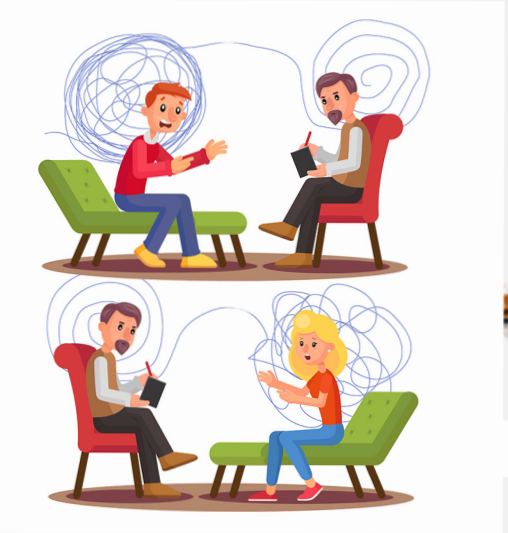
AKO
گروه مشاوره و برنامه ریزی

WWW.AKOEDU.IR

اولین و با کیفیت ترین

آکادمی کنکور در ایران

کلاس های vip کنکور



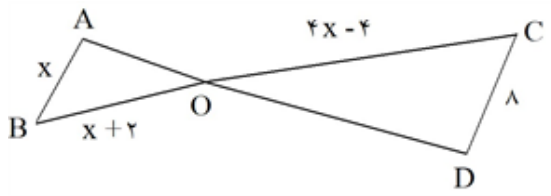
جهت دریافت برنامه ی شخصی سازی شده یک هفته ای رایگان کلیک کنید و یا به شماره ی ۰۹۰۲۵۶۴۶۲۳۴ عدد ۱ را ارسال کنید.

تلفن تماس: ۰۲۶۳۳۴۰۸۹۴۴

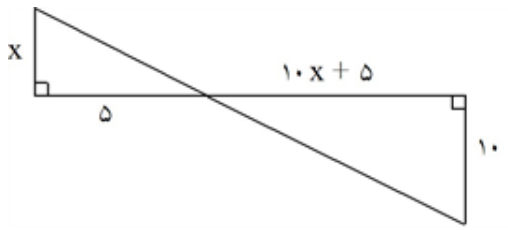
۳۰۰ نمونه سوال تشریحی هندسه ۱ – نیمسال دوم

۱) اگر $\frac{z-۲}{۴} = \frac{y+۵}{۳} = \frac{x-۱}{۲}$، آن‌گاه $\frac{x+y+۴}{x+y+z+۲}$ را حساب کنید.

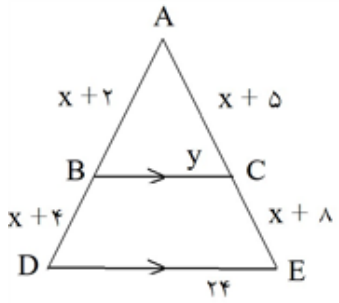
۲) مقدار x را حساب کنید. $(AB \parallel CD)$



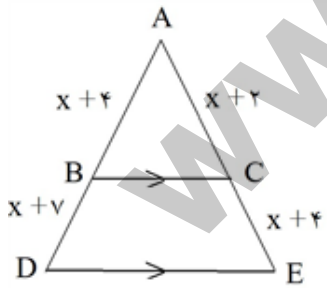
۳) مقدار x را حساب کنید.



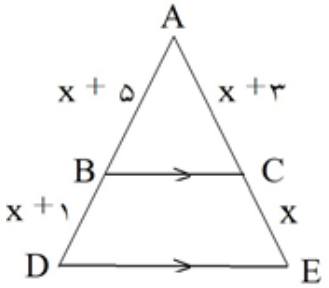
۴) اگر $BC \parallel DE$ باشد مقدار x و y را حساب کنید.



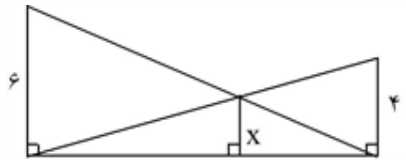
۵) اگر $BC \parallel DE$ باشد مقدار x را حساب کنید.



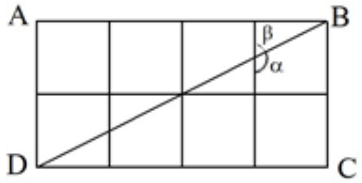
۶ مقدار x را حساب کنید، اگر $BC \parallel DE$ باشد.



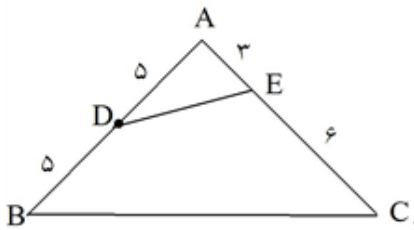
۷ مقدار x را حساب کنید.



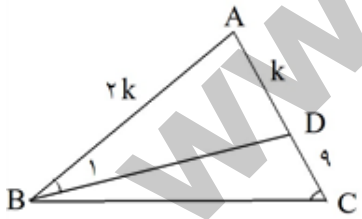
۸ در شکل مقابل طول ضلع هریک از مربع‌های کوچک برابر یک است. مقدار $tg\alpha$ چه‌قدر است؟



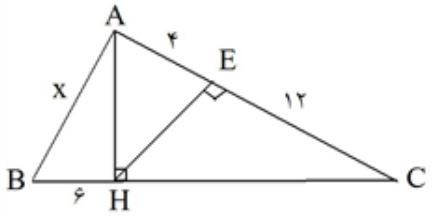
۹ در شکل زیر مطلوب است محاسبه $\frac{S_{\overset{\Delta}{ADE}}}{S_{\overset{\Delta}{ABC}}}$:



۱۰ در شکل زیر مقدار k را تعیین کنید. $(\hat{B}_1 = \hat{C})$

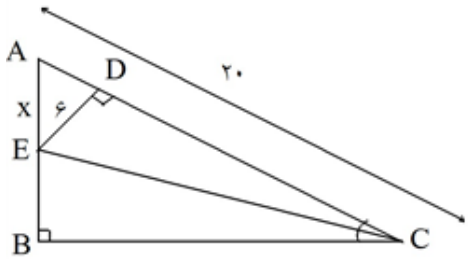


۱۱ در شکل زیر مقدار x را محاسبه کنید.

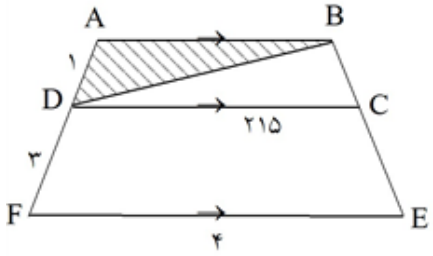


تلفن تماس: ۰۲۶۳۳۴۰۸۹۴۴

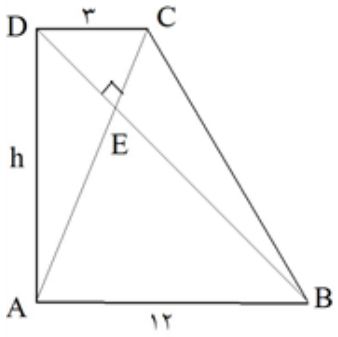
۱۲ در شکل زیر مقدار x را محاسبه کنید. $(\widehat{ACE} = \widehat{BCE})$



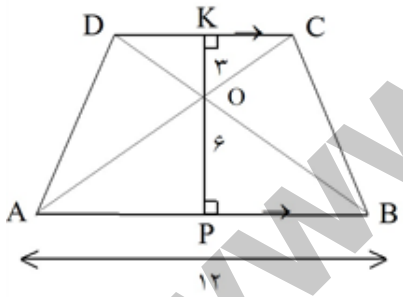
۱۳ در شکل زیر مساحت ناحیه هاشور زده چه کسری از مساحت ذوزنقه ABEF است؟ $(DC \parallel EF)$



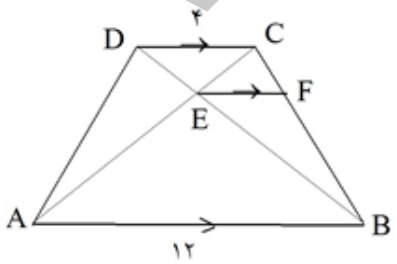
۱۴ در شکل مقابل مطلوب است اندازه ضلع BC: $(AC \perp BD)$



۱۵ در شکل زیر مطلوب است اندازه DC:

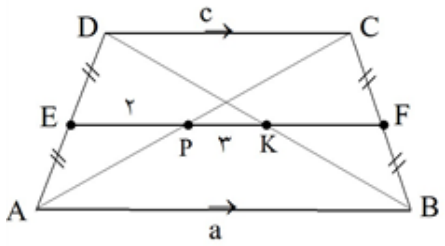


۱۶ در شکل زیر مطلوب است اندازه‌ی پاره‌خط EF:



تلفن تماس: ۰۲۶۳۳۴۰۸۹۴۴

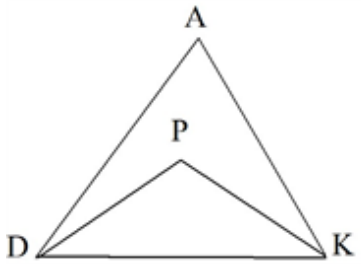
۱۷ در شکل زیر مطلوب است حاصل ac:



۱۸ خط d و نقطه‌ی A غیرواقع بر آن داده شده است. نقطه‌ای روی خط d تعیین کنید که از نقطه‌ی A به فاصله‌ی معلوم R باشد، با توجه به اندازه‌ی R روی تعداد جواب‌های موجود بحث کنید.

۱۹ سه چندضلعی متشابه روی سه ضلع یک مثلث قائم‌الزاویه می‌سازیم. ثابت کنید مساحت چندضلعی ساخته شده روی وتر برابر مجموع مساحت‌های ساخته شده روی دو ضلع دیگر است.

۲۰ نقطه‌ی P را به دلخواه درون ΔDAK انتخاب می‌کنیم. ثابت کنید زاویه‌ی $\angle DPK$ از زاویه‌ی $\angle DAK$ بزرگ‌تر است.



۲۱ با رسم چندضلعی‌های محدب تا شش ضلعی و رسم قطرهای مربوط:

الف) جدول مقابل را کامل کنید.

تعداد ضلع‌ها	۳	۴	۵	۶		n
تعداد قطرهای رسم شده از یک راس	۰	۱				

ب) به کمک استدلال استقرایی، رابطه‌ای برای تمام قطرهای n ضلعی محدب بیابید.

۲۲ هریک از عبارت‌های زیر را تعریف کنید.

الف) دو خط متنافر

ب) سطح مقطع

ج) فصل مشترک

۲۳ گزینه‌ی درست را انتخاب کنید.

الف) سطح مقطع استوانه در برخورد با صفحه افقی ..... است.

۱) دایره ۲) بیضی

ب) جسم حاصل از دوران نیم‌دایره حول قطرش:

۱) نیم‌کره ۲) کره

تلفن تماس: ۰۲۶۳۳۴۰۸۹۴۴

۲۴ جاهای خالی را با کلمه یا عبارت‌های مناسب پر کنید.

۱) در صفحه، دو خط موازی با یک خط ..... .

۲) اگر دو صفحه با هم نقطه‌ی اشتراکی نداشته باشند نسبت به هم ..... هستند.

۲۵ درست یا نادرست بودن جمله‌های زیر را مشخص کنید.

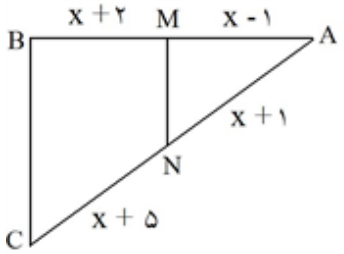
۱) دو صفحه عمود بر هم هستند هرگاه هر کدام شامل خطی باشند که بر دیگری عمود است.

درست ☐ نادرست ☐

۲) مساحت یک مثلث متساوی‌الاضلاع به ضلع a برابر است با $\frac{\sqrt{۳}}{۲}a$. درست ☐ نادرست ☐

۲۶ ثابت کنید در دو مثلث متشابه نسبت مساحت‌ها با توان دوم نسبت تشابه برابر است.

۲۷ در مثلث ABC پاره‌خط MN موازی BC است. به کمک قضیه‌ی تالس مقدار x را به دست آورید. سپس نسبت محیط AMN به محیط ABC را به دست آورید.



۲۸ اگر در مثلث ABC نقطه‌ی M و N طوری روی ضلع‌های AB و AC انتخاب شوند که داشته باشیم $\frac{AM}{MB} = \frac{AN}{NC}$ ثابت کنید که MN موازی BC است.

۲۹ نقیض گزاره‌ی «a مساوی b است.» را بنویسید.

۳۰ عکس قضیه‌ی زیر را بنویسید.

«اگر چهارضلعی متوازی‌الاضلاع باشد آن‌گاه قطرها یک‌دیگر را نصف می‌کنند.»

۳۱ با استفاده از برهان خلف ثابت کنید:

«از یک نقطه خارج خط فقط یک عمود می‌توان رسم کرد.»

۳۲ برای گزاره‌های زیر مثال نقض بیاورید.

الف) حاصل‌جمع دو عدد گنگ همیشه گنگ است.

ب) تمام عددهای حقیقی معکوس دارند.

۳۳ مربعی رسم کنید که طول قطرهای آن برابر با ۴ سانتی‌متر است؟

تلفن تماس: ۰۲۶۳۳۴۰۸۹۴۴

۳۴ گزینه‌ی درست را انتخاب کنید.

الف) برای رسم یک خط متمایز داشتن ..... کافی است.

۱) یک نقطه ۲) دو نقطه

ب) در مثلثی که $\hat{A} = ۲\hat{B}$ و زاویه‌ی $\hat{C} = ۳۰^\circ$ باشد، زاویه‌ی $\hat{A}$ چند درجه است؟

۱) ۵۰° ۲) ۱۰۰°

۳۵ درست یا نادرست بودن جمله‌های زیر را مشخص کنید.

۱- از یک نقطه خارج خط، فقط یک خط موازی با آن می‌توان رسم کرد. درست ☐ نادرست ☐

۲- هر دو مثلث متشابه، هم‌نهشت‌اند. درست ☐ نادرست ☐

۳۶ مساحت شکل حاصل از برخورد صفحه P با کره به شعاع ۷ سانتی‌متر را به دست آورید. (فاصله صفحه تا مرکز کره ۴ سانتی‌متر است.)

۳۷ مثلث قائم‌الزاویه‌ای را حول ضلع‌های a و b دوران داده‌ایم. نسبت حجم شکل‌های حاصل از این دوران را به دست آورید.

۳۸ گزینه‌ی درست را انتخاب کنید.

الف) از دوران دایره حول قطرش ..... به دست می‌آید.

۱) کره ۲) بیضی

ب) در تفکر تجسمی از ..... برای تفکر استفاده می‌کنیم.

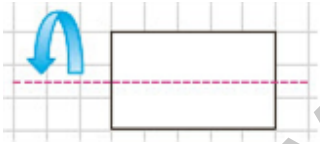
۱) عبارت و جملات زبانی ۲) تصاویر

۳۹ درست یا نادرست بودن جمله‌های زیر را مشخص کنید.

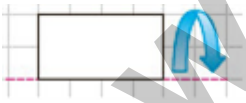
الف) سطح مقطع استوانه با یک صفحه افقی دایره است. درست ☐ نادرست ☐

ب) سطح مقطع مکعب مستطیل با یک صفحه عمودی مربع است. درست ☐ نادرست ☐

۴۰ اگر مستطیل را مطابق شکل، حول محور داده شده دوران دهیم، شکل حاصل چه خواهد بود؟

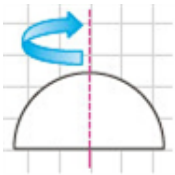


۴۱ اگر یک مستطیل را حول طول یا عرض آن دوران دهیم چه جسم هندسی حاصل می‌شود؟



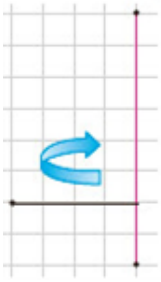
۴۲ دو خط موازی درنظر بگیرید. اگر یکی از خطوط را حول دیگری دوران دهیم چه جسم هندسی ساخته می‌شود؟

۴۳ یک نیم‌دایره را حول شعاع عمود بر قطر داده شده دوران می‌دهیم. چه شکلی ساخته می‌شود؟



تلفن تماس: ۰۲۶۳۳۴۰۸۹۴۴

۴۴ فرض کنید دو پاره‌خط بر هم عمودند و یکی را حول دیگری دوران داده‌ایم، چه شکل هندسی ساخته می‌شود؟



۴۵ ثابت کنید خطی که با یکی از دو صفحه‌ی موازی، موازی است با دیگری هم موازی است.

۴۶ از نقطه‌ی A خارج خط l، یک صفحه‌ی عمود بر l می‌گذرانیم. ثابت کنید این صفحه یکتا است.

۴۷ سه خط l_1 و l_2 و l_3 دو به دو متقاطع هستند ولی همرس نیستند. ثابت کنید که این سه خط در یک صفحه قرار دارند.

۴۸ دو صفحه عمود بر هم را تعریف کنید.

۴۹ دو خط متنافر را تعریف کنید.

۵۰ گزینه‌ی درست را انتخاب کنید.

الف) اگر دو صفحه فقط در یک خط راست مشترک باشند، نسبت به هم ..... هستند.

۱) متقاطع ۲) منطبق

ب) از یک خط در فضا، ..... صفحه می‌گذرد.

۱) بی‌شمار ۲) یک

۵۱ فاصله‌ی M نقطه‌ی داخل مثلث متساوی‌الاضلاع از هر ضلع برابر با $5\sqrt{3}$ و $\sqrt{3}$ و $2\sqrt{3}$ است. محیط مثلث را محاسبه کنید.

۵۲ ثابت کنید که یک میانه در هر مثلث آن‌را به دو مثلث با مساحت‌های برابر تقسیم می‌کند.

۵۳ مساحت مثلث قائم‌الزاویه‌ی متساوی‌الساقین برابر با ۸ است. محیط این مثلث را به دست آورید.

۵۴ جاهای خالی را با کلمه یا عبارت‌های مناسب کامل کنید.

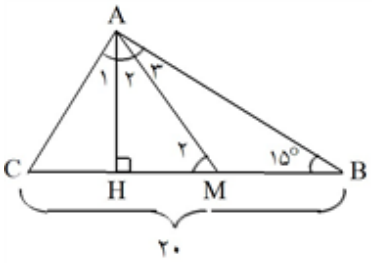
الف) مساحت دو مثلث هم‌نهشت ..... است.

ب) اگر دو مثلث قاعده‌های برابر داشته باشند، نسبت مساحت آن‌ها برابر است با ..... است.

۵۵ فرض کنیم دو خط AB و CD موازی باشند، به طوری‌که دو خط AC و BD در نقطه‌ای مانند O متقاطع باشند. می‌دانیم $S_{ADC} = S_{BDC}$. چگونه از آن نتیجه می‌گیرید، $S_{OAD} = S_{OBC}$؟

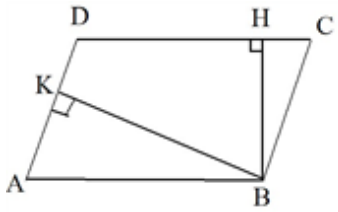
۵۶ چندضلعی را تعریف کرده و یک مثال برای چندضلعی محدب بیاورید.

تلفن تماس: ۰۲۶۳۳۴۰۸۹۴۴



۵۷ با توجه به این‌که در مثلث ΔABC، AH ارتفاع وارد بر وتر است. اگر AM میانه‌ی وارد بر وتر مثلث ABC باشد، اندازه‌ی ارتفاع AH را به دست آورید.
سپس مساحت $\overset{\triangle}{AMB}$ را محاسبه کنید.

۵۸ دو قطر یک متوازی‌الاضلاع عمودمنصف یک‌دیگرند. ثابت کنید چهارضلعی یک لوزی است.



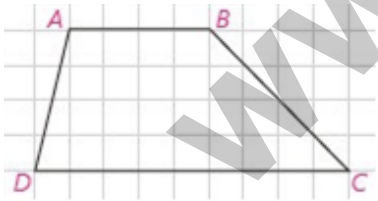
۵۹ چهارضلعی ABCD یک متوازی‌الاضلاع است.
الف) دلیل تشابه دو مثلث ΔABK و ΔBHC را بنویسید.
ب) تناسب اضلاع متناظر دو مثلث را کامل کنید.

۶۰ ثابت کنید در هر متوازی‌الاضلاع زاویه‌های روبه‌رو با هم برابرند.

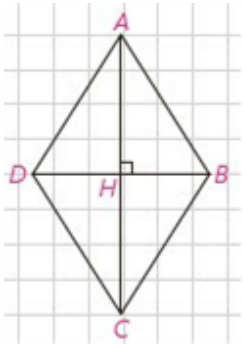
۶۱ گزینه‌ی درست را انتخاب کنید.
الف) ذوزنقه چهارضلعی است که:
۱) دو ضلع آن موازی باشد. ۲) دو قطر آن موازی باشد.
ب) n ضلعی را مقعر گوییم هرگاه با امتداد دادن یک ضلع آن تغییری ندارد بقیه نقاط چندضلعی:
۱) در یک طرف خط واقع شوند. ۲) در دو طرف خط واقع شوند.

۶۲ جاهای خالی را با کلمه یا عبارت‌های مناسب کامل کنید.
الف) در هر لوزی قطرها ..... یک‌دیگرند.
ب) در هر ذوزنقه‌ی متساوی‌الساقین قطرها با هم ..... .

۶۳ به کمک ویژگی ذوزنقه‌ی متساوی‌الساقین، ویژگی زیر را ثابت کنید.
«در هر ذوزنقه‌ی متساوی‌الساقین، قطرها اندازه‌های مساوی دارند و برعکس.»

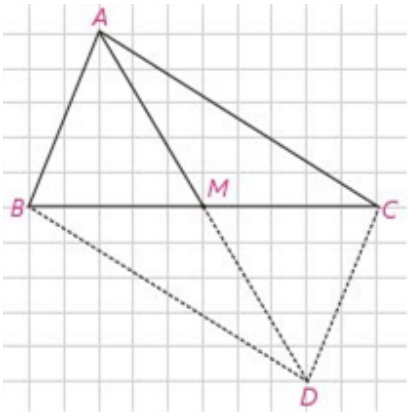


۶۴ هر یک از دو ضلع AB و CD را که موازی‌اند، قاعده و هریک از دو ضلع غیرموازی را ساق می‌نامند. از موازی بودن قاعده‌های AB و CD و قاطع‌های BC و AD در مورد زاویه‌ها چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟
زاویه‌های $\angle A$ و $\angle D$ ..... هستند. هم‌چنین زاویه‌های $\angle B$ و $\angle C$ ..... هستند.



۶۵ ۱- آیا می‌توانید یک ویژگی از لوزی را بیان کنید که در هر متوازی‌الاضلاع یا هر مستطیل، که لوزی نیست، برقرار نباشد؟
۲- قطرهای لوزی ABCD را رسم می‌کنیم. چون لوزی متوازی‌الاضلاع است، قطرها منصف یک‌دیگرند. ΔABD چه نوع مثلثی است؟
۳- نقطه‌ی تلاقی دو قطر را H می‌نامیم، در مثلث ABD، AH چه پاره‌خطی است؟
۴- چرا پاره‌خط AH بر قطر BD عمود است و روی نیمساز $\angle A$ است؟

تلفن تماس: ۰۲۶۳۳۴۰۸۹۴۴



۶۶ در مثلث ABC، AM میانه وارد بر ضلع BC است و $AM = \frac{BC}{۲}$. روی نیم‌خط AM نقطه‌ی D را چنان درنظر می‌گیریم که $MD = AM$.

الف) آیا می‌توانید نتیجه بگیرید $AD = BC$ و قطرهای AD و BC منصف یک‌دیگرند؟

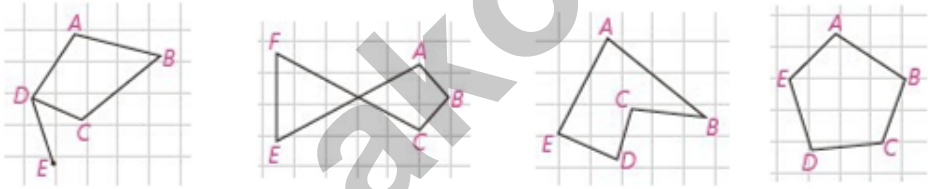
ب) چگونه نتیجه می‌گیرید $\angle A$ قائمه است؟

۶۷ اگر دو قطر یک متوازی‌الاضلاع برابر باشد، آیا می‌توان نتیجه گرفت آن چهارضلعی مستطیل است؟ چطور؟ آن‌را با دلیل بیان کنید.

۶۸ در مستطیل ABCD، دو قطر را رسم می‌کنیم. از هم‌نهشتی کدام دو مثلث می‌توان نتیجه گرفت $AC = BD$؟ این هم‌نهشتی را نشان دهید.

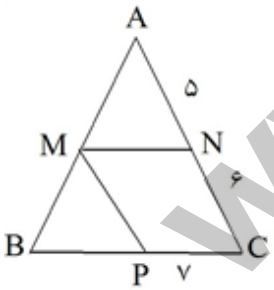
۶۹ فرض کنیم در چهارضلعی ABCD هر دو زاویه‌ی مقابل هم‌اندازه باشند. یعنی $\angle B$ و $\angle D$ و هم‌چنین $\angle C$ و $\angle A$ هم‌اندازه‌اند. می‌دانیم مجموع اندازه‌های زاویه‌های درونی هر چهارضلعی محدب ۳۶۰° است. چگونه به کمک آن ثابت می‌کنید هر دو زاویه‌ی مجاور مثلاً $\angle B$ و $\angle C$ مکمل‌اند؟

۷۰ کدام‌یک از شکل‌های مقابل چندضلعی است و تعداد ضلع‌ها و رأس‌های آن چندتا است؟ برخی ضلع‌های مجاور هم و غیرمجاور هم را مشخص کنید.

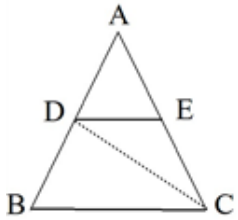


۱ ۲ ۳ ۴

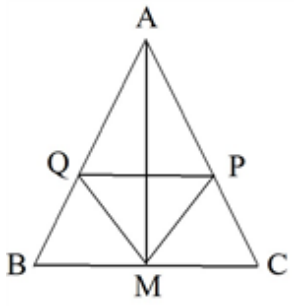
۷۱ در شکل روبه‌رو $MN \parallel BC$، $MP \parallel AC$، است. اگر $AN = ۵$ و $NC = ۶$ و $PC = ۷$ باشد، BP را به دست آورید.



۷۲ در شکل زیر $\frac{AD}{AB} = \frac{۳}{۷}$، $DE \parallel BC$ مساحت ADE و DEC را به دست آورید.



۷۳ در مثلث ABC، M وسط BC و MP و MQ نیمسازهای زاویه‌های AMC و AMB هستند.
ثابت کنید: $PQ \parallel BC$



۷۴ قضیه‌ی زیر را ثابت کنید:
«در هر مثلث، نیمساز هر زاویه داخلی ضلع روبه‌رو به آن زاویه را به نسبت اندازه‌های ضلع‌های آن زاویه تقسیم می‌کنند.»

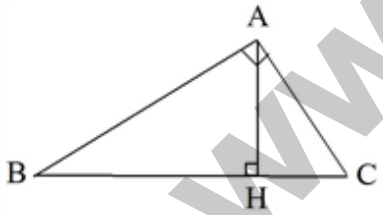
۷۵ گزینه درست را انتخاب کنید.
الف) هرگاه دو چندضلعی متشابه باشند، نسبت مساحت آن‌ها برابر است با:
۱) مربع نسبت تشابه ۲) نسبت تشابه
ب) در دو چندضلعی متشابه ضلع‌ها:
۱) با هم برابرند. ۲) با هم متناسب‌اند.

۷۶ جاهای خالی را با کلمه و یا عبارت‌های مناسب کامل کنید.
الف) نسبت تشابه بین مثلث ABC و A'B'C' برابر با M است. نسبت بین نیمسازهای متناظر آن ..... می‌شود.
ب) هر دو n ضلعی منتظم همواره با هم ..... .

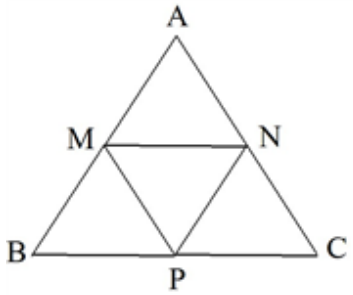
۷۷ درست یا نادرست بودن جمله‌های زیر را مشخص کنید.
الف) نسبت بین ضلع‌ها را در دو مثلث متشابه نسبت تشابه گوییم. درست ☐ نادرست ☐
ب) نسبت بین محیط های دو مثلث متشابه برابر است با توان دوم نسبت تشابه. درست ☐ نادرست ☐

۷۸ می‌دانیم مثلث‌های متساوی‌الاضلاع همواره با هم متشابه‌اند. چرا؟

۷۹ با توجه به شکل و دو رابطه‌ی داده شده، قضیه‌ی فیثاغورس را نتیجه بگیرید.
الف) $AC^2 = BC.CH$
ب) $AB^2 = BC.BH$

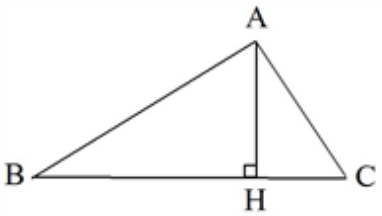


۸۰ در شکل مقابل P , N , M وسط اضلاع مثلث $\overset{\triangle}{ABC}$ هستند. چرا دو مثلث $\overset{\triangle}{ABC}$ و $\overset{\triangle}{MNP}$ با هم متشابه‌اند و نسبت تشابه چند است؟



۸۱ آیا رابطه‌ی $\frac{a+b}{۲} > \sqrt{ab}$ برای هر عدد حقیقی و مثبت a و b برقرار است؟ اثبات کنید.

۸۲ با درنظر گرفتن مثلث قائم‌الزاویه‌ی زیر، روابط را اثبات کنید.



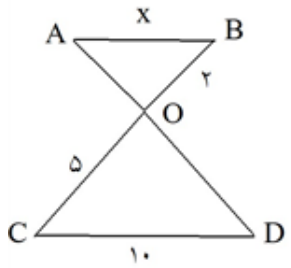
الف) $AB^{۲} = BC.BH$

ب) $AH^{۲} = BH.CH$

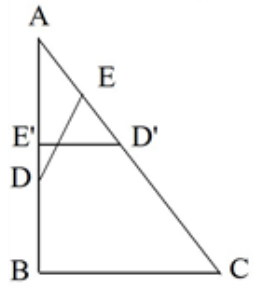
۸۳ قضیه اساسی تشابه مثلث‌ها را بیان کنید.

۸۴ حالت های تشابه دو مثلث را نام ببرید.

۸۵ ثابت کنید دو مثلث زیر با هم متشابه هستند. سپس مقدار x را به دست آورید. $(AB \parallel CD)$



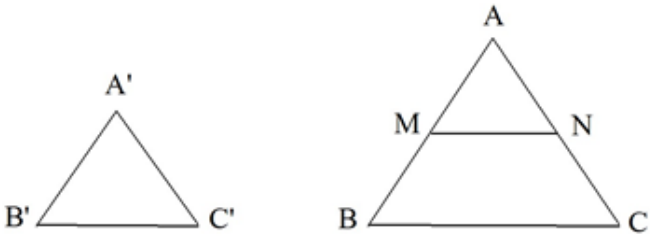
۸۶ در شکل روی AC، AD' را هم‌اندازه‌ی AD و روی AB، AE' را هم‌اندازه‌ی AE جدا کنید. چرا $D'E' \parallel BC$؟



$AD' = AD$
$AE' = AE$

تلفن تماس: ۰۲۶۳۳۴۰۸۹۴۴

۸۷ ۱- ثابت کنید هرگاه اندازه‌های سه ضلع از مثلثی با اندازه‌های سه ضلع از مثلث دیگر متناسب باشند، دو مثلث متشابه‌اند.



(در فرض، به جای A'B' و A'C' مساوی‌های آن‌ها را جایگزین کنید و سپس بگویید چرا $MN \parallel BC$؟)

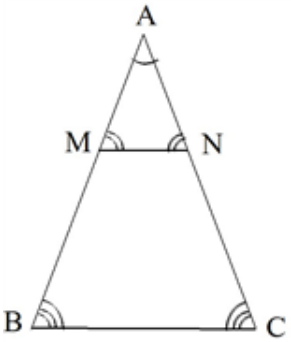
۲- از قضیه‌ی اساسی تشابه، چه نتیجه‌ای می‌گیریم؟

۳- تعمیم قضیه‌ی تالس را در مثلث ABC بنویسید. از مقایسه‌ی این تناسب‌ها با تناسب‌های فرض نتیجه بگیرید:

$MN = B'C'$

۴- مثلث‌های A'B'C' و AMN به چه حالتی هم‌نهشت‌اند؟ از این‌جا درستی حکم را ثابت کنید.

۸۸ اگر خط راستی موازی یکی از اضلاع مثلثی، دو ضلع دیگر (و یا امتداد آن‌ها) را در دو نقطه قطع کند، مثلثی با آن‌ها تشکیل می‌دهد که با مثلث اصلی متشابه است. (قضیه‌ی اساسی تشابه)



۱- زاویه‌های $\angle M$ و $\angle N$ به‌ترتیب با زاویه‌های $\angle B$ و $\angle C$ برابرند. چرا؟

۲- با توجه به تعمیم قضیه‌ی تالس تناسب زیر را کامل کنید:

$$\frac{AM}{\dots} = \frac{\dots}{AC} = \frac{MN}{\dots}$$

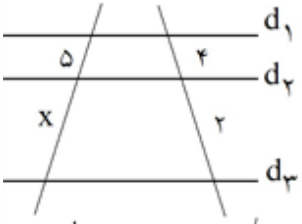
۳- از گزینه ۱ و ۲ در مورد مثلث‌های AMN و ABC چه نتیجه‌ای می‌توان گرفت؟

۸۹ تعمیم قضیه‌ی تالس را بیان و اثبات کنید.

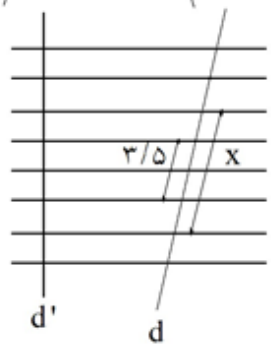
تلفن تماس: ۰۲۶۳۳۴۰۸۹۴۴

۹۰ مقدار x را به دست آورید.

الف) $d_۱ \parallel d_۲ \parallel d_۳$

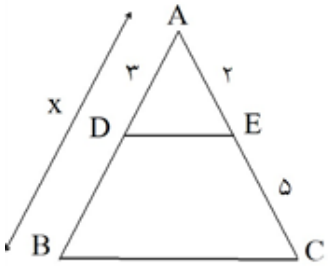


ب) خطوط افقی موازی‌اند.



