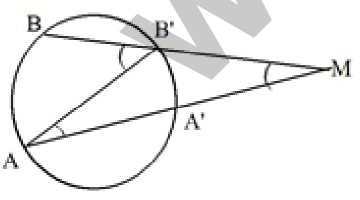
۱۱۲ $R = ۴ \quad TT' = \sqrt{d^۲ - (R - R')^۲}$ ۰/۲۵

$R' = ۹ \quad TT' = \sqrt{(R + R')^۲ - (R - R')^۲}$ ۰/۲۵

$TT' = \sqrt{۱۶۹ - ۲۵} = \sqrt{۱۴۴} = ۱۲$ ۰/۲۵

۱۱۳ یک مماس مشترک داخلی ۰/۲۵ و دو مماس مشترک خارجی ۰/۲۵ دارد.

۱۱۴ امتداد وترهای AA' و BB' از دایره‌ی C در نقطه‌ی M یکدیگر را قطع کرده‌اند. پاره‌خط AB' را رسم می‌کنیم.

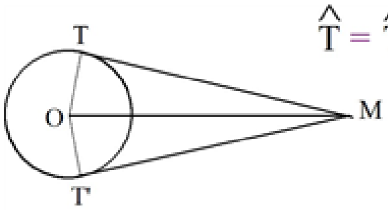


(زاویه خارجی مثلث $\overset{\triangle}{AMB'}$) $A\hat{B'}B = B'\hat{A}M + A\hat{M}B'$ ۰/۲۵

$\Rightarrow A\hat{M}B' = A\hat{B'}B - B'\hat{A}M = \dfrac{\overset{\frown}{AB}}{۲} - \dfrac{\overset{\frown}{A'B'}}{۲}$ ۰/۵

$\Rightarrow A\hat{M}B = A\hat{M}B' = \dfrac{\overset{\frown}{AB} - \overset{\frown}{AB'}}{۲}$

۱۱۵ چون شعاع در نقطه‌ی تماس بر خط مماس عمود است نتیجه می‌گیریم: $\hat{T} = \hat{T'} = ۹۰^\circ$



$\begin{cases} \hat{T} = \hat{T'} = ۹۰^\circ \\ OT = OT' \ \ ۰/۵ \\ OM = OM \end{cases} \Rightarrow \overset{\triangle}{OMT} \cong \overset{\triangle}{OMT'} \Rightarrow MT = MT'$ ۰/۲۵

تلفن تماس: ۰۲۶۳۳۴۰۸۹۴۴

۱۱۶ الف)

$$۷۰^\circ = \frac{z+t}{۲} \Rightarrow z+t = ۱۴۰^\circ \quad ۰/۲۵$$

$$۵۰^\circ = \frac{z-t}{۲} \Rightarrow z-t = ۱۰۰^\circ \quad ۰/۲۵$$

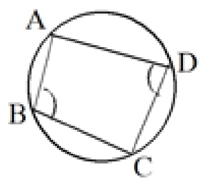
$$۲z = ۲۴۰^\circ \Rightarrow z = ۱۲۰^\circ \quad ۰/۲۵ \quad , \quad t = ۲۰^\circ \quad ۰/۲۵$$

ب)

$$۲ \times y = ۴ \times ۵ \Rightarrow y = ۱۰ \quad ۰/۲۵$$

$$x(x+۹) = ۳۶ \quad ۰/۲۵ \Rightarrow x = ۳ \text{ ق ق } \quad ۰/۲۵ \quad , \quad x = -۱۲ \text{ غ ق ق } \quad ۰/۲۵$$

۱۱۷ با توجه به قضیه‌ی زاویه‌ی محاطی، داریم:



$$\hat{B} + \hat{D} = \frac{\overset{\frown}{ADC}}{۲} + \frac{\overset{\frown}{ABC}}{۲} = \frac{\overset{\frown}{ADC} + \overset{\frown}{ABC}}{۲} = \frac{۳۶۰^\circ}{۲} = ۱۸۰^\circ \quad ۰/۲۵$$

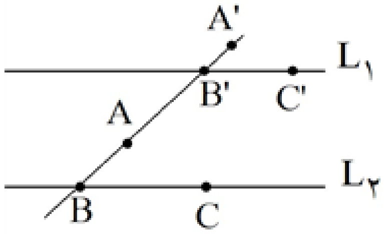
۰/۲۵ ۰/۲۵

به روش مشابه ثابت می‌شود که: $\hat{A} + \hat{C} = ۱۸۰^\circ$

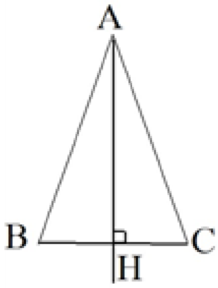
۱۱۸ اگر خط m دو خط موازی $L_۱$ و $L_۲$ را قطع کند با توجه به شکل دیده می‌شود که تحت انتقالی به موازات m مورب خط $L_۱$ به روی خط $L_۲$ قرار می‌گیرد. پس: $A \rightarrow A'$ و $B \rightarrow B'$ و $C \rightarrow C'$

پس $A\overset{\triangle}{B}C \rightarrow A'\overset{\triangle}{B'}C'$ و چون انتقال تبدیل ایزومتری است، پس: $A\overset{\triangle}{B}C = A'\overset{\triangle}{B'}C'$ درنتیجه:

$A\hat{B}C = A'\hat{B'}C'$



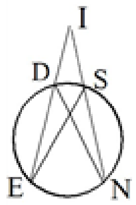
۱۱۹ فرضی کنیم مثلث ABC مثلث متساوی‌الساقین باشد، عمود منصف ضلع BC را رسم می‌کنیم. در این صورت داریم:



$$\left.\begin{array}{l} A \xrightarrow[\text{به } AH]{\text{تحت بازتاب نسبت}} A \\ B \xrightarrow[\text{به } AH]{\text{تحت بازتاب نسبت}} C \\ H \xrightarrow[\text{به } AH]{\text{تحت بازتاب نسبت}} H \end{array}\right\} \overset{\triangle}{ABH} \xrightarrow[\text{به } AH]{\text{تحت بازتاب نسبت}} \overset{\triangle}{ACH}$$

بازتاب نسبت به خط ایزومتر است. پس دو مثلث فوق مساویند. در نتیجه: $\hat{B} = \hat{C}$

۱۲۰ راه اول:

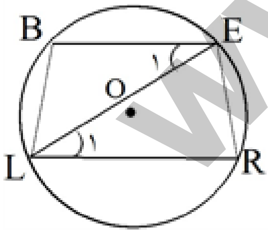


$$\left.\begin{array}{l} \hat{N} = \hat{E} = \dfrac{\overset{\frown}{DS}}{۲} \\ IE = IN \\ \hat{I} \ \text{مشترک} \end{array}\right\} ۰/۷۵ \Rightarrow \overset{\triangle}{DIN} = \overset{\triangle}{SIE} \ (\text{زض ز}) \Rightarrow DI = SI \ ۰/۲۵$$

راه دوم:

$$\left.\begin{array}{l} ID \times IE = IS \times IN \\ IE = IN \end{array}\right\} ۰/۵ \Rightarrow ID \times IE = IS \times IE \ ۰/۲۵ \Rightarrow ID = IS \ ۰/۲۵$$

۱۲۱ از E به L وصل می‌کنیم.



$$\left.\begin{array}{l} BL = ER \Rightarrow \overset{\frown}{BL} = \overset{\frown}{ER} \ ۰/۲۵ \\ \hat{E}_۱ = \dfrac{\overset{\frown}{BL}}{۲} \ \text{و} \ \hat{L}_۱ = \dfrac{\overset{\frown}{ER}}{۲} \ ۰/۲۵ \end{array}\right\} \Rightarrow \hat{E}_۱ = \hat{L}_۱ \ ۰/۲۵ \Rightarrow BE \parallel LR \ ۰/$$

۱۲۲ الف)

$$\hat{N} = \frac{x+y}{۲} = ۷۰ \ ۰/۲۵, \quad \hat{M} = \frac{x-y}{۲} = ۵۰ \ ۰/۲۵$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x + y = ۱۴۰ \\ x - y = ۱۰۰ \end{cases} \Rightarrow x = ۱۲۰ \ ۰/۲۵, \ y = ۲۰ \ ۰/۲۵$$

ب)

$$MA \times MA' = MB \times MB' \ ۰/۲۵ \Rightarrow z(z+۲۶) = ۹ \times ۴۰ \Rightarrow z^۲ + ۲۶z - ۳۶۰ = ۰ \ ۰/۵$$

$$\Rightarrow (z+۳۶)(z-۱۰) = ۰ \Rightarrow z = -۳۶ \ \text{غ ق ق}, \ z = ۱۰ \ \text{ق ق} \ ۰/۲۵$$

تلفن تماس: ۰۲۶۳۳۴۰۸۹۴۴

۱۲۳

$GQ = GP$ ۰/۲۵ $RL = LS$ ۰/۲۵ $PY = YS$ ۰/۲۵ $OQ = OR$ ۰/۲۵

$GO + LY = GQ + QO + LS + YS$ ۰/۲۵

$GO + LY = OR + GP + LR + PY$ ۰/۲۵

$GO + LY = OR + RL + GP + PY$ ۰/۲۵

$GO + LY = OL + GY$ ۰/۲۵

۱۲۴ الف)

$۴z = ۲۰$ ۰/۲۵ $\Rightarrow z = ۵$ ۰/۲۵

$k(k + ۹) = ۳۶$ ۰/۲۵ $\Rightarrow k = -۱۲$ غ ق ق , $k = ۳$ ۰/۲۵

ب)

$۲x + ۳x + ۴x = ۳۶۰^\circ$ ۰/۲۵ $\Rightarrow x = ۴۰^\circ$ ۰/۲۵

$۴x = ۱۶۰^\circ$ ۰/۲۵ $\Rightarrow y = \frac{۱۶۰^\circ}{۲} = ۸۰$ ۰/۲۵

۱۲۵ الف)

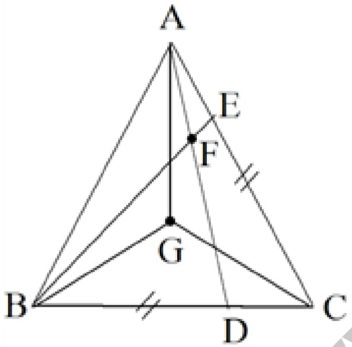
$\begin{cases} \frac{x - y}{۲} = ۶۲ \\ x + y = ۳۶۰ \end{cases}$ ۰/۲۵ $\Rightarrow \begin{cases} x - y = ۱۲۴ \\ x + y = ۳۶۰ \end{cases} \Rightarrow ۲x = ۴۸۴ \Rightarrow x = ۲۴۲$ ۰/۲۵ , $y = ۱۱۸$ ۰/۲۵

ب)

$z(z - ۲) = ۴ \times ۱۲$ ۰/۲۵

$\Rightarrow z^۲ - ۲z - ۴۸ = ۰ \Rightarrow (z - ۸)(z + ۶) = ۰$ ۰/۲۵ $\Rightarrow z = -۶$ غ ق ق , $z = ۸$ ۰/۲۵

۱۲۶ محل تلاقی میانه‌های مثلث ABC را G می‌نامیم، می‌دانیم هر کدام از زاویه‌های حول نقطه‌ی G مساوی °۱۲۰ می‌باشند و ۰/۲۵
$AG = BG = CG$ تحت دوران به مرکز G و زاویه‌ی °۱۲۰-



$\left.\begin{matrix} A \to B \\ A \to C \end{matrix}\right\} \Rightarrow BA \to AC$

$\left.\begin{matrix} A \to C \\ C \to B \end{matrix}\right\} \Rightarrow AC \to CB$ ۰/۵

$AE = CD \Rightarrow E \to D$

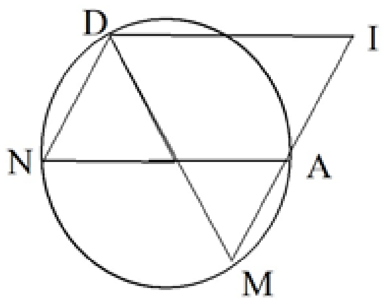
$\Rightarrow \begin{cases} B \to A \\ E \to D \end{cases} \to BE \to AD \Rightarrow BE = AD$ ۰/۵

۱۲۷

$d = oo' = R + R' = ۴ + ۹ = ۱۳$ ۰/۲۵ $TT' = \sqrt{d^۲ - (R - R')^۲}$

$۲x - ۲ = \sqrt{(۱۳)^۲ - (۹ - ۴)^۲}$ ۰/۲۵ $= ۱۲ \Rightarrow x = ۷$ ۰/۲۵

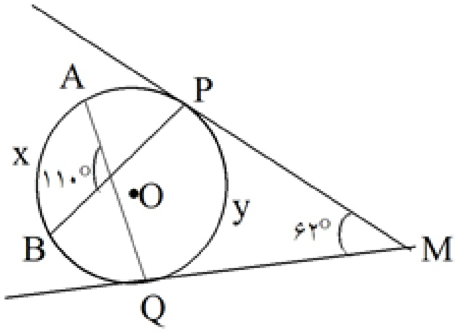
تلفن تماس: ۰۲٦۳۳٤۰۸۹٤٤



۱۲۸ در متوازی‌الاضلاع DINA : $\hat{N} = \hat{I}$ ۰/۲۵

از طرف دیگر $\hat{N}$ و $\hat{M}$ محاطی ، $\hat{N} = \hat{M} = \frac{\overset{\frown}{AD}}{۲}$ ۰/۲۵ در نتیجه

$\hat{M} = \hat{I}$ ۰/۲۵ پس مثلث MDI متساوی‌الساقین است. ۰/۲۵ پس داریم $DM = DI$



۱۲۹
$$\begin{cases} \overset{\frown}{AP} + \hat{x} + \overset{\frown}{BQ} - \hat{y} = ۱۲۴ & ۰/۲۵ \\ \overset{\frown}{AP} + \overset{\frown}{BQ} = ۱۴۰ & ۰/۲۵ \\ \hat{x} + \hat{y} = ۲۲۰ & ۰/۲۵ \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \hat{x} - \hat{y} = -۱۶ \\ \hat{x} + \hat{y} = ۲۲۰ \end{cases} ۰/۲۵ \Rightarrow \begin{cases} \hat{x} = ۱۰۲° \\ \hat{y} = ۱۱۸° \end{cases}$$

۱۳۰ چون فاصله‌ی نقطه‌ی T از دو سر پاره‌خطهای PQ و SR به یک اندازه است. بنابراین نقطه‌ی T روی عمودمنصف بین دو پاره خط قرار دارد و چون این دو خط موازی‌اند، عمودمنصف آنها بر هم منطبق است.
خط Δ عمودمنصف دو پاره‌خط PQ و SR را رسم می‌کنیم.
در یک بازتاب نسبت به خط Δ داریم:

$$\left.\begin{matrix} Q \longrightarrow P \\ R \longrightarrow S \end{matrix}\right\} \Rightarrow QR = PS \quad (۱)$$

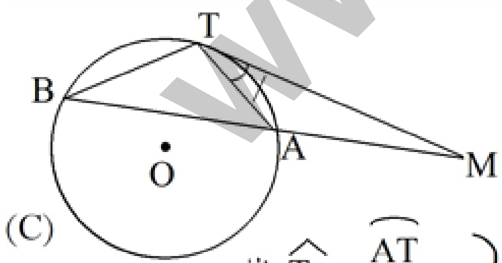
$$\left.\begin{matrix} P \longrightarrow Q \\ R \longrightarrow S \end{matrix}\right\} \Rightarrow PR = QS \quad (۲)$$

از (۱) و (۲) و $PQ = PQ$ نتیجه می‌گیریم: $P\overset{\triangle}{Q}S = Q\overset{\triangle}{P}R$. بنابراین $P\hat{Q}S = Q\hat{P}R$

۱۳۱
$$(TT')^۲ = d^۲ - (R - R')^۲ \Rightarrow ۱۴۴ = d^۲ - (۹ - ۴)^۲ \Rightarrow d = ۱۳$$

چون طول خط المرکزین برابر با مجموع دو شعاع است، بنابراین دو دایره مماس بیرون هستند.

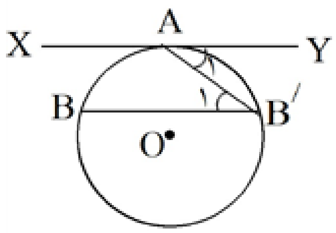
۱۳۲ فرض: MT بر دایره‌ی (C) مماس است.
حکم: $MT^۲ = MA \cdot MB$
برهان: از T به A و B وصل می‌کنیم. حال داریم:



$$\left.\begin{matrix} \text{ظلی } \hat{T}_۱ = \frac{\overset{\frown}{AT}}{۲} \\ \text{محاطی } \hat{B} = \frac{\overset{\frown}{AT}}{۲} \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} \hat{B} = \hat{T}_۱ \\ \hat{M} \text{ مشترک} \end{matrix}\right\} \xrightarrow{\text{تساوی ۲ زاویه}} M\overset{\triangle}{A}T \sim M\overset{\triangle}{B}T$$

$$\Rightarrow \frac{MT}{MA} = \frac{MB}{MT} \Rightarrow MT^۲ = MA \cdot MB$$

۱۳۳ از نقطه‌ی A به B' وصل می‌کنیم بنابر قضیه خطوط موازی $\widehat{A_۱}=\widehat{B_۱}'$



زاویه‌ی محاطی $\widehat{B_۱}'=\frac{\overset{\frown}{AB}}{۲}$ زاویه‌ی ظلی $\widehat{A_۱}=\frac{\overset{\frown}{AB'}}{۲}$

بنابراین $\overset{\frown}{AB}=\overset{\frown}{AB'}$

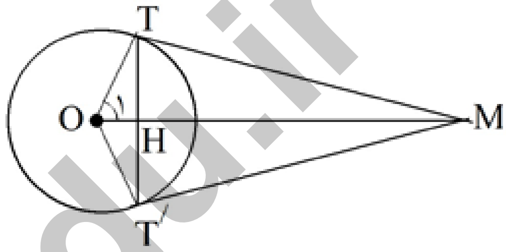
۱۳۴

الف)

$$\left.\begin{array}{ll} MT=MT' & \text{مماس} \\ OM=OM & \\ OT=OT'=R & \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{ض ض ض}} O\overset{\triangle}{M}T \approx O\overset{\triangle}{M}T' \Rightarrow T\widehat{M}O=T'\widehat{M}O\,,\ T\widehat{O}M=T'\widehat{O}M$$

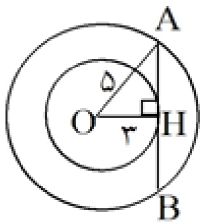
ب)

$$\left.\begin{array}{l} \widehat{O_۱}=\widehat{O_۱} \\ \widehat{H}=\widehat{T}=۹۰^\circ \end{array}\right\} \Rightarrow O\overset{\triangle}{T}M \sim O\overset{\triangle}{T}H \Rightarrow \frac{TH}{MT}=\frac{OT}{OM}$$



$$\left.\begin{array}{l} TH\times OM=MT\times OT \\ OT=R \\ TH=\frac{TT'}{۲} \end{array}\right\} \Rightarrow TT'\times OM=۲MT\times R$$

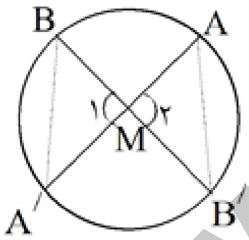
۱۳۵



$$AH=\sqrt{۲۵-۹}=۴$$

$$AB=۲\,AH=۲\times۴=۸$$

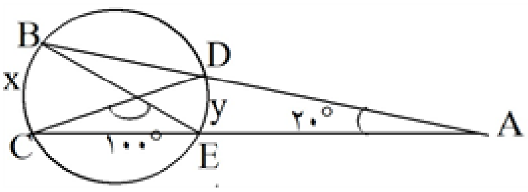
۱۳۶ برهان: از A به B' و از B به A' وصل می‌کنیم.



$$\left.\begin{array}{ll} \widehat{M_۱}=\widehat{M_۲} & \text{متقابل به راس} \\ \widehat{A}=\widehat{B}=\frac{\overset{\frown}{A'B'}}{۲} & \text{محاطی} \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{تساوی ۲ زاویه}} A\overset{\triangle}{B'}M \sim B\overset{\triangle}{M}A'$$

پس داریم:
$$\frac{MA}{MB}=\frac{MB'}{MA'} \Rightarrow MA\,.\,MA'=MB\,.\,MB'$$

۱۳۷

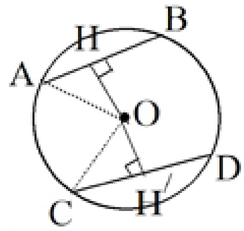


$$\begin{cases} x+y=۲(۱۸۰^\circ-۱۰۰^\circ)=۱۶۰^\circ \\ x-y=۲\times۲۰ \end{cases}$$

$$\Rightarrow ۲x=۲۰۰^\circ \Rightarrow x=۱۰۰^\circ \Rightarrow y=۶۰^\circ$$

۱۳۸ حکم : $AB > CD$ فرض : $OH' > OH$

OH و OH' وترهای AB و CD را نصف می‌کنند.



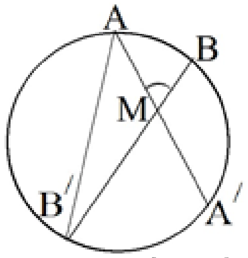
$$\left.\begin{cases} O\hat{A}H : AH^۲ = R^۲ - OH^۲ \\ O\hat{H'}C : CH'^۲ = R^۲ - OH'^۲ \\ \text{فرض} : OH' > OH \Rightarrow OH'^۲ > OH^۲ \end{cases}\right\} \Rightarrow \begin{matrix} AH^۲ > CH'^۲ \Rightarrow AH > CH' \\ ۲AH > ۲CH' \Rightarrow AB > CD \end{matrix}$$

۱۳۹ قطر AC را رسم می‌کنیم لذا AC عمودمنصف EF و DB است. بنابراین در بازتاب نسبت به AC داریم:

$$\left.\begin{matrix} B \longrightarrow D \\ E \longrightarrow F \end{matrix}\right\} \Rightarrow BE \longrightarrow DF \Rightarrow BE = DF$$

۱۴۰ فرض: M محل تلاقی دو وتر AA' و BB' در داخل دایره است.

حکم: $\hat{M} = \dfrac{\overset{\frown}{AB} + \overset{\frown}{A'B'}}{۲}$

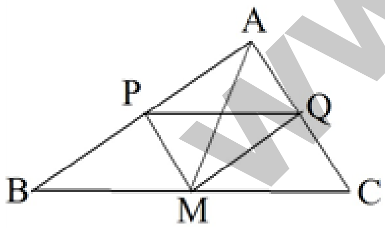


برهان: پاره خط AB' را رسم می‌کنیم.

$$\left.\begin{matrix} \hat{M} = \hat{A} + \hat{B'} \text{ زاویه خارجی } A\hat{M}B' \text{ است.} \\ \text{محاطی } \hat{A} = \dfrac{\overset{\frown}{A'B'}}{۲} \text{ و محاطی } \hat{B'} = \dfrac{\overset{\frown}{AB}}{۲} \end{matrix}\right\} \Rightarrow \hat{M} = \frac{\overset{\frown}{A'B'}}{۲} + \frac{\overset{\frown}{AB}}{۲} = \frac{\overset{\frown}{AB} + \overset{\frown}{A'B'}}{۲}$$

۱۴۱

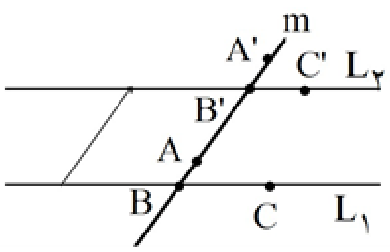
$$\left.\begin{matrix} \text{نیمساز } A\hat{M}B \text{ در مثلث } AMB \text{ است } MP \Rightarrow \dfrac{AP}{PB} = \dfrac{AM}{MA} \\ \text{نیمساز } A\hat{M}C \text{ در مثلث } AMC \text{ است } MQ \Rightarrow \dfrac{AQ}{QC} = \dfrac{AM}{MC} \\ \text{میانه } AM \Rightarrow MC = MB \end{matrix}\right\} \Rightarrow \frac{AP}{PB} = \frac{AQ}{QC} \xrightarrow[\text{تالس}]{\text{عکس}} PQ || BC$$



۱۴۲ تحت انتقالی به موازات خط مورب m که خط $L_۱$ را بر روی $L_۲$ می‌نگارد.

خواهیم داشت: $C \rightarrow C' , B \rightarrow B' , A \rightarrow A'$

بنابراین $\widehat{ABC} \rightarrow \widehat{A'B'C'}$ یعنی زاویه‌های متناظر برابرند.



۱۴۳ $y \times y = ۴ \times ۹ \rightarrow y^۲ = ۳۶ \rightarrow y = ۶ \qquad ۸(۸ + ۲y) = z^۲ \rightarrow z = ۴\sqrt{۱۰}$

تلفن تماس: ۰۲٦۳۳٤۰۸۹٤٤

۱۴۴ می‌دانیم در هر دایره اگر از یک نقطه خارج دایره یک مماس و یک قاطع رسم کنید طول مماس واسطه هندسی بین دو قطعه قاطع است.

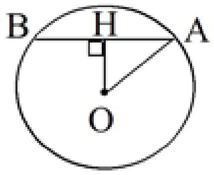
$MT^{۲} = MA \times MA' \Rightarrow (۱۲)^{۲} = MA \times ۱۸ \rightarrow MA = ۸$

$AA' = MA' - MA = ۱۸ - ۸ = ۱۰$

۱۴۵ بنا به فرض: شعاع $OA = ۱۰ \quad OH = ۶$

مثلث $\widehat{OAH}$ قائم‌الزاویه است. $\hat{H} = ۹۰^{\circ}$

رابطه‌ی فیثاغورث: $AH^{۲} = OA^{۲} - OH^{۲}$



$AH^{۲} = ۱۰۰ - ۳۶ = ۶۴ \rightarrow AH = ۸$

قطر عمود بر یک وتر، وتر را نصف می‌کند $\quad AH = \frac{۱}{۲} AB \rightarrow ۸ = \frac{۱}{۲} AB \rightarrow AB = ۱۶$

۱۴۶ فرض: MT و MT' مماس بر دایره

حکم: $\hat{M}_{۱} = \hat{M}_{۲} , \hat{O}_{۱} = \hat{O}_{۲}$

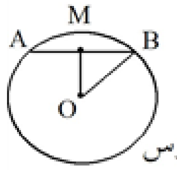
اثبات: اگر از یک نقطه خارج یک دایره، دو مماس بر دایره رسم کنیم طول دو مماس با هم برابر است.