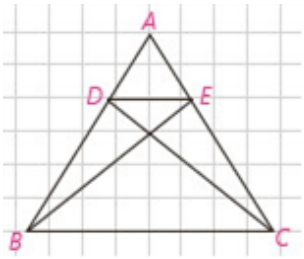
۹۱

مقدار x را به دست آورید. $(DE \parallel BC)$



۹۲ عکس قضیه‌ی تالس را بیان و آن‌را اثبات کنید.

۹۳ در شکل مقابل خط DE موازی ضلع BC رسم شده است. مثلث‌های DAE و DEC در رأس D مشترک‌اند.



الف) قاعده‌های مقابل به این رأس کدام‌اند؟

ب) تناسب‌های زیر را کامل کنید.

$$\frac{S_{DAE}}{S_{DEC}} = \frac{\dots}{\dots} \quad , \quad \frac{S_{ADE}}{S_{DBE}} = \frac{\dots}{\dots}$$

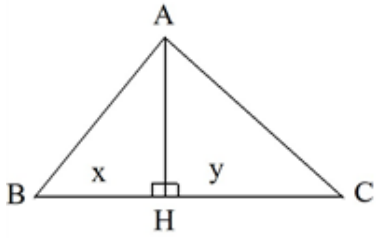
ج) مثلث‌های DBE و DEC هم‌مساحتند. چرا؟

د) با توجه به این موضوع از تساوی‌های بالا چه تناسبی را نتیجه‌گیری می‌کنید.

۹۴ ثابت کنید اگر دو مثلث هم‌قاعده باشند و رأس آن‌ها روی خطی موازی قاعده قرار گیرد، دارای مساحت معادل (برابر) هستند.

تلفن تماس: ۰۲۶۳۳۴۰۸۹۴۴

۹۵ با توجه به شکل زیر و این‌که $BC = ۶$ و $S_{ABH} = ۴$ و $S_{AHC} = ۹$. مقادیر x و y را به دست آورید.



۹۶ با فرض $\frac{x}{۳} = \frac{y}{۶} = \frac{۱۰}{۹}$ حاصل $۲x + ۲y$ را به دست آورید.

۹۷ رابطه‌ی «در هر مثلث، نسبت اندازه‌های هر دو ضلع با عکس نسبت ارتفاع وارد بر آن‌ها برابر است» را اثبات کنید.

۹۸ اگر دو پاره‌خط به طول‌های ۴ و ۹ واحد داشته باشیم، پاره‌خطی که ۶ واحد طول دارد، واسطه‌ی هندسی بین آن‌ها است. چرا؟

۹۹ مثال نقض را تعریف کنید.

۱۰۰ با استفاده از برهان خلف ثابت کنید که از هر نقطه خارج خط فقط یک خط موازی با آن می‌توان رسم کرد.

۱۰۱ به استقرا ثابت کنید که مجموع زاویه‌های داخلی یک n ضلعی محدب برابر است با $(n - ۲) \times ۱۸۰$.

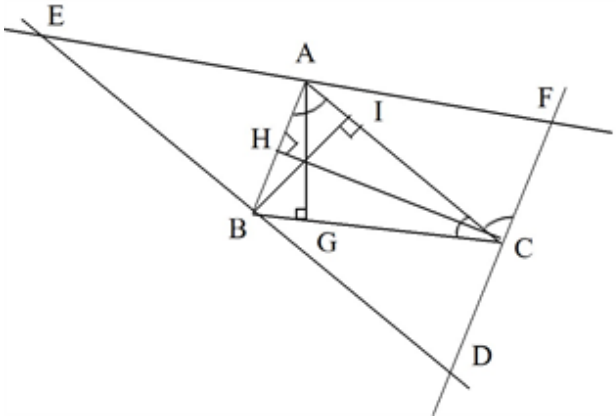
۱۰۲ گزاره و نقیض گزاره را تعریف کنید.

۱۰۳ با استدلال استنتاجی ثابت کنید که سه عمودمنصف هر مثلث همرس هستند.

۱۰۴ جاهای خالی را با کلمات و یا عبارت‌های مناسب کامل کنید.
الف) مجموع زاویه‌های داخلی یک چهارضلعی برابر است با ..... .
ب) مثال نقض روشی برای اثبات درستی حکم ..... .

۱۰۵ اگر در مثلثی دو ضلع نابرابر باشند، زاویه‌ی روبه‌رو به ضلع بزرگ‌تر، بزرگ‌تر است از زاویه‌ی روبه‌رو به ضلع کوچک‌تر.
استدلال: برای واضح شدن مطلب و کمک به حل مسئله شکل مثلث را رسم می‌کنیم. آیا می‌توان هر نوع مثلث دلخواهی کشید؟ مثلثی می‌کشیم که دو ضلع نابرابر داشته باشد و ویژگی خاص دیگر نداشته باشد.

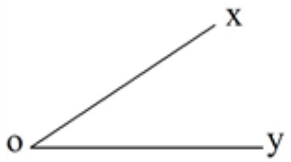
تلفن تماس: ۰۲۶۳۳۴۰۸۹۴۴



۱۰۶ استدلال استنتاجی زیر را کامل کنید و نتیجه بگیرید که سه ارتفاع هر مثلث همرس‌اند.
استدلال: مثلث دلخواه ABC را درنظر بگیرید و از هر رأس آن خطی به موازات ضلع مقابل به آن رأس رسم کنید تا مطابق شکل مقابل مثلثی مانند DEF وجود دارد. چهارضلعی ABCF چه نوع چهارضلعی است؟ چرا؟

۱۰۷ می‌دانیم که هر نقطه‌ی روی عمودمنصف یک پاره‌خط از دو سرِ آن پاره‌خط به یک فاصله است و هر نقطه که از دو سر یک پاره‌خط به یک فاصله باشد، روی عمودمنصف آن پاره‌خط قرار دارد. حال با کامل کردن استدلال استنتاجی بیان شده نتیجه بگیرید که سه عمودمنصف اضلاع هر مثلث همرس‌اند. (در یک نقطه به هم می‌رسند).
استدلال: مثلث دلخواه ABC در شکل مقابل را درنظر می‌گیریم. چون پاره‌خط های AB و AC متقاطع‌اند، عمودمنصف‌های آن‌ها نیز در نقطه‌ای مانند O متقاطع هستند.

۱۰۸ نیمساز زاویه‌ی $\widehat{xoy}$ را به دست آورید.



۱۰۹ عمودمنصف پاره‌خط AB به طول ۶ سانتی‌متر را رسم کنید. نحوه‌ی رسم عمودمنصف را توضیح دهید.

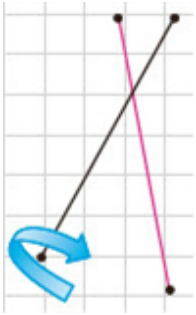
۱۱۰ نقطه‌ی A و 'A به روی یک خط راست واقع‌اند و فاصله‌ی آن‌ها از هم برابر با ۳ سانتی‌متر است. نقاطی از صفحه را پیدا کنید که فاصله‌ی آن‌ها از A و 'A به‌ترتیب ۲ و ۴ سانتی‌متر باشد.

۱۱۱ جاهای خالی را با کلمات مناسب کامل کنید.
الف) هر نقطه روی عمودمنصف یک پاره‌خط از دو سر آن ..... است.
ب) اگر نقطه‌ای به فاصله‌ی یکسان از دو ضلع یک زاویه باشد، آن نقطه ..... قرار دارد.

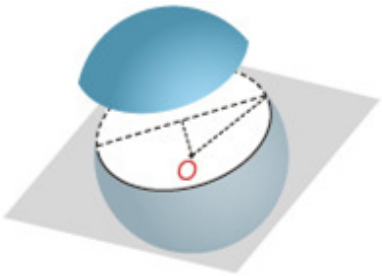
۱۱۲ شکل زیر را درنظر بگیرید. این شکل از دوران کدام شکل هندسی حول یک محور ساخته می‌شود؟ تصویر مناسبی برای آن رسم کنید.

تلفن تماس: ۰۲۶۳۳۴۰۸۹۴۴

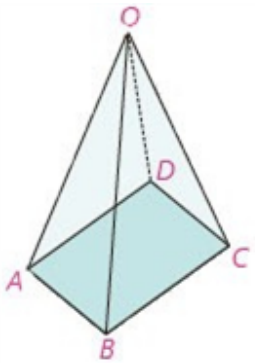
۱۱۳ دو پاره‌خط متقاطع را مطابق شکل درنظر بگیرید. اگر یکی از پاره‌خط ها را حول دیگری دوران دهیم، چه جسم هندسی‌ای ساخته می‌شود؟



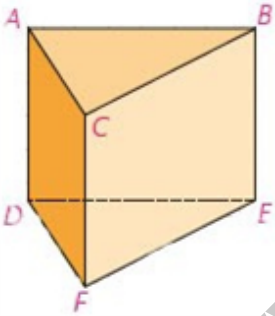
۱۱۴ صفحه‌ی P کره‌ای به مرکز O و شعاع ۵ سانتی‌متر را قطع کرده است.
اگر فاصله‌ی نقطه‌ی O از صفحه ۳ سانتی‌متر باشد، مساحت این سطح مقطع چه قدر است؟



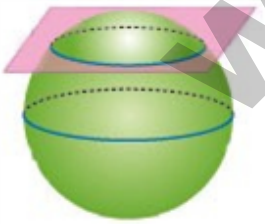
۱۱۵ قاعده‌ی هرمی، مستطیل ABCD است. رأس این هرم را O نامیده‌ایم. سطح مقطع حاصل از برخورد صفحه‌ی P را با این هرم در هر حالت مشخص کنید.
الف) صفحه‌ی P بر ارتفاع هرم عمود باشد.
ب) صفحه‌ی P از O بگذرد و بر قاعده‌ی هرم عمود باشد.
ج) صفحه‌ی P از O نگذرد ولی بر قاعده‌ی هرم عمود باشد.



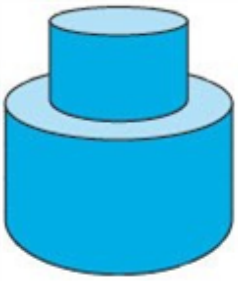
۱۱۶ فرض کنید منشور سمت راست، یک قطعه‌ی چوبی توپر باشد. این قطعه‌ی چوبی را طوری اره می‌کنیم که از سه نقطه‌ی مشخص عبور کند. در هر حالت مشخص کنید سطح مقطع به چه شکل است و منشور به چه شکل‌های فضایی تجزیه می‌شود؟
الف) M، N و P وسط پاره‌خط های BE، CF و AD
ب) C، D و E
ج) C، F و Q (وسط پاره‌خط AB)



۱۱۷ الف) سطح مقطع حاصل از برخورد یک صفحه با یک کره به چه شکل است؟
ب) در چه صورت این سطح مقطع بیش‌ترین مساحت ممکن را خواهد داشت؟

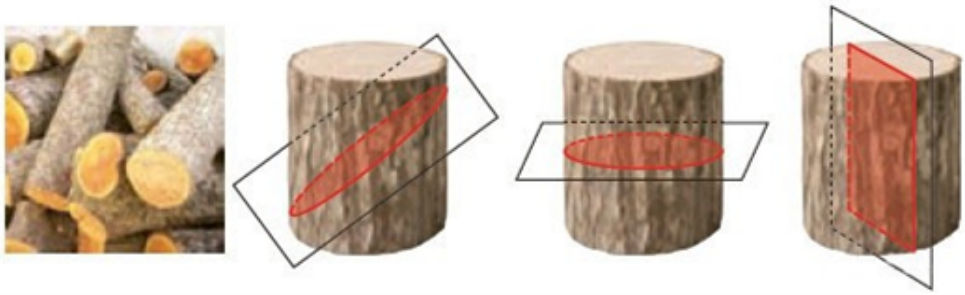


۱۱۸ دو استوانه را روی هم قرار داده‌ایم. اگر صفحه‌ای به شکل عمودی با هر دو این استوانه‌ها برخورد کند، سطح مقطع حاصل به چه شکل خواهد بود؟

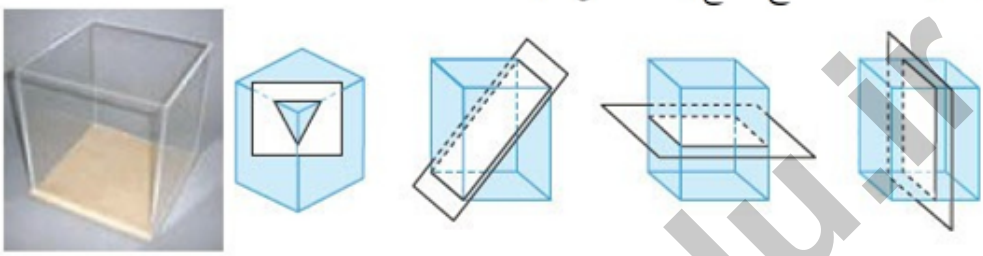


تلفن تماس: ۰۲۶۳۳۴۰۸۹۴۴

۱۱۹ سطح مقطع استوانه با صفحه‌های عمودی، افقی و صفحه‌ی مایلی که با قاعده‌های استوانه متقاطع نباشد به چه شکل است؟

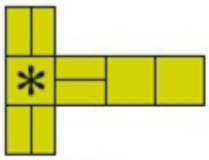


۱۲۰ بعضی از حالت‌های برخورد یک صفحه با یک مکعب مستطیل توخالی با قاعده‌ی مربع شکل، در زیر نمایش داده شده است. در هریک از حالت‌ها سطح مقطع را مشخص کنید.



۱۲۱ در هر شکل، مکعب گسترده‌ی سمت چپ مربوط به کدام‌یک از مکعب‌های سمت راست است؟

الف)

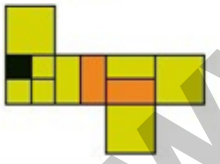


۱) 
۲) 
۳) 

ب)

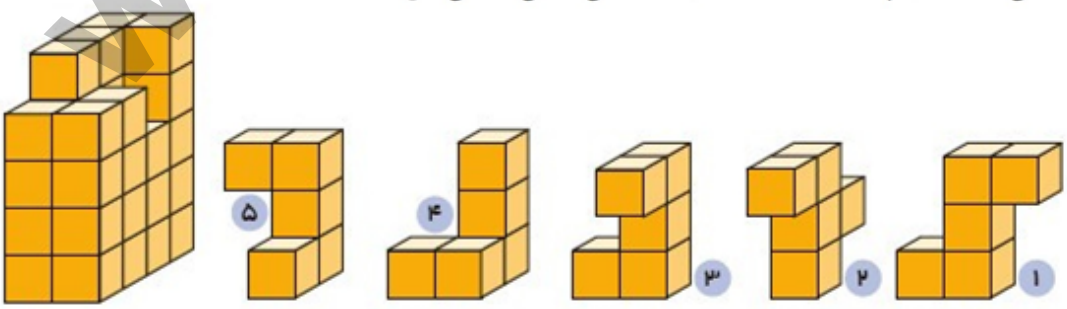
۱) 
۲) 
۳) 

ج)



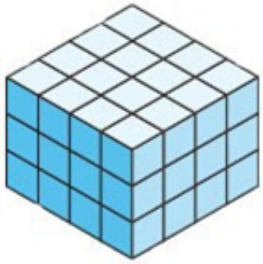
۱) 
۲) 
۳) 

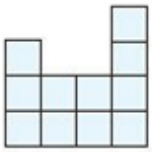
۱۲۲ کدام قطعه، شکل سمت چپ را به یک مکعب مستطیل کامل تبدیل می‌کند؟



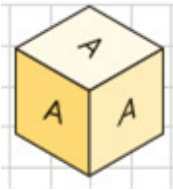
تلفن تماس: ۰۲۶۳۳۴۰۸۹۴۴

۱۲۳ شکل سمت چپ از چند مکعب کوچک تشکیل شده است؟
حداقل چند تا و حداکثر چند مکعب باید برداشته شود تا نمای بالا به این شکل باشد؟

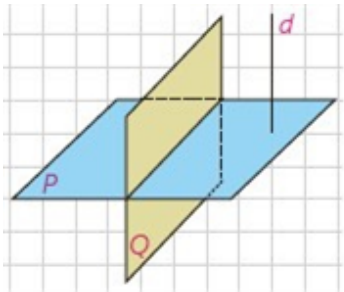




۱۲۴ روی تمام وجه‌های مکعب‌هایی حرف A نوشته شده است. ۸ تا از این مکعب‌ها را به شکل ستونی روی هم می‌چینیم. چند حرف A دیده می‌شود؟

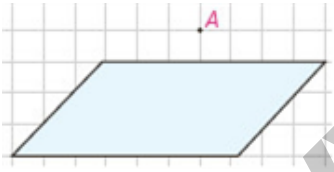


۱۲۵ دو صفحه P و Q بر هم عمودند و خط d نیز بر صفحه‌ی P عمود است. این خط نسبت به صفحه‌ی Q چه وضعی دارد؟

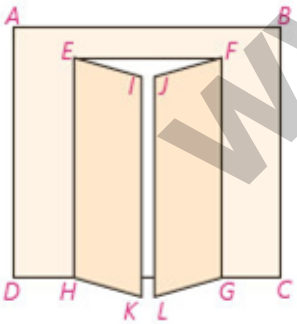


۱۲۶ از هر خط غیرواقع بر یک صفحه، چند صفحه می‌توان گذراند که برآن صفحه عمود باشد؟
الف) خط بر صفحه عمود باشد.
ب) خط بر صفحه عمود نباشد.

۱۲۷ از هر نقطه غیرواقع بریک صفحه، چند خط می‌توان به آن صفحه عمود کرد؟



۱۲۸ تجسم کنید دو لنگه‌ی در هر کدام ۳۰° باز شده‌اند، وضعیت خط ها و صفحه‌های زیر را مشخص کنید.



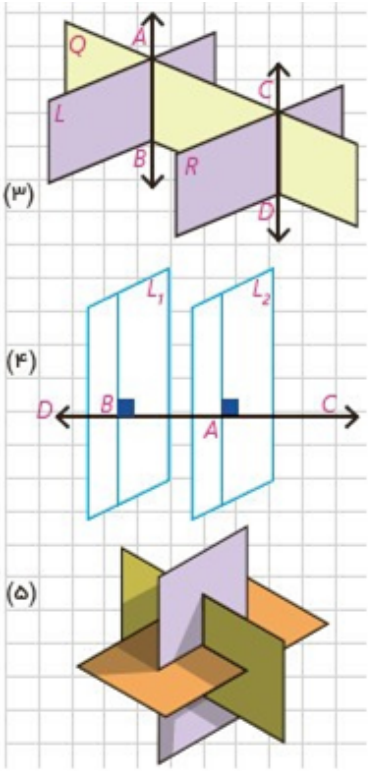
الف) وضعیت صفحه‌های EIKH و ABCD و JFGL را دو به دو نسبت به هم بررسی کنید.
ب) خط FJ و صفحه‌ی EIKH
ج) خط JL و صفحه‌ی EIKH
د) خط EH نسبت به هریک از صفحات
هـ) خطوط EI و JF
و) خطوط EI و FG
ز) خطوط FJ و BC

تلفن تماس: ۰۲۶۳۳۴۰۸۹۴۴

۱۲۹

(۱)

(۲)



می‌دانیم که در صفحه، دو خط عمود بر یک خط با هم موازی‌اند.

الف) آیا دو خط عمود بر یک صفحه همیشه با هم موازی‌اند؟

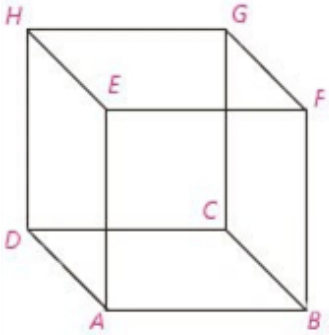
ب) آیا دو صفحه‌ی عمود بر یک صفحه همیشه با هم موازی‌اند؟

ج) دو صفحه‌ی عمود بر یک خط نسبت به هم چه وضعی دارند؟

د) اگر خطی بر یکی از دو صفحه‌ی موازی عمود باشد، نسبت به دیگری چه وضعیتی دارد؟

هـ) اگر یکی از دو خط موازی بر صفحه‌ای عمود باشد، وضعیت خط دوم با صفحه را بررسی کنید.

۱۳۰ به این مکعب دقت کنید:



الف) خط های GF و DA نسبت به هم چه وضعی دارند؟

HG و DC چطور؟

EF و GC چطور؟

ب) هر خط با چند خط دیگر متقاطع است؟

با چند خط موازی است؟

با چند خط متنافر است؟

ج) HD با کدام صفحه موازی است؟

با کدام متقاطع است؟

بر کدام واقع است؟

د) دو صفحه‌ی موازی و دو صفحه‌ی متقاطع نام ببرید.

۱۳۱ دو خط d_1 و d_2 با هم موازی‌اند.

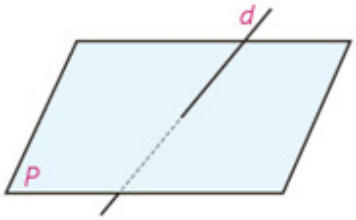
الف) اگر صفحه‌ای مثل P با یکی از این دو خط موازی باشد، نسبت به دیگری چه وضعی دارد؟

ب) اگر صفحه‌ی P شامل یکی از دو خط باشد، نسبت به دیگری چه وضعیتی دارد؟

ج) اگر صفحه‌ی P با یکی از این خطوط متقاطع باشد، نسبت به دیگری چه وضعیتی دارد؟

تلفن تماس: ۰۲۶۳۳۴۰۸۹۴۴

۱۳۲ خط d با صفحه‌ی P متقاطع است.
خط های موجود در صفحه‌ی P نسبت به خط d چه وضعیت‌هایی می‌توانند داشته باشند؟



۱۳۳ می‌دانیم که در صفحه دو خط عمود بر یک خط، با هم موازی‌اند. آیا در فضا هم این رابطه برقرار است؟

۱۳۴ به سؤالات زیر پاسخ دهید. (می‌توانید از تصاویر کمک بگیرید.)

الف) در صفحه از هر نقطه چند خط می‌گذرد؟

در فضا چطور؟

ب) در صفحه از یک نقطه غیرواقع بر یک خط، چند خط موازی آن خط می‌توان رسم کرد؟

در فضا چطور؟

۱۳۵ به این تصویر دقت کنید. توپ A داخل جیب یکی از بازیکن‌ها و توپ C روی راکت بازیکن دیگر است و بقیه‌ی توپ‌های تنیس روی زمین افتاده‌اند.

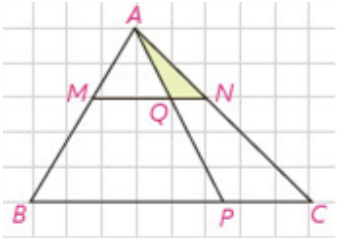
الف) سه توپ نام ببرید که در یک راستا هستند.

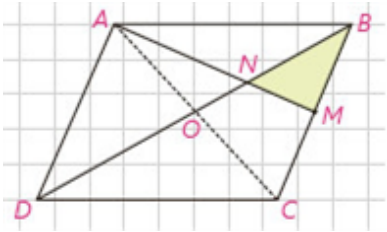
ب) سه توپ نام ببرید که در یک صفحه‌اند ولی هم‌راستا نیستند.

ج) چهار توپ نام ببرید که همگی در یک صفحه نیستند.

۱۳۶ یک مستطیل شبکه‌ای با ضلع‌های افقی و قائم که اندازه‌های ضلع‌های آن m و n واحداند مفروض است. مساحت آن‌را ابتدا به روش معمول و سپس به کمک فرمول پیک محاسبه و آن‌ها را مقایسه کنید.

۱۳۷ در مثلث ABC، خط MN موازی ضلع BC است و $\frac{AM}{MB}=\frac{۱}{۲}$. هم‌چنین $\frac{PC}{PB}=\frac{۱}{۳}$ است. S_{AQN} و S_{MQPB} چه کسری از مساحت مثلث ABC است.

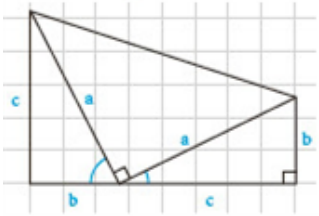


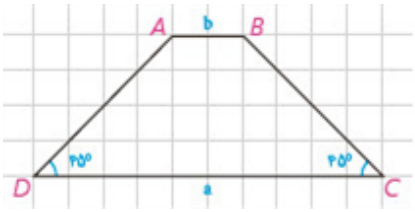


۱۳۸ در متوازی‌الاضلاع ABCD، M وسط ضلع BC است و پاره‌خط AM قطر BD را در N قطع کرده است. نشان دهید:

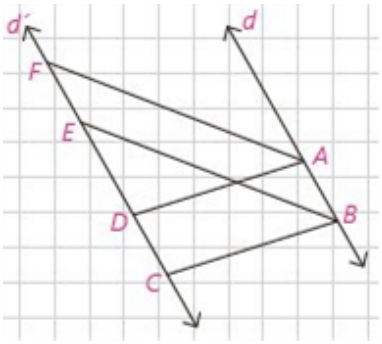
$$S_{BMN} = \frac{۱}{۱۲} S_{ABCD}$$

۱۳۹ مساحت ذوزنقه‌ی مقابل را به دو طریق به دست آورید. از مساوی قرار دادن آن‌ها چه نتیجه‌ای به دست می‌آید؟

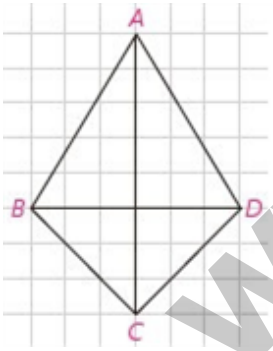




۱۴۰ در ذوزنقه‌ی شکل مقابل اندازه‌های دو قاعده a و b و اندازه‌های دو زاویه‌ی مجاور به یک قاعده ۴۵° است. مساحت ذوزنقه را برحسب a و b محاسبه کنید. از A و B بر قاعده DC عمود کنید.



۱۴۱ در شکل دو خط d و d' موازی‌اند و ABCD و ABEF هر دو متوازی‌الاضلاع‌اند. اگر مساحت یکی از این متوازی‌الاضلاع‌ها برابر S باشد، مساحت دیگری برحسب S چه‌قدر است؟



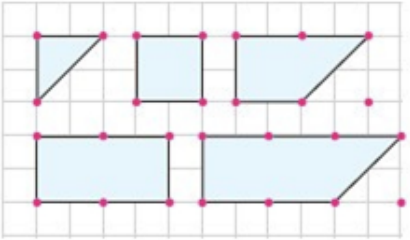
۱۴۲ در چهارضلعی ABCD، مطابق شکل AB = AD و BC = CD است. آیا قطرهای این چهارضلعی بر هم عمودند؟ چرا؟ نشان دهید در این چهارضلعی قطر AC روی نیمسازهای $\angle A$ و $\angle C$ است. اگر اندازه‌های دو قطر ۸ و ۶ باشند، مساحت آن را محاسبه کنید. چهارضلعی‌ای با این ویژگی کایت نام دارد. نشان دهید در کایت یک قطر عمودمنصف قطر دیگر است.

۱۴۳ در یک لوزی اندازه‌ی هر ضلع $۲\sqrt{۱۰}$ و نسبت اندازه‌های دو قطر $\frac{۱}{۳}$ است. مساحت لوزی را پیدا کنید.

تلفن تماس: ۰۲۶۳۳۴۰۸۹۴۴

۱۴۴ اگر فاصله‌ی نقطه‌های شبکه‌ای یک سانتی‌متر باشد، یک برگ درخت را روی یک صفحه‌ی شطرنجی قرار دهید و با رسم آن مساحت آن‌را به طور تقریبی محاسبه کنید.
واضح است که با کوچک‌تر کردن واحد می‌توانیم مساحت را با تقریب بهتری محاسبه کنیم.

۱۴۵ در تمام چندضلعی‌های شبکه‌ای زیر تعداد نقطه‌های درونی شبکه‌ای صفر است، یعنی i = ۰ و تعداد نقاط مرزی، ..... ، ۵ , ۴ , ۳ = b.
جدول زیر را با محاسبه‌ی مساحت چندضلعی‌های شبکه‌ای کامل کنید.



i = ۰ ،b = ۳ , ۴ , ۵ , ...

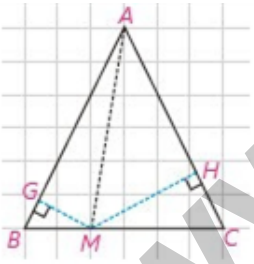
تعداد نقاط مرزی b	۳	۴	۵	۶	۷	۸
مساحت	$\frac{۱}{۲}$	۱	$\frac{۳}{۲}$			

بین مساحت و تعداد نقاط مرزی چه رابطه‌ای وجود دارد؟

$S = \frac{b}{...} - ... + ۰$

۱۴۶ ثابت کنید مجموع فاصله‌های هر نقطه درون مثلث متساوی‌الاضلاع از سه ضلع برابر ارتفاع مثلث است.

۱۴۷ در مثلث متساوی‌الساقین ABC که AB = AC است، نقطه‌ی دلخواه M را روی ضلع BC بین B و C درنظر بگیرید. از M دو عمود MH و MG را به‌ترتیب بر دو ساق AC و AB رسم کنید. S_{AMC} و S_{AMB} را بنویسید.

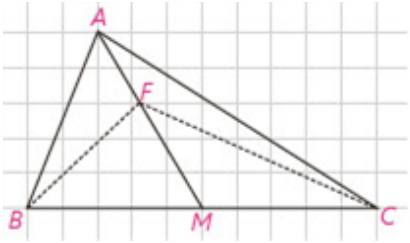


مساحت مثلث ABC را نیز وقتی پاره‌خط AB یا AC قاعده باشند، بنویسید.
الف) چه رابطه‌ای بین این مساحت‌ها وجود دارد؟ آن‌را بنویسید. از این رابطه چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟
در هر مثلث متساوی‌الساقین ABC که AB = AC است، مجموع فاصله‌های هر نقطه روی قاعده BC از ..... برابر ..... است.
ب) به همین ترتیب نشان دهید در هر مثلث متساوی‌الساقین ABC، قدرمطلق تفاضل فاصله‌های هر نقطه روی امتدادهای قاعده‌ی BC از خط های شامل دو ساق برابر اندازه‌ی ارتفاع وارد بر ساق است.

۱۴۸ ثابت کنید سه میانهٔ هر مثلث همرس‌اند.

۱۴۹ ثابت کنید اگر وسطهای سه ضلع هر مثلث را به هم متصل کنیم، چهار مثلث هم‌نهشت و در نتیجه با مساحت‌های برابر پدید می‌آید.

تلفن تماس: ۰۲۶۳۳۴۰۸۹۴۴



۱۵۰ الف) نشان دهید یک میانه در هر مثلث، آن‌را به دو مثلث با مساحت‌های برابر تقسیم می‌کند.

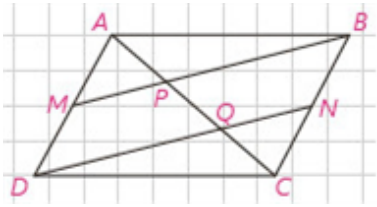
ب) اگر F هر نقطه‌ای روی میانه‌ی AM به‌جز نقطه‌ی M باشد، آیا، $S_{FBM} = S_{FMC}$ است؟ چرا؟

۱۵۱ ثابت کنید مساحت هر چهارضلعی که قطرهای آن بر هم عمودند برابر است با نصف حاصل‌ضرب اندازه‌های دو قطر آن چهارضلعی.

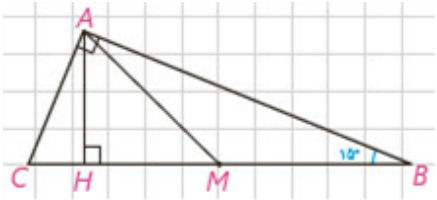
۱۵۲ ثابت کنید اگر وسط های ضلع‌های هر چهارضلعی را به طور متوالی به هم وصل کنیم، یک متوازی‌الاضلاع پدید می‌آید.

این چهارضلعی باید چه ویژگی‌ای داشته باشد تا این متوازی‌الاضلاع مستطیل یا لوزی شود؟

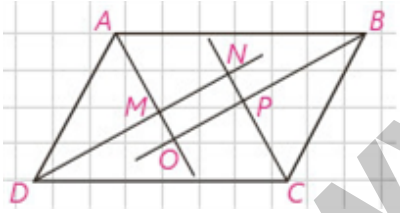
چه رابطه‌ای بین محیط متوازی‌الاضلاع پدید آمده با اندازه‌های قطرهای چهارضلعی اولیه وجود دارد؟



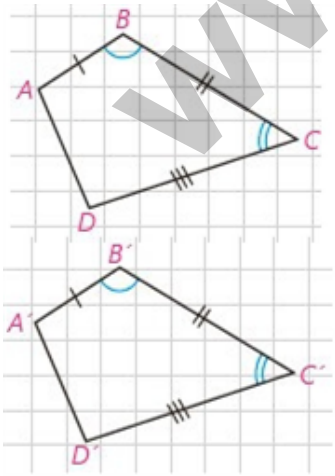
۱۵۳ در متوازی‌الاضلاع ABCD، M و N به‌ترتیب وسط های ضلع‌های AD و BC می‌باشند. چرا خط های MB و DN موازی‌اند؟ به کمک آن ثابت کنید $AP = PQ = QC$.



۱۵۴ در مثلث قائم‌الزاویه‌ی ABC، اندازه‌ی زاویه‌ی B برابر ۱۵° است. با رسم میانه و ارتفاع وارد بر وتر نشان دهید اندازه‌ی ارتفاع وارد بر وتر $\frac{۱}{۴}$ اندازه‌ی وتر است.



۱۵۵ از تقاطع نیمسازهای داخلی یک متوازی‌الاضلاع، چهارضلعی MNPQ پدید آمده است. ثابت کنید این چهارضلعی مستطیل است.

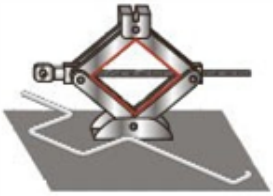


۱۵۶ الف) در دو چهارضلعی مقابل $AB = A'B'$ و $\angle B = \angle B'$ و $BC = B'C'$ و $\angle C = \angle C'$ و $CD = C'D'$ است. چگونه مساوی بودن اندازه‌های سایر ضلع‌ها و زاویه‌ها را نتیجه می‌گیرید؟

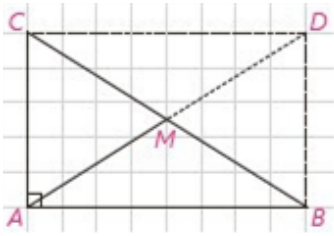
ب) اگر $\angle B = \angle B'$ و $BC = B'C'$ و $\angle C = \angle C'$ و $CD = C'D'$ و $\angle D = \angle D'$، در این حالت چگونه مساوی بودن اندازه‌های سایر ضلع‌ها و زاویه‌ها را نتیجه می‌گیرید؟

۱۵۷ در کدام n ضلعی تعداد قطرها و ضلع‌ها برابر است؟

۱۵۸ ثابت کنید در هر ذوزنقهٔ متساوی‌الساقین، قطرها اندازه‌های مساوی دارند و برعکس.