$\begin{cases} MT = MT' \\ OT = OT' \text{ شعاعهای دایره} \\ OM \text{ مشترک} \end{cases} \Rightarrow \widehat{OTM} \cong \widehat{OT'M} \text{ (ض ز ض)} \Rightarrow \hat{M}_{۱} = \hat{M}_{۲} , \hat{O}_{۱} = \hat{O}_{۲}$

OM نیمساز زاویه‌ی TMT' و زاویه‌ی TOT' است.

۱۴۷ کوتاه‌ترین وتری که از نقطه‌ی M می‌گذرد وتر AB است که بر OM عمود شده است.

$\hat{M} = ۹۰^{\circ}$



رابطه فیثاغورس: $MB^{۲} = OB^{۲} - OM^{۲} \Rightarrow MB^{۲} = ۲۵ - ۹ \Rightarrow MB^{۲} = ۱۶ \rightarrow MB = ۴$

اگر یک شعاع بر وتری عمود باشد، وتر و کمان روبه‌رویش را نصف می‌کند. $AB = ۲ \times MB \rightarrow AB = ۸$

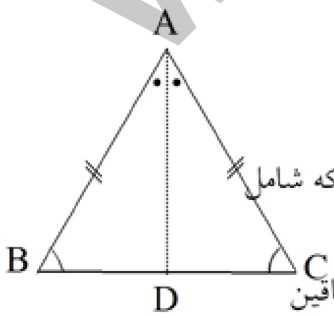
۱۴۸ اگر از یک نقطه خارج یک دایره دو مماس بر دایره رسم کنیم طول دو مماس برابر است.

$AP = AR = ۱۲ \qquad RC = CQ = ۶ \qquad BQ = BP = ۱۰$

محیط مثلث $= AP + PB + BQ + QC + CR + AR = ۱۲ + ۱۰ + ۱۰ + ۶ + ۶ + ۱۲ = ۵۶$

۱۴۹ فرض: $AB = AC$

حکم: $\hat{B} = \hat{C}$



برهان: نیمساز زاویه‌ی A ضلع BC را در نقطه‌ی D قطع می‌کند.
تحت بازتاب نسبت به خط AD خطی که شامل پاره‌خط AB است روی خطی که شامل پاره‌خط AC است تصویر می‌شود. چون $AB = AC$ پس $B \rightarrow C$
بنابراین $\hat{B} = \hat{C}$ یعنی زاویه‌های مقابل به ضلع‌های مساوی در مثلث متساوی‌الساقین برابرند.

تلفن تماس: ۰۲۶۳۳۴۰۸۹۴۴

۱۵۰ الف) اگر از یک نقطه خارج دایره یک مماس و یک قاطع بر دایره رسم کنیم طول مماس واسطه‌ی هندسی بین دو قطعه قاطع است.

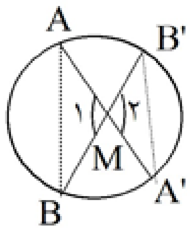
$$MT^{۲} = MA \times MA' \Rightarrow MT^{۲} = ۴ \times ۹ = ۳۶ \Rightarrow MT = ۶$$

$$MA' = MA + AA' = ۴ + ۵ = ۹$$

ب)
$$\widehat{M} = \frac{\overset{\frown}{TA'} - \overset{\frown}{TA}}{۲} \Rightarrow ۸۰^\circ = \frac{\overset{\frown}{TA'} - ۱۰۰}{۲} \rightarrow ۱۶۰ + ۱۰۰ = \overset{\frown}{TA'} \Rightarrow \overset{\frown}{TA'} = ۲۶۰^\circ$$

۱۵۱ فرض: M داخل دایره است.

حکم: $MA \,.\, MA' = MB \times MB'$



برهان: A را به B و 'B را به 'A وصل می‌کنیم.

اندازه‌ی زاویه‌ی محاطی نصف کمان روبه‌رویش است.

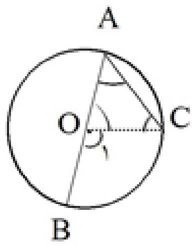
$$\begin{cases} \widehat{A} = \frac{۱}{۲}\overset{\frown}{A'B} \\ \widehat{B'} = \frac{۱}{۲}\overset{\frown}{A'B} \end{cases} \Rightarrow \widehat{A} = \widehat{B}$$

$\widehat{M}_۱ = \widehat{M}_۲$ متقابل به راس

اگر دو زاویه از مثلثی با دو زاویه از مثلی دیگر برابر باشند دو مثلث متشابهند.

$$\text{مثلث } \overset{\triangle}{AMB} \approx A'B'M \text{ مثلث} \Rightarrow \frac{MA'}{MB} = \frac{MB'}{MA} \text{ نسبت تشابه } MA \,.\, MA' = MB \times MB'$$

۱۵۲ فرض: $\widehat{A}$ زاویه‌ی محاطی است.



حکم:
$$\widehat{A} = \frac{\overset{\frown}{BC}}{۲}$$

اثبات: C را به مرکز دایره وصل می‌کنیم. شعاع دایره: $OA = OC$ مثلث $\overset{\triangle}{OAC}$

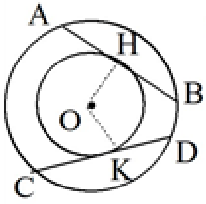
متساوی‌الساقین است. پس: $\widehat{A} = \widehat{C}$ زاویه‌ی $\widehat{O}_۱$ زاویه‌ی خارجی مثلث $\overset{\triangle}{OAC}$ است.

پس: $\widehat{O}_۱ = \widehat{A} + \widehat{C}$ $\quad \widehat{O}_۱ = ۲\widehat{A}$ (۱)

زاویه‌ی $\widehat{O}_۱$ زاویه‌ی مرکزی دایره است پس اندازه‌ی آن باکمان روبه‌رویش برابراست. $\quad \widehat{O}_۱ = \overset{\frown}{BC}$ (۲)

از رابطه‌ی (۱) و (۲) نتیجه می‌گیریم: $\quad ۲\widehat{A} = \overset{\frown}{BC}$, $\widehat{A} = \frac{\overset{\frown}{BC}}{۲}$

۱۵۳ AB و CD بر دایره‌ی درونی مماس هستند اگر از O (مرکز دو دایره هم مرکز) به محل تماس آنها با دایره وصل کنیم $OH = OK$ و $\widehat{H} = \widehat{K} = ۹۰^\circ$ است، زیرا شعاع در نقطه‌ی تماس بر خط مماس عمود است. پس OH و OK شعاعهای دایره‌ی درونی هستند.



از طرفی می‌دانیم اگر دو وتر از مرکز دایره به یک فاصله باشند با هم برابرند. AB و CD وترهایی از دایره‌ی بزرگتر (دایره‌ی بیرونی) هستند که از مرکزدایره به یک فاصله هستند پس $AB = CD$

در یک دایره دو وتر مساوی دارای کمانهای مساوی هستند. پس: $\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{CD}$

۱۵۴ $\hat{A} = \frac{\overset{\frown}{BC}}{۲} \to \overset{\frown}{BC} = ۵۰ \to \overset{\frown}{AB} = ۱۸۰ - ۵۰ = ۱۳۰ \to \widehat{ABT} = \frac{۱۳۰}{۲} = ۶۵$

۱۵۵ دو دایره متداخلند $\Leftarrow$ $R_۲ - R_۱ = ۱ ,\ d = \sqrt{۲} - ۱ \approx ۱/۴ - ۱ = ۰/۴ \Rightarrow d = ۰/۴ \Rightarrow d < R_۲ - R_۱ \Rightarrow$

۱۵۶

$$\overset{R'}{\overset{\frown}{OO'}} = \frac{۱}{۲}\overset{R}{\overset{\frown}{OA}} = \frac{۱}{۲}(۶\sqrt{۳}) = ۳\sqrt{۳}$$

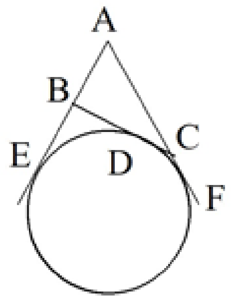
$\overset{\frown}{AOO'}$: رابطه فیثاغورث : $AO^۲ = OO'^۲ + AO'^۲ \Rightarrow (۶\sqrt{۳})^۲ = (۳\sqrt{۳})^۲ + AO'^۲$

$$\Rightarrow AO^۲ = ۳۶(۳) - ۹(۳) = ۲۷(۳) \Rightarrow AO' = ۹ \Rightarrow AB = AO' - BO' = ۹ - ۳\sqrt{۳}$$

۱۵۷ فرض: AE و AF بر دایره مماس هستند.

حکم: محیط $\overset{\triangle}{ABC}$ ثابت است.

برهان: می‌دانیم اگر از یک نقطه خارج دایره دو مماس بر دایره بکشیم طول دو مماس با هم برابرند.



$CD = CF ,\ BC = BE \quad (۱)$

AB محیط $= AB + Ac + BC$

$$= AB + AC + BC + DC \xrightarrow{\text{از } (۱)} AB + AC + BE + CF = AE + AF = ۲AF$$

پس محیط مثلث بستگی به تغییر نقطه‌ی D روی دایره ندارد.

۱۵۸

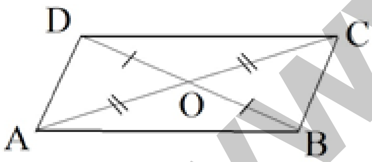
$MC \times ME = AM \times MB$

$۱۲z = ۹ \times ۱۶ \Rightarrow z = ۱۲$

$DT^۲ = DE \times DC$

$y^۲ = ۳ \times ۲۷ = ۸۱ \to y = ۹$

۱۵۹ محل تلاقی قطرها یعنی O را مرکز دوران می‌نامیم. OD و OB همچنین OC و OA در یک راستا هستند. پس زاویه‌ی دوران را می‌توانیم ۱۸۰° در نظر بگیریم در این تبدیل $A \to C$ و $D \to B$ یعنی DC تصویر AB است. در دوران ۱۸۰° شیب خط حفظ می‌شود پس $AB || DC$ است، یعنی چهارضلعی $ABCD$ یک متوازی الاضلاع است.



۱۶۰

$d = OO' = ۴ + ۹ = ۱۳$

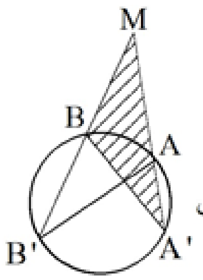
$TT' = \sqrt{d^۲ - (R - R')^۲} \Rightarrow ۲m - ۲ = \sqrt{۱۳^۲ - (۹ - ۴)^۲} = \sqrt{۱۴۴}$

$۲m - ۲ = ۱۲ \Rightarrow ۲m = ۱۴ \Rightarrow m = ۷$

۱۶۱ فرض: M خارج دایره

حکم: $MA \times MA' = MB \times MB'$

اثبات: پاره‌خط های $A'B$ و AB' را رسم می‌کنیم.