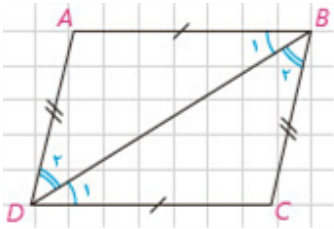


۱۵۹ الف) در شکل یک جک خودرو را می‌بینید. چهار بازوی آن یک لوزی تشکیل می‌دهند. آیا حالتی از جک وجود دارد که به شکل مربع درآید؟
ب) اگر دو بازوی بالا با هم و دو بازوی پایین نیز با هم اندازه‌های مساوی داشته باشند، اما شکل جک لوزی نباشد، هنگام بسته شدن جک وقتی بخواهیم دو بازوی بالا روی دو بازوی پایین قرار گیرند چه مشکلی ایجاد می‌شود؟

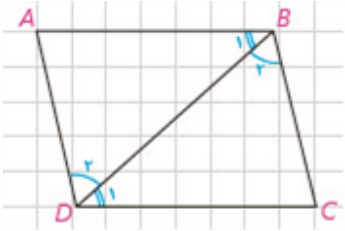


۱۶۰ مثلث قائم‌الزاویه‌ی ABC را که در آن $\angle A$ قائمه است و AM میانه‌ی وارد بر وتر است درنظر می‌گیریم.
روی نیم‌خط AM نقطه D را چنان درنظر می‌گیریم که $AM = MD$.
الف) چرا چهارضلعی ABDC متوازی‌الاضلاع است؟
ب) چرا این چهارضلعی مستطیل است؟
پ) در مورد قطرها چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟
ت) اندازه‌ی AM چه رابطه‌ای با اندازه‌ی BC دارد؟ آن‌را بیان کنید.

۱۶۱ ثابت کنید در متوازی‌الاضلاع هر دو زاویه‌ی مجاور مکمل‌اند.



۱۶۲ ثابت کنید اگر در یک چهارضلعی، ضلع‌های مقابل دو به دو هم‌اندازه باشند، چهارضلعی متوازی‌الاضلاع است.

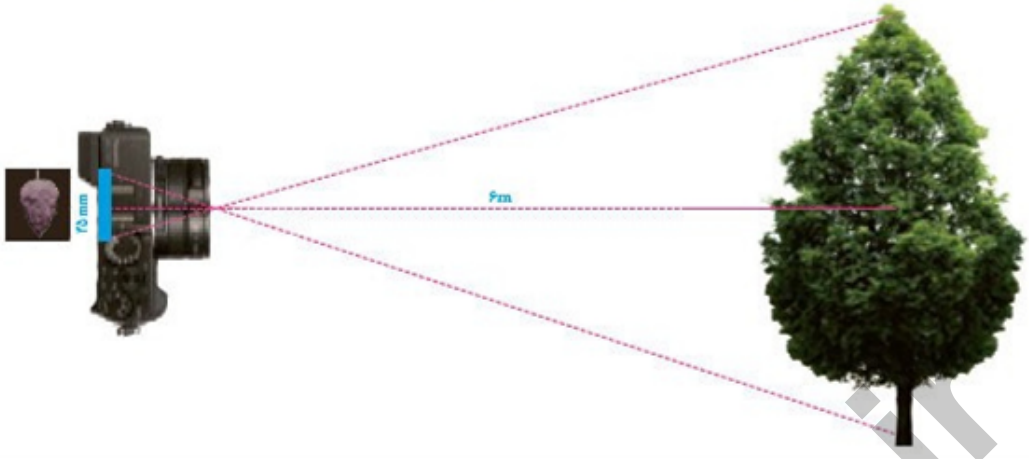


۱۶۳ وقتی در هر متوازی‌الاضلاع ABCD یک قطر مثلاً قطر BD را رسم می‌کنیم، دو مثلث هم‌نهشت ABD و CDB پدید می‌آیند. حال پرسش این است، اگر در یک چهارضلعی ABCD قطر BD را رسم کنیم و ΔABD و ΔCDB هم‌نهشت باشند، آیا چهارضلعی ABCD همواره متوازی‌الاضلاع است؟

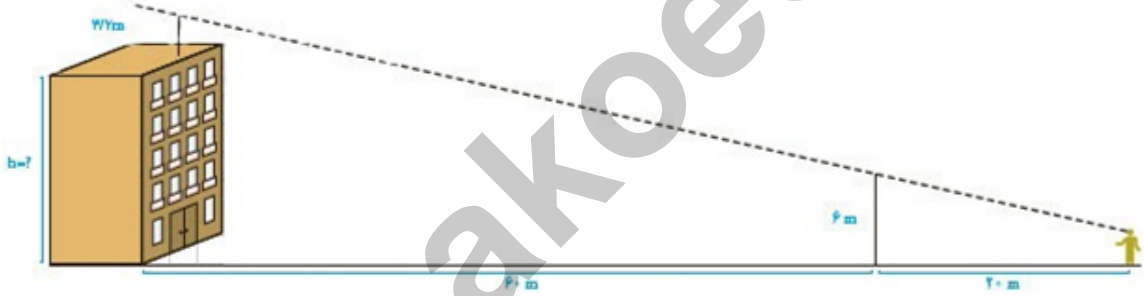
۱۶۴ درستی هریک از عبارت‌های زیر را توجیه کنید:
الف) مستطیل یک متوازی‌الاضلاع است.
ب) اگر در متوازی‌الاضلاع یک زاویه قائمه باشد، مستطیل است؛ چرا؟
پ) لوزی یک متوازی‌الاضلاع است.
در لوزی ABCD قطر AC را رسم می‌کنیم. دو مثلث ABC و ADC به حالت ..... هم‌نهشت‌اند. بنابراین دو زاویه‌ی ..... و ..... هم‌اندازه‌اند. در نتیجه دو ضلع AB و CD موازی‌اند. به همین ترتیب دو ضلع مقابل BC و AD نیز موازی‌اند. یعنی لوزی متوازی‌الاضلاع است.
بنابراین، لوزی متوازی‌الاضلاعی است که دو ضلع مجاور آن هم‌اندازه باشند.
ت) مربع یک متوازی‌الاضلاع است.

تلفن تماس: ۰۲۶۳۳۴۰۸۹۴۴

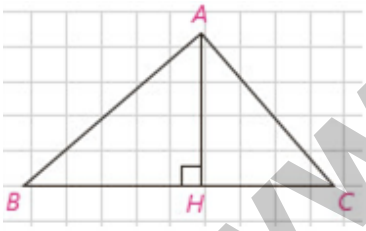
۱۶۵ در دوربین‌های قدیمی، موقع عکس‌برداری، روی یک حلقه‌ی فیلم تعداد محدودی (مثلاً سی و شش عدد) تصویر منفی ثبت و سپس این فیلم ظاهر می‌شود و عکس‌ها از روی آن چاپ می‌شوند. اگر فرض کنیم عرض یکی از این فیلم‌ها، ۳۵mm و فاصله‌ی آن درون دوربین تا عدسی، ۴/۲cm و فاصله عدسی تا درختی که از آن عکس می‌گیرد، ۶m باشد، اندازه‌ی واقعی درختی که از آن عکس گرفته می‌شود، چند متر است؟



۱۶۶ مطابق شکل، روی یک ساختمان، یک آنتن به ارتفاع ۳/۲ متر نصب شده است. در فاصله‌ی ۶۰ متری ساختمان، یک تیر برق ۶ متری قائم وجود دارد و یک ناظر وقتی در فاصله ۲۰ متری تیر می‌ایستد، انتهای آنتن و انتهای تیر برق را در یک راستا می‌بیند. اگر بدانیم فاصله‌ی چشمان ناظر از زمین ۱/۶ متر است، بلندی ساختمان را محاسبه کنید.
(از چشم ناظر خط راستی موازی زمین رسم کنید تا تیر برق و ساختمان را قطع کند. از قضیه‌ی تالس کمک بگیرید.)



۱۶۷ در مثلث قائم‌الزاویه‌ی ABC $(\angle A = ۹۰^\circ)$ ارتفاع AH را رسم می‌کنیم. می‌دانید که $\Delta ABH \sim \Delta ABC \sim \Delta ACH$ است. با توجه به این موضوع

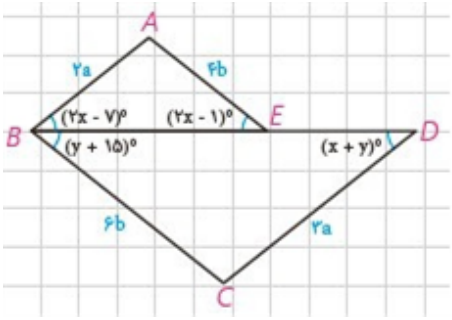


الف) ثابت کنید: $\frac{S_{ABH}}{S_{ABC}} = \left(\frac{AB}{BC}\right)^۲ , \frac{S_{ACH}}{S_{ABC}} = \left(\frac{AC}{BC}\right)^۲$

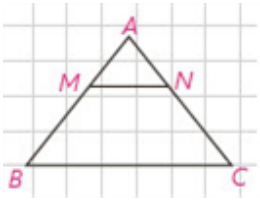
ب) با جمع کردن دو طرف تساوی‌های بالا و ادامه‌ی کار، درستی قضیه‌ی فیثاغورس را نتیجه‌گیری کنید.

تلفن تماس: ۰۲۶۳۳۴۰۸۹۴۴

۱۶۸ در شکل روبه‌رو می‌دانیم $BE = ۲DE$ است. اولاً x و y را به دست آورید. ثانیاً نسبت مساحت مثلث BCD به مساحت ABE را بیابید.

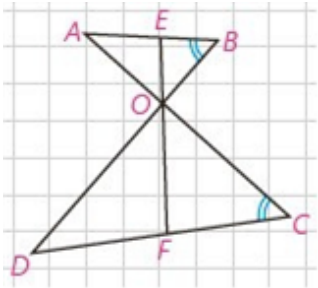


۱۶۹ در شکل روبه‌رو $MN \parallel BC$ است و مساحت ذوزنقه‌ی MNCB هشت برابر مساحت مثلث AMN است. نسبت $\frac{MB}{MA}$ را به دست آورید.



۱۷۰ طول‌های اضلاع یک مثلث ۱۰ و ۱۲ و ۱۵ سانتی‌متر است و طول بلندترین ضلع مثلثی متشابه آن، ۱۰ سانتی‌متر است. محیط مثلث دوم را به دست آورید.

۱۷۱ در شکل روبه‌رو $EF = ۱۰\,cm$ نیمساز دو زاویه‌ی متقابل به رأس O است و $\angle B = \angle C$.



الف) چرا مثلث‌های OAB و OCD متشابه‌اند؟

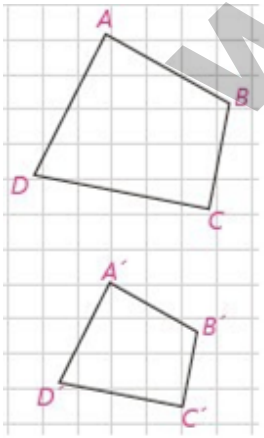
ب) اگر $\frac{OB}{OC} = \frac{۲}{۳}$، نسبت $\frac{OE}{OF}$ چه‌قدر است؟

ج) طول‌های OE و OF را به دست آورید.

۱۷۲ نسبت مساحت‌های دو پنج‌ضلعی متشابه، $\frac{۴}{۹}$ است. اگر محیط یکی از آن‌ها ۱۲ واحد باشد، محیط پنج‌ضلعی دیگر چند واحد است؟ (چند جواب داریم؟)

۱۷۳ اندازه‌ی محیط های دو مثلث متشابه به‌ترتیب ۱۰ و ۱۸ واحد است. اگر مساحت مثلث بزرگ‌تر ۱۵ واحد سطح باشد، مساحت مثلث کوچک‌تر، چند واحد سطح است؟

۱۷۴ چهارضلعی‌های متشابه A'B'C'D' و ABCD مفروض‌اند.



۱- اگر نسبت تشابه دو چهارضلعی، K باشد، ثابت کنید نسبت محیط های آن‌ها مساوی K است.

۲- قطرهای AC و A'C' را رسم کنید. نشان دهید:

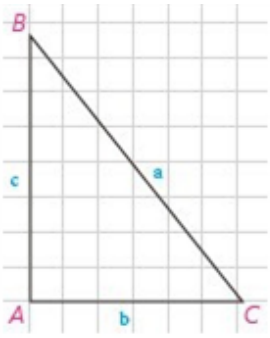
$\Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$, $\Delta ACD \sim \Delta A'C'D'$

نسبت تشابه‌ها چیست؟

۳- جاهای خالی را پر کنید:

$$\frac{S_{A'C'D'}}{S_{ACD}} = \dots \,,\ \frac{S_{A'B'C'}}{S_{ABC}} = \dots \Rightarrow \frac{S_{A'C'D'} + S_{A'B'C}}{S_{ACD} + S_{ABC}} = \dots \Rightarrow \frac{\dots}{\dots} = \dots$$

تلفن تماس: ۰۲۶۳۳۴۰۸۹۴۴

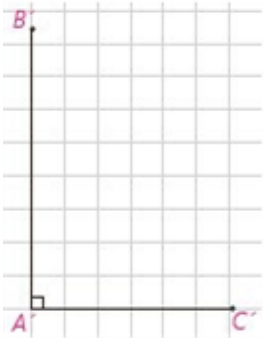


۱۷۵) قضیه فیثاغورس می‌گوید اگر زاویه‌ی A از مثلثی مانند ABC، قائمه باشد، آن‌گاه $a^2 = b^2 + c^2$.

الف) عکس این قضیه را بنویسید.

ب) با انجام دادن مراحل زیر نتیجه بگیرید که عکس قضیه فیثاغورس نیز درست است.

۱) فرض کنیم مثلث ABC داده شده است و رابطه‌ی $a^2 = b^2 + c^2$ بین اندازه‌ی طول‌های اضلاع آن برقرار است.

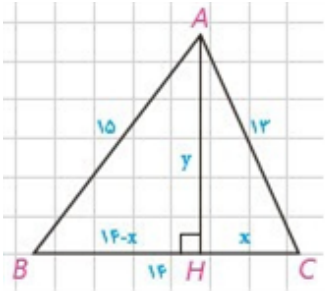


۲) پاره‌خط های A'B' و A'C' را مطابق شکل مقابل به گونه‌ای درنظر بگیرید که $\hat{A'} = ۹۰^\circ$ و $A'C' = AC$ و $A'B' = AB$

۳) با استفاده از قضیه‌ی فیثاغورس در مثلث A'B'C'، اندازه‌ی پاره‌خط B'C' را به دست آورید و ثابت کنید $B'C' = BC$.

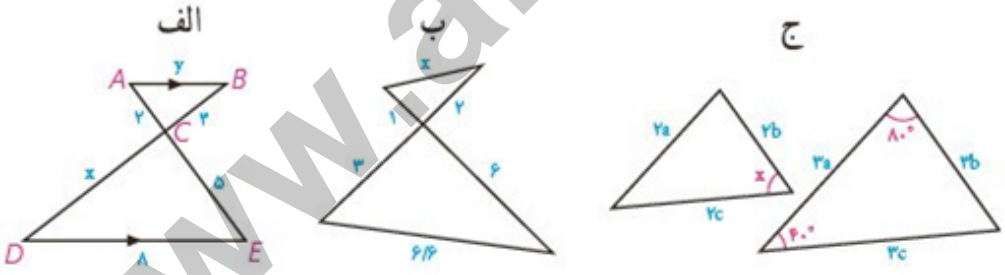
۴) توضیح دهید چرا $\overset{\triangle}{ABC} \cong \overset{\triangle}{A'B'C'}$، و نتیجه بگیرید $\hat{A} = ۹۰^\circ$.

ج) قضیه‌ی فیثاغورس و عکس آن‌را به صورت یک قضیه‌ی دوشرطی بیان نمایید.



۱۷۶) در شکل مقابل، مثلثی با اضلاع ۱۳ و ۱۴ و ۱۵ رسم شده است. به کمک قضیه‌ی فیثاغورس در مثلث‌های ABH و ACH، مقادیر x و y را به دست آورید و از آن‌جا مساحت مثلث را محاسبه کنید.

۱۷۷) در هریک از شکل‌های زیر، تشابه مثلث‌ها را ثابت کنید و از آن‌جا مقادیر x ,y را مشخص کنید.

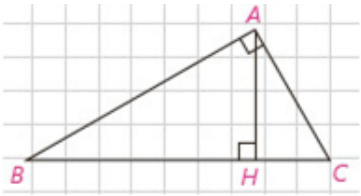


۱۷۸) در مثلث قائم‌الزاویه‌ی ABC ارتفاع AH وارد بر وتر را رسم کرده‌ایم. ثابت کنید:

① $AB^2 = BC.BH$ ② $AC^2 = BC.CH$ ③ $AB^2 + AC^2 = BC^2$

④ $AH^2 = BH.CH$ ⑤ $AH.BC = AB.AC$

تلفن تماس: ۰۲۶۳۳۴۰۸۹۴۴



۱۷۹ در مثلث قائم‌الزاویه‌ی ABC $(\hat{A} = ۹۰^\circ)$ ارتفاع AH را رسم می‌کنیم. آیا می‌توانید دو زاویه‌ی هم‌اندازه را در دو مثلث ABH و ABC نام ببرید؟

$\hat{B} = \ldots$ و $\hat{H} = \ldots = ۹۰^\circ$

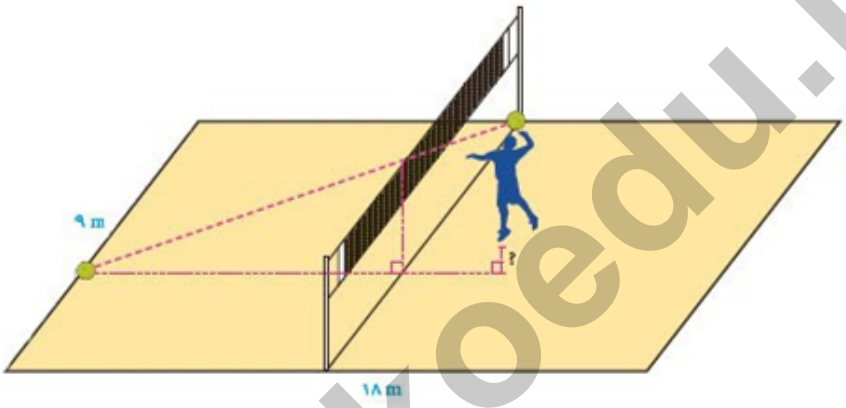
به همین ترتیب دو زاویه‌ی هم‌اندازه از دو مثلث ACH و ABC را نام ببرید.

بنابراین می‌توانیم بگوییم:

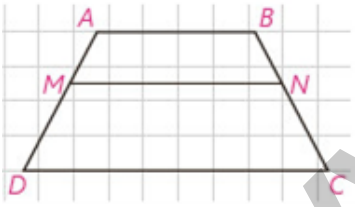
$\Delta ABH \sim \Delta ABC \ , \ \Delta ACH \sim \Delta ABC$

چرا مثلث‌های ABH و ACH، خودشان با هم متشابه‌اند؟

۱۸۰ ابعاد یک زمین استاندارد والیبال ۹ متر در ۱۸ متر است که توسط خط میانی به دو مربع ۹×۹ تفکیک می‌شود و تور والیبال مردان با ارتفاع ۲/۴۳ متر روی خط وسط نصب شده است. یک بازیکن با قد ۱۸۰ سانتی‌متر و در فاصله‌ی دو متری تور، به هوا می‌پرد و توپی را که در ارتفاع ۳۰ سانتی‌متری بالای سرش است با ضربه آبشار مماس بر تور وسط روانه زمین حریف می‌کند و توپ روی خط انتهای زمین حریف می‌نشیند. این بازیکن برای ضربه زدن چه‌قدر به هوا پریده است؟

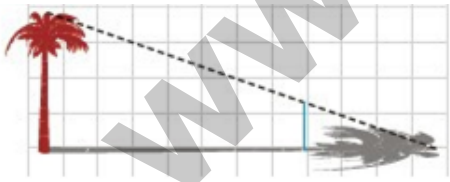


۱۸۱ در ذوزنقه مقابل $MN \parallel AB \parallel CD$، ثابت کنید:



$\frac{AM}{MD} = \frac{BN}{NC}$ (قضیه تالس در ذوزنقه)

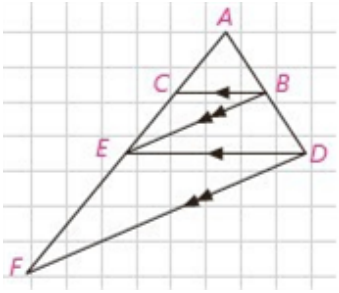
۱۸۲ یکی از کاربردهای قضیه‌ی تالس از زمان‌های دور تاکنون، محاسبه‌ی فاصله‌های غیرقابل دسترس بوده است؛ به عنوان مثال برای تعیین یک ارتفاع بلند مانند ارتفاع یک درخت بلند در زمانی معین، طول سایه‌ی درخت را روی زمین اندازه می‌گیریم؛ سپس یک قطعه چوب کوتاه را که به آن شاخص می‌گویند، طوری به صورت عمودی جابه‌جا می‌کنیم که سایه‌ی آن روی امتداد سایه‌ی درخت قرار گیرد و نوک سایه شاخص نیز بر بر نوک سایه‌ی درخت منطبق شود؛ به طور مثال اگر طول سایه‌ی درخت ۶۰ متر، طول سایه‌ی شاخص ۳ متر و طول شاخص ۱ متر باشد، بلندی درخت چند متر است؟



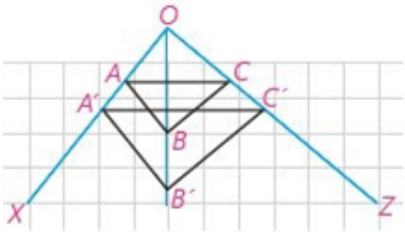
تلفن تماس: ۰۲۶۳۳۴۰۸۹۴۴

۱۸۳ در شکل مقابل می‌دانیم $BC \parallel DE$ و $BE \parallel DF$، به کمک قضیه‌ی تالس در مثلث‌های ADE و ADF و مقایسه‌ی تناسب‌ها با یک‌دیگر، ثابت کنید:

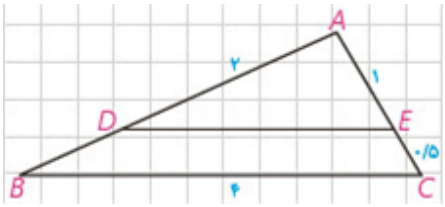
$AE^{۲} = AC.AF$ (به عبارت دیگر AE واسطه هندسی بین AC و AF است)



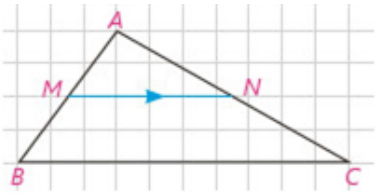
۱۸۴ در شکل مقابل می‌دانیم $AB \parallel A'B'$ و $BC \parallel B'C'$ با استفاده از قضیه‌ی تالس و عکس آن ثابت کنید: $AC \parallel A'C'$



۱۸۵ در شکل مقابل $DE \parallel BC$؛ با توجه به اندازه پاره‌خط ها، طول‌های DE و AB را به دست آورید.



۱۸۶ در شکل مقابل پاره‌خط MN موازی با BC رسم شده است. درستی و نادرستی هر عبارت را مشخص کنید:



الف) $\frac{AM}{MB} = \frac{AN}{NC} = \frac{MN}{BC}$

ب) $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC}$

پ) $\frac{AM}{MB} = \frac{AN}{NC}$

ت) $\frac{AM}{BM} = \frac{MN}{BC}$

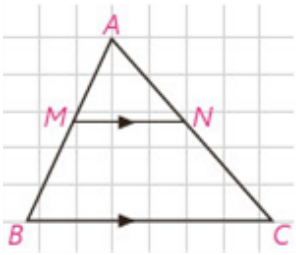
ث) $\frac{MB}{AB} = \frac{NC}{CA} = \frac{MN}{BC}$

ج) $\frac{MB}{MA} = \frac{NC}{NA}$

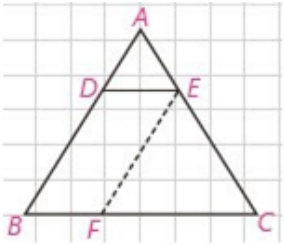
چ) $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC}$

ح) $\frac{MB}{AB} = \frac{MN}{BC}$

۱۸۷ در شکل مقابل، با فرض $MN \parallel BC$، طبق قضیه‌ی تالس داریم: $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC}$ حال عکس قضیه‌ی تالس را به زبان ریاضی بنویسید.



تلفن تماس: ۰۲۶۳۳۴۰۸۹۴۴



۱۸۸ در شکل مقابل $DE \parallel BC$، از نقطه‌ی E، پاره‌خط EF را موازی AB رسم کرده‌ایم.
چهارضلعی DEFB چه نوع چهارضلعی است؟ چرا؟
با توجه به این موضوع داریم: $DE = \dots , DB = \dots$
در مثلث ABC و با درنظر گرفتن $DE \parallel BC$، قضیه‌ی تالس را بنویسید.

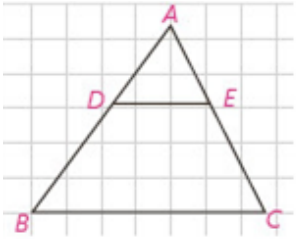
$$\frac{AD}{\dots} = \frac{\dots}{AC} \quad (۱)$$

در مثلث CAB با توجه به $EF \parallel AB$، قضیه‌ی تالس را بنویسید.

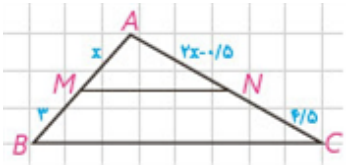
$$\frac{BF}{BC} = \frac{\dots}{\dots} \quad (۲)$$

با توجه به روابط ۱ و ۲ و جای‌گذاری DE به جای BF خواهیم داشت:

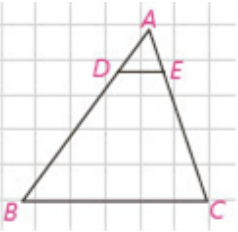
$$\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC} = \frac{DE}{BC}$$



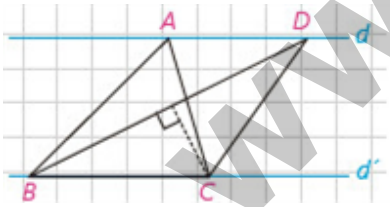
۱۸۹ در شکل مقابل $DE \parallel BC$؛ تناسب قضیه‌ی تالس را بنویسید و به کمک ترکیب نسبت در مخرج، رابطه‌ی $\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC}$ و با تفضیل نسبت در صورت از این تناسب، رابطه‌ی $\frac{DB}{AB} = \frac{CE}{AC}$ را نتیجه بگیرید. این رابطه‌ها صورت‌های دیگر قضیه تالس هستند.



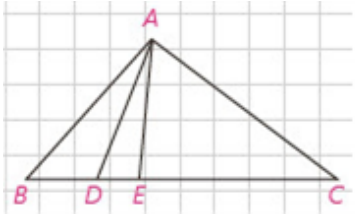
۱۹۰ در شکل مقابل $MN \parallel BC$؛ به کمک قضیه‌ی تالس و با تشکیل یک معادله، مقدار x را به دست آورید.



۱۹۱ در شکل مقابل $DE \parallel BC$ و $AD = ۱$ و $DB = ۳$ و $AE = ۰/۸$.
به کمک قضیه‌ی تالس طول AC را به دست آورید.



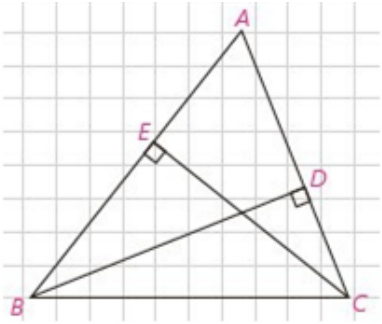
۱۹۲ در شکل مقابل $d \parallel d'$ و مساحت مثلث ABC، $۸cm^۲$ است. اگر $BD = ۶cm$ باشد، فاصله‌ی نقطه‌ی C از BD را به دست آورید.



۱۹۳ در شکل مقابل مساحت مثلث ACE سه برابر مساحت مثلث ADE و دو برابر مساحت مثلث ABD است. نسبت‌های $\frac{DE}{BD}$ و $\frac{BC}{DE}$ را به دست آورید.

تلفن تماس: ۰۲۶۳۳۴۰۸۹۴۴

۱۹۴ مثلث ABC و ارتفاع‌های BD و CE از آن‌را درنظر بگیرید. مساحت مثلث ABC را یک بار با درنظرگرفتن قاعده‌ی AC و ارتفاع BD و بار دیگر با درنظر گرفتن قاعده‌ی AB بنویسید.



مساحت ABC $= \frac{۱}{۲} AC \times \ldots$

مساحت ABC $= \frac{۱}{۲} \ldots \times \ldots$

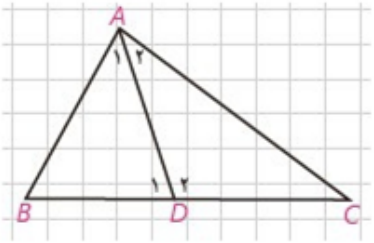
- عبارت سمت راست، هر دو مساوی یک‌چیزند.

بنابراین:

الف) $AC \times \ldots = \ldots \times \ldots$ آیا می‌توانید از آن‌جا یک تناسب بنویسید؟

ب) پاسخ خود را با پاسخ دوستانتان مقایسه کنید. آیا همه به یک جواب رسیده‌اید؟ تفاوت پاسخ‌ها چه چیزی را نشان می‌دهد؟

۱۹۵ فرض کنیم ABC مثلثی دلخواه و AD نیمساز زاویه‌ی A باشد. دلایل هریک از نتایج زیر را بنویسید و نتیجه‌ی نهایی که در پایان آمده است را کامل کنید.



الف) $\hat{D}_۲ > \hat{A}_۱$، زیرا ..... .

ب) $\hat{D}_۲ > \hat{A}_۲$، زیرا ..... .

پ) $AC > DC$، زیرا ..... .

ت) با روندی مشابه سه قسمت قبل نشان دهید: $AB > BD$

ث) حال نشان دهید $AB + AC > BC$

نتیجه: در هر مثلث، مجموع اندازه‌های هر دو ضلع از اندازه‌ی ..... ، ..... است.

۱۹۶ گزاره‌های زیر را اثبات یا رد کنید.

الف) در هر مثلث، اندازه‌ی بزرگ‌ترین زاویه، از چهار برابر اندازه‌ی کوچک‌ترین زاویه، کوچک‌تر است.

ب) در هر مثلث، هر ارتفاع از هر کدام از سه ضلع مثلث کوچک‌تر است.

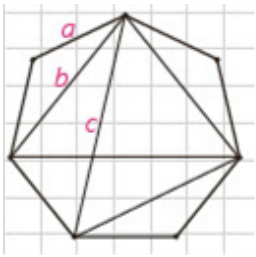
۱۹۷ با برهان خلف ثابت کنید اگر در مثلث ABC، $AB \neq AC$ آن‌گاه $\hat{B} \neq \hat{C}$.

۱۹۸ آیا حکم‌های کلی زیر درست است؟ چرا؟

الف) برای هر دو مجموعه‌ی A و B، یا $A \subseteq B$ و یا $B \subseteq A$

ب) هر دو مثلث که مساحت‌های برابر داشته باشند، هم‌نهشت‌اند.

۱۹۹ در شکل مقابل نقطه‌ها، رأس‌های یک هفت‌ضلعی منتظم به طول ضلع a می‌باشند. فاصله‌ی هر رأس از رأس بعدی برابر a و از دومین رأس بعد از آن برابر b و از سومین رأس بعد از آن برابر c است. آیا حکم کلی زیر درست است؟ «با وصل کردن هر سه رأس از این شکل یک مثلث متساوی‌الساقین، به دست می‌آید».



۲۰۰ به قسمت (الف) پاسخ دهید و از نتیجه‌ی آن در قسمت (ب) استفاده کنید.

الف) وتری مانند AB از یک دایره را درنظر بگیرید. وضعیت عمودمنصف AB و مرکز دایره نسبت به هم چگونه‌اند؟ چرا؟

ب) آیا می‌دانستید که در زمین فوتبال نقطه‌ی پنالتی مرکز دایره‌ای است که قسمتی از قوس آن در جلوی محوطه‌ی جریمه کشیده شده است؟

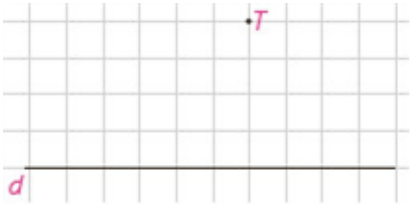
یک داور فوتبال لحظه‌ای که اعلام پنالتی می‌کند، متوجه می‌شود که نقطه‌ی پنالتی مشخص نیست. اگر او وسایل لازم برای کشیدن خط راست و کمان دایره را داشته باشد، چگونه می‌تواند با استفاده از قوس جلوی محوطه‌ی هجده قدم، نقطه‌ی پنالتی را مشخص کند.

۲۰۱ دو ضلع یک زاویه را درنظر بگیرید.

الف) نقطه‌ای بیابید که فاصله‌ی آن از هر ضلع زاویه‌ی موردنظر ۲ واحد باشد.

ب) با استفاده از نقطه‌ای که در قسمت (الف) یافته‌اید نیمساز زاویه را رسم کنید.

۲۰۲ خط d و نقطه T مانند شکل مقابل داده شده‌اند.



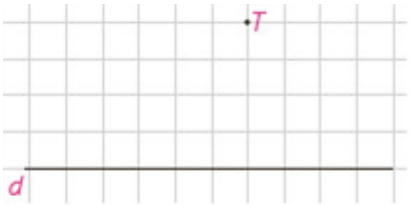
می‌خواهیم خطی رسم کنیم که از نقطه‌ی T بگذرد و با خط d موازی باشد.

۱- خط d_1 را به گونه‌ای رسم کنید که از نقطه‌ی T بگذرد و بر خط d عمود باشد.

۲- خط d_2 را به گونه‌ای رسم کنید که از نقطه‌ی T بگذرد و بر خط d_1 عمود باشد.

۳- خط d_2 نسبت به خط d چه وضعیتی دارد؟ چرا؟ (خط d_1 را مورّب درنظر بگیرید.)

۲۰۳ خط d و نقطه‌ی T را که غیر واقع بر آن است، مانند شکل مقابل درنظر بگیرید.



می‌خواهیم خطی بکشیم که از T بگذرد و برخط d عمود باشد.

۱- به کمک پرگار چگونه می‌توانید نقاط A و B را روی خط d به گونه‌ای بیابید که از نقطه‌ی T به یک فاصله باشند.

۲- عمودمنصف پاره‌خط AB را رسم کنید.

۳- آیا عمودمنصف پاره‌خط AB از نقطه‌ی T می‌گذرد؟ چرا؟

عمودمنصف پاره‌خط AB خطی است که بر خط d ..... و از نقطه‌ی ..... .

۲۰۴ خط d و نقطه‌ی M را روی آن، مانند شکل مقابل درنظر بگیرید. می‌خواهیم خطی بکشیم که از M بگذرد و بر d عمود باشد.

۱- به کمک پرگار چگونه می‌توانید نقاط A و B را روی خط d بیابید؛ به گونه‌ای که M وسط پاره‌خط AB باشد.

۲- عمودمنصف پاره‌خط AB را رسم کنید.

۳- عمودمنصف پاره‌خط AB خطی است که بر خط d ..... و از نقطه‌ی ..... .

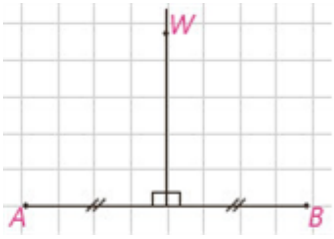
۲۰۵ مراحل رسم عمودمنصف یک پاره‌خط را توضیح دهید.

۲۰۶ دو نقطه را در یک صفحه درنظر بگیرید و خطی بکشید که ازآن دو نقطه عبور کند. چند خط متمایز می‌توانید رسم کنید که از هر دو نقطه‌ی موردنظر بگذرد؟

تلفن تماس: ۰۲۶۳۳۴۰۸۹۴۴

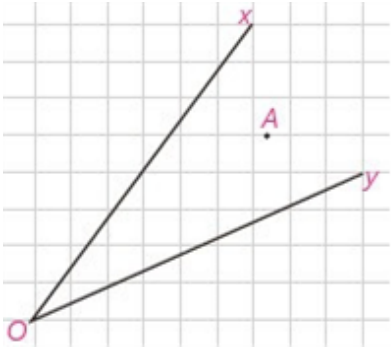
۲۰۷ پاره‌خط AB و نقطه‌ی W را به گونه‌ای درنظر بگیرید که نقطه‌ی W از A و B به یک فاصله باشد (یعنی WA = WB) نشان دهید W روی عمودمنصف AB قرار دارد.

۲۰۸ پاره‌خط AB و عمودمنصف آن‌را مانند شکل مقابل درنظر بگیرید و فرض کنید W نقطه‌ای روی عمودمنصف AB باشد. نشان دهید نقطه‌ی W از دو سر پاره‌خط AB به یک فاصله است.

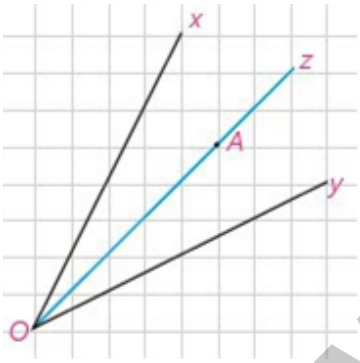


۲۰۹ روش رسم نیمساز یک زاویه را توضیح دهید.

۲۱۰ زاویه‌ی xOy و نقطه‌ی A را چنان درنظر می‌گیریم که فاصله‌ی نقطه‌ی A از نیم‌خط های Oy و Ox با هم برابر باشد. نشان دهید که نقطه‌ی A روی نیمساز زاویه‌ی xOy قرار دارد.
(راهنمایی: پاره‌خط OA، و دو عمود از نقطه‌ی A بر خطوط Ox و Oy رسم کنید و نشان دهید پاره‌خط OA همان نیمساز xOy است.)



۲۱۱ زاویه‌ی xOy و نیم‌خط Oz را نیمساز آن درنظر بگیرید. فرض کنید نقطه‌ی A نقطه‌ای دلخواه روی Oz باشد. ثابت کنید که فاصله‌ی نقطه‌ی A از دو ضلع زاویه‌ی xOy یکسان است. (یعنی اگر از نقطه‌ی A عمودهایی بر نیم‌خط های Ox، Oy رسم کنیم طول آن‌ها با هم برابر است.)

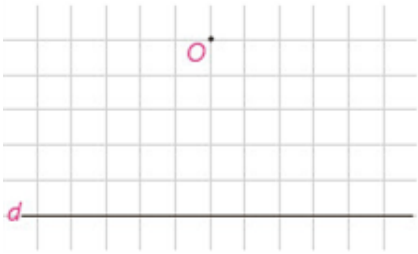


۲۱۲ نقاط A و B به فاصله‌ی ۷ سانتی‌متر از هم قرار دارند. نقطه‌ای پیدا کنید که فاصله‌اش از نقطه‌ی A برابر ..... و از نقطه‌ی B برابر ..... باشد.
جاهای خالی را به گونه‌ای کامل کنید که مسئله‌ی زیر:
الف) دو جواب داشته باشد.
ب) یک جواب داشته باشد.
پ) جواب نداشته باشد.

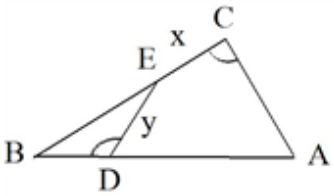
۲۱۳ توضیح دهید که چگونه می‌توان مثلثی به طول اضلاع ۴ و ۵ و ۶ واحد رسم کرد.

تلفن تماس: ۰۲۶۳۳۴۰۸۹۴۴

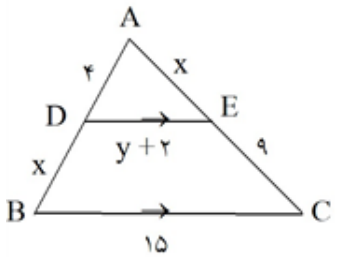
۲۱۴ نقطه‌ای مانند O را در صفحه در نظر بگیرید و نقاطی را مشخص کنید که فاصله‌ی یکسانی از نقطه‌ی O دارند. (مثلاً همه‌ی نقاطی که فاصله‌شان از نقطه‌ی O برابر ۲ سانتی‌متر است.)



۲۱۵ در شکل زیر $B\hat{D}E = A\hat{C}B$ اگر $BE = AC = ۱۲$ و $BD = ۱۰$ و $AB = ۴۰$ مجهولات را بیابید.

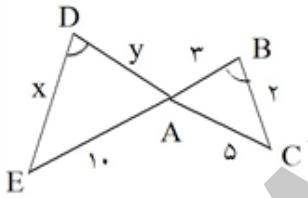


۲۱۶ در شکل زیر مقادیر مجهول رابیابید.

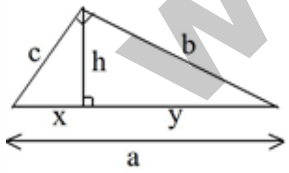


۲۱۷ اگر $\frac{a}{۵} = \frac{b}{۷} = \frac{c}{۱۳}$، آن‌گاه حاصل عبارت $\frac{۷a - ۴b}{۲c}$ را به دست آورید.

۲۱۸ در شکل مقابل $\hat{B}=\hat{D}$ است. مقدار x و y را حساب کنید.



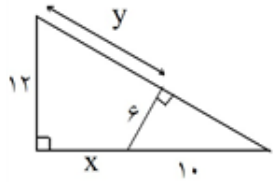
۲۱۹ با توجه به شکل مقابل، جاهای خالی را کامل کنید.



$\ldots = x \cdot a$

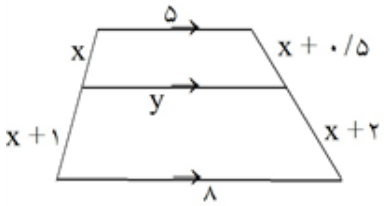
$h^{۲} = \ldots$

۲۲۰ در مثلث قائم‌الزوایه روبه‌رو مقادیر x و y را به دست آورید.



تلفن تماس: ۰۲۶۳۳۴۰۸۹۴۴

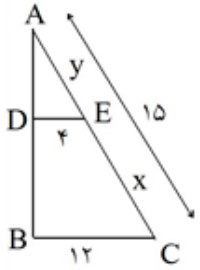
۲۲۱ در شکل مقابل، x و y را محاسبه کنید.



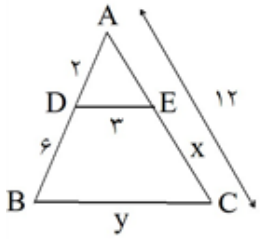
۲۲۲ با رسم شکل ثابت کنید فاصله هر نقطه روی نیمساز یک زاویه از دو ضلع آن زاویه برابر است.

۲۲۳ اگر پاره‌خط PQ = ۷ باشد، آن‌گاه با رسم شکل مناسب به سؤالات زیر پاسخ دهید.
الف) مکان هندسی نقاطی را مشخص کنید که از پاره‌خط PQ به فاصله ۲ واحد باشد.
ب) چند نقطه وجود دارد که از P به فاصله ۴ و از Q به فاصله ۵ واحد باشد؟

۲۲۴ مقادیر x و y را بیابید.
الف)

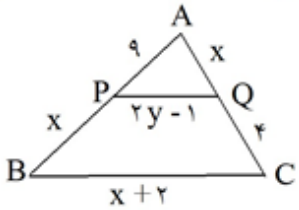


ب)

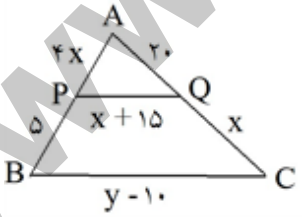


۲۲۵ در شکل‌های زیر، PQ با BC موازی است، مقادیر x و y را محاسبه کنید.

الف)



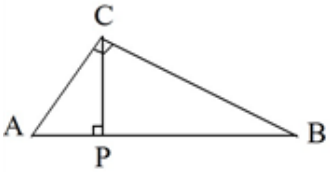
ب)



۲۲۶ از نقطه‌ی A خارج از خط L خطی بر آن عمود کنید. (با خط کش و پرگار)

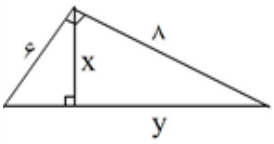
تلفن تماس: ۰۲۶۳۳۴۰۸۹۴۴

۲۲۷ الف) مطابق شکل، مثلث ABC در رأس C قائم‌الزاویه است و CP بر AB عمود است، ثابت کنید:



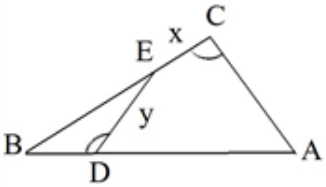
$$(PC^{۲} = AP \times BP)$$

ب) در شکل زیر مقادیر مجهول را محاسبه کنید.

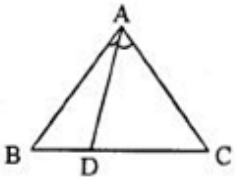


۲۲۸ اگر داشته باشیم $\frac{x}{۳} = \frac{y}{۴} = \frac{z}{۵} = \frac{۲}{۷}$ آن‌گاه $x + y + z$ چند است؟

۲۲۹ در شکل زیر $B\hat{D}E = A\hat{C}B$ اگر $BE = AC = ۱۲$ و $BD = ۱۰$ و $AB = ۴۰$ مجهولات را بیابید.



۲۳۰ مثلث ABC متساوی‌الاضلاع است. اگر $BD < DC$، ثابت کنید $B\hat{A}D < D\hat{A}C$



۲۳۱ قضیه‌ی زیر را به صورت قضیه شرطی بنویسید در صورتی که عکس آن یک قضیه نباشد یک مثال نقض بیاورید.
هر مستطیلی یک متوازی‌الاضلاع است.

۲۳۲ برای رد حدس زیر، مثال نقض ارائه دهید.
اگر دو مثلث هم‌مساحت باشند، آن‌گاه هم‌نهشت هستند.

۲۳۳ برای رد حدس زیر، مثال نقض ارائه دهید.
اگر دو زاویه مکمل یکدیگر باشند، آن‌گاه هر دو زاویه قائمه هستند.

۲۳۴ زاویه‌ی XOY داده شده است. با استفاده از خط کش و پرگار روی نیم‌خط O'X' زاویه‌ای به رأس O' و مساوی زاویه‌ی XOY رسم کنید.

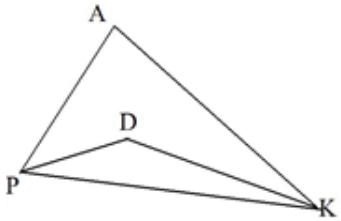
۲۳۵ سه ضلع مثلثی ۷ ، ۱۲ و ۱۶ سانتی‌مترند، اندازه‌ی پاره‌خط هایی که نیمساز درونی زاویه‌ی کوچک‌تر مثلث بر ضلع مقابل آن پدید می‌آورد را تعیین کنید.

۲۳۶ با استفاده از خطکش و پرگار خطی موازی یک خط از یک نقطه‌ی خارج آن خط رسم کنید. (مراحل رسم را توضیح دهید.)

تلفن تماس: ۰۲۶۳۳۴۰۸۹۴۴

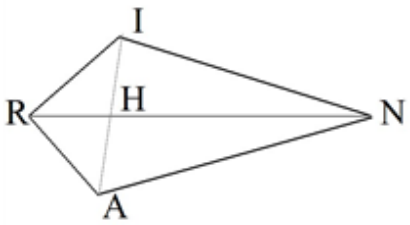
۲۳۷ قضیه: ثابت کنید در هر مثلث نیم‌ساز هر زاویه‌ی داخلی، ضلع روبه‌رو آن زاویه را به نسبت دو ضلع زاویه قطع می‌کند.

۲۳۸ نقطه‌ی D را به دلخواه در درون مثلث PAK انتخاب می‌کنیم. ثابت کنید زاویه PDK از زاویه PAK بزرگ‌تر است.



۲۳۹ ثابت کنید در هر مثلث، هر میانه از نصف مجموع دو ضلع مجاور آن کوچک‌تر است.

۲۴۰ در چهارضلعی IRAN، دو قطر RN و IA یک‌دیگر را در H قطع می‌کنند. با استفاده از برهان خلف نشان دهید اگر RA=RI و NI≠NA آن‌گاه RN نیمساز زاویه‌ی IRA نیست.



۲۴۱ قضیه: با استفاده از برهان خلف ثابت کنید که اگر در مثلثی دو زاویه نابرابر باشند، ضلع روبه‌رو به زاویه‌ی بزرگ‌تر، بزرگ‌تر از ضلع روبه‌رو به زاویه‌ی کوچک‌تر است.

۲۴۲ خط d و نقطه‌ی A غیر واقع بر آن ، داده شده‌اند، نقطه‌ای روی خط d تعیین کنید که از نقطه‌ی A به فاصله‌ی معلوم R باشد. با توجه به اندازه‌ی R روی تعداد جواب مساله بحث کنید.

۲۴۳ قضیه: ثابت کنید در هر مثلث، مجموع طول‌های هر دو ضلع از طول ضلع سوم بزرگ‌تر است.

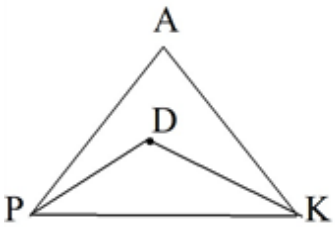
۲۴۴ مراحل رسم نیمساز یک زاویه را به کمک خط کش و پرگار توضیح دهید.

۲۴۵ برای عبارت «نقطه‌ی همرسی عمود منصف‌های اضلاع هرمثلث در خارج مثلث قرارمی‌گیرد» مثال نقض بیاورید و با رسم شکل نشان دهید.

۲۴۶ برای رد حدس کلی زیر مثال نقض ارائه کنید.
هر زاویه‌ی خارجی یک چند ضلعی از هر زاویه‌ی داخلی آن بزرگتر است.

۲۴۷ عکس قضیه‌ی شرطی زیر را بنویسید.
مثلثی که دو ضلع برابر داشته باشد، دارای دو زاویه‌ی برابر است.

۲۴۸ نقطه‌ی D را به دلخواه درون مثلث PAK انتخاب می‌کنیم.
ثابت کنید: $\widehat{PDK} > \widehat{PAK}$



تلفن تماس: ۰۲۶۳۳۴۰۸۹۴۴

۲۴۹ مثال نقض را تعریف کنید. (با ذکر مثال)

۲۵۰ قضیه: ثابت کنید عمود منصف‌های ضلع‌های هر مثلث همرسند.

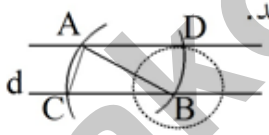
۲۵۱ سه نقطه‌ی A و B و C غیرواقع بر یک راستا می‌باشند، نقطه‌ای تعیین کنید که از این سه نقطه به یک فاصله باشند.

۲۵۲ خط d و نقطه‌ی A غیر واقع بر آن، داده شده‌اند، نقطه‌ای روی خط d تعیین کنید که از نقطه‌ی A به فاصله‌ی معلوم L باشد. (در تعداد جواب‌ها بحث کنید).

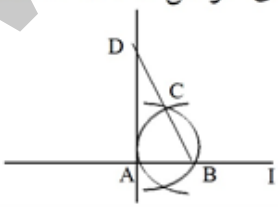
۲۵۳ زاویه‌ی xoy داده شده است روی نیم‌خط o'x' زاویه‌ای به راس O' و مساوی زاویه‌ی xoy رسم کنید.

۲۵۴ مربعی رسم کنید که پاره‌خط مفروض DE قطر آن باشد.

۲۵۵ خط d و نقطه‌ی A خارج آن، داده شده‌اند. از نقطه‌ی A خطی به موازات خط d رسم کنید.
ابوالوفاء بوزجانی مسأله را چنین حل می‌کند.
نقطه‌ی دلخواه B را روی خط d اختیار می‌کنیم و دهانه‌ی پرگار را به اندازه‌ی پاره‌خط AB می‌گشاییم. به مرکز B و به شعاع BA یک دایره رسم می‌کنیم تا خط d را در نقطه‌ی C قطع کند، آنگاه به مرکز A و با همان شعاع قبلی دایره‌ی دیگری رسم می‌نماییم. سپس به مرکز B و به شعاعی برابر پاره‌خط AC دایره‌ی دیگری رسم می‌کنیم و نقطه‌ی برخورد دو دایره به مرکزهای B و A را D می‌نامیم. از A به D وصل می‌کنیم. AD خطی است که از نقطه‌ی A به موازات خط d رسم می‌شود. دلیل درستی روش ابوالوفاء را بنویسید.



۲۵۶ ابوالوفاء بوزجانی (۳۸۸ - ۳۲۸ هـ.ق) ریاضیدان ایرانی برای رسم خط عمود از نقطه‌ی A واقع بر خط مفروض I روش زیر را به کار برده است: نقطه‌ی دلخواه B را روی خط I اختیار می‌کنیم. دهانه‌ی پرگار را به اندازه‌ی پاره‌خط AB باز می‌کنیم دو دایره به مرکزهای A و B و به شعاع AB رسم می‌کنیم یک نقطه‌ی برخورد این دو دایره را C می‌نامیم. از B به C وصل می‌کنیم و پاره‌خط BC را از طرف نقطه‌ی C به اندازه‌ی خودش تا نقطه D امتداد می‌دهیم. از D به A وصل می‌کنیم. خط AD در نقطه‌ی A بر خط I عمود است.
دلیل درستی روش ابوالوفاء را بنویسید.

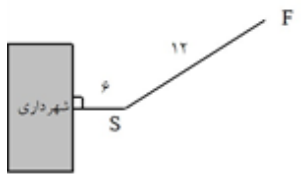


۲۵۷ از مثلث ABC، اندازه‌ی ضلعهای $AB = c$, $AC = b$ و طول ارتفاع $AH = h_a$ معلوم است. مثلث را رسم کنید

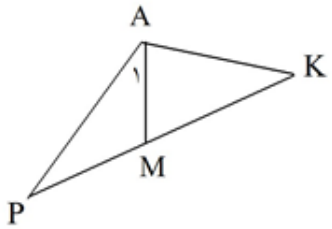
۲۵۸ دو نقطه‌ی A و B و خط d در یک صفحه واقعند. نقطه‌ای روی خط d بیابید، که از دو نقطه‌ی A و B به یک فاصله باشد. آیا مسأله همواره جواب دارد؟

تلفن تماس: ۰۲۶۳۳۴۰۸۹۴۴

۲۵۹ نمودار مقابل محل قرار گرفتن ساختمان شهرداری، مجسمه‌ی S و فواره‌ی F را نشان می‌دهد. می‌خواهیم میله‌ی پرچم را در محلی نصب کنیم که از مجسمه و فواره به یک فاصله باشد و از مقابل ساختمان شهرداری به فاصله‌ی ۹ متر باشد. مکان هندسی محل نصب میله‌ی پرچم را تعیین کنید.



۲۶۰ در مثلث PAK ، نقطه‌ی M روی ضلع PK قرار دارد. ثابت کنید اگر $AM = AK$ آنگاه $AP > AK$.



۲۶۱ با استفاده از برهان خلف، مسئله‌ی زیر را حل کنید.
عمود منصف هر پاره‌خط یکتاست.

۲۶۲ با استفاده از برهان خلف، مسئله‌ی زیر را حل کنید.
در هر مثلث عمودمنصف‌های هر دو ضلع متقاطعند.

۲۶۳ با استفاده از برهان خلف، مسئله‌ی زیر را حل کنید.
در هر مثلث هر دو ارتفاع متقاطعند.

۲۶۴ با استفاده از برهان خلف، مسئله‌ی زیر را حل کنید.
در هر مثلث هر دو میانه متقاطعند.

۲۶۵ با استفاده از برهان خلف، مسئله‌ی زیر را حل کنید.
در هر مثلث هر دو نیمساز زاویه‌های داخلی متقاطعند.

۲۶۶ با استفاده از برهان خلف، مسئله‌ی زیر را حل کنید.
در دو مثلث ABC و A'B'C'، اگر $AB = A'B'$ و $AC = A'C'$ و $\hat{A} \neq \hat{A'}$، ثابت کنید $BC \neq B'C'$

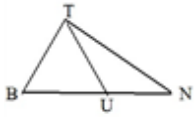
۲۶۷ با استفاده از برهان خلف، مسئله‌ی زیر را حل کنید.
در چهارضلعی MNOP ، دو قطر MO و NP یکدیگر را در R قطع می‌کنند.
نشان دهید اگر $MN = MP$ و $OP \neq ON$ ، آنگاه OM بر NP عمود نیست.

۲۶۸ با استفاده از برهان خلف، مسئله‌ی زیر را حل کنید.
در چهارضلعی MNOP، دو قطر MO و NP یکدیگر را در R قطع می‌کنند.
نشان دهید اگر $MP = MN$ و $ON \neq OP$، آنگاه MO نیمساز زاویه‌ی PMN نیست.

تلفن تماس: ۰۲۶۳۳۴۰۸۹۴۴

۲۶۹ با استفاده از برهان خلف، مسئله‌ی زیر را حل کنید.
اگر a ، b و c سه خط راست باشند که $a \parallel b$, $c \parallel b$ آنگاه $a \parallel c$.

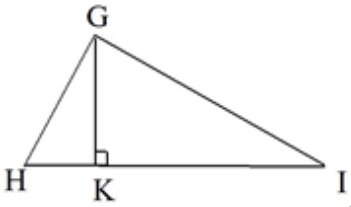
۲۷۰ در شکل مقابل:
فرض کنیم $BT = BU$
ثابت کنید $\widehat{BTN} > \widehat{TUB}$

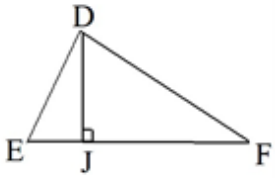


۲۷۱ قضیه‌ی زیر را به صورت قضیه‌ی شرطی بنویسید و سپس تعیین کنید عکس آن قضیه، شرطی است یا نه. در صورتی که یک قضیه نباشد، یک مثال نقض بیاورید.
هر کس در شیراز زندگی می‌کند، در استان فارس است.

۲۷۲ قضیه‌ی زیر را به صورت قضیه‌ی شرطی بنویسید و سپس تعیین کنید عکس آن قضیه، شرطی است یا نه در صورتی که یک قضیه نباشد، یک مثال نقض بیاورید.
هر دو مثلث همنهشت دارای مساحتهای برابر هستند.

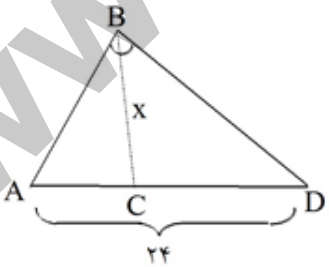
۲۷۳ در شکل زیر دو مثلث DEF و GHI متشابه‌اند و $GK = \frac{۳}{۲}DJ$. اگر $HI = ۲۰$ طول EF را حساب کنید.

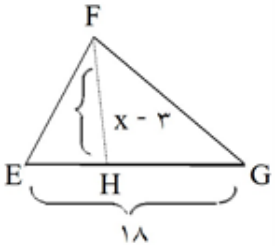




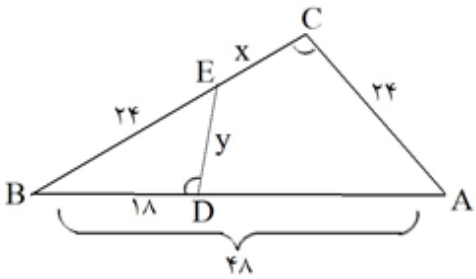
۲۷۴ اگر دو مثلث متشابه باشند، ثابت کنید نسبت میانه‌های نظیر در آن‌ها برابر است با نسبت تشابه دو مثلث.

۲۷۵ در شکل زیر دو مثلث متشابه‌اند و BC نیمساز زاویه‌ی B و FH نیمساز زاویه‌ی نظیر B یعنی F است. با استفاده از مقادیر داده شده، x را حساب کنید.

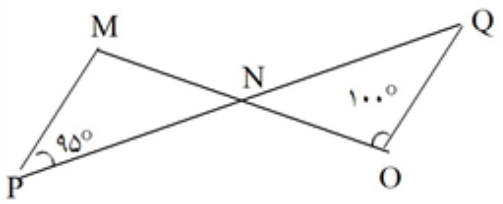




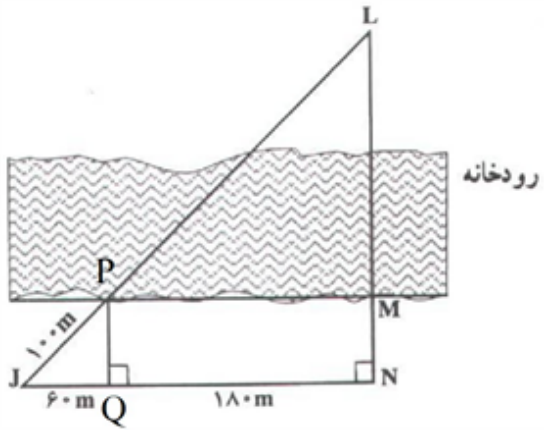
۲۷۶ در شکل مقابل، $\hat{C} = B\hat{D}E$. طول x و y را پیدا کنید.



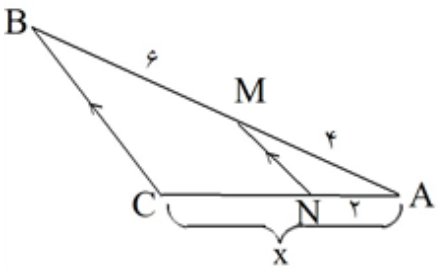
۲۷۷ آیا دو مثلث زیر با هم متشابه‌اند؟



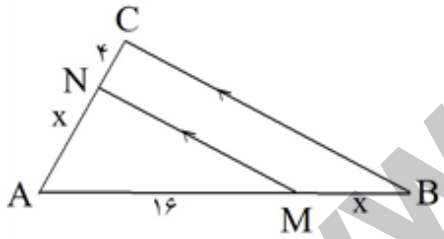
۲۷۸ دهکده‌ای در یک سوی رودخانه و دکل‌های سراسری انتقال نیرو در سوی دیگر رودخانه واقع است. با توجه به فاصله‌های داده شده در شکل، طول سیم لازم برای برق رسانی به دهکده یعنی JL را محاسبه کنید.



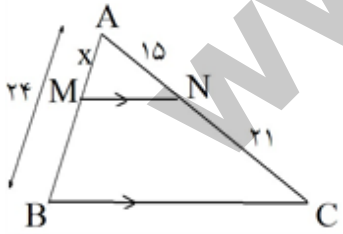
۲۷۹ در شکل مقابل طول مجهول x را محاسبه کنید.



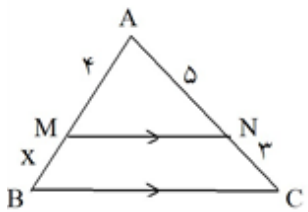
۲۸۰ در شکل مقابل طول مجهول x را محاسبه کنید.



۲۸۱ در شکل مقابل طول مجهول x را محاسبه کنید.



۲۸۲ در شکل مقابل طول مجهول x را محاسبه کنید.



تلفن تماس: ۰۲۶۳۳۴۰۸۹۴۴

۲۸۳ اگر در مثلث ABC شکل زیر، نقطه‌های M و N طوری روی ضلع‌های AB و AC انتخاب شوند که $\frac{AM}{MB} = \frac{AN}{NC}$ ، آن‌گاه می‌توان نتیجه گرفت که پاره خط MN موازی ضلع BC است. برای اثبات این نتیجه از نقطه‌ی B خطی به موازات MN رسم کنید تا AC را در D قطع کند. سپس با استفاده از قضیه‌ی تالس نشان دهید D و C بر هم منطبقند.

۲۸۴ مقدار x را بدست آورید:

$$\frac{x}{۱۸۰ - x} = \frac{۳}{۷}$$

۲۸۵ مقدار x را بدست آورید:

$$\frac{۴}{۵} = \frac{۲۴}{x}$$

۲۸۶ جالی خالی را پر کنید.

اگر $\frac{a}{۲} = \frac{b}{۳} = \frac{c}{۴} = \frac{d}{۵}$ ، آن گاه $\frac{a+b+c+d}{\square} = \frac{a}{\square}$ ؛

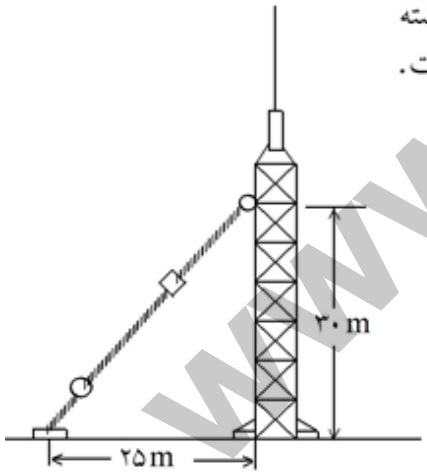
۲۸۷ جالی خالی را پر کنید.

اگر $\frac{x}{y} = \frac{۱}{۲}$ ، آن‌گاه $\frac{x+۱}{y+۲} = \square$ ؛

۲۸۸ در عبارت زیر از کدام‌یک از ویژگی‌های تناسب استفاده شده است؟

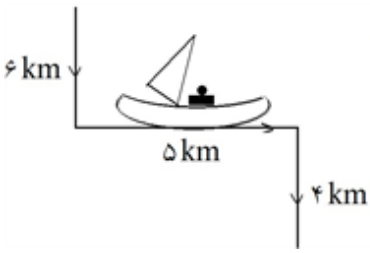
اگر $\frac{e}{v} = \frac{۴}{۹}$ ، آن‌گاه $\frac{۹}{v} = \frac{۴}{e}$ ؛

۲۸۹ یک آنتن تلویزیونی از ارتفاع ۳۰ متری توسط یک سیم به‌طور قائم نگه داشته شده است. این سیم به فاصله‌ی ۲۵ متر از پایه‌ی آنتن به زمین وصل شده است. طول این سیم چند متر است؟



۲۹۰ نسبت طول ضلع‌های زاویه قائمه در مثلث قائم‌الزاویه‌ای ۲ به ۳ است. اگر مساحت مثلث ۲۷ باشد، طول وتر آن چقدر است؟

۲۹۱ یک قایق از نقطه‌ی شروع حرکت، ۶ کیلومتر به سمت جنوب، ۵ کیلومتر به سمت شرق و مجدداً ۴ کیلومتر به سمت جنوب پیموده است. این قایق چند کیلومتر از نقطه‌ی شروع حرکت فاصله دارد؟



تلفن تماس: ۰۲۶۳۳۴۰۸۹۴۴

۲۹۲ ثابت کنید اگر قطرهای یک چهار ضلعی بر هم عمود باشند، مساحت چهار ضلعی برابر نصف حاصل ضرب اندازه‌ی قطرها خواهد بود.

۲۹۳ ثابت کنید که اگر در یک چهار ضلعی هر دو زاویه‌ی مجاور به یک ضلع، مکمل یکدیگر باشند، چهار ضلعی متوازی‌الاضلاع است.

۲۹۴ ثابت کنید که اگر در یک چهار ضلعی زاویه‌های مقابل دو به دو متساوی باشند، چهارضلعی، متوازی‌الاضلاع است.

۲۹۵ ثابت کنید اگر در یک چهارضلعی دو ضلع مقابل متوازی و متساوی باشند، چهارضلعی، متوازی‌الاضلاع است.

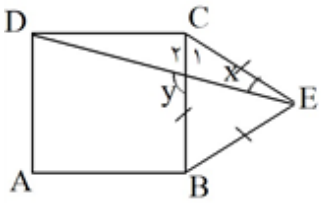
۲۹۶ هر یک از چندضلعی‌های زیر چند قطر دارند؟

۱) مثلث ۲) شش ضلعی ۳) هشت ضلعی

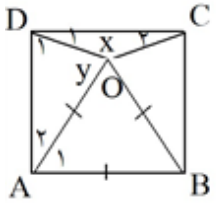
۲۹۷ نشان دهید که در هر مستطیل، قطرها با هم مساوی هستند و یکدیگر را نصف می‌کنند.

۲۹۸ با استفاده از استدلال استنتاجی، نشان دهید که در هر متوازی‌الاضلاع، قطرها یکدیگر را نصف می‌کنند.

۲۹۹ شکل زیر ABCD یک مربع است. اندازه‌ی x و y را به‌دست آورید.



۳۰۰ در شکل مقابل، ABCD یک مربع است. اندازه‌ی x و y را به‌دست آورید.