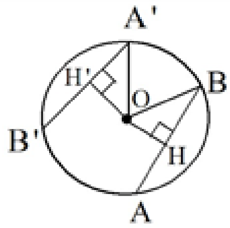
$$\left.\begin{array}{l} \widehat{A'} = \dfrac{\overset{\frown}{AB}}{۲} \text{ محاطی} \\ \widehat{B'} = \dfrac{\overset{\frown}{AB}}{۲} \text{ محاطی} \end{array}\right\} \Rightarrow \widehat{A'} = \widehat{B'} \text{ و } M \text{ زاویه مشترک}$$

$\overset{\triangle}{AB'M}$ و $\overset{\triangle}{A'BM}$ به حالت دو زاویه‌ی مساوی متشابه هستند. نسبت تشابه را می‌نویسیم:

$$\frac{MA}{MB} = \frac{MB'}{MA'} \Rightarrow MA \times MA' = MB \times MB'$$

۱۶۲ فرض: $AB > A'B'$

حکم: $OH < OH'$



اثبات: از مرکز دایره عمودهای OH و OH' را به وترهای $AB = L$ و $A'B' = L'$ وارد می‌کنیم. می‌دانیم شعاع عمود بر یک وتر آن را نصف می‌کند.

$$\left\{\begin{array}{l} AH = \dfrac{L}{۲} \\ A'H' = \dfrac{L'}{۲} \end{array}\right. \to AH > A'H' \to AH - A'H' > ۰ \qquad \overset{\triangle}{OAH} : OA^۲ = R^۲ = OH^۲ + AH^۲$$

$$\overset{\triangle}{OA'H'} : OA'^۲ = R^۲ = OH'^۲ + AH'^۲$$

$$AH^۲ - A'H'^۲ = OH'^۲ - OH^۲ \Rightarrow OH'^۲ - OH^۲ > ۰ \Rightarrow OH' - OH > ۰ \Rightarrow OH' > OH$$

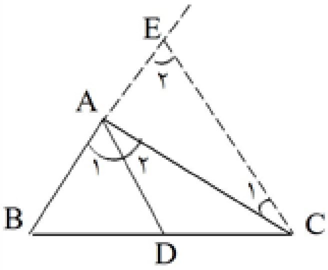
۱۶۳ $TT'^۲ = d^۲ - (R - R')^۲ \Rightarrow (۱۲)^۲ = d^۲ - (۹ - ۴)^۲ \Rightarrow ۱۴۴ + ۲۵ = d^۲ \Rightarrow d = ۱۳$

۱۶۴ الف) $۲ \times ۱۰ = ۴ \times x \Rightarrow x = ۵$

$$y(y + ۶) = ۳۶ \Rightarrow y^۲ + ۶y - ۳۶ = ۰ \Rightarrow \left\{\begin{array}{ll} y = \dfrac{-۶ + ۶\sqrt{۵}}{۲} & \text{ق ق} \\ y = \dfrac{-۶ - ۶\sqrt{۵}}{۲} & \text{غ ق ق} \end{array}\right.$$

ب) $$\left.\begin{array}{l} ۲ \times ۶۲ = t + \overset{\frown}{AP} + \overset{\frown}{BQ} - z \\ ۲ \times ۷۰ = \overset{\frown}{BQ} + \overset{\frown}{AP} \\ ۲ \times ۱۱۰ = t + z \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} z - t = ۱۶ \\ z + t = ۲۲۰ \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} z = ۱۱۸ \\ t = ۱۰۲ \end{array}\right.$$

۱۶۵



حکم: $\frac{AB}{AC}=\frac{BD}{DC}$

از رأس C خطی به موازات AD رسم می‌کنیم تا امتداد AB را در E قطع کند. داریم:

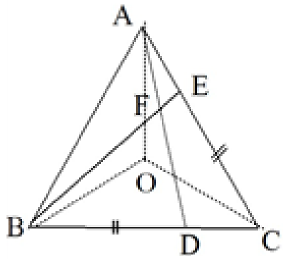
$$AD \parallel CE \Rightarrow \begin{cases}\hat{A}_2=\hat{C}_1\\ \hat{A}_1=\hat{E}_2 \ \text{و}\ \hat{A}_1=\hat{A}_2\end{cases} \Rightarrow \hat{C}_1=\hat{E} \Rightarrow AE=AC\ (1)$$

$$AD \parallel CE \Rightarrow \frac{AB}{AE}=\frac{BD}{DC} \xrightarrow{(1)} \frac{AB}{AC}=\frac{BD}{DC}$$

۱۶۶ نیمسازهای زاویه‌های A و B و C را رسم می‌کنیم تا یکدیگر را در نقطه‌ی O قطع کنند. در این صورت $OA=OB=OC$ و $\widehat{AOB}=\widehat{AOC}=\widehat{BOC}=120^\circ$ داریم:

$$\left.\begin{array}{l}\left.\begin{array}{l}OA=OB\\ \widehat{AOB}=120^\circ\end{array}\right\} \Rightarrow A \xrightarrow{\text{تحت دوران } 120^\circ \text{ به مرکز } O} B\\ \widehat{OAE}\cong\widehat{OCD} \Rightarrow \left.\begin{array}{l}OE=OD\\ \widehat{EOD}=120^\circ\end{array}\right\} \Rightarrow D \xrightarrow{\text{تحت دوران } 120^\circ \text{ به مرکز } O} E\end{array}\right\} \Rightarrow AD \xrightarrow{\text{تحت دوران } 120^\circ \text{ به مرکز } O} BE$$

پس تبدیل ایزومتری است. پس $AD=BE$. از طرفی زاویه‌ی بین هر خط و دوران یافته‌ی آن با زاویه‌ی دوران برابرست.



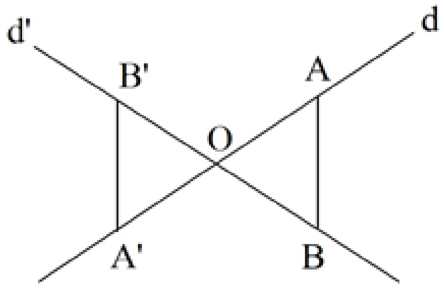
۱۶۷

$$\left.\begin{array}{l}\left.\begin{array}{l}OC=OA\\ \widehat{AOC}=180^\circ\end{array}\right\} \Rightarrow A \xrightarrow{\text{تحت دوران } 180^\circ \text{ به مرکز } O} C\\ \left.\begin{array}{l}OB=OD\\ \widehat{BOD}=180^\circ\end{array}\right\} \Rightarrow B \xrightarrow{\text{تحت دوران } 180^\circ \text{ به مرکز } O} D\end{array}\right\} \Rightarrow AB \xrightarrow{\text{تحت دوران } 180^\circ \text{ به مرکز } O} CD$$

دوران ۱۸۰ درجه یک تبدیل ایزومتری بوده و شیب را حفظ می‌کند. پس $AB=CD$ و $AB \parallel CD$. بنابراین ABCD متوازی‌الاضلاع است.

تلفن تماس: ۰۲۶۳۳۴۰۸۹۴۴

۱۶۸ دو خط d و d' در نقطه‌ی O متقاطع هستند. نقاط A و A' را روی خط d در نظر می‌گیریم. به طوری که O وسط آنها باشد. و نقاط B' و B' را روی خط d' در نظر می‌گیریم به طوری که O وسط B و B' باشد.



$$\left.\begin{array}{l}\left.\begin{array}{l} OA = OA' \\ \widehat{AOA'} = ۱۸۰^\circ \end{array}\right\} \Rightarrow A \xrightarrow{\text{تحت دوران }۱۸۰^\circ\text{ به مرکز }O} A' \\ \left.\begin{array}{l} OB = OB' \\ \widehat{BOB'} = ۱۸۰^\circ \end{array}\right\} \Rightarrow B \xrightarrow{\text{تحت دوران }۱۸۰^\circ\text{ به مرکز }O} B' \\ O \xrightarrow{\text{تحت دوران }۱۸۰^\circ\text{ به مرکز }O} O \end{array}\right\} \Rightarrow \overset{\triangle}{ABO} \xrightarrow{\text{تحت دوران }۱۸۰^\circ\text{ به مرکز }O} \overset{\triangle}{A'B'O}$$

دوران تبدیل ایزومتری است. پس $ABO \cong A'B'O'$ در نتیجه $\hat{O}_۱ = \hat{O}_۲$.

۱۶۹ قطر AC را رسم می‌کنیم. در این صورت داریم:

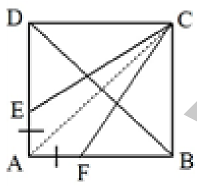
$$\left.\begin{array}{l} B \xrightarrow{\text{تحت بازتاب نسبت به خط }AC} D \\ E \xrightarrow{\text{تحت بازتاب نسبت به خط }AC} F \end{array}\right\} \Rightarrow BE \xrightarrow{\text{تحت بازتاب نسبت به خط }AC} DF$$

بازتاب نسبت به خط ایزومتری است پس $BE = DF$.

۱۷۰ قطر AC را رسم می‌کنیم. در این صورت داریم:

$$\left.\begin{array}{l} E \xrightarrow{\text{تحت بازتاب نسبت به خط }AC} F \\ C \xrightarrow{\text{تحت بازتاب نسبت به خط }AC} C \end{array}\right\} \Rightarrow EC \xrightarrow{\text{تحت بازتاب نسبت به خط }AC} FC$$

بازتاب نسبت به خط ایزومتری است پس $EC = FC$.



۱۷۱ از نقطه‌ی T خط d بر SR و PQ عمود می‌کنیم.

$$\left.\begin{array}{l} S \xrightarrow{\text{تحت بازتاب نسبت به خط }d} R \\ P \xrightarrow{\text{تحت بازتاب نسبت به خط }d} Q \\ Q \xrightarrow{\text{تحت بازتاب نسبت به خط }d} P \end{array}\right\} \Rightarrow \overset{\triangle}{SPQ} \xrightarrow{\text{تحت بازتاب نسبت به خط }d} \overset{\triangle}{RQP}$$

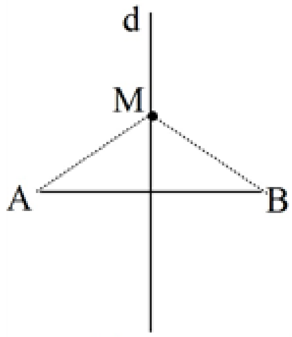
بازتاب نسبت به خط ایزومتری است پس دو مثلث $\overset{\triangle}{SPQ}$ و $\overset{\triangle}{RQP}$ مساویند.

۱۷۲ PR را به عنوان محور تقارن در نظر می‌گیریم.

$$\left.\begin{array}{l} P \xrightarrow{\text{تحت بازتاب نسبت به خط } PR} P \\ S \xrightarrow{\text{تحت بازتاب نسبت به خط } PR} Q \\ R \xrightarrow{\text{تحت بازتاب نسبت به خط } PR} R \end{array}\right\} \Rightarrow \widehat{PSR} \xrightarrow{\text{تحت بازتاب نسبت به خط } d} \widehat{PQR}$$

بازتاب نسبت به خط تبدیل ایزومتری است پس $\widehat{PQR} \cong \widehat{PSR}$ در نتیجه زوایای $\widehat{SPR}$ و $\widehat{QPR}$ برابرند.

۱۷۳



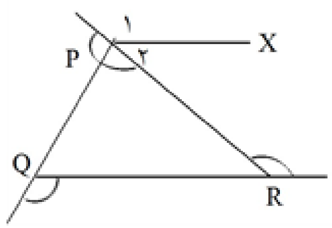
فرض کنید خط d عمودمنصف پاره خط AB باشد و M نقطه‌ای از خط d باشد.

$$\left.\begin{array}{l} A \xrightarrow{\text{تحت بازتاب نسبت به خط } d} B \\ M \xrightarrow{\text{تحت بازتاب نسبت به خط } d} M \end{array}\right\} \Rightarrow AM \xrightarrow{\text{تحت بازتاب نسبت به خط } d} BM$$

بازتاب نسبت به خط تبدیل ایزومتری است پس $AM = BM$.

۱۷۴ Px را موازی با QR ترسیم می‌کنیم. در این صورت زاویه‌ی $P_۱$ انتقال یافته‌ی زاویه R تحت بردار $\overrightarrow{RP}$ می‌باشد. از طرفی زاویه‌ی $P_۲$ انتقال یافته‌ی زاویه Q تحت بردار $\overrightarrow{QP}$ می‌باشد. انتقال ایزومتری است پس داریم:

$$\left\{\begin{array}{l} \hat{R} = \hat{P}_۱ \\ \hat{Q} = \hat{P}_۲ \\ \hat{P} + \hat{P}_۱ + \hat{P}_۲ = ۳۶۰ \end{array}\right. \Rightarrow \hat{P} + \hat{R} + \hat{Q} = ۳۶۰^\circ$$



۱۷۵ اگر $\overrightarrow{AD}$ را به عنوان بردار انتقال در نظر بگیریم با توجه به فرض بردارهای AD , CF و BE مساویند.

$$\left.\begin{array}{l} A \xrightarrow{\text{بردار تحت انتقال با } \overrightarrow{AD}} D \\ C \xrightarrow{\text{بردار تحت انتقال با } \overrightarrow{AD}} F \\ B \xrightarrow{\text{بردار تحت انتقال با } \overrightarrow{AD}} E \end{array}\right\} \Rightarrow \widehat{ACB} \xrightarrow{\text{بردار تحت انتقال با } \overrightarrow{AB}} \widehat{DFE}$$

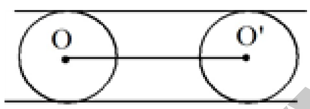
انتقال تبدیل ایزومتری است پس دو مثلث $\widehat{ACB}$ و $\widehat{DEF}$ مساویند.

۱۷۶ اگر $\overrightarrow{AB}$ را به عنوان بردار انتقال در نظر بگیریم خواهیم داشت.

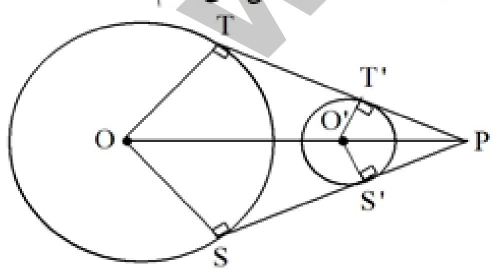
$$\left.\begin{array}{l} AB \parallel DC \\ AB = DC \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} D \xrightarrow[\text{بردار } \overrightarrow{AB}]{\text{تحت انتقال با}} C \\ A \xrightarrow[\text{بردار } \overrightarrow{AB}]{\text{تحت انتقال با}} B \end{array}\right\} \Rightarrow AD \xrightarrow[\text{بردار } \overrightarrow{AB}]{\text{تحت انتقال با}} BC$$

انتقال یک تبدیل ایزومتری است و شیب را حفظ می‌کند پس $AD \parallel BC$ و $AD = BC$.

۱۷۷ اگر دو دایره مساوی باشند مماس مشترکهای خارجی آنها با خط المرکزین موازی است.