تلفن تماس: ۰۲۶۳۳۴۰۸۹۴۴

۱

$$\frac{x-۱}{۲}=\frac{y+۵}{۳}=\frac{z-۲}{۴}=t \Rightarrow \begin{cases} \frac{x-۱}{۲}=t \Rightarrow x=۲t+۱ \\ \frac{y+۵}{۳}=t \Rightarrow y=۳t-۵ \\ \frac{z-۲}{۴}=t \Rightarrow z=۴t+۲ \end{cases}$$

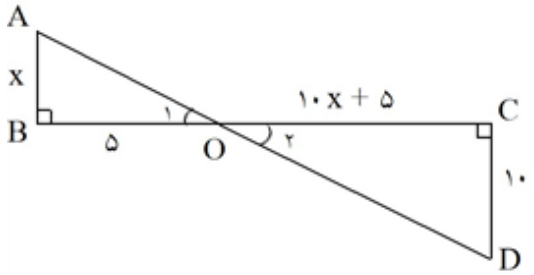
$$\frac{x+y+۴}{x+y+z+۲}=\frac{۲t+۱+۳t-۵+۴}{۲t+۱+۳t-۵+۴t+۲+۲}=\frac{۵t}{۹t}=\frac{۵}{۹}$$

۲ این دو مثلث بنا به دو زاویه برابر متشابه هستند.

$$\begin{cases} \hat{O}_۱=\hat{O}_۲ \\ \hat{A}=\hat{D} \end{cases} \Rightarrow \frac{AB}{CD}=\frac{BO}{OC} \Rightarrow \frac{x}{۸}=\frac{x+۲}{۴x-۴} \Rightarrow \frac{x}{۲}=\frac{x+۲}{x-۱} \Rightarrow x^۲-x=۲x+۴$$

$$\Rightarrow x^۲-۳x-۴=۰ \Rightarrow (x-۴)(x+۱)=۰ \Rightarrow \begin{cases} x=۴ \text{ ق ق} \\ x=-۱ \text{ غ ق ق} \end{cases}$$

۳ این دو مثلث بنا به دو زاویه برابر متشابه هستند بنابراین داریم:



$$\begin{cases} \hat{O}_۱=\hat{O}_۲ \\ \hat{B}=\hat{C}=۹۰^\circ \end{cases} \Rightarrow \frac{AB}{CD}=\frac{OB}{OC}$$

$$\Rightarrow \frac{x}{۱۰}=\frac{۵}{۱۰x+۵} \Rightarrow ۱۰x^۲+۵x=۵۰$$

$$\Rightarrow ۱۰x^۲+۵x-۵۰=۰ \xrightarrow{\div ۵} ۲x^۲+x-۱۰=۰ \Rightarrow \Delta=۱-۴(۲)(-۱۰)=۸۱$$

$$\Rightarrow x=\frac{-۱\pm\sqrt{۸۱}}{۴} \Rightarrow \begin{cases} x=\frac{-۱۰}{۴}=-۲/۵ \text{ غ ق ق} \\ x=۲ \text{ ق ق} \end{cases}$$

تلفن تماس: ۰۲۶۳۳۴۰۸۹۴۴

۴ چون $BC \parallel DE$ است بنابراین طبق قضیه‌ی تالس داریم:

$$\frac{AB}{BD}=\frac{AC}{CE}\Rightarrow\frac{x+۲}{x+۴}=\frac{x+۵}{x+۸}\Rightarrow x^۲+۱۰x+۱۶=x^۲+۹x+۲۰\Rightarrow x=۴$$

$$\frac{AB}{AD}=\frac{BC}{DE}\Rightarrow\frac{۶}{۱۴}=\frac{y}{۲۴}\Rightarrow y=\frac{۶\times۲۴}{۱۴}\Rightarrow y=\frac{۷۲}{۷}$$

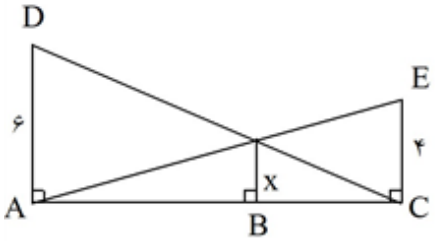
۵ چون $BC \parallel DE$ است بنابراین طبق قضیه تالس داریم:

$$\frac{AB}{BD}=\frac{AC}{CE}\Rightarrow\frac{x+۴}{x+۷}=\frac{x+۲}{x+۴}\Rightarrow \cancel{x^۲}+۸x+۱۶=\cancel{x^۲}+۹x+۱۴\Rightarrow x=۲$$

۶ چون $BC \parallel DE$ است، بنابراین طبق قضیه تالس داریم:

$$\frac{AB}{BD}=\frac{AC}{CE}\Rightarrow\frac{x+۵}{x+۱}=\frac{x+۳}{x}\Rightarrow \cancel{x^۲}+۴x+۳=\cancel{x^۲}+۵x\Rightarrow x=۳$$

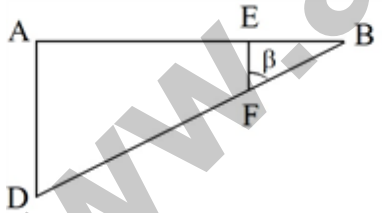
۷



$$\begin{cases}\frac{AB}{AC}=\frac{x}{۴}\\ \frac{BC}{AC}=\frac{x}{۶}\end{cases}\xrightarrow{\text{جمع می کنیم}}\frac{AB}{AC}+\frac{BC}{AC}=\frac{x}{۴}+\frac{x}{۶}$$

$$\Rightarrow\frac{\overbrace{AB+BC}^{AC}}{AC}=\frac{۶x+۴x}{۲۴}\Rightarrow ۱=\frac{۱۰x}{۲۴}\Rightarrow x=\frac{۲۴}{۱۰}\Rightarrow x=۲/۴$$

۸



$$\overset{\triangle}{ABD}: EF \parallel AD\Rightarrow\frac{BE}{AB}=\frac{EF}{AD}\Rightarrow\frac{۱}{۴}=\frac{EF}{۲}$$

$$\Rightarrow EF=\frac{۱}{۲}$$

$$\Delta BEF: tg\beta=\frac{۱}{\frac{۱}{۲}}=۲$$

$$\beta \text{ مکمل } \alpha\Rightarrow tg\alpha=-tg\beta=-۲$$

۹

$$\frac{S_{\overset{\triangle}{ADE}}}{S_{\overset{\triangle}{ABC}}}=\frac{AD\times AE}{AB\times AC}=\frac{۳\times۵}{۱۰\times۹}=\frac{۱}{۶}$$

تلفن تماس: ۰۲۶۳۳۴۰۸۹۴۴

۱۰

$$\begin{cases}\hat{A} \text{ مشترک} \\ \hat{B}_۱ = \hat{C}\end{cases} \xrightarrow{\text{بنا بر تشابه دو زاویه مساوی}} \overset{\triangle}{ABD} \sim \overset{\triangle}{ABC} \Rightarrow \frac{AB}{AC} = \frac{AD}{AB} = \frac{BD}{BC}$$

$$\Rightarrow \frac{۲k}{k+۹} = \frac{k}{۲k} \Rightarrow ۴k = k + ۹ \Rightarrow ۳k = ۹ \Rightarrow k = ۳$$

۱۱

$$\text{قائم الزاویه} : \overset{\triangle}{AHC} : AH^۲ = ۴ \times ۱۶ = ۶۴ \Rightarrow AH = ۸$$

$$\text{قائم الزاویه} : \overset{\triangle}{AHB} : x^۲ = ۸^۲ + ۶^۲ = ۶۴ + ۳۶ = ۱۰۰ \Rightarrow x = ۱۰$$

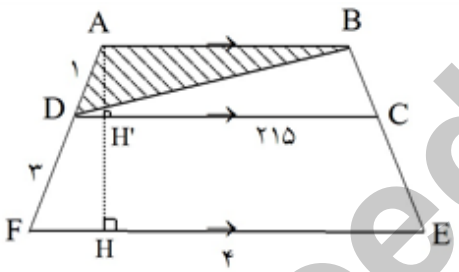
۱۲

$$\Delta ABC : AC^۲ = AB^۲ + BC^۲ \Rightarrow ۴۰۰ = AB^۲ + ۱۴۴ \Rightarrow AB^۲ = ۲۵۶ \Rightarrow AB = ۱۶$$

$\hat{C}$ روی نیمساز $E \Rightarrow EB = ED = ۶$

$$x = AE = AB - BE = ۱۶ - ۶ = ۱۰$$

۱۳



$$DC = \frac{AD \times EF + DF \times AB}{AF} \Rightarrow ۲/۵ = \frac{۱ \times ۴ + ۳AB}{۴} \Rightarrow ۳AB = ۱۰ - ۴ = ۶ \Rightarrow AB = ۲$$

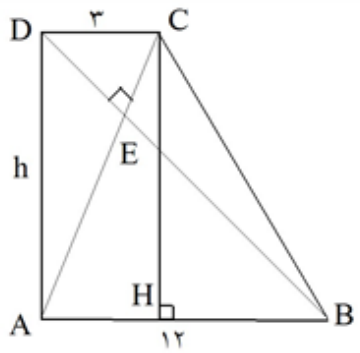
از A عمود AH را بر EF وارد می‌کنیم در این صورت:

$$\frac{AH'}{AH} = \frac{AD}{AF} = \frac{۱}{۴}$$

$$\frac{S_{\overset{\triangle}{ABD}}}{S_{ABEF}} = \frac{\frac{۱}{۲}AH' \times AB}{\frac{۱}{۲}(AB + EF) \times AH} = \frac{\cancel{\frac{۱}{۲}} \times ۲ \times AH'}{\cancel{\frac{۱}{۲}} \times ۶ \times AH} = \frac{۱}{۳} \times \frac{AH'}{AH} = \frac{۱}{۳} \times \frac{۱}{۴} = \frac{۱}{۱۲}$$

تلفن تماس: ۰۲۶۳۳۴۰۸۹۴۴

۱۴



$h^{۲} = DC \times AB \Rightarrow h^{۲} = ۳ \times ۱۲ = ۳۶ \Rightarrow h = ۶$

از C عمود CH را بر AB رسم می‌کنیم در این صورت:

$BH = AB - AH \xrightarrow{AH = DC = ۳} BH = ۱۲ - ۳ = ۹$

ΔBCH قائم الزاویه : $BC^{۲} = CH^{۲} + BH^{۲} = ۶^{۲} + ۹^{۲} = ۳۶ + ۸۱ = ۱۱۷$

$\Rightarrow BC = \sqrt{۱۱۷} = ۳\sqrt{۱۳}$

۱۵

$\frac{OK}{OP} = \frac{DC}{AB} \Rightarrow \frac{۳}{۶} = \frac{DC}{۱۲} \Rightarrow DC = ۶$

۱۶

$\frac{۱}{EF} = \frac{۱}{DC} + \frac{۱}{AB} \Rightarrow \frac{۱}{EF} = \frac{۱}{۴} + \frac{۱}{۱۲} = \frac{۴}{۱۲} = \frac{۱}{۳} \Rightarrow EF = ۳$

۱۷

$\overset{\triangle}{ADC} : EP = \frac{۱}{۲}DC \Rightarrow ۲ = \frac{۱}{۲}c \Rightarrow c = ۴$

$PK = \frac{۱}{۲}|a - c| \Rightarrow ۳ = \frac{۱}{۲}|a - ۴| \Rightarrow |a - ۴| = ۶ \Rightarrow a = ۱۰ \Rightarrow ac = ۴۰$

۱۸

A•

خط d و نقطه‌ی A را به صورت روبه‌رو درنظر بگیریم:

d _____

اگر فاصله‌ی نقطه‌ی A تا خط d را h درنظر بگیریم ۳ حالت وجود دارد:

۱) $R < h$: کمان رسم شده به مرکز A خط d را قطع نمی‌کند، بنابراین جواب ندارد.

۲) $R = h$: کمان رسم شده به مرکز A با خط d مماس است. بنابراین کمان با خط در یک نقطه مشترک‌اند.

۳) $R > h$: کمان رسم شده به مرکز A خط d را در دو نقطه قطع می‌کند.

تلفن تماس: ۰۲۶۳۳۴۰۸۹۴۴

۱۹ فرض: c وتر مثلث قائم‌الزاویه باشد و a و b اندازه‌ی دو ضلع زاویه قائمه

بنابراین:

$$c^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow 1 = \frac{a^2}{c^2} + \frac{b^2}{c^2} \Rightarrow 1 = \left(\frac{a}{c}\right)^2 + \left(\frac{b}{c}\right)^2 \quad (*)$$

از آن‌جا که چندضلعی‌های ساخته شده با هم متشابه هستند و نسبت مساحت‌ها با مجذور نسبت تشابه برابر است:

$S_1 \Rightarrow$ چندضلعی ساخته شده روی ضلع c

$S_2 \Rightarrow$ چندضلعی ساخته شده روی ضلع a

$S_3 \Rightarrow$ چندضلعی ساخته شده روی ضلع b

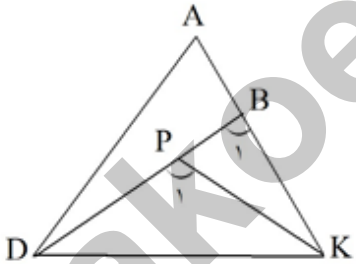
با توجه به مطالب بیان شده می‌توانیم بنویسیم:

$$\frac{S_2}{S_1} = \left(\frac{a}{c}\right)^2 , \quad \frac{S_3}{S_1} = \left(\frac{b}{c}\right)^2$$

با توجه به رابطه‌ی (۱) می‌توانیم بنویسیم:

$$1 = \frac{S_2}{S_1} + \frac{S_3}{S_1} \Rightarrow 1 = \frac{S_2 + S_3}{S_1} \Rightarrow S_1 = S_2 + S_3$$

۲۰ پاره‌خط DP را امتداد می‌دهیم تا ضلع AK را در نقطه‌ی B قطع کند. می‌دانیم اندازه‌ی زاویه‌ی خارجی هر مثلث از دو زاویه‌ی غیر مجاور آن بزرگتر است. داریم:



$$\left.\begin{array}{l} \overset{\triangle}{ADB} \text{ زاویه خارجی } \hat{B}_1 \Rightarrow \hat{B}_1 > A \\ \overset{\triangle}{BPK} \text{ زاویه خارجی } \hat{P}_1 \Rightarrow \hat{P}_1 > \hat{B}_1 \end{array}\right\} \Rightarrow \hat{P}_1 > \hat{A} \Rightarrow D\hat{P}K > D\hat{A}K$$

۲۱ الف)

تعداد ضلع‌ها	۳	۴	۵	۶	...	n
تعداد قطرهای رسم شده از یک راس	۰	۱	۲	۳		n - ۳

ب) با توجه به جدول برای هر رأس n - ۳ قطر وجود دارد. از طرفی کلا n رأس وجود دارد، پس تعداد قطرها برابر n(n - ۳) است و چون قطرها با این روش دو بار شمرده می‌شود، پس تعداد قطرها برابر است با: $\frac{n(n-3)}{2}$

۲۲ الف) دو خط متنافر: دو خط در فضا که نقطه‌ی اشتراکی نداشته و هیچ صفحه‌ای هم وجود نداشته باشد که شامل هر دو باشد را دو خط متنافر می‌گویند.
ب) سطح مقطع: شکلی را که از برخورد یک صفحه با یک جسم هندسی حاصل می‌شود، سطح مقطع گویند.
ج) فصل مشترک: خط راستی که اشتراک دو صفحه‌ی متقاطع است، فصل مشترک آن دو صفحه نامیده می‌شود.

۲۳ الف) گزینه‌ی ۱ ب) گزینه‌ی ۲

۲۴ ۱) با هم موازی‌اند ۲) موازی

۲۵ ۱) درست ۲) نادرست

۲۶ فرض کنیم ABC و A'B'C' دو مثلث متشابه که نسبت تشابه آن‌ها k است. هم‌چنین AH و A'H' ارتفاع‌های وارد بر BC و B'C' هستند. می‌دانیم نسبت بین ارتفاع‌ها در دو مثلث متشابه همان k می‌شود.

$$\frac{S_{ABC}}{S_{A'B'C'}} = \frac{\frac{AH.BC}{2}}{\frac{A'H'.B'C'}{2}} = \left(\frac{AH}{A'H'}\right).\left(\frac{BC}{B'C'}\right) = k.k = k^2$$

۲۷

$$\frac{x-1}{x+2} = \frac{x+1}{x+5} \Rightarrow (x-1)(x+5) = (x+1)(x+2) \Rightarrow \cancel{x^2} + 4x - 5 = \cancel{x^2} + 3x + 2$$

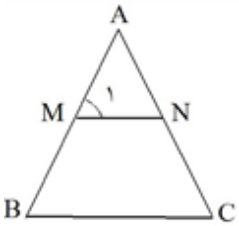
$$\Rightarrow 4x - 3x = 2 + 5 \Rightarrow x = 7$$

$$AM = 6 \ , \ BM = 9 \Rightarrow AB = 15$$

در ضمن بنابر قضیه‌ی اساسی تشابه دو مثلث AMN و ABC متشابه‌اند و از آن‌جا که نسبت محیط همان نسبت تشابه است:

$$\frac{\text{محیط } AMN}{\text{محیط } ABC} = \frac{6}{15} = \frac{2}{5}$$

۲۸



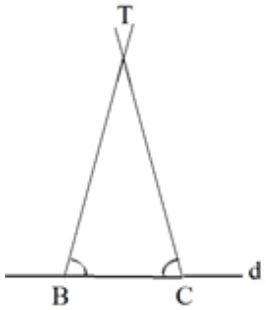
$$\frac{AM}{MB} = \frac{AN}{NC} \xrightarrow[\text{مخرج}]{\text{ترکیب در}} \frac{AM}{MB + AM} = \frac{AN}{AN + NC} = \frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} \quad (1)$$

دو مثلث AMN و ABC بنا به حالت متناسب بودن دو ضلع (۱) و برابری یک زاویه با هم متشابه هستند. بنابراین داریم $\hat{M} = \hat{B}$ با درنظر گرفتن خط AB به عنوان خط مورب و برابری $\hat{M}_1 = \hat{B}$ می‌توان نتیجه گرفت که $MN \parallel BC$ است.

۲۹ این طور نیست که a مساوی b باشد، یعنی a مساوی b نیست به عبارت دیگر $a > b$ یا $a < b$

۳۰ اگر در یک چهارضلعی قطرها یک‌دیگر را نصف کنند آن‌گاه آن چهارضلعی متوازی‌الاضلاع است.

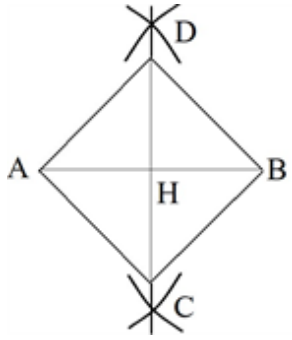
تلفن تماس: ۰۲۶۳۳۴۰۸۹۴۴



۳۱ خط d و نقطه‌ی T بیرون خط d مفروض است.
فرض خلف: از نقطه‌ی T دو عمود بر خط d رسم کرده‌ایم. بنابراین دو عمود خط d را در ۲ نقطه‌ی B و C قطع کرده‌اند. بنابراین یک مثلث داریم که مجموع زاویه‌های داخلی آن از ۱۸۰° بیش‌تر خواهد شد و این امکان وجود ندارد. بنابراین از نقطه‌ی T دو عمود نمی‌توان رسم کرد و فقط یک عمود می‌توانیم رسم کنیم.

۳۲
الف)
$$\begin{array}{l}\sqrt{۲} \in Q \\ -\sqrt{۲} \in Q\end{array} \Rightarrow \left(\sqrt{۲}\right) + \left(-\sqrt{۲}\right) = ۰ \notin Q$$

ب) عدد صفر معکوس ندارد، چون معکس صفر $\frac{۱}{۰}$ می‌شود که تعریف نشده است.



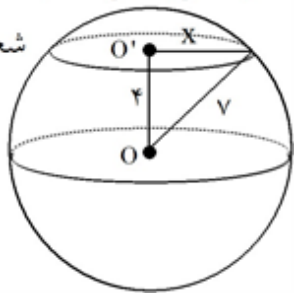
۳۳ در مربع قطرها عمودمنصف یک‌دیگر و برابر هستند. ابتدا پاره‌خط AB به طول ۴ سانتی‌متر را رسم کرده و سپس عمودمنصف آن‌را رسم می‌کنیم. محل برخورد عمودمنصف و AB را H می‌نامیم.
نقاط D و C را چنان اختیار می‌کنیم که $HD = HC = ۲$.
نقاط A، B، C و D را به صورت متوالی به هم وصل می‌کنیم.

۳۴ الف) گزینه‌ی ۲
ب) گزینه‌ی ۲

$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = ۱۸۰^\circ$$
$$\hat{A} + \frac{۱}{۲}\hat{A} + ۳۰^\circ = ۱۸۰^\circ \Rightarrow \frac{۳}{۲}\hat{A} = ۱۵۰^\circ \Rightarrow \hat{A} = \frac{۱۵۰^\circ \times ۲}{۳} = ۱۰۰^\circ$$

۳۵ ۱) درست ۲) نادرست

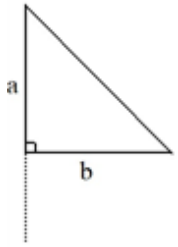
۳۶ شکل سطح مقطع، دایره است که شعاع آن از رابطه‌ی زیر محاسبه می‌شود:



شعاع دایره سطح مقطع $۷^۲ = ۴^۲ + x^۲ \Rightarrow x^۲ = ۴۹ - ۱۶ \Rightarrow x^۲ = ۳۳ \Rightarrow x = \sqrt{۳۳}$

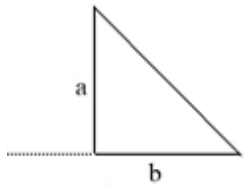
مساحت دایره $= \pi r^۲ \Rightarrow$ مساحت سطح مقطع $= \pi\left(\sqrt{۳۳}\right)^۲ = ۳۳\pi$

۳۷ حول ضلع a مخروطی حاصل می‌شود که ارتفاع آن a و شعاع قاعده b



$$V_1 = \frac{1}{3}a(\pi b^2)$$

و حول ضلع b مخروطی حاصل می‌شود که ارتفاع آن b و شعاع قاعده a



$$V_2 = \frac{1}{3}b(\pi a^2)$$

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{\cancel{\frac{1}{3}}\cancel{a}(\cancel{\pi}\cancel{b^2})}{\cancel{\frac{1}{3}}\cancel{b}(\cancel{\pi}\cancel{a^2})} = \frac{b}{a}$$

۳۸ الف) گزینه‌ی ۱ (کره) ب) گزینه‌ی ۲ (تصاویر)

۳۹ الف) درست ب) نادرست

۴۰ استوانه

۴۱ استوانه

۴۲ استوانه‌ی توخالی که از هر دو طرف باز است.

۴۳ نیم‌کره

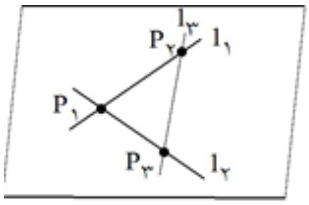
۴۴ صفحه‌ای دایره شکل تشکیل می‌شود که خطی که حول آن دوران داده‌ایم بر مرکز آن عمود است.

۴۵ فرض کنیم که صفحه‌های P و P' موازی‌اند و l با P موازی است.
فرض خلف: صفحه‌ی P' با خط l موازی نیست، بنابراین خط l، صفحه‌ی P' را قطع می‌کند، چون «اگر خطی یکی از صفحات موازی را قطع کند دیگری را نیز قطع می‌کند»، خط l صفحه‌ی P را نیز باید قطع کند که خلاف فرض اولیه است. پس l، P' را قطع نکرده و با آن موازی است.

۴۶ فرض خلف: فرض می‌کنیم که از نقطه‌ی A دو صفحه‌ی P و P' وجود دارد که بر l عمود است.
P بر l عمود است، تمام خطوط که از محل تلاقی P و l می‌گذرد نیز بر e عمود است و فقط یک خط در P وجود دارد که از A عبور کرده و بر l عمود می‌شود که آن‌را l_1 می‌نامیم. از عمود بودن P' بر l نیز می‌توان نتیجه گرفت که خط دومی، مانند l_2 وجود دارد که از A عبور کرده و بر l عمود است.

یعنی دو خط l_2 و l_1 از نقطه‌ی A عبور کرده و بر l عمود شده‌اند که این متناقض است با این‌که «از یک نقطه خارج خط فقط یک عمود می‌توان بر آن رسم کرد». پس P و P' یکی و بر هم منطبق‌اند.

تلفن تماس: ۰۲۶۳۳۴۰۸۹۴۴



۴۷ چون ۳ خط دو به دو متقاطع هستند، فرض می‌کنیم که $P_۱$ و $P_۲$ و $P_۳$ نقاط برخورد باشند. از طرفی این ۳ نقطه متمایز هستند و بر یک خط واقع نمی‌شوند. هم‌چنین که از ۳ نقطه متمایز یک صفحه عبور می‌کند و از هر خط دو نقطه‌اش روی این صفحه واقع است، بنابراین هر سه روی این صفحه قرار دارند.

۴۸ دو صفحه عمود بر هم هستند هرگاه هر کدام شامل خطی باشند که بر دیگری عمود است.

۴۹ دو خط d و 'd را که هم‌دیگر را قطع نمی‌کنند و هیچ صفحه‌ای هم وجود ندارد که شامل هر دوی آن‌ها باشد، دو خط متنافر می‌گویند.

۵۰ الف) گزینه‌ی ۱ ب) گزینه‌ی ۱

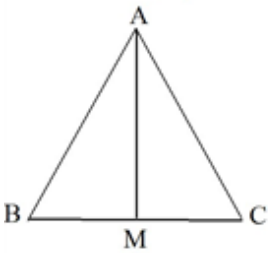
۵۱ می‌دانیم مجموع فاصله‌های نقطه‌ی M از اضلاع مثلث متساوی‌الاضلاع برابر ارتفاع مثلث است.

$۲\sqrt{۳} + \sqrt{۳} + ۵\sqrt{۳} = ۸\sqrt{۳}$ ارتفاع مثلث

ارتفاع مثلث متساوی‌الاضلاع به ضلع a برابر است با: $\frac{\sqrt{۳}}{۲}a$

$\frac{\sqrt{۳}}{۲}a = ۸\sqrt{۳} \Rightarrow a = ۱۶ \Rightarrow$ محیط $= ۳ \times ۱۶ = ۴۸$

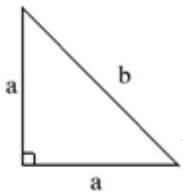
۵۲ ABC یک مثلث است و M وسط ضلع BC. از آن‌جا که این دو مثلث در رأس A مشترک هستند. پس:



$$\frac{S_{AMC}}{S_{AMB}} = \frac{MB}{MC} \xrightarrow{MB = MC} \frac{S_{AMC}}{S_{AMB}} = ۱ \Rightarrow S_{AMC} = S_{AMB}$$

۵۳ طول هر ضلع زاویه‌ی قائمه را a در نظر می‌گیریم پس $\frac{۱}{۲}a.a = ۸$ در نتیجه $a^۲ = ۱۶$ و $a = ۴$

داریم:



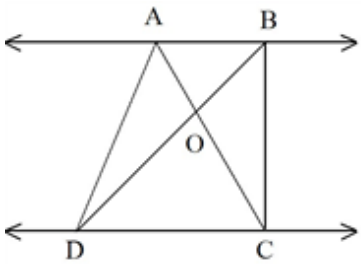
$b^۲ = ۴^۲ + ۴^۲ \Rightarrow b^۲ = ۳۲ \Rightarrow b = \sqrt{۳۲} = ۴\sqrt{۲}$

محیط: $۴ + ۴ + ۴\sqrt{۲} = ۸ + ۴\sqrt{۲}$

۵۴ الف) با هم برابر است.

ب) نسبت اندازه‌ی ارتفاع‌های متناظر این قاعده‌ها

۵۵



$$S_{ADC} = S_{BDC} \xrightarrow[\text{را کم می کنیم}]{\text{از طرفین } S_{ODC}} S_{ADC} - S_{ODC}$$

$$= S_{BDC} - S_{ODC} \xrightarrow{\text{با توجه به شکل}} S_{OAD} = S_{BOC}$$

۵۶ چندضلعی: شکلی است که شامل n $(n \geq ۳)$ پاره‌خط متوالی است که:

۱) هر پاره‌خط دقیقاً دو پاره‌خط را در نقاط ابتدایی و انتهایی‌اش قطع می‌کند.

۲) هر دو پاره‌خط که در یک انتها مشترک‌اند روی یک خط نباشند.

چندضلعی محدب

۵۷ چون:

$$\angle B = ۱۵^\circ \Rightarrow \angle C = ۷۵^\circ \xrightarrow{\text{در مثلث } AHC} \begin{cases} \angle H = ۹۰^\circ \\ \angle C = ۷۵^\circ \end{cases} \Rightarrow \angle A_۱ = ۱۵^\circ \quad (۱)$$

در مثلث قائم‌الزاویه ABC میانه‌ی وارد بر وتر نصف وتر است

$$AM = MB \xrightarrow[\text{مثلث متساوی الساقین}]{AMB} \angle A_۳ = ۱۵^\circ \quad (۲)$$

$$\angle A_۱ + \angle A_۲ + \angle A_۳ = ۹۰^\circ \xrightarrow{\text{با درنظر گرفتن ۱ و ۲}} \angle A_۲ = ۶۰^\circ \xrightarrow{\text{در } \Delta AHM} \angle M_۲ = ۳۰^\circ$$

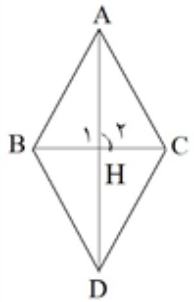
می‌دانیم ضلع روبه‌رو به زاویه ۳۰° نصف وتر است. $AH = \frac{۱}{۲}AM \ (*)$

از طرفی $AM = \frac{۱}{۲}BC \ (**)$

$$(*),(**) \Rightarrow AH = \frac{۱}{۴}BC \xrightarrow{BC = ۲۰} AH = \frac{۱}{۴} \times ۲۰ = ۵$$

$$S_{AMB} = \frac{۱}{۲}(۱۰ \times ۵) = ۲۵$$

۵۸ ABDC یک متوازی‌الاضلاع است که قطرهایش عمودمنصف هستند. نشان می‌دهیم دو مثلث ΔAHC و ΔABH هم‌نهشت‌اند.



$$\left.\begin{array}{l} AH \text{ مشترک} \\ BH = HC \\ \angle H_۱ = \angle H_۲ = ۹۰^\circ \end{array}\right\} \xrightarrow{(\text{ض ز ض})} \Delta AHC \cong \Delta AHB \Rightarrow AC = AB$$

در متوازی‌الاضلاع ضلع‌های مقابل مساویند پس $AC = AB = BD = BC$ در نتیجه ABDC لوزی است.

۵۹ الف) به حالت برابری سه زاویه متشابه‌اند.

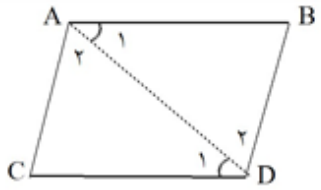
$$\left.\begin{array}{l}\text{زوایه های روبه رو متوازی الاضلاع } \angle A=\angle C \\ \angle K=\angle H=۹۰^\circ\end{array}\right\} \Rightarrow \Delta BHC \sim \Delta BKA$$

ب)

$$\frac{AB}{BC}=\frac{AK}{HC}=\frac{BK}{BH}$$

۶۰ ABDC یک متوازی‌الاضلاع است. نشان می‌دهیم: $\angle C=\angle B$ و $\angle A=\angle D$

قطر AD را رسم کرده و ثابت می‌کنیم $\angle C=\angle B$ است.



$$\left.\begin{array}{l}\text{مورب } AD\ ,\ AB \parallel CD \Rightarrow \angle A_۱=\angle D_۱ \\ \text{مورب } AD\ ,\ AC \parallel BD \Rightarrow \angle A_۲=\angle D_۲ \\ AD=AD\end{array}\right\}$$

$$\xrightarrow{(\text{ز ض ز})} \Delta ACD \cong \Delta ABD \Rightarrow \angle C=\angle B$$

به همین ترتیب می‌توان ثابت کرد که $\angle A=\angle D$ است. برای اثبات $\angle A=\angle D$ می‌توان از رابطه‌ی زیر استفاده کرد:

$$\left.\begin{array}{l}\angle B=۱۸۰^\circ-(\angle A_۱+\angle D_۲) \\ \angle C=۱۸۰^\circ-(\angle A_۲+\angle D_۱)\end{array}\right\} \xrightarrow[\angle A_۲=\angle D_۲]{\angle A_۱=\angle D_۱} \angle B=۱۸۰^\circ-(\angle A_۱+\angle D_۱)=\angle C$$

$$\Rightarrow \angle B=\angle C$$

۶۱ الف) گزینه‌ی ۱ ب) گزینه‌ی ۲

۶۲ الف) عمودمنصف ب) برابرند

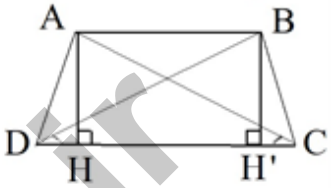
تلفن تماس: ۰۲۶۳۳۴۰۸۹۴۴

۶۳ ابتدا ثابت می‌کنیم که اگر ذوزنقه‌ای متساوی‌الساقین باشد، آن‌گاه قطرهایش با هم برابرند. برای این منظور هم‌نهشتی دو مثلث ΔACD و ΔBCD را نشان می‌دهیم.

$AD = BC$ (دو ساق برابر در ذوزنقه متساوی الساقین اند)
$DC = DC$ ضلع مشترک
$\angle D = \angle C$ (دو زاویه مجاور قاعده در ذوزنقه متساوی الساقین با هم برابرند)

$\xrightarrow{\text{(ض ز ض)}} \Delta ADC \cong \Delta BDC \Rightarrow AC = BD$

برعکس فرض کنیم در ذوزنقه‌ی ABCD قطرهای AC و BD برابر باشند. ارتفاع‌های AH و BH' را رسم می‌کنیم. چون AHH'B مستطیل است پس $AH = BH'$ داریم:



$AH = BH'$
$AC = BD$
$\hat{H} = \hat{H'} = ۹۰^\circ$
$\xrightarrow{\text{وتر و یک ضلع}} A\overset{\triangle}{D}H \cong B\overset{\triangle}{C}H' \Rightarrow \hat{D}_۱ = \hat{C}_۱$

$AC = BD$
$\hat{D}_۱ = \hat{C}_۱$
$DC = DC$
$\xrightarrow{\text{ض ز ض}} A\overset{\triangle}{D}C \cong B\overset{\triangle}{D}C \Rightarrow AD = BC$

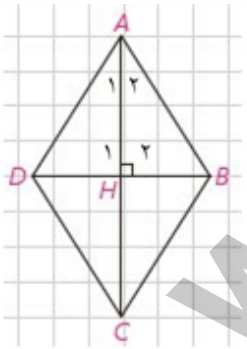
بنابراین ABCD ذوزنقه‌ی متساوی‌الساقین است.

۶۴

$\angle C + \angle B = ۱۸۰^\circ$ مکمل اند
$\angle A + \angle D = ۱۸۰^\circ$ مکمل اند

زاویه‌های $\angle A$ و $\angle D$ مکمل هستند. هم‌چنین زاویه‌های $\angle B$ و $\angle C$ مکمل هستند.

۶۵



۱- عمودمنصف بودن قطرها و نیمساز بودن قطرها
۲- مثلث متساوی‌الساقین چون $AD = AB$ (ویژگی لوزی)
۳- AH نقش میانه‌ی وارد بر ضلع BD را دارد، چون قطرهای لوزی منصف‌اند.
۴- حال همنهشتی دو مثلث ABH و ADH را نشان می‌دهیم:

AH مشترک
$AB = AD$ (تساوی اضلاع لوزی)
$HD = HB$ (AH میانه بودن)
$\xrightarrow{\text{(ض ض ض)}} \Delta AHD \cong \Delta AHB$

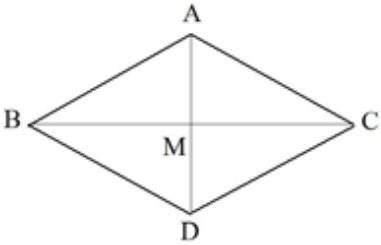
$\xrightarrow{\text{برابری اجزای متناظر}}$
$\angle H_۱ = \angle H_۲$ (۱)
$\angle A_۱ = \angle A_۲ \Rightarrow$ AH نیمساز

$\hat{H}_۱ + \hat{H}_۲ = ۱۸۰^\circ \xrightarrow{\text{با توجه به ۱}} \hat{H}_۱ = \hat{H}_۲ = ۹۰^\circ$

در هر لوزی قطرها عمودمنصف یک‌دیگرند و قطرها روی نیمساز زاویه‌ها هستند.