اگر دو دایره مساوی نباشند، مماس مشترکهای خارجی آنها با خط المرکزین همرسند. زیرا اگر مماس مشترکهای خارجی دو دایره‌ی O و O' همدیگر را در نقطه‌ی P قطع کنند. از O و O' به نقطه‌ی P وصل می‌کنیم.



$OT = OS \rightarrow$. OP نیمساز زاویه P است.

$O'T' = O'S' \rightarrow$. $O'P$ نیمساز زاویه P است.

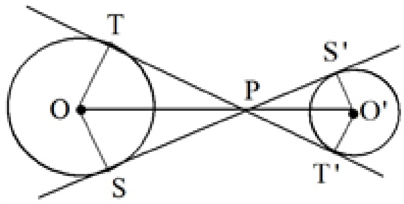
پس نقاط O , O' , P در یک راستا قرار دارند. بنابراین خط المرکزین OO' از نقطه‌ی P می‌گذرد.

۱۷۸ فرض کنیم مماس مشترکهای داخلی دو دایره‌ی O و O' همدیگر را در نقطه‌ی P قطع کنند. از O و O' به نقطه‌ی P وصل می‌کنیم.

$OT = OS \Rightarrow$ OP نیمساز زاویه‌ی P است.

$O'T' = O'S' \Rightarrow$ $O'P$ نیمساز زاویه‌ی P است.

می‌دانیم نیمسازهای دو زاویه‌ی متقابل به رأس در یک امتداد هستند. پس O , O' , P در یک راستا هستند. بنابراین خط المرکزین OO' از نقطه‌ی P می‌گذرد.



۱۷۹ $TT' = \sqrt{d^۲ - (R - R')^۲} \rightarrow ۵a - ۳ = \sqrt{۱۳^۲ - (۸ - ۳)^۲}$ مماس مشترک خارجی

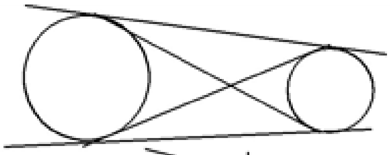
$\rightarrow ۵a - ۳ = ۱۲ \rightarrow ۵a = ۱۵ \Rightarrow a = ۳$

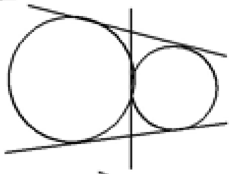
۱۸۰ در دو دایره مماس بیرون طول خط‌المرکزین با جمع شعاع‌ها برابر است.

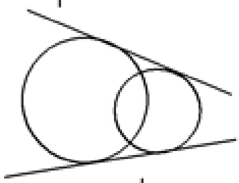
$d = oo' = R + R' \Rightarrow d = ۹ + ۴ = ۱۳$

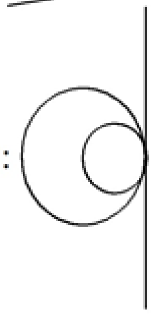
$TT' = \sqrt{d^۲ - (R - R')^۲} = \sqrt{(R + R')^۲ - (R - R')^۲} = \sqrt{۱۳^۲ - ۵^۲} = ۱۲$ مماس مشترک خارجی

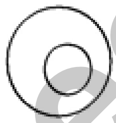
تلفن تماس: ۰۲۶۳۳۴۰۸۹۴۴

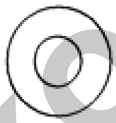
۱۸۱ دو دایره‌ی متخارج دارای چهار مماس مشترک هستند.  : حالت اول

دو دایره‌ی مماس بیرونی دارای سه مماس مشترک هستند.  : حالت دوم

دو دایره‌ی متقاطع دارای دو مماس مشترک هستند.  : حالت سوم

دو دایره‌ی مماس درونی دارای یک مماس مشترک هستند.  : حالت چهارم

دو دایره‌ی متداخل مماس مشترک ندارد.  : حالت پنجم

دو دایره‌ی هم‌مرکز دارای مماس مشترک نیستند.  : حالت ششم

۱۸۲ فرض کنیم $T_1T'_1$ مماس مشترک داخلی دو دایره باشد $O'A$ موازی $T_1T'_1$ است. پس چهارضلعی $O'AT_1T'_1$ مستطیل است. درنتیجه $O'A = T_1T'_1$. داریم:

$$\left.\begin{array}{l} \widehat{OAO'} : O'A^2 = OO'^2 - OA^2 \\ OO' = d \\ O'A = T_1T'_1 \\ OA = R + R' \end{array}\right\} \Rightarrow T_1T'^2_1 = d^2 - (R+R')^2 \Rightarrow T_1T'_1 = \sqrt{d^2 - (R+R')^2}$$

۱۸۳ ابتدا به مرکز O' و شعاع $R + R'$ دایره‌ی C'' را رسم می‌کنیم. سپس به قطر OO' دایره‌ای ترسیم می‌کنیم تا دایره C'' را در نقطه‌ی A قطع کند. در این صورت OA بر دایره‌ی C'' مماس خواهد بود. OA دایره به مرکز O را در نقطه‌ی T قطع می‌کند. از نقطه‌ی T خطی موازی $O'A$ رسم می‌کنیم. این خط همان مماس مشترک داخلی دو دایره است.

۱۸۴

$$x(x-2) = 4 \times 12 \rightarrow x^2 - 2x - 48 = 0 \rightarrow (x-8)(x+6) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 8 \\ x = -6 \end{cases}$$

$x = -6$ قابل قبول نیست. پس $x = 8$.

تلفن تماس: ۰۲۶۳۳۴۰۸۹۴۴

۱۸۵

$$۴\times x = ۲\times ۱۰ \Rightarrow x = ۵$$

$$۶^{۲} = y(y+۴+x) \to ۳۶ = y(y+۹)$$

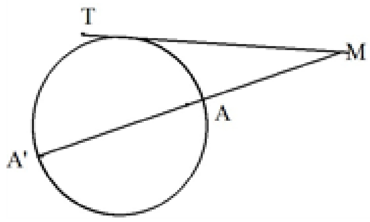
$$y^{۲} + ۹y - ۳۶ = ۰ \Rightarrow (y+۱۲)(y-۳) = ۰ \to \begin{cases} y = ۳ \\ y = -۱۲ \end{cases}$$

$y = -۱۲$ قابل قبول نیست. پس $y = ۳$.

۱۸۶ از سه نقطه‌ی A , A' و T یک دایره می‌گذرد. فرض کنیم MT بر این دایره مماس نباشد و دایره‌ی فوق را در نقطه‌ی دیگر مثل T' قطع کند داریم:

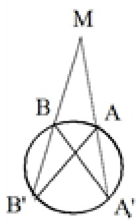
$$\left.\begin{array}{l} MT\times MT' = MA\times MA' \\ \text{فرض مسئله} \Rightarrow MT^{۲} = MA\times MA' \end{array}\right\} \Rightarrow MT\times MT' = MT^{۲} \Rightarrow MT = MT'$$

پس نقاط T , T' بر هم مماس هستند بنابراین MT بر دایره مماس است.



۱۸۷ از A به B' و از B به A' وصل می‌کنیم. دو مثلث $\overset{\triangle}{MBA'}$ و $\overset{\triangle}{MAB'}$ را در نظر می‌گیریم.

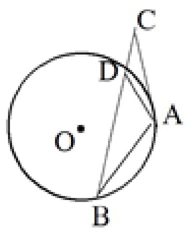
$$\left.\begin{array}{l} \text{زاویه ی محاطی } A' = \dfrac{\overset{\frown}{AB}}{۲} \\ \text{زاویه ی محاطی } B' = \dfrac{\overset{\frown}{AB}}{۲} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} \hat{A'} = \hat{B'} \\ \hat{M} = \hat{M} \end{array}\right\} \Rightarrow \overset{\triangle}{MAB'} \sim \overset{\triangle}{MBA'} \Rightarrow \frac{MA}{MB} = \frac{MB'}{MA'} \Rightarrow MA.MA' = MB.MB'$$



۱۸۸ از A به D وصل می‌کنیم.

$$\text{طبق فرض} \Rightarrow AB = AC \Rightarrow \hat{B} = \hat{C} \quad (۱)$$

$$\left.\begin{array}{l} \text{زاویه ی ظلی } \hat{A}_{۱} = \dfrac{\overset{\frown}{AD}}{۲} \\ \text{زاویه ی محاطی } \hat{B} = \dfrac{\overset{\frown}{AD}}{۲} \end{array}\right\} \Rightarrow \hat{A}_{۱} = \hat{B} \quad (۲)$$

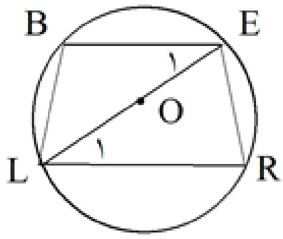


$$(۲) \text{ و } (۱) \text{ از} \Rightarrow \hat{A}_{۱} = \hat{C} \Rightarrow AD = DC$$

پس مثلث $\overset{\triangle}{ADC}$ متساوی‌الساقین است.

۱۸۹ از E به L وصل می‌کنیم. با توجه به رابطه‌ی $BL = ER$ نتیجه می‌گیریم $\overset{\frown}{BL} = \overset{\frown}{ER}$. داریم:

$$\left.\begin{array}{l} \hat{E}_۱ = \dfrac{\overset{\frown}{BL}}{۲} \quad \text{زاویه ی محاطی} \\ \hat{L}_۱ = \dfrac{\overset{\frown}{ER}}{۲} \quad \text{زاویه ی محاطی} \end{array}\right\} \xrightarrow{\overset{\frown}{BL} = \overset{\frown}{ER}} \hat{E}_۱ = \hat{L}_۱ \xrightarrow[\text{موازی و مورب}]{\text{عکس قضیه ی خطوط}} BE \parallel LR$$



۱۹۰

$$\left.\begin{array}{l} \hat{M} = \dfrac{\overset{\frown}{AD}}{۲} \quad \text{زاویه ی محاطی} \\ \hat{N} = \dfrac{\overset{\frown}{AD}}{۲} \quad \text{زاویه ی محاطی} \end{array}\right\} \Rightarrow \hat{M} = \hat{N} \quad (۱)$$

از طرفی چهارضلعی ANDI متوازی‌الاضلاع است پس $\hat{N} = \hat{I}$. با توجه به رابطه‌ی (۱) نتیجه می‌گیریم $\hat{M} = \hat{I}$ بنابراین $DM = DI$.

۱۹۱

$$\hat{A} = \frac{\overset{\frown}{BC} - \overset{\frown}{DE}}{۲} \Rightarrow ۲۰ = \frac{x - y}{۲} \Rightarrow x - y = ۴۰^\circ$$

$$\hat{O} = \frac{\overset{\frown}{BC} + \overset{\frown}{DE}}{۲} \Rightarrow ۸۰ = \frac{x + y}{۲} \Rightarrow x + y = ۱۶۰^\circ$$

$$\begin{cases} x - y = ۴۰^\circ \\ x + y = ۱۶۰^\circ \end{cases} \xrightarrow{+} ۲x = ۲۰۰ \Rightarrow x = ۱۰۰^\circ , y = ۶۰^\circ$$

۱۹۲

$$\hat{A} = \frac{x - y}{۲} \Rightarrow ۶۲ = \frac{x - y}{۲} \Rightarrow x - y = ۱۲۴^\circ$$

$$\begin{cases} x - y = ۱۲۴^\circ \\ x + y = ۳۶۰^\circ \end{cases} \xrightarrow{+} ۲x = ۴۸۴ \Rightarrow x = ۲۴۲^\circ \Rightarrow y = ۳۶۰ - ۲۴۲ \Rightarrow y = ۱۱۸^\circ$$

۱۹۳

$$\widehat{BNT} = \frac{\overset{\frown}{BT} + \overset{\frown}{AL}}{۲} \Rightarrow ۶x + ۲۸ = \frac{۹x + ۱۷ + ۱۰x - ۱۰}{۲}$$

$$\Rightarrow ۱۲x + ۵۶ = ۱۹x + ۷ \Rightarrow ۷x = ۴۹ \Rightarrow x = ۷$$

بنابراین $B\hat{N}T = ۶ \times ۷ + ۲۸ = ۷۰$ است.

۱۹۴

$$\hat{M}=\frac{\overset{\frown}{AT}-\overset{\frown}{BT}}{۲}\Rightarrow ۶۰=\frac{c-a}{۲}\Rightarrow c-a=۱۲۰$$

$$b=۱۰۰\Rightarrow c+a+۱۰۰=۳۶۰\Rightarrow c+a=۲۶۰$$

$$\begin{cases}c-a=۱۲۰\\ c+a=۲۶۰\end{cases}\xrightarrow{-}۲a=۱۴۰\Rightarrow a=۷۰^\circ$$

۱۹۵

$$\hat{M}=\frac{\overset{\frown}{AT}-\overset{\frown}{BT}}{۲}\Rightarrow ۴۵=\frac{c-a}{۲}\Rightarrow ۴۵=\frac{۳a-a}{۲}\Rightarrow a=۴۵^\circ$$

۱۹۶

$$\hat{M}=\frac{\overset{\frown}{AT}-\overset{\frown}{BT}}{۲}\Rightarrow \hat{M}=\frac{c-a}{۲}\Rightarrow ۳۰=\frac{c-۵۵}{۲}\Rightarrow c=۱۱۵^\circ$$

۱۹۷

$$\hat{M}=\frac{\overset{\frown}{AT}-\overset{\frown}{BT}}{۲}\Rightarrow ۴۵=\frac{۲۰۰-a}{۲}\Rightarrow a=۱۱۰^\circ$$

۱۹۸

$$\frac{a}{۱}=\frac{b}{۴}=\frac{c}{۷}=\frac{a+b+c}{۱+۴+۷}=\frac{۳۶۰}{۱۲}=۳۰\rightarrow\begin{cases}a=۳۰^\circ\\ b=۱۲۰^\circ\\ c=۲۱۰^\circ\end{cases}$$

$$\hat{M}=\frac{\overset{\frown}{AT}-\overset{\frown}{BT}}{۲}=\frac{c-a}{۲}=\frac{۲۱۰-۳۰}{۲}=۹۰^\circ$$

۱۹۹

$$a+b+c=۳۶۰^\circ\Rightarrow a+۱۲۰+۲۰۰=۳۶۰\Rightarrow a=۴۰^\circ$$

$$\hat{M}=\frac{\overset{\frown}{AT}-\overset{\frown}{BT}}{۲}=\frac{c-a}{۲}=\frac{۲۰۰-۴۰}{۲}=\frac{۱۶۰}{۲}\Rightarrow \hat{M}=۸۰^\circ$$

۲۰۰

$$\hat{M}=\frac{\overset{\frown}{AT}-\overset{\frown}{BT}}{۲}=\frac{c-a}{۲}\Rightarrow \hat{M}=\frac{۷۴}{۲}=۳۷^\circ$$

۲۰۱

$$\hat{M}=\frac{\overset{\frown}{TA}-\overset{\frown}{TB}}{۲}\Rightarrow \hat{M}=\frac{۱۵۰^\circ-۶۰^\circ}{۲}=\frac{۹۰}{۲}=۴۵^\circ$$

۲۰۲

$$\hat{M}=\frac{\overset{\frown}{AB}-\overset{\frown}{A'B'}}{۲}\Rightarrow ۲۵=\frac{۳\overset{\frown}{A'B'}-\overset{\frown}{A'B'}}{۲}\Rightarrow \overset{\frown}{A'B'}=۲۵^\circ$$

۲۰۳

$$\hat{M}=\frac{\overset{\frown}{AB}-\overset{\frown}{A'B'}}{۲}\Rightarrow ۴۵=\frac{\overset{\frown}{AB}-\overset{\frown}{A'B'}}{۲}\Rightarrow \overset{\frown}{AB}-\overset{\frown}{A'B'}=۹۰$$

۲۰۴

$$\hat{M}=\frac{\overset{\frown}{AB}-\overset{\frown}{A'B'}}{۲}\Rightarrow ۳۵=\frac{\overset{\frown}{AB}-۶۰}{۲}\Rightarrow \overset{\frown}{AB}=۱۳۰$$

۲۰۵

$$\hat{M}=\frac{\overset{\frown}{AB}-\overset{\frown}{A'B'}}{۲}\Rightarrow ۲۰=\frac{۱۶۰-\overset{\frown}{A'B'}}{۲}\Rightarrow \overset{\frown}{A'B'}=۱۲۰^\circ$$

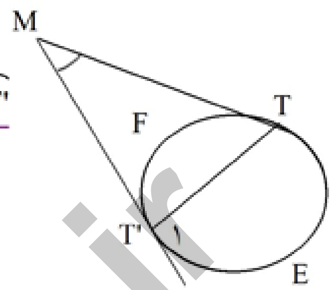
۲۰۶

$$\hat{M} = ۹۰^\circ \Rightarrow \frac{\overset{\frown}{AC} + \overset{\frown}{BD}}{۲} = ۹۰^\circ \Rightarrow \frac{۲x + ۳x + ۱۰}{۲} = ۹۰$$

$$\Rightarrow ۵x + ۱۰ = ۱۸۰ \Rightarrow ۵x = ۱۷۰ \Rightarrow x = ۳۴$$

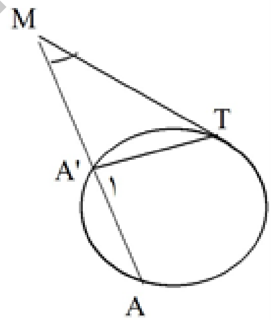
قطر $CD \Rightarrow ۳x + ۱۰ + y = ۱۸۰ \Rightarrow ۱۰۲ + ۱۰ + y = ۱۸۰ \Rightarrow y = ۶۸^\circ$

۲۰۷ از T به T' وصل می‌کنیم.



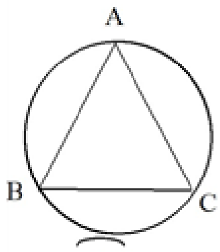
$$\left.\begin{array}{ll} \text{زاویه ی خارجی} & \hat{T'}_۱ = \hat{M} + \hat{T} \Rightarrow \hat{M} = \hat{T'}_۱ - \hat{T} \\ \text{زاویه ی ظلی} & \hat{T'}_۱ = \dfrac{\overset{\frown}{TET'}}{۲} \\ \text{زاویه ی ظلی} & \hat{T} = \dfrac{\overset{\frown}{TFT'}}{۲} \end{array}\right\} \Rightarrow \hat{M} = \frac{\overset{\frown}{TET'} - \overset{\frown}{TFT'}}{۲}$$

۲۰۸ از A' به T وصل می‌کنیم.



$$\left.\begin{array}{ll} \text{زاویه ی خارجی} & \hat{A'}_۱ = \hat{M} + \hat{T} \Rightarrow \hat{M} = \hat{A'}_۱ - \hat{T} \\ \text{زاویه ی محاطی} & \hat{A'}_۱ = \dfrac{\overset{\frown}{AT}}{۲} \\ \text{زاویه ی ظلی} & \hat{T} = \dfrac{\overset{\frown}{A'T}}{۲} \end{array}\right\} \Rightarrow \hat{M} = \frac{\overset{\frown}{AT} - \overset{\frown}{AT'}}{۲}$$

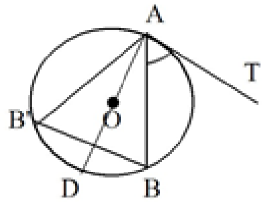
۲۰۹ دایره‌ی محیطی مثلث $\overset{\triangle}{ABC}$ را رسم می‌کنیم.



$$\left.\begin{array}{l} \hat{A} = \dfrac{\overset{\frown}{BC}}{۲} \\ \hat{B} = \dfrac{\overset{\frown}{AC}}{۲} \\ \hat{C} = \dfrac{\overset{\frown}{AB}}{۲} \end{array}\right\} \Rightarrow \hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = \frac{\overset{\frown}{AB} + \overset{\frown}{AC} + \overset{\frown}{BC}}{۲} = \frac{۳۶۰}{۲} = ۱۸۰^\circ$$

۲۱۰ قطر AD را رسم می‌کنیم. قطر AD بر مماس AT عمود است. پس بر وتر موازی آن یعنی 'BB عمود است. می‌دانیم قطر عمود بر وتر آن‌را نصف می‌کند. پس AD عمودمنصف 'BB است. بنابراین 'AB = AB داریم:

$$\left.\begin{array}{l} AT \parallel BB' \\ AB \text{ مورب} \end{array}\right\} \Rightarrow \widehat{TAB} = \hat{B} \quad (۱)$$



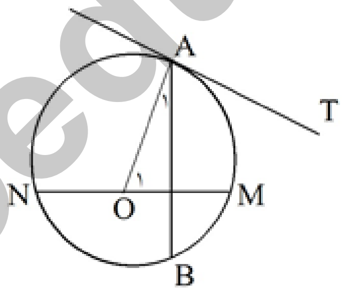
$$\left.\begin{array}{l} \text{زاویه محاطی } \hat{B} = \dfrac{\overparen{AB'}}{۲} \\ \overparen{AB} = \overparen{AB'} \end{array}\right\} \Rightarrow \hat{B} = \frac{\overparen{AB}}{۲} \quad (۲)$$

$$\text{از } (۲), (۱) \Rightarrow \widehat{TAB} = \frac{\overparen{AB}}{۲}$$

۲۱۱ قطر MN بر وتر AB عمود است. پس وتر AB و کمان AB را نصف می‌کند. از O به A وصل می‌کنیم. در این‌صورت داریم:

$$\left.\begin{array}{l} OA \perp AT \Rightarrow \widehat{TAB} + \hat{A}_۱ = ۹۰^\circ \\ \hat{O}_۱ + \hat{A}_۱ = ۹۰^\circ \end{array}\right\} \Rightarrow \widehat{TAB} = \hat{O}_۱ \quad (۱)$$

$$\left.\begin{array}{l} \text{زاویه ی مرکزی } \hat{O}_۱ = \overparen{AM} \\ \overparen{AM} = \overparen{BM} \Rightarrow \overparen{AM} = \dfrac{\overparen{AB}}{۲} \end{array}\right\} \Rightarrow \hat{O}_۱ = \frac{\overparen{AB}}{۲} \quad (۲)$$



$$\text{از } (۲), (۱) \Rightarrow \widehat{TAB} = \frac{\overparen{AB}}{۲}$$

۲۱۲

$$AB = AC \Rightarrow \overparen{AB} = \overparen{AC} \Rightarrow \overparen{AB} = ۱۴۰^\circ$$

$$\overparen{BC} = ۳۶۰ - (۱۴۰ + ۱۴۰) = ۸۰^\circ$$

$$\text{زاویه ظلی } \widehat{BCT} = \frac{\overparen{BC}}{۲} = \frac{۸۰}{۲} = ۴۰^\circ$$

۲۱۳

$$\overparen{BC} = ۳۶۰ - (۹۰ + ۱۳۰) = ۱۴۰ \Rightarrow \overparen{BC} = ۱۴۰^\circ$$

$$\text{زاویه‌ی محاطی } \widehat{BAC} = \frac{\overparen{BC}}{۲} = \frac{۱۴۰}{۲} = ۷۰^\circ$$

۲۱۴

الف) $\hat{N} = \dfrac{\overset{\frown}{AG}}{۲} = \dfrac{۷۰}{۲} = ۳۵^\circ$

ب) $\hat{R} = \dfrac{\overset{\frown}{AG}}{۲} = \dfrac{۷۰}{۲} = ۳۵^\circ$

پ) $\widehat{NAR} = \dfrac{\overset{\frown}{NR}}{۲} \Rightarrow ۳۰ = \dfrac{\overset{\frown}{NR}}{۲} \Rightarrow \overset{\frown}{NR} = ۶۰^\circ$

ت) $\overset{\frown}{GNR} = ۱۸۰^\circ \Rightarrow \overset{\frown}{GN} + \overset{\frown}{NR} = ۱۸۰^\circ \Rightarrow \overset{\frown}{GN} + ۶۰ = ۱۸۰ \Rightarrow \overset{\frown}{GN} = ۱۲۰^\circ$

ث) $\widehat{GAN} = \dfrac{\overset{\frown}{GN}}{۲} = \dfrac{۱۲۰}{۲} = ۶۰^\circ$

ج) $\widehat{GAR} = \dfrac{\overset{\frown}{GR}}{۲} = \dfrac{۱۸۰}{۲} = ۹۰^\circ$

۲۱۵

$\hat{B} = ۵۰^\circ \Rightarrow \dfrac{\overset{\frown}{AL}}{۲} = ۵۰ \Rightarrow \overset{\frown}{AL} = ۱۰۰^\circ$

$\overset{\frown}{AB} + \overset{\frown}{AL} + \overset{\frown}{BL} = ۳۶۰^\circ \Rightarrow \overset{\frown}{AB} + ۱۰۰ + ۱۲۰ = ۳۶۰ \Rightarrow \overset{\frown}{AB} = ۱۴۰^\circ$

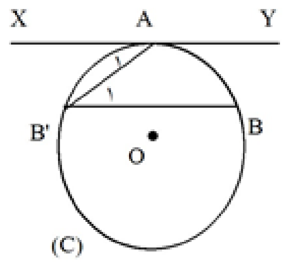
زاویه ی ظلی $\hat{x} = \dfrac{\overset{\frown}{AB}}{۲} = \dfrac{۱۴۰}{۲} = ۷۰^\circ$

۲۱۶

$۲x + ۳x + ۴x = ۳۶۰ \Rightarrow ۹x = ۳۶۰ \Rightarrow x = ۴۰^\circ$

زاویه ی محاطی $y = \dfrac{۴x}{۲} \Rightarrow y = ۲x = ۲ \times ۴۰ = ۸۰^\circ$

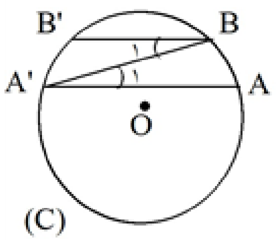
۲۱۷ از A به 'B وصل می‌کنیم. زاویه‌ی $\hat{A}_۱$ زاویه‌ی ظلی و زاویه‌ی $\hat{B'}_۱$ زاویه‌ی محاطی است.



$$\left.\begin{array}{l} xy \parallel BB' \\ \text{مورب } AB' \end{array}\right\} \Rightarrow \hat{A}_۱ = \hat{B'}_۱$$

$$\left.\begin{array}{l} \text{زاویه ظلی } \hat{A}_۱ = \dfrac{\overset{\frown}{AB'}}{۲} \\ \text{زاویه محاطی } \hat{B'}_۱ = \dfrac{\overset{\frown}{AB}}{۲} \end{array}\right\} \Rightarrow \dfrac{\overset{\frown}{AB'}}{۲} = \dfrac{\overset{\frown}{AB}}{۲} \Rightarrow \overset{\frown}{AB'} = \overset{\frown}{AB}$$

۲۱۸ از B به 'A وصل می‌کنیم.