۶۶

الف)

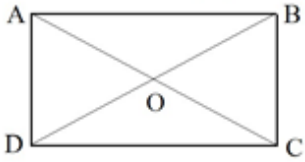


$$\left.\begin{array}{l} AM = \frac{BC}{۲} \\ AM = \frac{AD}{۲} \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{BC}{۲} = \frac{AD}{۲} \Rightarrow BC = AD$$

پس قطرها برابر و منصف یک‌دیگرند.

ب) از آن‌جا که قطرها برابر و منصف‌اند و با توجه به این‌که هر چهارضلعی که در آن قطرها برابر و منصف باشند یک مستطیل است، می‌توان نتیجه گرفت که زاویه‌ی $\angle A$ قائمه است.

۶۷ در متوازی‌الاضلاع ABCD قطرهای AC و BD برابرند.



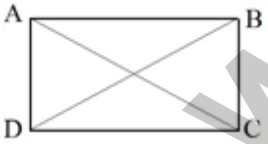
$$\left.\begin{array}{l} AC = BD \text{ فرض} \\ DC = DC \text{ مشترک} \\ AD = BC \text{ دو ضلع روبروی متوازی الاضلاع} \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{ض ض ض}} \overset{\triangle}{ADC} \cong \overset{\triangle}{BCD} \Rightarrow \hat{D} = \hat{C}$$

در ضمن در متوازی‌الاضلاع هر دو زاویه‌ی مجاور به یک ضلع مکملند، پس داریم:

$$\hat{D} + \hat{C} = ۱۸۰^\circ \xrightarrow{\hat{D} = \hat{C}} \hat{D} = \hat{C} = ۹۰^\circ$$

بنابراین متوازی‌الاضلاع ABCD زاویه‌ی قائمه دارد پس مستطیل است.

۶۸ باید هم‌نهشتی دو مثلث ACD و BCD را نشان دهیم.



$$\left.\begin{array}{l} BC = AD \\ DC \text{ مشترک} \\ \angle D = \angle C = ۹۰^\circ \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{(ض ز ض)}} \Delta ADC \cong \Delta BDC \Rightarrow AC = BD$$

بنابراین در هر مستطیل قطرها با هم برابرند.

۶۹

$$\angle A + \angle B + \angle C + \angle D = ۳۶۰^\circ \xrightarrow[\angle A = \angle C]{\angle D = \angle B} \angle C + \angle B + \angle C + \angle B = ۳۶۰^\circ$$

$$\Rightarrow ۲\angle C + ۲\angle B = ۳۶۰^\circ \Rightarrow ۲(\angle C + \angle B) = ۳۶۰^\circ \Rightarrow \angle C + \angle B = ۱۸۰^\circ$$

تلفن تماس: ۰۲۶۳۳۴۰۸۹۴۴

۷۰ شکل ۱، پنج‌ضلعی است. پنج ضلع و پنج رأس دارد. برخی از ضلع‌های مجاور عبارتند از: AB و AE / EA و DC / ED و DE و برخی از ضلع‌های غیرمجاور عبارتند از: AE و DE / DC و AB / BC و CD

شکل ۲، پنج‌ضلعی است. پنج ضلع و و پنج رأس دارد. برخی از ضلع‌های مجاور عبارتند از: CB و AB / CD و AE / و برخی از ضلع‌های غیرمجاور عبارتند از: AB و AE / CD و ED / BC و AB / و ...

شکل شماره ۳ و ۴ چندضلعی نیستند.

۷۱ MNCP یک متوازی‌الاضلاع است، چون ضلع‌های روبه‌رو دو به دو موازی هستند. بنابراین MN = PC = ۷ و آن‌ها که MN || PC طبق قضیه تالس در مثلث ABC داریم:

$$\frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC} \Rightarrow \frac{۵}{۱۱} = \frac{۷}{x} \Rightarrow x = \frac{\cancel{۱۱}^{۲/۲} \times ۷}{\cancel{۵}_{۱}} = ۱۵/۴$$

$$BP = ۱۵/۴ - ۷ = ۸/۴$$

۷۲ چون DE || BC، پس $\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC} = \frac{۳}{۷}$

$$\frac{AE}{AC} = \frac{۳}{۷} \xrightarrow{\text{تفضیل در مخرج}} \frac{AE}{AC - AE} = \frac{۳}{۷ - ۳} \Rightarrow \frac{AE}{EC} = \frac{۳}{۴}$$

چون دو مثلث در رأس D مشترک‌اند و قاعده‌های آن‌ها بر روی یک خط قرار گرفته است.

$$\frac{S_{\overset{\Delta}{ADE}}}{S_{\overset{\Delta}{DEC}}} = \frac{AE}{EC} = \frac{۳}{۴}$$

بنابراین نسبت مساحت‌ها برابر با $\frac{۳}{۴}$ است.

۷۳ در مثلث AMC و نیمساز MP داریم:

$$\frac{MC}{MA} = \frac{AP}{PC} \quad (۱)$$

در مثلث AMB و نیمساز MQ داریم:

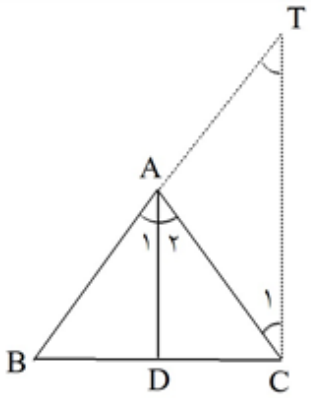
$$\frac{MB}{MA} = \frac{QB}{AQ} \quad (۲)$$

در رابطه (۲) می‌توانیم به جای MB، MC را جایگزین کنیم، چون M وسط ضلع BC است.

$$\frac{MC}{MA} = \frac{QB}{AQ} \quad (۳)$$

با مقایسه (۱) و (۳) داریم:

$$\frac{QB}{AQ} = \frac{AP}{PC} \xrightarrow{\text{طبق عکس تالس}} QP \parallel BC$$



۷۴ AD نیمساز زاویه‌ی A است. باید ثابت کنیم که $\frac{BD}{DC}=\frac{AB}{AC}$

اثبات: از نقطه‌ی C موازی AD خطی رسم می‌کنیم که امتداد AB را در نقطه‌ی T قطع کند. از آن‌جا که $AD \parallel CT$ و BT خط مورب آن‌ها $\hat{A}_۱=\hat{T}$ و با درنظر گرفتن AC به عنوان خط مورب $\hat{C}_۱=\hat{A}_۲$.

$\hat{A}_۱=\hat{A}_۲ \Rightarrow \hat{C}_۱=\hat{T} \Rightarrow ATC$ مثلث متساوی‌الساقین

$\Rightarrow AT=AC \quad (۱)$

با توجه به قضیه‌ی تالس در مثلث BEC می‌توان نوشت: $(AD \parallel EC)$

$$\frac{BD}{DC}=\frac{AB}{AT} \xrightarrow[\text{طبق ۱}]{AT=AC} \frac{BD}{DC}=\frac{AB}{AC}$$

۷۵ الف) گزینه‌ی ۱ ب) گزینه‌ی ۲

۷۶ الف) M ب) متشابه هستند.

۷۷ الف) درست ب) نادرست

۷۸ زیرا در هر مثلث متساوی‌الاضلاع اندازه‌ی هر سه زاویه برابر با ۶۰° است. در نتیجه، هر دو مثلث متساوی‌الاضلاع دلخواه به حالت برابری سه زاویه متشابه‌اند.

۷۹ دو رابطه‌ی (الف) و (ب) را با هم جمع می‌کنیم.

$$AC^۲+AB^۲=BC.CH+BC.BH=BC(CH+BH) \Rightarrow AC^۲+AB^۲=BC.BC=BC^۲$$

۸۰ از آن‌جا که M و N وسط ضلع‌های AB و AC واقع هستند، بنابراین می‌توان نوشت:

$$۱=\frac{AM}{MB}=\frac{AN}{NC} \xrightarrow{\text{طبق عکس تالس}} MN \parallel BC$$

هم‌چنین چون N و P وسط ضلع‌های AC و BC هستند، تناسب زیر را داریم:

$$۱=\frac{AN}{NC}=\frac{BP}{PC} \Rightarrow AB \parallel NP$$

$$\begin{matrix} NP \parallel AB \\ MN \parallel BC \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} MNPB \text{ متوازی الاضلاع} \Rightarrow \hat{N}=\hat{B} \quad (۱) \\ MNCP \text{ متوازی الاضلاع} \Rightarrow \hat{C}=\hat{M} \quad (۲) \end{matrix}$$

با توجه به (۱) و (۲) داریم: $\overset{\triangle}{ABC} \sim \overset{\triangle}{MNP}$ برابری دو زاویه

نسبت تشابه: $\frac{NC}{AC}=\frac{۱}{۲} \xrightarrow[NC=MP]{NCPM \text{ متوازی الاضلاع}} \frac{MP}{AC}=\frac{۱}{۲}$

۸۱

$$(a-b)^۲ \geq ۰ \Rightarrow a^۲-۲ab+b^۲ \geq ۰ \Rightarrow a^۲+۲ab+b^۲ \geq ۴ab \Rightarrow (a+b)^۲ \geq \left(۲\sqrt{ab}\right)^۲$$

$$\xrightarrow{\text{جذر می گیریم}} a+b \geq ۲\sqrt{ab} \Rightarrow \frac{a+b}{۲} \geq \sqrt{ab}$$

تلفن تماس: ۰۲۶۳۳۴۰۸۹۴۴

۸۲ الف) $\overset{\triangle}{ABC} \sim \overset{\triangle}{ABH} \Rightarrow \frac{AB}{BC} = \frac{BH}{AB} \Rightarrow AB^{۲} = BC.BH$

ب) $\overset{\triangle}{ABH} \sim \overset{\triangle}{AHC} \Rightarrow \frac{AH}{BH} = \frac{HC}{AH} \Rightarrow AH^{۲} = BH.HC$

۸۳ اگر خط راستی موازی یکی از اضلاع مثلث، دو ضلع دیگر را در دو نقطه قطع کند، مثلثی با آن‌ها تشکیل می‌دهد که با مثلث اصلی متشابه است.

۸۴ متناسب بودن سه ضلع، برابری دو زاویه، متناسب بودن دو ضلع و برابری زاویه‌ی بین آن‌ها.

۸۵ برابری دو زاویه

$AB \parallel CD$ و CB مورب $\Rightarrow \hat{B} = \hat{C}$

$AB \parallel DC$ و AD مورب $\Rightarrow \hat{A} = \hat{D}$

$\Rightarrow \overset{\triangle}{OAB} \sim \overset{\triangle}{OCD}$

$\frac{AB}{CD} = \frac{OB}{OC} \Rightarrow \frac{x}{۱۰} = \frac{۲}{۵} \Rightarrow x = ۴$

۸۶ اثبات می‌کنیم که قطعات ایجاد شده توسط DD' روی ضلع‌های AB و AC با هم متناسب هستند.

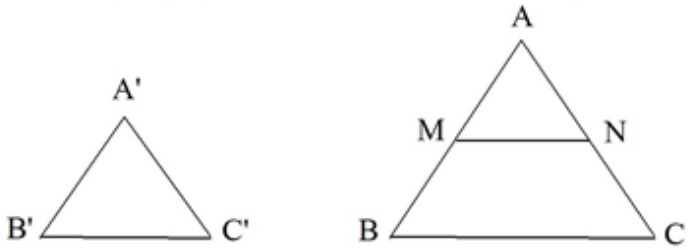
$\frac{AD'}{AC} \xrightarrow{AD' = AD} \frac{AD}{AC} = \frac{۱}{۲} \Rightarrow \frac{AD'}{AC} = \frac{۱}{۲}$ (۱)

$\frac{AE'}{AB} \xrightarrow{AE' = AE} \frac{AE}{AB} = \frac{۱}{۲} \Rightarrow \frac{AE'}{AB} = \frac{۱}{۲}$ (۲)

از ۱ و ۲ طبق عکس قضیه‌ی تالس نتیجه می‌گیریم که $BC \parallel D'E'$.

تلفن تماس: ۰۲۶۳۳۴۰۸۹۴۴

۸۷ در مثلث ABC، روی AB و AC، پاره‌خط‌های AM و AN را به‌ترتیب هم‌اندازه‌ی A'B' و A'C' جدا کنید.



۱) $\frac{A'B'}{AB}=\frac{A'C'}{AC}=\frac{B'C'}{BC}\Rightarrow\frac{AM}{AB}=\frac{AN}{AC}$

طبق قضیه‌ی اساسی تشابه نتیجه می‌گیریم: $MN \parallel BC$

۲- ضلع‌ها متناسب و زاویه‌ها برابرند، پس: $A\overset{\triangle}{M}N \sim A\overset{\triangle}{B}C$

۳) $\left.\begin{array}{l}\text{تعمیم تالس}: \frac{AM}{AB}=\frac{AN}{AC}=\frac{MN}{BC}\\ \text{فرض}: \frac{AM}{AB}=\frac{AN}{AC}=\frac{B'C'}{BC}\end{array}\right\}\Rightarrow\frac{MN}{BC}=\frac{B'C'}{BC}\Rightarrow MN=B'C'$

$\xrightarrow{\text{ض ض ض}} AMN \sim A'B'C'$

۴- بنابراین نتیجه می‌گیریم: $\left.\begin{array}{l}A\overset{\triangle}{M}N \cong A'\overset{\triangle}{B'}C'\\ A\overset{\triangle}{M}N \sim A\overset{\triangle}{B}C\end{array}\right\}\Rightarrow A\overset{\triangle}{B}C \sim A'\overset{\triangle}{B'}C'$

۸۸

۱- $BC \parallel MN$, AB مورب $\Rightarrow \angle M=\angle B$

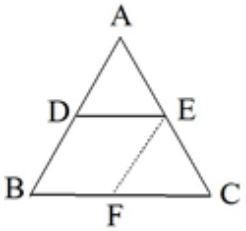
$BC \parallel MN$, AC مورب $\Rightarrow \angle N=\angle C$

۲- $\frac{AM}{AB}=\frac{AN}{AC}=\frac{MN}{BC}$

۳- این دو مثلث با هم متشابه هستند.

تلفن تماس: ۰۲۶۳۳۴۰۸۹۴۴

۸۹ اگر خطی دو ضلع مثلث را در دو نقطه قطع کند و با ضلع سوم موازی باشد، مثلثی پدید می‌آید که اندازه‌های ضلع‌هایش با مثلث اصلی متناسب است. می‌دانیم طبق فرض $DE \parallel BC$ باید ثابت کنیم.



$$\frac{AD}{AB}=\frac{AE}{AC}=\frac{DE}{BC}$$

از نقطه‌ی E پاره‌خط EF را موازی DB رسم می‌کنیم چهارضلعی DEFB یک متوازی‌الاضلاع است، چون ضلع‌های روبه‌رو دوبه‌دو موازی‌اند، بنابراین $DE = BF$ و $DB = EF$

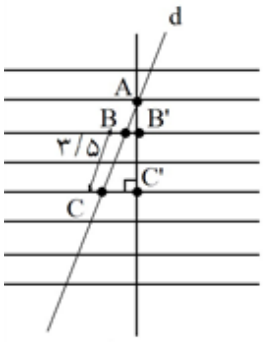
در مثلث ABC با درنظر گرفتن $DE \parallel BC$ داریم: $\frac{AD}{AB}=\frac{AE}{AC}$ (۱)

در مثلث ABC و با درنظر گرفتن $EF \parallel AB$ داریم: $\frac{BF}{BC}=\frac{AE}{AC}$ (۲)

با توجه به ۱ و ۲ و جای‌گذاری DE به جای BF داریم: $\frac{AD}{AB}=\frac{AE}{AC}=\frac{DE}{BC}$

۹۰ الف) $\frac{۵}{x}=\frac{۴}{۲}\Rightarrow x=۲/۵$

ب) در واقع x طول ۴ قطعه‌ی ایجاد شده روی خطوط موازی توسط خط d است.
حال از نقطه‌ی A خط L را موازی با خط d' رسم می‌کنیم. داریم:



از قضیه تالس داریم: $\frac{AB}{BC}=\frac{AB'}{B'C'}$

با توجه به شکل داریم: $۲A'B' = B'C'$

طبق صورت سوال: $BC = ۳/۵$

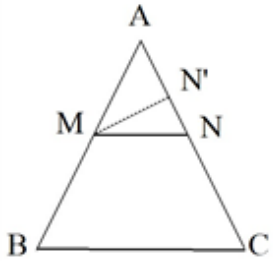
$$\Rightarrow \frac{AB}{۳/۵}=\frac{A'B'}{۲A'B'}=\frac{۱}{۲}\Rightarrow AB=\frac{۳/۵}{۲}$$

پس طول قطعه‌های ایجاد شده روی خطوط موازی توسط d همگی با هم برابر هستند و مقدار آن‌ها $\frac{۳/۵}{۲}$ است.

بنابراین: $x = ۴\times\frac{۳/۵}{۲}=۷$

۹۱ $\frac{AD}{AB}=\frac{AE}{AC}\Rightarrow\frac{۳}{x}=\frac{۲}{۷}\Rightarrow x=\frac{۳\times۷}{۲}=۱۰/۵$

۹۲ اگر خطی دو ضلع مثلثی را قطع کند و روی آن‌ها چهار پاره‌خط با اندازه‌های متناظر متناسب جدا کند، آن‌گاه با ضلع سوم مثلث موازی است اثبات از طریق برهان خلف: $\frac{AM}{AB}=\frac{AN}{AC}$ و فرض کنیم برخلاف حکم $MN \nparallel BC$، پس از نقطه‌ی M پاره‌خط MN' را موازی BC رسم می‌کنیم.



حال با توجه به قضیه‌ی تالس داریم: $\frac{AN'}{AC}=\frac{AM}{AB}$ با توجه به رابطه‌ی فرض مسئله داریم:

$\frac{AN}{AC}=\frac{AN'}{AC}$ که از آن نتیجه می‌شود که $AN=AN'$ و بنابراین N بر N' منطبق است و MN همان MN' است که موازی BC است.

۹۳ الف) در مثلث ADE قاعده‌ی ADE قاعده‌ی AE و در مثلث DEC قاعده‌ی EC مقابل رأس D است.

ب) $\frac{S_{DAE}}{S_{DEC}}=\frac{AE}{EC}$, $\frac{S_{ADE}}{S_{DBE}}=\frac{AD}{DB}$

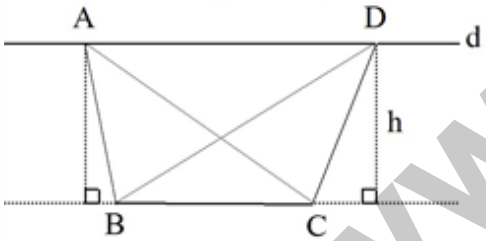
برای دو مثلث ADE و DBE قاعده‌های روبه‌رو به رأس مشترک E را درنظر می‌گیریم.

ج) چون هر دو یک قاعده دارند (DE) و نقاط رأس مقابل به قاعده آن‌ها در یک خط موازی DE قرار دارند، پس مساحت هر دوی آن‌ها برابر است.

د) چون $S_{DBE}=S_{\overset{\Delta}{DEC}}$، پس دو کسر بالا با هم برابرند، در نتیجه: $\frac{AE}{EC}=\frac{AD}{DB}$

۹۴ در مثلث $\overset{\Delta}{ABC}$ و $\overset{\Delta}{DBC}$ را رسم می‌کنیم به طوری‌که قاعده‌های هر دو BC بوده و رأس آن‌ها روی خط d موازی قاعده قرار دارد. ارتفاع دو مثلث را رسم کرده و مساحت آن‌ها را می‌نویسیم.

هر دو مثلث دارای ارتفاع h هستند. چون $BC \parallel AD$ است، پس فاصله‌ی آن دو در هر نقطه برابر است.



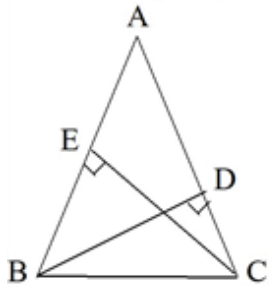
$$S_{ABC}=\frac{۱}{۲}BC.h$$
$$S_{DCB}=\frac{۱}{۲}BC.h$$
$$\Rightarrow S_{ABC}=S_{DCB}$$

۹۵
$$\frac{S_{ABH}}{S_{AHC}}=\frac{BH}{HC}\Rightarrow\frac{۴}{۹}=\frac{x}{y}\xrightarrow{\text{ترکیب نسبت در مخرج}}\frac{۴}{۴+۹}=\frac{x}{x+y}\xrightarrow{x+y=BC=۶}$$
$$\frac{۴}{۱۳}=\frac{x}{۶}\Rightarrow x=\frac{۲۴}{۱۳}$$
$$y=۶-\frac{۲۴}{۱۳}=\frac{۵۴}{۱۳}$$

۹۶
$$\frac{x}{۳}=\frac{y}{۶}=\frac{۱۰}{۹}\Rightarrow\frac{x+y}{۳+۶}=\frac{۱۰}{۹}\Rightarrow\frac{x+y}{۳+۶}=\frac{۱۰}{۹}\Rightarrow x+y=۱۰\quad\Rightarrow ۲(x+y)=۲۰$$

تلفن تماس: ۰۲۶۳۳۴۰۸۹۴۴

۹۷ ابتدا مثلث ABC و ارتفاع‌های وارد بر دو ضلعش را رسم می‌کنیم و مساحت مثلث ABC را می‌نویسیم.



$$S_{ABC} = \frac{۱}{۲}BD.AC$$
$$S_{ABC} = \frac{۱}{۲}CE.AB$$
$$\Rightarrow \frac{۱}{۲}BD.AC = \frac{۱}{۲}CE.AB \Rightarrow \frac{BD}{CE} = \frac{AB}{AC}$$

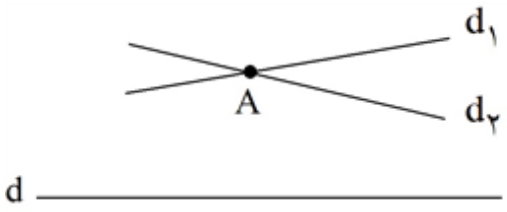
برای ضلع دیگر نیز به همین ترتیب اثبات می‌شود.

۹۸ بله، زیرا:

$$a^۲ = b.c$$
$$a^۲ = ۹ \times ۴ \Rightarrow a^۲ = ۳۶ \Rightarrow a = \sqrt{۳۶} = ۶$$

۹۹ به مثالی که نشان می‌دهد یک حکم کلی نادرست است مثال نقض گفته می‌شود.

۱۰۰ برهان خلف: فرض کنیم از نقطه‌ی A دو خط $d_۱$ و $d_۲$ را موازی با خط d رسم کرده باشیم. در این صورت داریم:



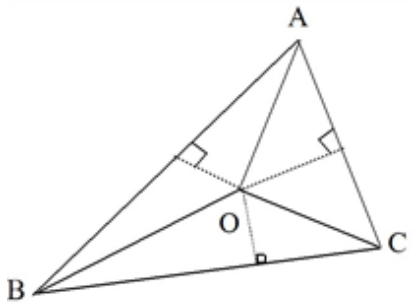
$$\left.\begin{array}{l} d_۱ \parallel d \\ d_۲ \parallel d \end{array}\right\} \Rightarrow d_۱ \parallel d_۲$$

و این خلاف فرض متقاطع بودن $d_۱$ و $d_۲$ در نقطه‌ی A است پس $d_۱$ و $d_۲$ بر هم منطبق هستند.

۱۰۱ در جدول زیر با ترسیم قطرهای رسم شده از یک رأس چندضلعی را به مثلث تقسیم می‌کنیم تا مجموع زوایای n ضلعی را پیدا کنیم.

تعداد ضلع‌ها	تعداد مثلث‌ها	مجموع زاویه‌های داخلی
۳ ضلعی	۱	۱ × ۱۸۰ = ۱۸۰
۴ ضلعی	۲	۲ × ۱۸۰ = ۳۶۰
۵ ضلعی	۳	۳ × ۱۸۰ = ۵۴۰
. . .		. . .
n ضلعی	(n - ۲)	(n - ۲) × ۱۸۰

۱۰۲ گزاره: جمله‌ی خبری که دقیقاً درست یا نادرست باشد.
نقیض گزاره: یک گزاره یا درست است یا نادرست. ارزش نقیض گزاره دقیقاً مخالف باارزش خود گزاره است.



۱۰۳ مثلث دلخواه ABC را رسم می‌کنیم و از آن‌جا که پاره‌خط های AB و AC متقاطع هستند، عمودمنصف آن‌ها نیز با هم در نقطه‌ای مانند O متقاطع هستند.

۱- نقطه‌ی O روی عمودمنصف AC قرار دارد، پس: $OA = OC$ (۱)

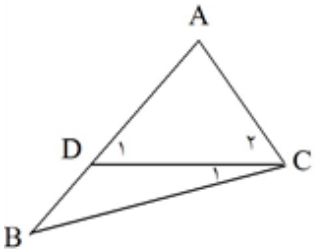
۲- نقطه‌ی O روی عمودمنصف AB قرار دارد، پس: $OA = OB$ (۲)

$(۱), (۲) \Rightarrow OB = OC$

طبق قضیه‌ی عمودمنصف‌ها هر نقطه که فاصله‌ی آن از دو سر پاره‌خط یکسان باشد روی عمودمنصف آن قرار دارد. نتیجه می‌گیریم O روی عمودمنصف BC است پس O محل تلاقی سه عمودمنصف است. بنابراین عمودمنصف‌های اضلاع مثلث همرسند.

۱۰۴ الف) ۳۶۰° ب) نیست

۱۰۵ فرض کنیم در مثلث ABC، $AB > AC$ است. روی ضلع AB نقطه‌ی D را طوری انتخاب می‌کنیم که $AC = AD$.



$$\left.\begin{array}{l} AC = AD \Rightarrow \hat{D}_۱ = \hat{C}_۲ \\ \text{BDC زاویه خارجی مثلث } \hat{D}_۱ > \hat{B} \end{array}\right\} \Rightarrow \hat{C}_۲ > \hat{B} \quad (۱)$$

از طرف دیگر زاویه‌ی $\hat{C}_۲$ قسمتی از زاویه‌ی $\hat{C}$ است پس حتماً $\hat{C} > \hat{C}_۲$ بنابراین با مقایسه از رابطه‌ی (۱) معلوم می‌شود که $\hat{C} > \hat{B}$.

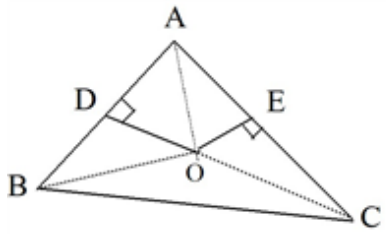
۱۰۶ در متوازی‌الاضلاع، ضلع‌های مقابل مساویند پس:

$$\left.\begin{array}{l} AB \parallel FC \\ BC \parallel AF \end{array}\right\} \Rightarrow \text{ABCF متوازی‌الاضلاع است} \Rightarrow AF = BC$$

$$\left.\begin{array}{l} AE \parallel BC \\ AC \parallel BE \end{array}\right\} \Rightarrow \text{ACBE متوازی‌الاضلاع است} \Rightarrow AE = BC$$

پس $AF = AE$ یعنی A وسط ضلع EF است.

به همین ترتیب می‌توان نشان داد نقاط B و C به ترتیب وسط اضلاع DE و DF هستند. پس ارتفاع AG عمودمنصف ضلع EF و ارتفاع BI عمودمنصف DE و ارتفاع CH عمودمنصف DF است. بنابراین ارتفاع‌های مثلث ABC روی عمودمنصف‌های مثلث DEF است و می‌دانیم عمودمنصف‌های هر مثلث همرس‌اند پس ارتفاع‌های مثلث ABC همرس‌اند.

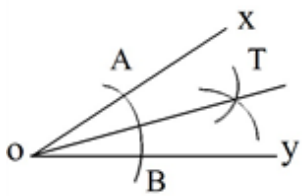


۱۰۷ ۱- نقطه‌ی O روی عمودمنصف پاره‌خط AC است، بنابراین: $OA = OC$

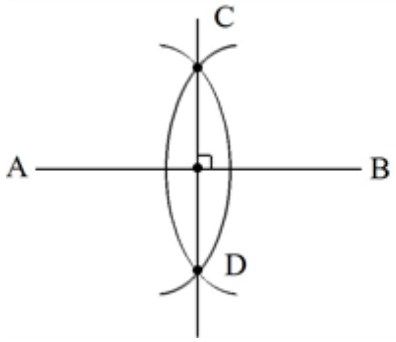
۲- نقطه‌ی O روی عمودمنصف پاره‌خط AB است، بنابراین: $OA = OB$

از (۱) و (۲) نتیجه می‌گیریم: $OC = OB$ بنابراین نقطه‌ی O روی عمودمنصف CB قرار دارد. در نتیجه نقطه O محل برخورد عمودمنصف‌ها است.

۱۰۸ دهانه پرگار را به اندازه دلخواه باز کرده و کمانی به مرکز O رسم می‌کنیم. محل برخورد دو کمان را A و B می‌نامیم. دو کمان به مرکز A و B و به اندازه‌ی بیش‌تر از نصف A و B رسم می‌کنیم. محل برخورد دو کمان را T می‌نامیم. O را به T وصل کرده و امتداد می‌دهیم. خط حاصل نیمساز موردنظر خواهد بود.



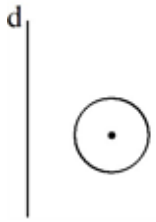
۱۰۹ ابتدا دهانه‌ی پرگار را به اندازه‌ی بیش از نصف AB باز کرده و دو کمان به مرکز A و B رسم می‌کنیم. محل برخورد این دو کمان را D و C می‌نامیم و نقاط D و C را به هم وصل می‌کنیم. خط گذرنده از D و C، عمودمنصف پاره‌خط AB است.



۱۱۰ به مرکز A و A' به‌ترتیب ۲ دایره به شعاع ۲ و ۴ سانتی‌متر رسم می‌کنیم. محل برخورد این دو دایره نقاط موردنظر هستند.

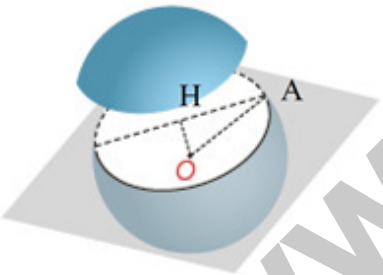
۱۱۱ الف) به یک فاصله ب) روی نیمساز آن زاویه

۱۱۲ از دوران دایره حول خط d این شکل‌ها ایجاد می‌شوند.



۱۱۳ دو مخروط در بالا و پایین نقطه تلاقی دو پاره‌خط

۱۱۴ با توجه به شکل می‌توان با استفاده از رابطه‌ی فیثاغورث شعاع سطح مقطع (کره) را حساب کرد.



$(OA)^۲ = (OH)^۲ + (AH)^۲ \Rightarrow ۵^۲ = ۳^۲ + AH^۲ \Rightarrow AH = ۴$

مساحت سطح مقطع $S = \pi r^۲ = ۱۶\pi$

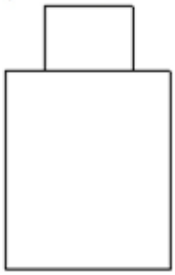
۱۱۵ الف) مستطیل
ب) مثلث
ج) ذوزنقه

۱۱۶ الف) سطح مقطع یک مثلث هم‌نهشت با مثلث ABC است و شکل به دو منشور مساوی تجزیه می‌شود.
ب) سطوح مقطع یک مثلث به رئوس C , D , E است که شکل را به دو هرم تجزیه می‌کند.
ج) سطح مقطع مستطیلی به رئوس Q و F و C و وسط DE است و شکل به دو منشور تقسیم می‌شود.

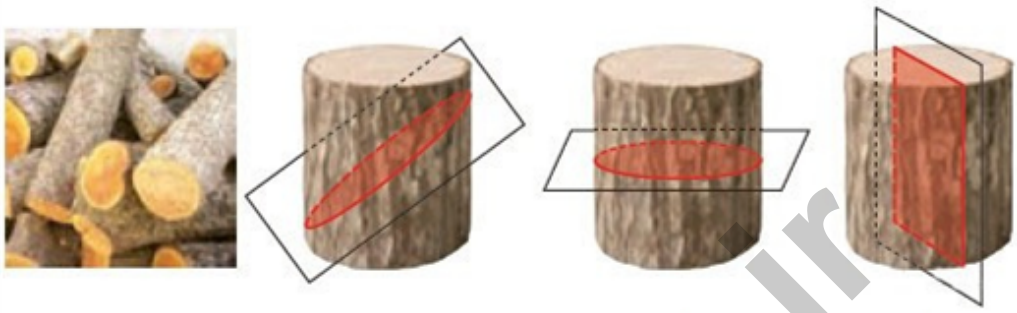
۱۱۷ الف) دایره
ب) سطح مقطع به صورت دایره است و زمانی بیش‌ترین مساحت را خواهد داشت که صفحه از مرکز عبور کند.

تلفن تماس: ۰۲۶۳۳۴۰۸۹۴۴

۱۱۸ مقطع دو مستطیل است که روی هم قرار گرفته‌اند و به صورت زیر است.

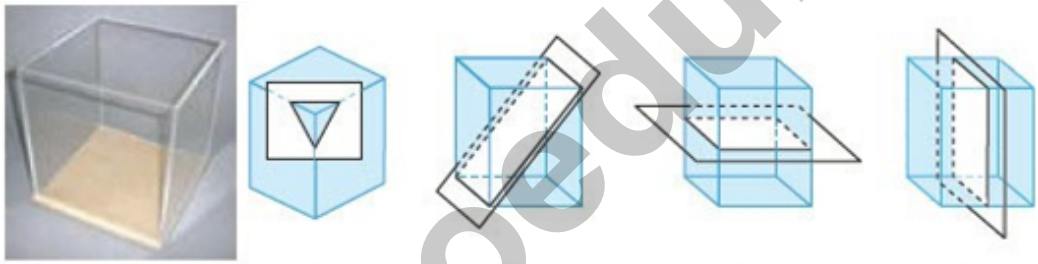


۱۱۹



مستطیل　　دایره　　بیضی

۱۲۰



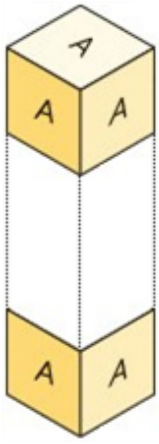
مستطیل　　مستطیل　　مستطیل　　مثلث

۱۲۱ الف) شکل ۲
ب) شکل ۱
ج) شکل ۳

۱۲۲ شکل ۵

۱۲۳ مکعب بزرگ از ۴۸ = ۳ × ۴ × ۴ مکعب کوچک تشکیل شده است.
روی ردیف بالای مکعب مستطیل داده شده ۵ مکعب کوچک باید برداشته شود و همین تعداد مکعب کوچک در دو ردیف زیرین آن باید برداشته شود تا نمای بالای داده شده ایجاد شود. پس حداقل ۱۵ = ۵ × ۳ مکعب کوچک باید حذف شود.
از طرف دیگر اگر همه مکعب‌های کوچک را در دو ردیف بالا و وسط برداریم و از ردیف آخر ۵ مکعب حذف کنیم باز نمای بالای شکل به صورت خواسته شده درمی‌آید. پس حداکثر تعداد مکعب‌های کوچک حذف شده برابر ۳۷ = ۴ × ۴ × ۲ + ۵ است.