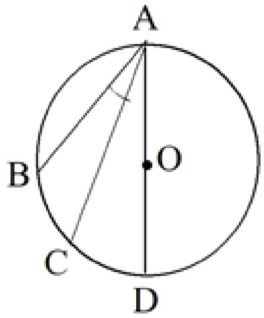


$$\left.\begin{array}{l} BB' \parallel AA' \\ \text{مورب } BA' \end{array}\right\} \Rightarrow \hat{B}_۱ = \hat{A'}_۱$$

$$\left.\begin{array}{l} \text{زاویه محاطی } \hat{B}_۱ = \dfrac{\overset{\frown}{A'B'}}{۲} \\ \text{زاویه ی محاطی } \hat{A'}_۱ = \dfrac{\overset{\frown}{AB}}{۲} \end{array}\right\} \Rightarrow \dfrac{\overset{\frown}{A'B'}}{۲} = \dfrac{\overset{\frown}{AB}}{۲} \Rightarrow \overset{\frown}{A'B'} = \overset{\frown}{AB}$$

۲۱۹ قطر AD را رسم می‌کنیم. زاویه‌های محاطی به‌دست آمده دارای یک ضلع که قطر دایره است می‌باشد. پس اندازه‌ی هر یک از آنها نصف کمان روبروی آنها می‌باشد.

$$\left.\begin{array}{l}\widehat{BAD} = \dfrac{\overset{\frown}{BD}}{۲} \\[2ex] \widehat{CAD} = \dfrac{\overset{\frown}{CD}}{۲}\end{array}\right\} \xrightarrow{-} \widehat{BAC} = \dfrac{\overset{\frown}{BC}}{۲}$$

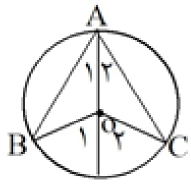


۲۲۰ قطر AD را رسم می‌کنیم از O به نقاط B و C وصل می‌کنیم.

$$\left.\begin{array}{l}\text{زاویه خارجی } \hat{O}_۱ = \hat{A}_۱ + \hat{B} \\ \text{زاویه خارجی } \hat{O}_۲ = \hat{A}_۲ + \hat{C} \\ OA = OB \Rightarrow \hat{A}_۱ = \hat{B} \\ OA = OC \Rightarrow \hat{A}_۲ = \hat{C}\end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l}\hat{O}_۱ = ۲\hat{A}_۱ \\ \hat{O}_۲ = ۲\hat{A}_۲\end{array}\right. \xrightarrow{+} \widehat{BOC} = ۲\widehat{BAC} \ (۱)$$

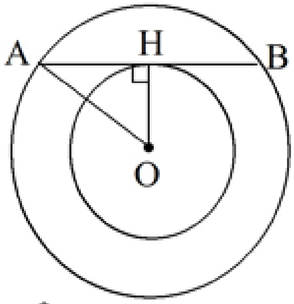
از طرفی زاویه‌ی $\widehat{BOC}$ زاویه‌ی مرکزی است، و برابر $\overset{\frown}{BC}$ می‌باشد.

$$(۱) \text{ از} \Rightarrow ۲\widehat{BAC} = \overset{\frown}{BC} \Rightarrow \widehat{BAC} = \dfrac{\overset{\frown}{BC}}{۲}$$



تلفن تماس: ۰۲۶۳۳۴۰۸۹۴۴

۲۲۱ OH بر وتر AB از دایره‌ی بزرگتر، که بر دایره‌ی کوچکتر مماس است عمود می‌باشد.



$\overset{\frown}{OAH} : AH^۲ = OA^۲ - OH^۲ \rightarrow AH^۲ = ۵^۲ - ۳^۲ \rightarrow AH^۲ = ۱۶ \rightarrow AH = ۴$

$AB = ۲AH \Rightarrow AB = ۸$

۲۲۲ اگر از یک نقطه دو مماس بر دایره رسم کنیم آنگاه اندازه‌های دو مماس برابرند. پس $BD = BE$ و $CD = CF$ داریم:

$\text{محیط } \overset{\frown}{ABC} = AB + BC + AC \rightarrow \text{محیط } \overset{\frown}{ABC} = AB + BD + DC + AC$

$\text{محیط } \overset{\frown}{ABC} = AB + BE + CF + AC \rightarrow \text{محیط } \overset{\frown}{ABC} = AE + AF \rightarrow \text{محیط } \overset{\frown}{ABC} =$ مقدار ثابت

۲۲۳ از O به نقاط T و 'T وصل می‌کنیم.

$\begin{cases} \overset{\frown}{OTM} : OT = ۶ \\ OM = ۱۲ \end{cases} \Rightarrow OT = \frac{۱}{۲}OM \Rightarrow \hat{M}_۱ = ۳۰° \Rightarrow \overset{\frown}{TMT'} = ۶۰°$

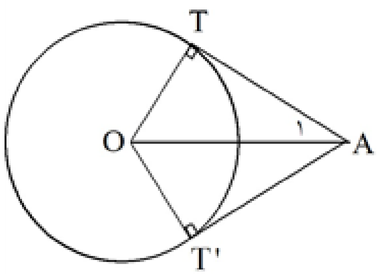
از طرفی طبق مسئله‌ی قبل $MT = ۶\sqrt{۳}$ پس $MT' = ۶\sqrt{۳}$ در نتیجه مثلث $\overset{\frown}{MTT'}$ متساوی‌الاضلاع است بنابراین $TT' = ۶\sqrt{۳}$.

۲۲۴ از O به T وصل می‌کنیم در مثلث قائم‌الزاویه $\overset{\frown}{OTM}$ داریم:

$MT^۲ = OM^۲ - OT^۲ \rightarrow MT^۲ = ۱۲^۲ - ۶^۲ = ۱۰۸ \Rightarrow MT^۲ = ۱۰۸ \Rightarrow MT = ۶\sqrt{۳} = MT'$

۲۲۵ OA نیمساز زاویه‌ی بین دو مماس AT و 'AT می‌باشد. پس در مثلث قائم‌الزاویه $\overset{\frown}{OAT}$ زاویه‌ی $\hat{A}_۱$ برابر ۳۰ درجه است.

$\overset{\frown}{OAT} : \hat{A}_۱ = ۳۰° \Rightarrow OT = \frac{۱}{۲}OA \xrightarrow{OT = ۵} OA = ۱۰$

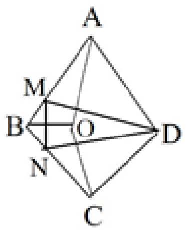


تلفن تماس: ۰۲۶۳۳۴۰۸۹۴۴

۲۲۶ با توجه به فرض مسئله داریم:

$$AB + CD = AD + BC \rightarrow \cancel{AM} + BM + \cancel{CD} = \cancel{AD} + \cancel{CN} + BN \Rightarrow BM = BN$$

پس مثلث $\widehat{BMN}$ متساوی‌الساقین است. نیمساز زوایای A , B , C را رسم می‌کنیم. در مثلث متساوی‌الساقین $\widehat{AMD}$ نیمساز زاویه A عمودمنصف ضلع MD می‌باشد و در مثلث متساوی‌الساقین $\widehat{BMN}$ نیمساز زاویه‌ی B عمودمنصف MN می‌باشد و در مثلث متساوی‌الساقین $\widehat{NCD}$ نیمساز زاویه‌ی C عمودمنصف ND می‌باشد. می‌دانیم عمودمنصف‌های مثلث $\widehat{DMN}$ همرسند. پس نیمسازهای زوایای A , B , C در یک نقطه همرسند. پس چهارضلعی $ABCD$ محیطی است.



۲۲۷ از هر نقطه دو مماس بر دایره رسم کنیم آنگاه اندازه‌های دو مماس برابرند.

$$\left.\begin{array}{l} YP = YS \\ LR = SL \\ OR = OQ \\ GP = GQ \end{array}\right\} \xrightarrow{+} YP + LR + OR + GP = YS + SL + OQ + GQ$$

$$\Rightarrow YG + LO = YL + OG$$

۲۲۸ از هر نقطه دو مماس بر دایره رسم کنیم آنگاه اندازه‌های دو مماس برابرند.

$$\left.\begin{array}{l} AS = AP \\ SD = RD \end{array}\right\} \xrightarrow{+} AS + SD = AP + RD \Rightarrow AP + RD = ۱۳$$

$$\left.\begin{array}{l} BQ = BP \\ CQ = CR \end{array}\right\} \xrightarrow{+} BQ + CQ = BP + CR \Rightarrow BP + CR = ۹$$

$$\xrightarrow{+} AB + CD = ۲۲$$

پس محیط چهارضلعی $ABCD$ برابر است با:

$$AB + BC + CD + AD = ۲۲ + ۹ + ۱۳ = ۴۴$$

۲۲۹

$$AC = BD \Rightarrow \overset{\frown}{ABC} = \overset{\frown}{BAD} \xrightarrow{\text{را از طرفین کم می کنیم } \overset{\frown}{AB}} \overset{\frown}{AC} - \overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{BD} - \overset{\frown}{AB}$$

$$\Rightarrow \overset{\frown}{BC} = \overset{\frown}{AD} \Rightarrow BC = AD$$

تلفن تماس: ۰۲۶۳۳۴۰۸۹۴۴

۲۳۰

$$AD = BC \Rightarrow \overset{\frown}{AD} = \overset{\frown}{BC} \xrightarrow[\text{را اضافه می کنیم}]{\text{به طرفین } \overset{\frown}{AB}} \overset{\frown}{AD} + \overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{BC} + \overset{\frown}{AB} \Rightarrow$$

$$\overset{\frown}{DAB} = \overset{\frown}{ABC} \Rightarrow AC = BD$$

۲۳۱

$$\left.\begin{array}{l} CA \parallel ON \\ \text{مورب } CI \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} \hat{O}_1 = \hat{C}_1 \\ \text{زاویه مرکزی } \hat{O}_1 = \overset{\frown}{NI} \\ \text{زاویه محاطی } \hat{C}_1 = \dfrac{\overset{\frown}{AI}}{۲} \end{array}\right\} \Rightarrow \overset{\frown}{NI} = \overset{\frown}{AN}$$

بنابراین $\overset{\frown}{AN} = \overset{\frown}{NI}$.

۲۳۲ از R به C وصل می‌کنیم. در مثلث قائم‌الزاویه $\widehat{RCQ}$ داریم:

$$\left.\begin{array}{l} RQ^۲ + CQ^۲ = RC^۲ \\ RQ = CQ \end{array}\right\} \Rightarrow ۲CQ^۲ = \left(\sqrt{۲}\right)^۲ \Rightarrow CQ^۲ = ۱ \Rightarrow CQ = ۱$$

پس $DQ = ۱$ و $CD = ۲$. (توجه کنید که اگر از مرکز دایره به وتری از آن عمود کنیم آن وتر نصف می‌شود.)

۲۳۳ از R مرکز دایره به نقطه‌ی A وصل می‌کنیم. پس $AR = ۱۰$ و $PR = ۶$ داریم:

$$\widehat{APR}: AP^۲ = AR^۲ - PR^۲ \rightarrow AP^۲ = ۱۰^۲ - ۶^۲ = ۶۴ \Rightarrow AP^۲ = ۶۴ \Rightarrow AP = ۸$$

اگر از مرکز دایره به وتر آن عمود کنیم آنگاه وتر نصف می‌شود. پس داریم:

$$AB = ۲AP = ۲ \times ۸ = ۱۶$$

۲۳۴

$$\hat{x} = ۱۶۵° \Rightarrow \overset{\frown}{BC} = ۱۶۵°$$

$$\overset{\frown}{y} = ۳۶۰ - (۸۴ + ۱۶۵) \Rightarrow \overset{\frown}{y} = ۱۱۱°$$

۲۳۵

$$\overset{\frown}{BC} = ۳۶۰ - (۸۴ + ۱۴۰) \Rightarrow \overset{\frown}{BC} = ۱۳۶° \Rightarrow x = ۱۳۶°$$

۲۳۶ الف) از روابط $MT = MT'$ و $OT = OT'$ نتیجه می‌گیریم OM عمودمنصف TT' می‌باشد. پس $TT' = 2TH$
از طرفی داریم:

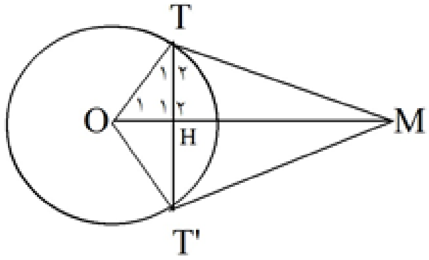
$$\left.\begin{array}{l}\hat{H}_1 = 90^\circ \Rightarrow \hat{O}_1 + \hat{T}_1 = 90^\circ \\ \hat{T} = 90^\circ \Rightarrow \hat{T}_1 + \hat{T}_2 = 90^\circ\end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l}\hat{O}_1 = \hat{T}_2 \\ \hat{H}_1 = \hat{H}_2 = 90^\circ\end{array}\right\} \Rightarrow \overset{\triangle}{OTH} \sim \overset{\triangle}{HTM} \Rightarrow \frac{TH}{MH} = \frac{OH}{TH} \Rightarrow$$

$$TH^2 = OH.MH \Rightarrow \left(\frac{TT'}{2}\right)^2 = OH.HM \Rightarrow TT'^2 = 4OH.HM$$

ب)

$$S_{\overset{\triangle}{OTM}} = \frac{1}{2}TH \times OM = \frac{1}{2}OT \times MT \Rightarrow TH \times OM = OT \times MT$$

$$\Rightarrow \frac{TT'}{2} \times OM = R \times MT \Rightarrow TT' \times OM = 2R \times MT$$



۲۳۷ الف)

$$\left.\begin{array}{l}OT = OT' \\ \hat{T} = \hat{T'} = 90 \\ OM = OM\end{array}\right\} \xrightarrow{\text{وتر و یک ضلع}} \overset{\triangle}{OMT} \cong \overset{\triangle}{OMT'} \Rightarrow \begin{cases}\hat{M}_1 = \hat{M}_2 \\ \hat{O}_1 = \hat{O}_2\end{cases} \Rightarrow$$ OM نیمساز است

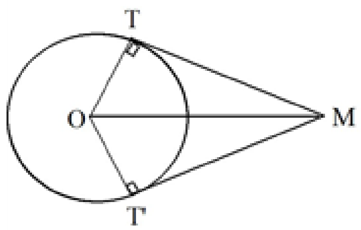
ب) مثلث $\overset{\triangle}{OTT'}$ متساوی‌الساقین است. از طرفی OM نیمساز زاویه‌ی O می‌باشد. پس OM عمودمنصف TT' است. زیرا در مثلث متساوی‌الساقین نیمساز زاویه‌ی رأس، عمودمنصف قاعده است.

پ) دو مثلث قائم‌الزاویه $\overset{\triangle}{OTH}$, $\overset{\triangle}{OTM}$ را در نظر می‌گیریم.

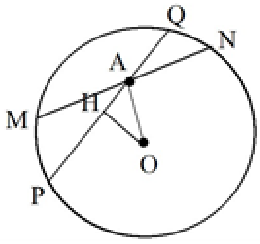
$$\left.\begin{array}{l}\hat{O}_1 = \hat{O}_1 \\ \hat{H}_1 = \hat{T} = 90^\circ\end{array}\right\} \Rightarrow \overset{\triangle}{OTH} \sim \overset{\triangle}{OTM} \Rightarrow \frac{OH}{OT} = \frac{OT}{OM} \Rightarrow OT^2 = OH.OM \Rightarrow R^2 = OH.OM$$

۲۳۸ از نقطه‌ی M مماسهای MT و MT' را بر دایره رسم کرده‌ایم. اگر از مرکز O به نقاط تماس T , T' وصل کنیم.
چون شعاع دایره بر خط مماس در نقطه‌ی تماس عمود است. نتیجه می‌گیریم $\hat{T} = \hat{T'} = 90^\circ$ داریم:

$$\left.\begin{array}{l}\hat{T} = \hat{T'} = 90 \\ OT = OT' \\ OM = OM\end{array}\right\} \xrightarrow{\text{وتر و یک ضلع}} \overset{\triangle}{OMT} \cong \overset{\triangle}{OMT'} \Rightarrow MT = MT'$$



۲۳۹ فرض کنیم A نقطه‌ای واقع در درون دایره باشد. وتر MN در نقطه‌ی A بر شعاع OA عمود باشد. ثابت می‌کنیم MN کوتاهترین وتر گذرنده از نقطه‌ی A باشد. برای این کار از نقطه‌ی A وتر دلخواه PQ را می‌گذرانیم و عمود OH را بر PQ وارد می‌کنیم. در مثلث قائم‌الزاویه OAH، OA وتر و OH ضلع قائمه است. پس $OA > OH$ است. در نتیجه $MN < PQ$ پس MN کوتاهترین وتر گذرنده از A می‌باشد. در هر دایره وتری که به مرکز دایره نزدیکتر است بزرگتر می‌باشد.

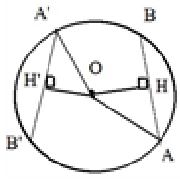


۲۴۰ فرض کنید $AB = A'B'$ در این صورت $AH = A'H'$. زیرا اگر از مرکز دایره به وتر آن عمود کنیم، آن وتر نصف می‌شود. از مرکز O به نقاط A و A' وصل می‌کنیم. داریم:

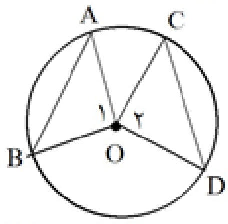
$$\left.\begin{array}{l} OA = OA' \\ A'H' = AH \\ \hat{H} = \hat{H'} = ۹۰ \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{وتر و یک ضلع}} \overset{\triangle}{AOH} \cong \overset{\triangle}{A'OH'} \Rightarrow OH = OH'$$

برعکس فرض کنیم $OH = OH'$ داریم:

$$\left.\begin{array}{l} OA' = OA \\ OH' = OH \\ \hat{H} = \hat{H'} = ۹۰ \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{وتر و یک ضلع}} \overset{\triangle}{OAH} \cong \overset{\triangle}{OA'H'} \Rightarrow AH = A'H' \Rightarrow AB = A'B'$$



۲۴۱ فرض کنید وترهای AB و CD مساوی باشند. از مرکز O به نقاط A , B , C و D وصل می‌کنیم.



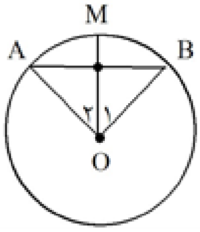
$$\left.\begin{array}{l} OA = OC \\ OB = OD \\ AB = CD \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{ض ض ض}} \overset{\triangle}{OAB} \cong \overset{\triangle}{OCD} \Rightarrow \hat{O}_1 = \hat{O}_2 \Rightarrow \overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{CD}$$

بر عکس فرض کنید کمانهای $\overset{\frown}{AB}$ و $\overset{\frown}{CD}$ مساوی باشند، پس $\hat{O}_1 = \hat{O}_2$ داریم:

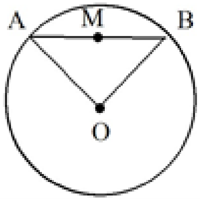
$$\left.\begin{array}{l} OA = OC \\ OB = OD \\ \hat{O}_1 = \hat{O}_2 \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{ض ز ض}} \overset{\triangle}{AOB} \cong \overset{\triangle}{COD} \Rightarrow AB = CD$$

تلفن تماس: ۰۲۶۳۳۴۰۸۹۴۴

۲۴۲ فرض کنید M وسط کمان AB باشد در این $\overset{\frown}{AM} = \overset{\frown}{BM}$ پس $\hat{O}_۱ = \hat{O}_۲$ در نتیجه در مثلث متساوی‌الساقین $\overset{\triangle}{OAB}$ پاره‌خط OM نیمساز است. پس OM ارتفاع نیز می‌باشد. پس $OM \perp AB$. (در مثلث متساوی‌الساقین نیمساز و ارتفاع و میانه‌ی وارد بر قاعده بر هم منطبق هستند).



۲۴۳ فرض کنید M وسط وتر AB باشد. از O به M وصل می‌کنیم. در این صورت OM میانه‌ی مثلث متساوی‌الساقین $\overset{\triangle}{OAB}$ خواهد بود. پس OM ارتفاع نیز می‌باشد. در نتیجه $OM \perp AB$.



۲۴۴

الف) $\dfrac{S}{S'} = \dfrac{\frac{۱}{۲}AH \times BD}{\frac{۱}{۲}AH \times DC} = \dfrac{BD}{DC}$

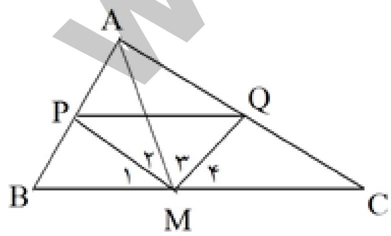
ب) DN , DM مساویند زیرا فاصله‌ی هر نقطه روی نیمساز از دو ضلع زاویه برابر است.

پ) $\dfrac{S}{S'} = \dfrac{\frac{۱}{۲}DM \times AB}{\frac{۱}{۲}DN \times AC} = \dfrac{AB}{AC}$

از مقایسه رابطه الف و پ $\Rightarrow \dfrac{AB}{AC} = \dfrac{BD}{DC}$

۲۴۵

$\left.\begin{array}{l} \overset{\triangle}{AMB} : \text{نیمساز } MP \Rightarrow \dfrac{AP}{BP} = \dfrac{AM}{MB} \\ \overset{\triangle}{AMC} : \text{نیمساز } MQ \Rightarrow \dfrac{AQ}{QC} = \dfrac{AM}{MC} \end{array}\right\} \xrightarrow{MB = MC} \dfrac{AP}{BP} = \dfrac{AQ}{QC} \xrightarrow{\text{عکس قضیه تالس}} PQ \parallel BC$

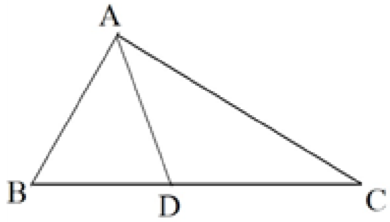


تلفن تماس: ۰۲۶۳۳۴۰۸۹۴۴

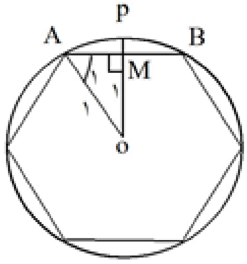
۲۴۶) فرض کنید $AB = ۸$ و $AC = ۱۲$ و $BC = ۱۵$ و نیمساز زاویه‌ی A ضلع BC را در نقطه‌ی D قطع کند.

$$\text{نیمساز } AD \Rightarrow \frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AC} \Rightarrow \frac{BD}{DC} = \frac{۸}{۱۲} \xrightarrow[\text{در مخرج}]{\text{ترکیب}} \frac{BD}{BD + DC} = \frac{۸}{۸ + ۱۲} \Rightarrow \frac{BD}{۱۵} = \frac{۸}{۲۰} \Rightarrow BD = ۶$$

$$DC = BC - BD \qquad DC = ۱۵ - ۶ = ۹$$



۲۴۷) در شکل مقابل AP به شعاع ۱، ضلع دوازده ضلعی منتظم محاط در دایره است. از طرفی اندازه‌ی هر زاویه‌ی داخلی شش ضلعی منتظم ۱۲۰ درجه است. OA نیمساز است پس $\hat{A}_1 = ۶۰°$ در نتیجه $\hat{O}_1 = ۳۰°$ داریم.



$$\overset{\triangle}{OAM}: \hat{O}_1 = ۳۰ \Rightarrow AM = \frac{۱}{۲}OA = \frac{۱}{۲}(۱) \Rightarrow AM = \frac{۱}{۲}$$

$$\overset{\triangle}{OAM}: OM^۲ = OA^۲ - AM^۲ = ۱ - \frac{۱}{۴} = \frac{۳}{۴} \Rightarrow OM = \frac{\sqrt{۳}}{۲}$$

$$PM = OP - OM = ۱ - \frac{\sqrt{۳}}{۲}$$

$$\overset{\triangle}{APM}: AP^۲ = AM^۲ + PM^۲ \rightarrow AP^۲ = \frac{۱}{۴} + ۱ + \frac{۳}{۴} - \sqrt{۳} = ۲ - \sqrt{۳}$$

$$\Rightarrow AP = \sqrt{۲ - \sqrt{۳}}$$

۲۴۸) AP طول ضلع هشت ضلعی منتظم محاط در دایره است.

$$\overset{\triangle}{AMP}: AP^۲ = AM^۲ + MP^۲$$

$$AP^۲ = \left(\frac{\sqrt{۲}}{۲}\right)^۲ + \left(۱ - \frac{\sqrt{۲}}{۲}\right)^۲$$

$$AP^۲ = \frac{۱}{۲} + ۱ + \frac{۱}{۲} - \sqrt{۲} \Rightarrow AP^۲ = ۲ - \sqrt{۲} \Rightarrow AP = \sqrt{۲ - \sqrt{۲}}$$

۲۴۹) در مثلث قائم‌الزاویه‌ی OAM زاویه‌ی OAM برابر $۴۵°$ است زیرا قطر مربع نیمساز است. پس مثلث OAM قائم‌الزاویه‌ی متساوی‌الساقین است. پس $OM = AM = \frac{\sqrt{۲}}{۲}$.

تلفن تماس: ۰٢٦٣٣٤٠٨٩٤٤

۲۵۰ در مربع، قطر، نیمساز است پس $\hat{A}_1 = 45^\circ$ در نتیجه $\hat{O}_1 = 45^\circ$ بنابراین مثلث $O\overset{\triangle}{A}M$ قائم‌الزاویه متساوی‌الساقین است.

$$O\overset{\triangle}{A}M : AM^2 + OM^2 = OA^2$$

$$2OM^2 = 1^2$$

$$OM^2 = \frac{1}{2}$$

$$OM = \frac{\sqrt{2}}{2}$$