تلفن تماس: ۰۲۶۳۳۴۰۸۹۴۴



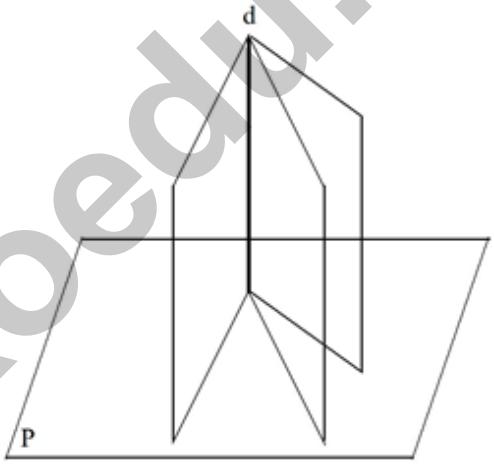
۱۲۴ در دو مکعبی که ابتدا و انتهای شکل قرار دارند ۵ حرف A دیده می‌شود و در بقیهٔ مکعب‌ها که ۶ تا هستند، ۴ حرف A دیده می‌شود. بنابراین تعداد حرف‌های A که دیده می‌شوند در کل برابر است با:

$۲ \times ۵ + ۶ \times ۴ = ۱۰ + ۲۴ = ۳۴$

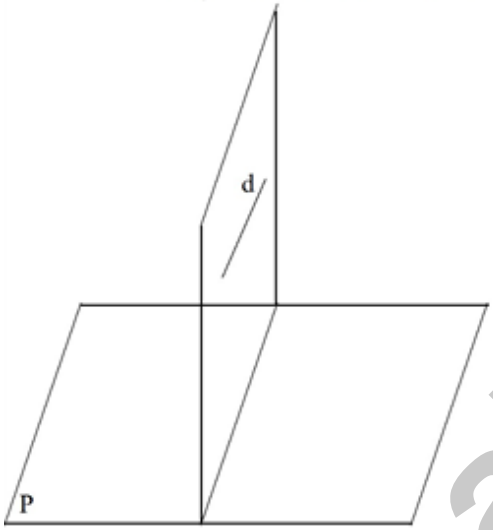
۱۲۵ خط d با صفحه‌ی Q موازی است یا بر صفحه‌ی Q واقع می‌شود.

۱۲۶ الف) اگر خط d بر صفحه‌ی P عمود باشد، از d بیشمار صفحه عمود بر P می‌گذرد. (شکل ۱)

ب) اگر خط d بر صفحه‌ی P عمود نباشد، از d فقط یک صفحه عمود بر P می‌گذرد. (شکل ۲)

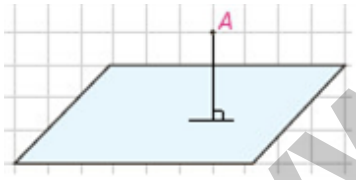


(شکل ۱)



(شکل ۲)

۱۲۷



فقط یک خط می‌توان عمود کرد.

۱۲۸ الف) EIKH و ABCD: متقاطع

JFGL و ABCD: متقاطع

EIKH و JFGL: متقاطع (چون صفحه امتدادپذیر است.)

ب) متقاطع

ج) موازی

د) EH بر صفحات ABCD و EIKH واقع است پس فصل مشترک این دو صفحه است و با صفحه FGLJ موازی است.

هـ) متقاطع

و) متنافر

ت) متنافر

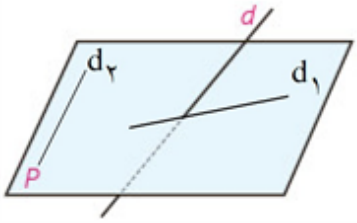
تلفن تماس: ۰۲۶۳۳۴۰۸۹۴۴

۱۲۹ الف) بله، دو خط عمود بر یک صفحه با هم موازی‌اند. (مطابق شکل ۱)
ب) خیر، دو صفحه متقاطع هم می‌توانند بر یک صفحه عمود باشند. (مطابق شکل ۲ یا ۵)
ج) با هم موازی‌اند. (مطابق شکل ۴)
د) بر دیگری نیز عمود است. (مطابق شکل ۴)
هـ) خط دوم نیز بر آن صفحه عمود است. (مطابق شکل ۳)

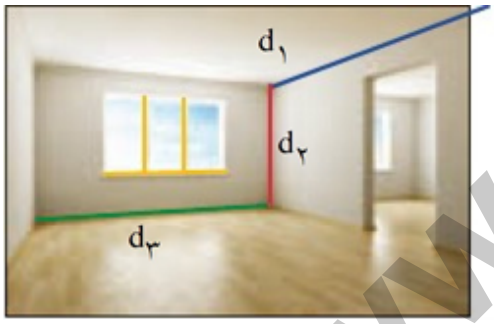
۱۳۰ الف) موازی - موازی - متنافر
ب) ۴ خط - ۳ خط - ۴ خط
ج) با صفحات GFBC و EFBA موازی است - با صفحات BCDA و HGFE متقاطع است - بر صفحات HEAD و HGCD واقع است.
د) صفحه‌ی موازی: HGCD و EFBA
صفحه‌ی متقاطع: GCDH , HGFE

۱۳۱ الف) با خط دیگر موازی است یا آن خط بر صفحه واقع است.
ب) موازی است یا شامل خط دیگر نیز می‌شود.
ج) الزاماً متقاطع می‌شود.

۱۳۲ متقاطع یا متنافر هستند. به خطوط d_1 و d_2 دقت شود، خط d_1 خط d را قطع می‌کند ولی خط d_2 با آن نقطه مشترک نداشته و در یک صفحه قرار نگرفته است و با آن متنافر است.



۱۳۳ خیر، الزاماً برقرار نیست. به خطوط مشخص شده در شکل دقت کنید، خط های d_1 و d_3 هر دو بر d_2 عمود هستند ولی با هم موازی نیستند. (متنافر هستند.)



۱۳۴ الف) بی‌شمار خط - بی‌شمار خط
ب) یک خط موازی - یک خط موازی

۱۳۵ الف) B , F , E
ب) F , E , D
ج) E , F , C , A

۱۳۶ مساحت به روش معمول: $S = m \times n$
مساحت به کمک قضیه پیک:

$$b = ۲m + ۲n$$
$$i = (m+۱) \times (n+۱) - (۲m + ۲n) = mn - m - n + ۱$$
$$S = \frac{b}{۲} - ۱ + i = \frac{۲m + ۲n}{۲} - ۱ + (mn - m - n + ۱) = m + n - ۱ + mn - m - n + ۱ = mn$$

۱۳۷

$$\frac{PC}{PB}=\frac{۱}{۳}\Rightarrow\frac{PC}{BC}=\frac{۱}{۴}\Rightarrow\frac{S_{APC}}{S_{ABC}}=\frac{۱}{۴}\Rightarrow S_{ABC}=۴S_{APC}\quad(۱)$$

$$\Delta ABC\ ;\ MN \parallel BC\Rightarrow\begin{cases}\frac{AN}{AC}=\frac{AM}{AB}=\frac{۱}{۳}\\ \Delta AQN\sim\Delta APC\end{cases}\Rightarrow\frac{S_{ANQ}}{S_{APC}}=\left(\frac{۱}{۳}\right)^{۲}=\frac{۱}{۹}$$

$$\Rightarrow S_{APC}=۹S_{ANQ}\quad(۲)$$

$$(۱),(۲)\Rightarrow S_{\Delta ABC}=۴(۹S_{ANQ})=۳۶S_{ANQ}\Rightarrow\frac{S_{ANQ}}{S_{ABC}}=\frac{۱}{۳۶}$$

پس مساحت AQN مساوی $\frac{۱}{۳۶}$ مساحت ABC است.

از طرف دیگر داریم:

$$\frac{PB}{BC}=\frac{۳}{۴}\Rightarrow\frac{S_{APB}}{S_{ABC}}=\frac{۳}{۴}\Rightarrow S_{APB}=\frac{۳}{۴}S_{ABC}\quad(۳)$$

$$A\overset{\triangle}{B}C\ ;\ MQ \parallel BP\Rightarrow A\overset{\triangle}{Q}M\sim A\overset{\triangle}{B}P\Rightarrow\frac{S_{AMQ}}{S_{APB}}=\left(\frac{AM}{AB}\right)^{۲}=\left(\frac{۱}{۳}\right)^{۲}=\frac{۱}{۹}$$

$$\xrightarrow{\text{تفضیل از صورت}}\frac{S_{BPQN}}{S_{APB}}=\frac{۸}{۹}\quad(۴)$$

$$(۳),(۴)\Rightarrow S_{BPQM}=\frac{۸}{۹}\left(\frac{۳}{۴}S_{ABC}\right)=\frac{۲}{۳}S_{ABC}\Rightarrow\frac{S_{BPQM}}{S_{ABC}}=\frac{۲}{۳}$$

۱۳۸

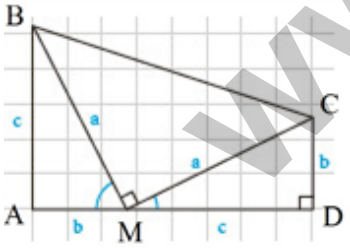
$$\Delta ABC\cong\Delta ACD\Rightarrow S_{ABC}=\frac{۱}{۲}S_{ABCD}\quad(۱)$$

میانه‌های هر مثلث آن‌را به شش قسمت با مساحت‌های مساوی تقسیم می‌کنند:

$$\Delta ABC\ ;\ BM=MC\ ,\ AO=OC\Rightarrow S_{MNB}=\frac{۱}{۶}S_{ABC}\quad(۲)$$

$$(۱),(۲)\Rightarrow S_{MNB}=\frac{۱}{۶}\left(\frac{۱}{۲}S_{ABCD}\right)=\frac{۱}{۱۲}S_{ABCD}$$

۱۳۹



$$S_{ABCD}=\frac{۱}{۲}(AB+CD)\times AD=\frac{۱}{۲}(b+c)(b+c)=\frac{۱}{۲}(b+c)^{۲}$$

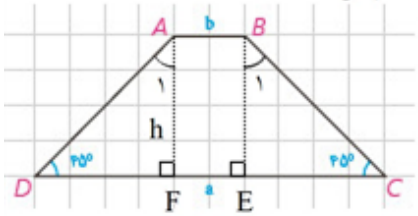
$$S_{ABCD}=S_{ABM}+S_{ABM}+S_{CDM}+S_{MBC}$$

$$=\frac{۱}{۲}bc+\frac{۱}{۲}bc+\frac{۱}{۲}a^{۲}=bc+\frac{۱}{۲}a^{۲}\Rightarrow\frac{۱}{۲}(b+c)^{۲}=bc+\frac{۱}{۲}a^{۲}$$

$$\xrightarrow{\times ۲}(b+c)^{۲}=۲bc+a^{۲}\Rightarrow b^{۲}+\cancel{۲bc}+c^{۲}=\cancel{۲bc}+a^{۲}\Rightarrow b^{۲}+c^{۲}=a^{۲}$$

به رابطه‌ی فیثاغورس در مثلث قائم‌الزاویه می‌رسیم.

۱۴۰ عمودهای BE و AF را بر CD وارد می‌کنیم چهارضلعی ABCD مستطیل است. پس:



$AB = EF = b$

$\Delta ADF;\ \angle A_۱ = \angle D = ۴۵^\circ \Rightarrow AF = DF = h$

$\Delta BCE;\ \angle B_۱ = \angle C = ۴۵^\circ \Rightarrow BE = CE = h$

$$\Rightarrow CD = ۲h + b = a \Rightarrow h = \frac{a-b}{۲}$$

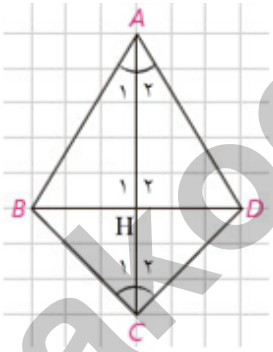
$$S_{ABCD} = \frac{۱}{۲}(a+b)h \Rightarrow S_{ABCD} = \frac{a+b}{۲} \times \frac{a-b}{۲} = \frac{a^۲ - b^۲}{۴}$$

۱۴۱ فرض کنیم فاصله‌ی دو خط موازی 'd و d برابر h باشد در این صورت:

$$S_{ABCD} = S_{ABEF} = AB \times h$$

پس مساحت هر دو متوازی‌الاضلاع برابر S است.

۱۴۲



$$\left.\begin{array}{l} AB = AD \\ \angle A_۱ = \angle A_۲ \\ AH = AH \end{array}\right\} \Rightarrow \Delta ABH \cong \Delta ADH \Rightarrow \angle H_۱ = \angle H_۲ = ۹۰^\circ$$

پس قطرهای این چهارضلعی بر هم عمودند.

$$\left.\begin{array}{l} AB = AD \\ CB = CD \\ AC = AC \end{array}\right\} \Rightarrow \Delta ABC \cong \Delta ACD \Rightarrow \hat{A}_۱ = \hat{A}_۲ ,\ \hat{C}_۱ = \hat{C}_۲$$

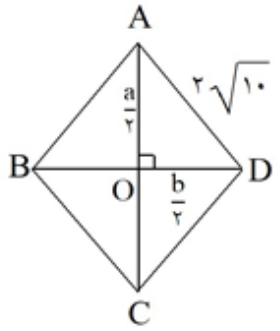
پس قطر AC نیمساز زاویه‌های A و C است.

$$AC \perp BD \Rightarrow S_{ABCD} = \frac{۱}{۲}AC \times BD = \frac{۱}{۲} \times ۸ \times ۶ = ۲۴$$

در ضمن از همنهشتی دو مثلث ABH و ADH نتیجه می‌گیریم $DH = BH$ پس قطر AC عمودمنصف BD است.

تلفن تماس: ۰۲۶۳۳۴۰۸۹۴۴

۱۴۳ a را بزرگ‌ترین قطر در نظر می‌گیریم. بنابراین $a = ۳b$ از طرفی در لوزی داریم: (بنا به رابطه‌ی فیثاغورس)



$$\left(\frac{a}{۲}\right)^۲ + \left(\frac{b}{۲}\right)^۲ = \left(۲\sqrt{۱۰}\right)^۲$$

$$\left(\frac{۳b}{۲}\right)^۲ + \left(\frac{b}{۲}\right)^۲ = ۴۰ \Rightarrow \frac{۱۰b^۲}{۴} = ۴۰ \Rightarrow b = \frac{۴ \times ۴۰}{۱۰}$$

$$b^۲ = ۱۶ \Rightarrow b = \sqrt{۱۶} = ۴ \Rightarrow a = ۱۲$$

مساحت برابر است با:

$$\frac{a.b}{۲} = \frac{۴ \times ۱۲}{۲} = \frac{۴۸}{۲} = ۲۴$$

۱۴۴

$b = ۴۴$

$i = ۴۵$

$$S = \frac{b}{۲} - ۱ + i \Rightarrow S = \frac{۴۴}{۲} - ۱ + ۴۵$$

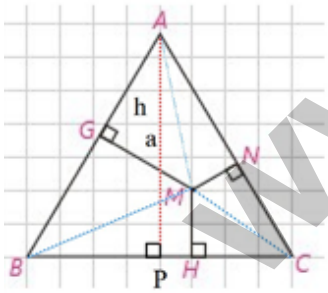
$$S = ۲۱ + ۴۵ = ۶۶$$

۱۴۵

تعداد نقاط مرزی b	۳	۴	۵	۶	۷	۸
مساحت	$\frac{۱}{۲}$	۱	$\frac{۳}{۲}$	۲	$\frac{۵}{۲}$	۳

$$S = \frac{b}{۲} - ۱ + ۰$$

۱۴۶ فرض کنیم M نقطه‌ای دلخواه درون مثلث متساوی‌الاضلاع ABC به ضلع a باشد. عمودهای MH و MN و MG را بر اضلاع مثلث و ارتفاع AP را رسم می‌کنیم. داریم:



$$S_{\Delta AMB} = \frac{۱}{۲}AB \times MG = \frac{۱}{۲}a \times MG \ , \ S_{\Delta AMC} = \frac{۱}{۲}AC \times MN$$

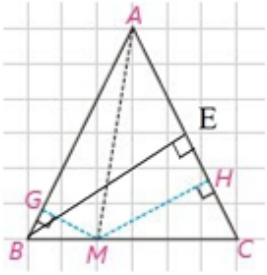
$$= \frac{۱}{۲}a \times MN \ , \ S_{\Delta BMC} = \frac{۱}{۲}BC \times MH = \frac{۱}{۲}a \times MH$$

$$S_{\Delta AMB} + S_{\Delta AMC} + S_{\Delta BMC} = S_{\Delta ABC} \Rightarrow \frac{۱}{۲}a \times MG + \frac{۱}{۲}a \times MN + \frac{۱}{۲}a \times MH$$

$$= \frac{۱}{۲}a \times AP \Rightarrow MG + MN + MH = h_a$$

تلفن تماس: ۰۲۶۳۳۴۰۸۹۴۴

۱۴۷ الف) در مثلث متساوی‌الساقین ABC که $AB = AC$ است، مجموع فاصله‌های هر نقطه روی قاعده BC از دو ساق AB , AC برابر ارتفاع وارد بر ساق مثلث است. زیرا:

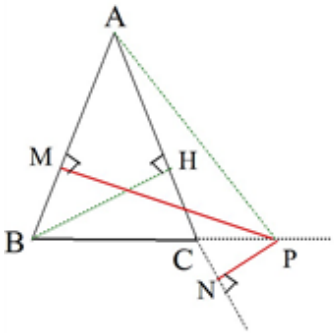


$$S_{\Delta ABM} = \frac{۱}{۲}AB \times MG \ , \ S_{\Delta ACM} = \frac{۱}{۲}AC \times MH \ , \ S_{\Delta ABC} = \frac{۱}{۲}AC \times BE$$

$$S_{\Delta ABM} + S_{\Delta ACM} = S_{\Delta ABC} \xrightarrow{AB = AC} \frac{۱}{۲}AC \times MG + \frac{۱}{۲}AC \times MH = \frac{۱}{۲}AC \times BE$$

$$\Rightarrow \frac{۱}{۲}\cancel{AC} \times (MG + MH) = \frac{۱}{۲}\cancel{AC} \times BE \Rightarrow MG + MH = BE$$

ب) فرض کنیم P نقطه‌ای روی امتداد ضلع BC باشد. اگر PM و PN فاصله‌های نقطه P از دو ساق مثلث ABC $(AB = AC = a)$ باشند، پاره‌خط AP و ارتفاع BH از مثلث ABC را رسم می‌کنیم.



$$S_{\Delta ABP} = \frac{۱}{۲}AB \times PM \ , \ S_{\Delta ACP} = \frac{۱}{۲}AC \times PN$$

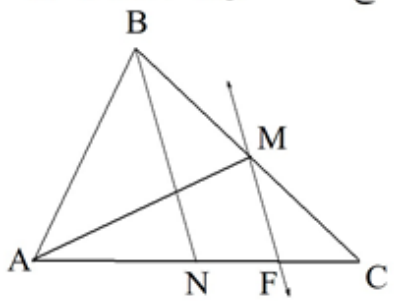
$$S_{\Delta ABC} = \frac{۱}{۲}AC \times BH$$

$$|S_{\Delta ABP} - S_{\Delta ACP}| = S_{\Delta ABC} \xrightarrow{AB = AC = a} \left|\frac{۱}{۲}a \times PM - \frac{۱}{۲}a \times PN\right| = \frac{۱}{۲}a \times BH$$

$$\Rightarrow \frac{۱}{\cancel{۲}}\cancel{a} \times |PM - PN| = \frac{۱}{\cancel{۲}}\cancel{a} \times BH \Rightarrow |PM - PN| = BH$$

تلفن تماس: ۰۲۶۳۳۴۰۸۹۴۴

۱۴۸ دو میانه‌ی AM و BN از ΔABC را رسم می‌کنیم. یک‌دیگر را در نقطه‌ی G درون مثلث قطع می‌کنند. از M وسط ضلع BC خطی را موازی میانه‌ی BN رسم می‌کنیم تا ضلع AC را در F قطع کند.



$\Delta BCN\ ;\ MF \parallel BN \xrightarrow{\text{تالس}} \frac{CF}{FN} = \frac{CM}{MB} = ۱ \Rightarrow CF = FN$

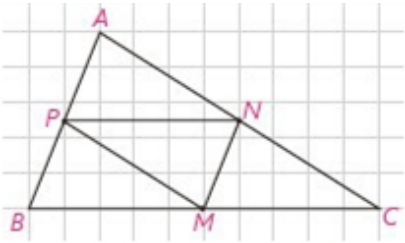
$AN = NC = ۲NF \Rightarrow AF = AN + FN = ۲FN + FN = ۳FN$

$\Delta AMF\ ;\ MF \parallel GN \xrightarrow{\text{تالس}} \frac{AG}{GM} = \frac{AN}{NF} = ۲$

$AG = ۲GM \Rightarrow AM = ۳GM$

بنابراین، $GM = \frac{۱}{۳}AM$ و $AG = \frac{۲}{۳}AM$ و G بین A و M است. مشابه آن ثابت می‌شود $BG = \frac{۲}{۳}BN$ پس برای هر دو میانه‌ی دلخواه نقطه‌ی G آن میانه را به نسبت خاص ۱ به ۲ تقسیم می‌کند. در نتیجه هر سه میانه در G همرس‌اند.

تلفن تماس: ۰۲۶۳۳۴۰۸۹۴۴



پاره‌خط PN موازی ضلع BC است و پاره‌خط PM موازی ضلع AC است. از آن‌جا که P و N به‌ترتیب وسط AB و AC هستند، پس:

$$\frac{AP}{PB}=\frac{AN}{NC}\xrightarrow{\text{طبق عکس قضیه تالس}}PN \parallel BC$$

$$\frac{BP}{PA}=\frac{BM}{MC}\xrightarrow{\text{طبق عکس قضیه تالس}}PM \parallel AC$$

بنابراین چهارضلعی PNCM متوازی‌الاضلاع می‌باشد.

$$\left.\begin{array}{l}MN=MN \ \text{مشترک}\\ \text{ضلع های مقابل در متوازی الاضلاع}\ \begin{cases}PN=MC\\ PM=NC\end{cases}\end{array}\right\}\xrightarrow{\text{(ض ض ض)}}\Delta MNP\cong\Delta NMC \quad (۱)$$

حال ثابت می‌کنیم PNMB یک متوازی‌الاضلاع است زیرا:

$$\frac{AN}{NC}=\frac{AP}{PB}\xrightarrow{\text{طبق عکس تالس}}PN \parallel BC \Rightarrow PN \parallel BM \quad (۱)$$

$$\frac{NC}{AN}=\frac{MC}{MB}\xrightarrow{\text{طبق عکس تالس}}NM \parallel AB \Rightarrow NM \parallel BD \quad (۲)$$

از (۱) و (۲) نتیجه می‌شود که چهارضلعی PNMB چون ضلع‌های روبه‌رویش دو به دو با هم موازی هستند پس متوازی‌الاضلاع است. داریم:

$$\left.\begin{array}{l}PM \ \text{ضلع مشترک}\\ \text{ضلع های متقابل در متوازی الاضلاع}\ \begin{cases}BP=MN\\ PN=BM\end{cases}\end{array}\right\}\xrightarrow{\text{(ض ض ض)}}\Delta PBM\cong\Delta PNM \quad (۲)$$

در ادامه‌ی کار ثابت می‌شود که ANMP یک متوازی‌الاضلاع است چون:

$$\text{نتایج قسمت های قبل}\ \begin{cases}MN \parallel AB \Rightarrow MN \parallel AP\\ PM \parallel AC \Rightarrow PM \parallel AN\end{cases}\Rightarrow \text{ANMP متوازی الاضلاع}$$

پس: $\Delta APN\cong\Delta PNM$ (۳) بنا به حالت (ض ض ض)

با مقایسه رابطه‌ی (۱) و (۲) و (۳) داریم: $\Delta APN\cong\Delta BPM\cong\Delta MNP\cong\Delta MNC$

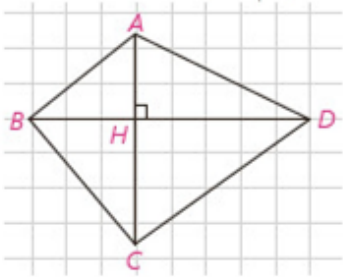
تلفن تماس: ۰۲۶۳۳۴۰۸۹۴۴

۱۵۰ الف) در مثلث ABC ارتفاع AH را رسم می‌کنیم. در این صورت AH ارتفاع هر دو مثلث ABM و ACM است.

$$\left.\begin{array}{l} S_{\Delta ABM} = \frac{۱}{۲} AH \times BM \\ S_{\Delta ACM} = \frac{۱}{۲} AH \times CM \end{array}\right\} \xrightarrow{BM = MC} S_{\Delta ABM} = S_{\Delta ACM}$$

ب) بله زیرا FM نیز میانه مثلث BFC است.

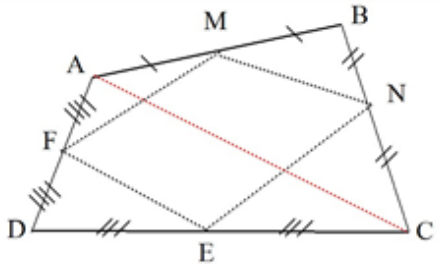
۱۵۱ در چهارضلعی ABCD دو قطر AC و DB برهم عمودند.

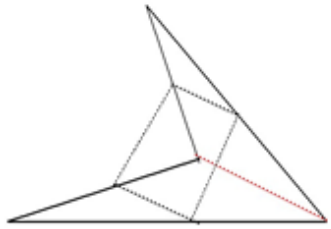


$$\left.\begin{array}{l} S_{ADB} = \frac{۱}{۲} BD \times AH \\ S_{DBC} = \frac{۱}{۲} BD \times CH \end{array}\right\} \xrightarrow{+} S_{ABCD} = \frac{۱}{۲} BD \times (AH + HC) = \frac{۱}{۲} BD \times AC$$

تلفن تماس: ۰۲۶۳۳۴۰۸۹۴۴

۱۵۲





برهان: فرض کنیم نقاط M , N , E , F به‌ترتیب وسط های اضلاع AB و BC و CD و AD از چهارضلعی ABCD باشند باید ثابت کنیم چهارضلعی MNEF متوازی‌الاضلاع است. قطر AC را رسم می‌کنیم:

$$\Delta ABC\ ;\ \frac{BM}{AB}=\frac{BN}{BC}=\frac{۱}{۲}\xrightarrow{\text{عکس تالس}} MN \parallel AC\ ,\ MN=\frac{AC}{۲}\quad (۲)$$

$$\Delta ACD\ ;\ \frac{DE}{DC}=\frac{DF}{DA}=\frac{۱}{۲}\xrightarrow{\text{عکس تالس}} EF \parallel AC\ ,\ EF=\frac{AC}{۲}\quad (۲)$$

$$(۱)\ ,\ (۲)\Rightarrow MN \parallel EF\ ,\ MN=EF$$

به عبارت دیگر در چهارضلعی MNEF دو ضلع موازی و مساوی‌اند لذا چهارضلعی MNEF متوازی‌الاضلاع است.
اگر قطرهای چهارضلعی ABCD برهم عمود باشند. چهارضلعی MNEF مستطیل است. زیرا قطرهای چهارضلعی ABCD با اضلاع چهارضلعی MNEF موازی‌اند.
اگر قطرهای چهارضلعی ABCD با هم مساوی باشند. چهارضلعی MNEF لوزی است و اندازه هر ضلع این لوزی نصف طول قطر چهارضلعی ABCD است.

$$MN=EF=\frac{AC}{۲}\ ,\ FM=EN=\frac{BD}{۲}$$

$$\Rightarrow MN+NE+EF+FM=۲\left(\frac{AC}{۲}+\frac{BD}{۲}\right)=AC+BD$$

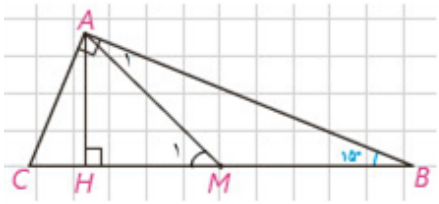
۱۵۳ اگر در یک چهارضلعی دو ضلع موازی و مساوی باشند آن چهارضلعی متوازی‌الاضلاع است. در چهارضلعی BMDN داریم:

$$AD=BC\xrightarrow{\div ۲}\left.\begin{matrix}BN=MD\\ BN \parallel MD\end{matrix}\right\}\xrightarrow{\text{چهارضلعی BMDN متوازی الاضلاع است}} BM \parallel DN$$

$$\Delta ADQ\ ;\ MP \parallel DQ\Rightarrow\frac{AP}{PQ}=\frac{AM}{MD}=۱\Rightarrow AP=PQ\quad (۱)$$

$$\Delta BCP\ ;\ BP \parallel QN\Rightarrow\frac{CQ}{QP}=\frac{CN}{NB}=۱\Rightarrow CQ=PQ\xrightarrow{\text{از } (۱)} AP=PQ=QC$$

۱۵۴ در مثلث قائم‌الزاویه میانه وارد وتر نصف وتر است پس:



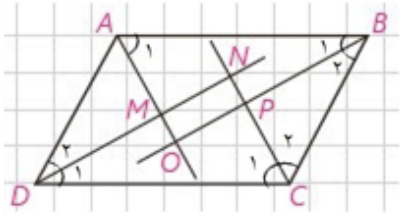
$\Delta ABC\ ;\ AM = MB = \frac{BC}{۲} \Rightarrow \angle A_۱ = \angle B = ۱۵^\circ$

$\overset{\triangle}{AMB}$ زاویه خارجی مثلث $\angle M_۱ = \angle A_۱ + \angle B = ۳۰^\circ$

از طرف دیگر در مثلث قائم‌الزاویه ضلع روبه‌رو به زاویه‌ی ۳۰ درجه نصف وتر است.

$$\Delta AMH;\ \angle H = ۹۰^\circ ,\angle M_۱ = ۳۰^\circ \Rightarrow AH = \frac{AM}{۲} \Rightarrow AH = \frac{\frac{BC}{۲}}{\frac{۲}{۱}} = \frac{BC}{۴}$$

۱۵۵ در متوازی‌الاضلاع دو زاویه مجاور مکملند پس:



$$\angle A + \angle B = ۱۸۰^\circ \Rightarrow \frac{\angle A}{۲} + \frac{\angle B}{۲} = \frac{۱۸۰^\circ}{۲} \Rightarrow \hat{A}_۱ + \hat{B}_۱ = ۹۰^\circ$$

پس در مثلث OAB زاویه‌ی O قائمه است.

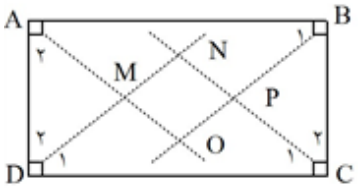
به روش مشابه ثابت می‌شود:

$\Delta NDC;\ \angle C_۱ + \angle D_۱ = ۹۰^\circ \Rightarrow \angle N = ۹۰^\circ \quad (۲)$

$\Delta PBC;\ \angle B_۲ + \angle C_۲ = ۹۰^\circ \Rightarrow \angle P = ۹۰^\circ \quad (۳)$

$(۱) , (۲) , (۳) \Rightarrow \angle M = \angle N = \angle P = \angle O = ۹۰^\circ \Rightarrow$ چهارضلعی MNPO مستطیل است.

بد نیست بدانید اگر چهارضلعی ABCD مستطیل باشد، آن‌گاه چهارضلعی MNPO مربع است. زیرا:



$\overset{\triangle}{CDN}\ ;\ \hat{C}_۱ = \hat{D}_۱ = ۴۵^\circ \Rightarrow CN = DN \quad (۱)$

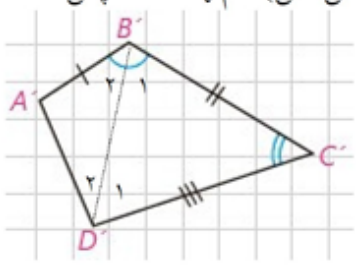
$$\left.\begin{array}{l} \hat{A}_۲ = \hat{B}_۲ = ۴۵^\circ \\ AD = BC \\ \hat{D}_۲ = \hat{C}_۲ = ۴۵^\circ \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{ز ض ز}} \overset{\triangle}{BCP} \cong \overset{\triangle}{ADM} \Rightarrow PC = DM \quad (۲)$$

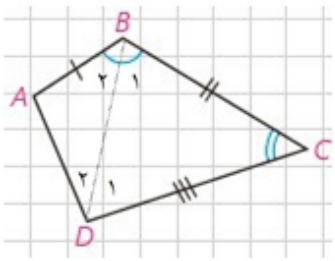
$(۱) , (۲) \Rightarrow CN - PC = DN - DM \Rightarrow PN = MN$

پس طول و عرض مستطیل MNPO با هم برابرند. به عبارت دیگر MNPO مربع است.

تلفن تماس: ۰۲۶۳۳۴۰۸۹۴۴

۱۵۶ الف) قطرهای BD و B'D' را در دو چهارضلعی رسم می‌کنیم بدیهی است که دو مثلث BCD و B'C'D' به حالت (ض ض ض) هم‌نهشت‌اند پس:





$$\angle B_1 = \angle B'_1 \xrightarrow{\angle B = \angle B'} \angle B_2 = \angle B'_2 \,,\ \angle D_1 = \angle D'_1$$

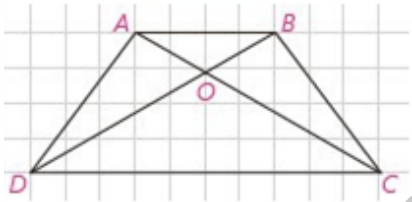
در دو مثلث ABD و A'B'D':

$$\left.\begin{array}{l} AB = A'B' \\ \angle B_2 = \angle B'_2 \\ BD = B'D' \end{array}\right\} \Rightarrow \Delta ABD \cong \Delta A'B'D' \Rightarrow \hat{A} = \hat{A'} \,,\ AD = A'D' \,,\ \hat{D}_2 = \hat{D'}_2 \Rightarrow \hat{D} = \hat{D'}$$

ب) در این حالت کافی است قطرهای AC و A'C' را رسم نموده و مانند قسمت الف عمل کنیم.

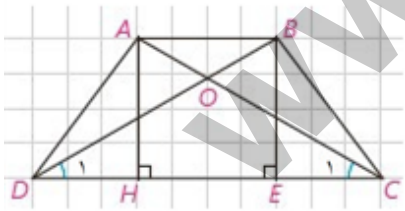
۱۵۷ $\frac{n(n-3)}{2} = n \Rightarrow \cancel{n}(n-3) = 2\cancel{n} \Rightarrow n - 3 = 2 \Rightarrow n = 5$

۱۵۸ فرض کنیم ABCD ذوزنقه‌ی متساوی‌الساقین باشد. داریم:



$$\left.\begin{array}{l} AD = BC \\ DC = DC \\ \hat{D} = \hat{C} \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{ض ز ض}} A\overset{\triangle}{D}C \cong B\overset{\triangle}{D}C \Rightarrow AC = BD$$

برعکس فرض کنیم در ذوزنقه‌ی ABCD دو قطر AC و BD برابر باشند. ارتفاع‌های AH و BE را رسم می‌کنیم. چون AB || DC پس دو ارتفاع AH و BE مساویند. داریم:



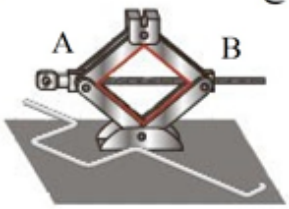
$$\left.\begin{array}{l} BE = AH \\ DB = AC \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{(وتر و یک ضلع)}} A\overset{\triangle}{H}C \cong B\overset{\triangle}{E}D \Rightarrow \hat{C}_1 = \hat{D}_1$$

حال ثابت می‌کنیم که دو مثلث ΔADC و ΔBDC با هم هم‌نهشت هستند.

$$\left.\begin{array}{l} AC = BD \\ DC \text{ مشترک} \\ \angle D_1 = \angle C_1 \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{(ض ز ض)}} \Delta BDC \cong \Delta ADC \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} BC = AD \\ \angle C = \angle D \end{array}\right.$$

پس ذوزنقه ABCD متساوی‌الساقین است.

۱۵۹ الف) بله، زمانی‌که فاصله‌ی بین B و A با ارتفاع جک یکسان باشد، یعنی قطرهای لوزی برابر باشند شکل مربع است.



ب) موقع بستن جک کاملاً بازوها روی هم قرار نمی‌گیرند، چون یکی زیاد باز می‌شود و دیگری کم‌تر باز می‌شود و موقع جمع کرن جک جای زیادتری خواهد گرفت.

۱۶۰ الف) زیرا قطرهایش یک‌دیگر را نصف می‌کنند.

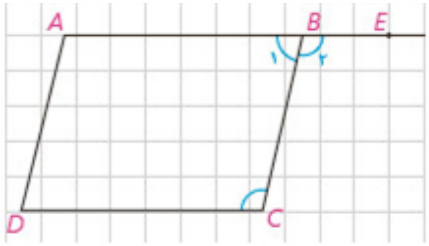
ب) زیرا زاویه A قائمه است و هر متوازی‌الاضلاعی که زاویه قائمه دارد مستطیل است.

پ) قطرهای هر مستطیل با هم مساوی‌اند.

ت) از پ $\Rightarrow AD = BC \Rightarrow \frac{AD}{۲} = \frac{BC}{۲} \Rightarrow AM = \frac{BC}{۲}$

بنابراین در هر مثلث قائم‌الزاویه اندازه‌ی میانه‌ی وارد بر وتر نصف اندازه‌ی وتر است.

۱۶۱ در متوازی‌الاضلاع ABCD شکل مقابل داریم:



$$\left.\begin{array}{l} AB \parallel DC \\ \text{مورب } BC \end{array}\right\} \Rightarrow \hat{B}_۲ = \hat{C} \xrightarrow{\hat{B}_۱ + \hat{B}_۲ = ۱۸۰^\circ} \hat{C} + \hat{B}_۱ = ۱۸۰^\circ$$

به همین ترتیب می‌توان ثابت کرد:

$$\hat{A} + \hat{B}_۱ = \hat{A} + \hat{D} = \hat{D} + \hat{C} = ۱۸۰^\circ$$

۱۶۲ در چهارضلعی ABCD فرض کنیم $AB = DC$ و $AD = BC$ حال قطر BD را رسم می‌کنیم.

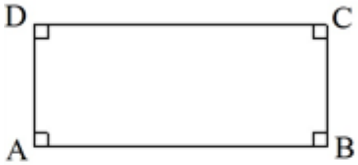
$$\left.\begin{array}{l} AB = DC \\ AD = BC \\ BD = BD \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{ض ض ض}} \overset{\triangle}{ABD} \cong \overset{\triangle}{BCD}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \hat{B}_۱ = \hat{D}_۱ \xrightarrow[\text{موازی و مورب}]{\text{عکس قضیه خطوط}} AB \parallel DC \\ \hat{B}_۲ = \hat{D}_۲ \xrightarrow[\text{موازی و مورب}]{\text{عکس قضیه خطوط}} AD \parallel BC \end{cases}$$

پس ABCD متوازی‌الاضلاع است.

۱۶۳ چهارضلعی ABCD همواره متوازی‌الاضلاع است زیرا دو مثلث ABD و BDC با هم هم‌نهشت هستند. بنابراین $\angle B_1 = \angle D_1$ و $\angle B_2 = \angle D_2$ می‌شود با توجه به این برابری و با کمک عکس قضیه‌ی توازی خطوط می‌توان نتیجه گرفت که $AD \parallel BC$ و $AB \parallel DC$ است. هر چهارضلعی که ضلع‌های مقابل آن دو به دو موازی باشند، متوازی‌الاضلاع نام دارد.

۱۶۴ الف) فرض: $\angle A = \angle B = \angle C = \angle D = ۹۰^\circ$

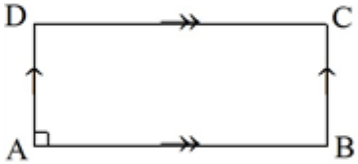


حکم: $AD \parallel BC \ , \ AB \parallel CD$

برهان: $\left.\begin{matrix} AD \perp AB \\ BC \perp AB \end{matrix}\right\} \Rightarrow AD \parallel BC \ , \ \left.\begin{matrix} AB \perp AD \\ CD \perp AD \end{matrix}\right\} \Rightarrow AB \parallel CD$

پس ABCD متوازی الاضلاع است.

ب) فرض: $\angle A = ۹۰^\circ \ , \ AD \parallel BC \ , \ AB \parallel CD$

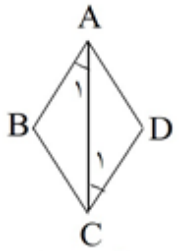


حکم: $\angle A = \angle B = \angle C = \angle D = ۹۰^\circ$

برهان: $AB \ , \ AD \parallel BC \Rightarrow \angle A = \angle B = ۹۰^\circ$ مورب (۱)

$AD \ , \ AB \parallel CD \Rightarrow \angle A = \angle D = ۹۰^\circ$ مورب (۲)

$۱ \ , \ ۲ \Rightarrow \angle A = \angle B = \angle D = ۹۰^\circ \Rightarrow \angle C = ۹۰^\circ$

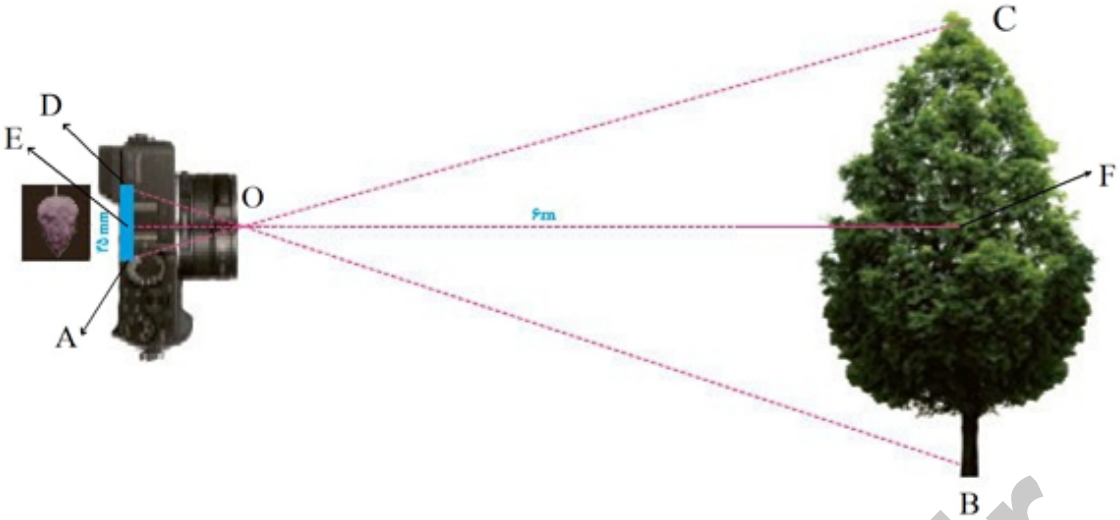


پ) در لوزی ABCD قطر AC را رسم می‌کنیم. دو مثلث ABC و ADC به حالت (ض ض ض) هم‌نهشت‌اند. بنابراین دو زاویه‌ی $\angle A_1$ و $\angle C_1$ هم‌اندازه‌اند. در نتیجه دو ضلع AB و CD موازی‌اند. به همین ترتیب دو ضلع مقابل BC و AD نیز موازی‌اند. یعنی لوزی متوازی‌الاضلاع است.

ت) بنا به تعریف مربع، هر چهار ضلع مربع با هم برابرند پس هر مربع نوعی لوزی است. از طرف دیگر هر لوزی نیز نوعی متوازی‌الاضلاع است. پس مربع یک متوازی‌الاضلاع است.

تلفن تماس: ۰۲۶۳۳۴۰۸۹۴۴

۱۶۵ با توجه به نام‌گذاری‌های روی شکل داریم:



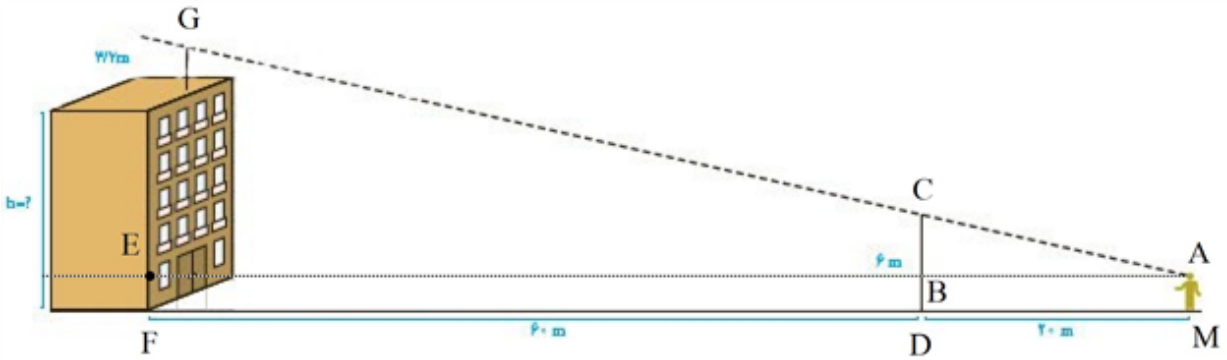
$$AD \parallel BC \xrightarrow{\text{قضیه اساسی تشابه}} \overset{\triangle}{OED} \sim \overset{\triangle}{OBF} \Rightarrow \frac{DE}{BF} = \frac{OE}{OF} \Rightarrow \frac{\frac{۰/۰۳۵}{۲}}{BF} = \frac{۰/۰۴۲}{۶}$$

$$\Rightarrow BF = ۲/۵ \Rightarrow BC = ۵$$

پس ارتفاع درخت ۵ متر است. (توجه کنید ۳۵mm مساوی ۰/۰۳۵m و ۴/۲cm مساوی ۰/۰۴۲m است.)

تلفن تماس: ۰۲۶۳۳۴۰۸۹۴۴

۱۶۶



با توجه به راهنمای مسئله خط راست را رسم می‌کنیم و نقاط را نام‌گذاری می‌کنیم، چون AE را موازی MF رسم کردیم، پس اندازه‌های زیر را داریم:

$BD = ۱/۶ \Rightarrow BC = ۶ - ۱/۶ = ۴/۴$

$EF = ۱/۶$

در مثلث AEG دو خط BC و EG موازیند، پس داریم:

$$\frac{AB}{AE} = \frac{BC}{EG} \Rightarrow \frac{۲۰}{۸۰} = \frac{۴/۴}{x} \Rightarrow x = \frac{\cancel{۸۰}^{۴} \times ۴/۴}{\cancel{۲۰}_{۱}} = ۱۷/۶$$

بلندی ساختمان $= (۱۷/۶ - ۳/۲) + ۱/۶ = ۱۶$

ارتفاع ساختمان ۱۶ متر است.

۱۶۷

الف)

$$\Delta ABH \sim \Delta ABC \Rightarrow \frac{AB}{BC} = \frac{AH}{AB} = \frac{BH}{AC} \Rightarrow \frac{S_{ABH}}{S_{ABC}} = \left(\frac{AB}{BC}\right)^{۲}$$

$$\Delta ACH \sim \Delta ABC \Rightarrow \frac{AC}{BC} = \frac{AH}{AB} = \frac{CH}{AC} \Rightarrow \frac{S_{ACH}}{S_{ABC}} = \left(\frac{AC}{BC}\right)^{۲}$$

ب) با جمع تساوی‌های به دست آمده در قسمت الف داریم:

$$\frac{S_{ABH}}{S_{ABC}} + \frac{S_{ACH}}{S_{ABC}} = \frac{S_{ABC}}{S_{ABC}} = ۱$$

$$\frac{S_{ABH}}{S_{ABC}} + \frac{S_{ACH}}{S_{ABC}} = \left(\frac{AB}{BC}\right)^{۲} + \left(\frac{AC}{BC}\right)^{۲} \Rightarrow \frac{S_{ABC}}{S_{ABC}} = \frac{AB^{۲} + AC^{۲}}{BC^{۲}}$$

$$\Rightarrow ۱ = \frac{AB^{۲} + AC^{۲}}{BC^{۲}} \Rightarrow AB^{۲} + AC^{۲} = BC^{۲}$$

تلفن تماس: ۰۲۶۳۳۴۰۸۹۴۴

۱۶۸

$$BE = ۲DE \Rightarrow \frac{BE}{DB} = \frac{۲}{۳} \text{ و } \frac{AB}{DC} = \frac{۲a}{۳a} = \frac{۲}{۳} \text{ و } \frac{AE}{BC} = \frac{۴b}{۶b} = \frac{۲}{۳} \quad (۱)$$

اندازه‌ی اضلاع مثلث‌ها با هم متناسب‌اند، در نتیجه، مثلث‌های ABE و BCD متشابه‌اند و زاویه‌هایشان با هم برابر است.

$\angle A = \angle C$ و $\angle D = \angle ABE$ و $\angle E = \angle CBD$

بنابراین می‌توان نوشت:

$$\angle D = \angle ABE \Rightarrow (x + y)^\circ = (۲x - ۷)^\circ \Rightarrow y = x - ۷ \quad (۱)$$

$$\angle E = \angle CBD \Rightarrow (۲x - ۱)^\circ = (y + ۱۵)^\circ \Rightarrow y = ۲x - ۱۶ \quad (۲)$$

با توجه به ۱ و ۲ داریم:

$$۲x - ۱۶ = x - ۷ \Rightarrow x = ۹ , \ y = ۲$$

با توجه به ۱ نسبت تشابه $\overset{\triangle}{BCD}$ به $\overset{\triangle}{BAE}$ برابر $\frac{۳}{۲}$ است. در نتیجه، نسبت مساحت‌ها برابر است با $\left(\frac{۳}{۲}\right)^۲ = \frac{۹}{۴}$

۱۶۹

$$MN \parallel BC \xrightarrow{\text{قضیه اساسی تشابه}} \overset{\triangle}{AMN} \sim \overset{\triangle}{ABC} \Rightarrow \frac{S_{AMN}}{S_{ABC}} = K^۲ \quad (۱)$$

از طرف دیگر بنابر فرض داریم:

$$\frac{S_{\overset{\triangle}{AMN}}}{S_{MNCB}} = \frac{۱}{۸} \Rightarrow \frac{S_{\overset{\triangle}{AMN}}}{S_{MNCB} + S_{AMN}} = \frac{S_{\overset{\triangle}{AMN}}}{S_{\overset{\triangle}{ABC}}} = \frac{۱}{۹} \quad (۲)$$

از (۱) و (۲) نتیجه می‌گیریم $K^۲ = \frac{۱}{۹}$ پس $K = \frac{۱}{۳}$ داریم:

$$\frac{AM}{AB} = \frac{۱}{۳} \Rightarrow \frac{AM}{AB - AM} = \frac{۱}{۳ - ۱} \Rightarrow \frac{AM}{BM} = \frac{۱}{۲} \Rightarrow \frac{BM}{AM} = \frac{۲}{۱}$$

۱۷۰ در دو مثلث متشابه نسبت محیطها برابر نسبت اضلاع متناظر است.

$$\frac{p}{p'} = \frac{a}{a'} \xrightarrow{p = ۱۵ + ۱۲ + ۱۰ = ۳۷} \frac{۳۷}{p'} = \frac{۱۵}{۱۰} \Rightarrow p' = \frac{۳۷ \times ۱۰}{۱۵} = \frac{۳۷ \times ۲}{۳} = \frac{۷۴}{۳}$$

۱۷۱

الف)

$$\left.\begin{array}{l} A\hat{O}B = D\hat{O}C \\ \hat{B} = \hat{C} \end{array}\right\} \Rightarrow \overset{\triangle}{AOB} \sim \overset{\triangle}{OCD}$$

ب) می‌دانیم نسبت نیمسازهای نظیر در دو مثلث متشابه با نسبت تشابه برابر است پس:

$$\frac{OE}{OF} = \frac{OB}{OC} = \frac{۲}{۳}$$

ج)

$$\frac{OE}{OF} = \frac{۲}{۳} \Rightarrow \frac{OE + OF}{OF} = \frac{۵}{۳} \Rightarrow \frac{۱۰}{OF} = \frac{۵}{۳} \Rightarrow OF = ۶ , \ OE = ۴$$

۱۷۲ فرض کنیم p محیط چندضلعی دیگر باشد، داریم:

$$\frac{S}{S'} = \left(\frac{p}{p'}\right)^۲ \Rightarrow \frac{۴}{۹} = \left(\frac{p}{p'}\right)^۲ \Rightarrow \frac{۲}{۳} = \frac{p}{p'} \xrightarrow{p' = ۱۲} \frac{۲}{۳} = \frac{p}{۱۲} \Rightarrow p = ۸$$

در حالت دوم داریم:

$$\frac{S}{S'} = \left(\frac{p'}{p}\right)^۲ \Rightarrow \frac{۴}{۹} = \left(\frac{p'}{p}\right)^۲ \Rightarrow \frac{۲}{۳} = \frac{p'}{p} \xrightarrow{p' = ۱۲} \frac{۲}{۳} = \frac{۱۲}{p} \Rightarrow p = ۱۸$$

۱۷۳

$$\begin{matrix}\frac{S}{S'}=K^{۲}\\ \frac{P}{P'}=K\end{matrix}\Rightarrow\frac{S}{S'}=\left(\frac{۱۰}{۱۸}\right)^{۲}\Rightarrow\frac{S}{۱۵}=\left(\frac{۵}{۹}\right)^{۲}\Rightarrow S=\frac{۲۵\times۱۵}{۹\times۹}=\frac{۱۲۵}{۲۷}$$

۱۷۴

۱) $\frac{AB}{A'B'}=\frac{AC}{A'C'}=\frac{BC}{B'C'}=\frac{CD}{C'D'}=K\Rightarrow\frac{AB+AC+BC+CD}{A'B'+A'C'+B'C'+C'D'}=K\Rightarrow\frac{\text{محیط}_{ABCD}}{\text{محیط}_{A'B'C'D'}}=K$

دو چهارضلعی ABCD و A'B'C'D' متشابهند. پس اضلاع آن‌ها متناسبند و نسبت اضلاع آن‌ها برابر K است.

۲) $\frac{AD}{A'D'}=\frac{DC}{D'C'},\ \hat{D}=\hat{D'}\Rightarrow A\overset{\triangle}{C}D\sim A'\overset{\triangle}{C'}D'$

$\frac{AB}{A'B'}=\frac{BC}{B'C'},\ \hat{B}=\hat{B'}\Rightarrow A\overset{\triangle}{B}C\sim A'\overset{\triangle}{B'}C'$

۳) $\frac{S_{A'C'D'}}{S_{ACD}}=K^{۲},\ \frac{S_{A'B'C'}}{S_{ABC}}=K^{۲}\Rightarrow\frac{S_{A'C'D'}+S_{A'B'C}}{S_{ACD}+S_{ABC}}=K^{۲}\Rightarrow\frac{S_{ABCD}}{S_{A'B'C'D'}}=K^{۲}$

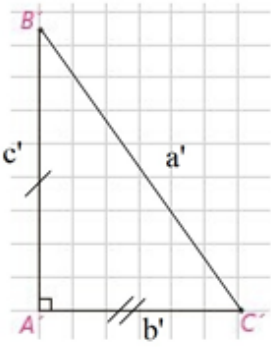
تلفن تماس: ۰۲۶۳۳۴۰۸۹۴۴

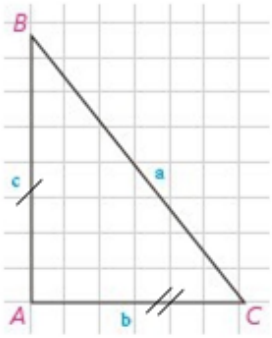
۱۷۵ الف) اگر در مثلثی مربع یک ضلع با حاصل جمع مربعات دو ضلع دیگر برابر باشد، آن مثلث قائم‌الزاویه است، یعنی اگر در مثلث به طول اضلاع a , b , c یکی از رابطه‌های زیر برقرار باشد:

$$a^۲ = b^۲ = c^۲ \quad \text{یا} \quad b^۲ = a^۲ + c^۲ \quad \text{یا} \quad c^۲ = a^۲ + b^۲$$

آن‌گاه مثلث قائم الزاویه است.

ب)





۱-

۲- طبق فرض $\Rightarrow a^۲ = b^۲ + c^۲$

$\hat{A}' = ۹۰ \Rightarrow a'^۲ = b'^۲ + c'^۲$

۳- $(B'C')^۲ = (A'B')^۲ + (A'C')^۲ \xrightarrow[A'C' = b]{A'B' = C} (B'C')^۲ = c^۲ + b^۲$

$\xrightarrow{c^۲ + b^۲ = a^۲} (B'C')^۲ = (BC)^۲ \Rightarrow B'C' = BC$

۴-

$$\left.\begin{array}{r} AB = A'B' \text{ طبق فرض مساله} \\ AC = A'C' \text{ طبق فرض مساله} \\ BC = B'C' \text{ از قسمت ۳ استفاده می کنیم} \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{ض ض ض}} \overset{\triangle}{ABC} \cong \overset{\triangle}{A'B'C'} \Rightarrow \hat{A} = \hat{A}' = ۹۰$$

ج) مثلث ABC یک مثلث قائم‌الزاویه است اگر و تنها اگرمربع یک ضلع با حاصل جمع مربعات دو ضلع دیگر برابر باشد.

تلفن تماس: ۰۲۶۳۳۴۰۸۹۴۴

۱۷۶

$$\overset{\triangle}{ABH}: AB^{۲} = BH^{۲} + AH^{۲} \Rightarrow ۲۲۵ = (۱۴ - x)^{۲} + y^{۲} \Rightarrow ۲۲۵ - (۱۴ - x)^{۲} = ۱۶۹ - x^{۲}$$

$$\overset{\triangle}{ACH}: AC^{۲} = CH^{۲} + AH^{۲} \quad ۱۶۹ = x^{۲} + y^{۲}$$

$$\Rightarrow ۲۲۵ - ۱۶۹ - \cancel{x^{۲}} + ۲۸x = ۱۶۹ - \cancel{x^{۲}} \Rightarrow ۲۸x = ۱۴۰ \Rightarrow x = ۵$$

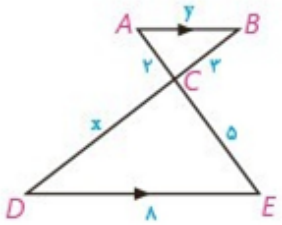
در نتیجه داریم:

$$۱۶۹ = x^{۲} + y^{۲} \xrightarrow{x = ۵} ۱۶۹ = ۲۵ + y^{۲} \Rightarrow y^{۲} = ۱۴۴ \Rightarrow y = ۱۲$$

$$S_{ABC} = \frac{۱}{۲} AH \times BC = \frac{۱}{۲}(۱۲)(۱۴) = ۸۴$$

تلفن تماس: ۰۲۶۳۳۴۰۸۹۴۴

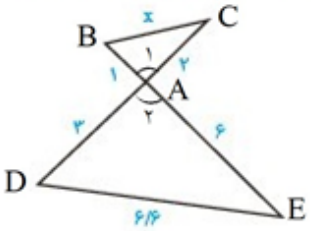
۱۷۷ الف)



$$AB \parallel DE \xrightarrow{\text{قضیه اساسی تشابه}} \overset{\triangle}{ABC} \sim \overset{\triangle}{DCE} \Rightarrow \frac{BC}{DC} = \frac{AC}{CE} \Rightarrow \frac{۳}{x} = \frac{۲}{۵} \Rightarrow x = \frac{۱۵}{۲} = ۷/۵$$

$$\Rightarrow \frac{y}{۸} = \frac{۲}{۵} \Rightarrow y = \frac{۱۶}{۵} = ۳/۲$$

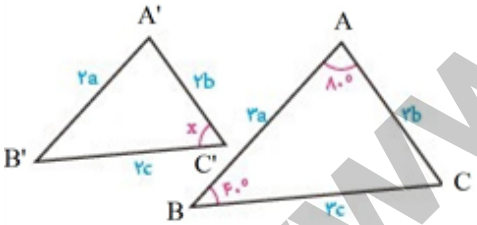
ب) دو مثلث ABC و ADE با تناسب بین دو ضلع و برابری زاویه‌ی بین آن‌ها متشابه‌اند. زیرا:



$$\left.\begin{array}{l} \frac{AB}{AD} = \frac{۱}{۳} \\ \frac{AC}{AE} = \frac{۲}{۶} = \frac{۱}{۳} \\ \hat{A}_۱ = \hat{A}_۲ \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AE} \Rightarrow \overset{\triangle}{ABC} \sim \overset{\triangle}{ADE} \Rightarrow \frac{AB}{AD} = \frac{BC}{DE}$$

$$\Rightarrow \frac{۱}{۳} = \frac{x}{۶/۶} \Rightarrow x = \frac{۶/۶ \times ۱}{۳} = ۲/۲$$

ج)



$$\frac{A'C'}{AC} = \frac{۲b}{۳b} = \frac{۲}{۳} \quad (۱)$$

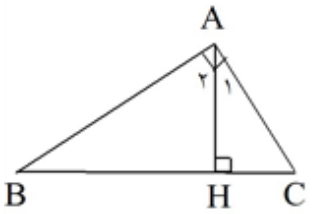
$$\frac{B'C'}{B'C'} = \frac{۲c}{۳c} = \frac{۲}{۳} \quad (۲)$$

$$\frac{A'B'}{AB} = \frac{۲a}{۳a} = \frac{۲}{۳} \quad (۳)$$

از روابط مقابل نتیجه می‌گیریم دو مثلث ABC و A'B'C' به حالت تناسب سه ضلع، متشابه‌اند و داریم:

$$\begin{cases} \hat{A} = \hat{A}' \Rightarrow \hat{A} = ۸۰^\circ \\ \hat{B} = \hat{B}' \Rightarrow \hat{B}' = ۴۰^\circ \\ \hat{C} = \hat{C}' \Rightarrow \hat{C} = \hat{C}' = ۱۸۰^\circ - \cancel{(۸۰^\circ + ۴۰^\circ)}^{۱۲۰^\circ} = ۶۰^\circ \end{cases}$$

۱۷۸ ۱) دو مثلث $\overset{\triangle}{ABH}$ و $\overset{\triangle}{ABC}$ متشابهند زیرا:



$$\left.\begin{array}{l}\hat{B}=\hat{B}\\ \hat{A}=\hat{H}=۹۰^\circ\end{array}\right\}\Rightarrow \overset{\triangle}{ABC}\sim\overset{\triangle}{ABH}\Rightarrow\frac{AB}{BC}=\frac{BH}{AB}\Rightarrow AB^۲=BC.BH$$

۲) دو مثلث $\overset{\triangle}{ACH}$ و $\overset{\triangle}{ABC}$ متشابهند زیرا:

$$\left.\begin{array}{l}\hat{C}=\hat{C}\\ \hat{A}=\hat{H}=۹۰^\circ\end{array}\right\}\Rightarrow \overset{\triangle}{ABC}\sim\overset{\triangle}{ACH}\Rightarrow\frac{AC}{BC}=\frac{CH}{AC}\Rightarrow AC^۲=BC.CH$$

۳) از جمع تساوی‌های به دست آمده در (۱) و (۲) نتیجه می‌گیریم:

$$\begin{array}{l}(۱)\Rightarrow AB^۲=BC.BH\\ (۲)\Rightarrow AC^۲=BC.CH\end{array}\xrightarrow{+} AB^۲+AC^۲=BC\underbrace{(BH+CH)}_{BC}\Rightarrow AB^۲+AC^۲=BC^۲$$

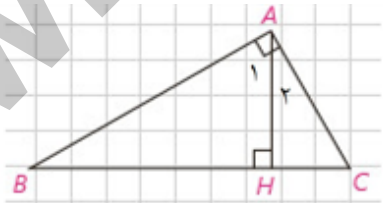
۴) دو مثلث $\overset{\triangle}{ACH}$ و $\overset{\triangle}{ABH}$ متشابهند زیرا:

$$\left.\begin{array}{l}\hat{A}_۱+\hat{A}_۲=۹۰^\circ\\ \hat{A}_۲+\hat{B}=۹۰^\circ\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{l}\hat{B}=\hat{A}_۱\\ \hat{H}=\hat{H}=۹۰^\circ\end{array}\right\}\Rightarrow\overset{\triangle}{ABH}\sim\overset{\triangle}{ACH}\Rightarrow\frac{AH}{CH}=\frac{BH}{AH}\Rightarrow AH^۲=BH.CH$$

۵) از تشابه دو مثلث $\overset{\triangle}{ABH}$ و $\overset{\triangle}{ABC}$ می‌توان نتیجه گرفت:

$$\overset{\triangle}{ABH}\sim\overset{\triangle}{ABC}\Rightarrow\frac{AH}{AC}=\frac{AB}{BC}\Rightarrow AH.BC=AB.AC$$

۱۷۹

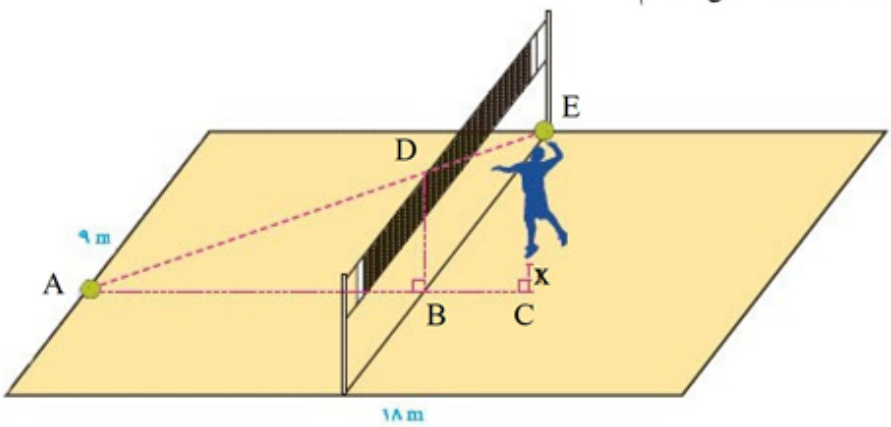


با توجه به شکل تساوی زاویه‌های $\hat{B}=\hat{B}$ و $\hat{H}=\hat{A}=۹۰^\circ$ را نتیجه می‌گیریم. پس دو مثلث $\overset{\triangle}{ABH}$ و $\overset{\triangle}{ABC}$ متشابهند. از طرف دیگر $\hat{C}=\hat{C}$ و $\hat{A}=\hat{H}=۹۰^\circ$ پس دو مثلث $\overset{\triangle}{ACH}$ و $\overset{\triangle}{ABC}$ متشابهند.

$$\left.\begin{array}{l}\overset{\triangle}{ABC}\sim\overset{\triangle}{ABH}\Rightarrow\hat{A}_۱=\hat{C}\\ \overset{\triangle}{ABC}\sim\overset{\triangle}{ACH}\Rightarrow\hat{A}_۲=\hat{B}\end{array}\right\}\Rightarrow\overset{\triangle}{ABH}\sim\overset{\triangle}{ACH}$$

تلفن تماس: ۰۲۶۳۳۴۰۸۹۴۴

۱۸۰ با توجه به اسم‌گذاری‌های روی شکل داریم:

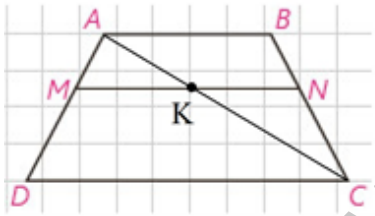


$$BD \parallel EC \Rightarrow \frac{AB}{AC} = \frac{BD}{CE} \Rightarrow \frac{۹}{۱۱} = \frac{۲/۴۳}{CE} \Rightarrow CE = \frac{۱۱ \times ۲/۴۳}{۹} = ۲/۹۷$$

حال اگر x میزان پرش بازیکن باشد، داریم:

$$CE = x + \text{قد بازیکن} + \text{فاصله توپ تا بازیکن} \Rightarrow ۲/۹۷ = x + ۱/۸ + ۰/۳ \Rightarrow x = ۰/۸۷$$

۱۸۱ قطر AC را رسم می‌کنیم تا MN را در نقطه‌ی K قطع کند. داریم:



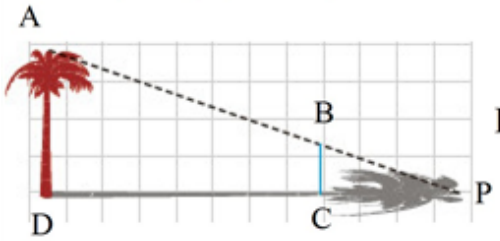
$$\overset{\triangle}{ADC} : MK \parallel DC \Rightarrow \frac{AM}{MD} = \frac{AK}{KC}$$

$$\overset{\triangle}{ABC} : KN \parallel AB \Rightarrow \frac{BN}{NC} = \frac{AK}{KC}$$

$$\Rightarrow \frac{AM}{MD} = \frac{BN}{NC}$$

تلفن تماس: ۰۲۶۳۳۴۰۸۹۴۴

۱۸۲ ابتدا نقاط را نام‌گذاری می‌کنیم. با به کار بردن قضیه‌ی تالس می‌توانیم طول درخت را بیابیم. طبق فرض داریم:



$DP = ۶۰ \ , \ PC = ۳ \ , \ BC = ۱$

حال با استفاده از قضیه‌ی تالس می‌نویسیم:

$$BC \parallel AD \Rightarrow \frac{PC}{DP} = \frac{BC}{AD} \Rightarrow \frac{۳}{۶۰} = \frac{۱}{AD} \Rightarrow AD = \frac{۱ \times \cancel{۶۰}^{۲۰}}{\cancel{۳}_{۱}} \Rightarrow AD = ۲۰$$

پس بلندی درخت برابر با ۲۰ متر است.

۱۸۳

$$BC \parallel DE \Rightarrow \frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AE}$$
$$BE \parallel DF \Rightarrow \frac{AB}{AD} = \frac{AE}{AF} \Rightarrow \frac{AC}{AE} = \frac{AE}{AF} \Rightarrow AE^{۲} = AC.AF$$

۱۸۴

$$AB \parallel A'B' \Rightarrow \frac{OA}{OA'} = \frac{OB}{OB'}$$
$$BC \parallel B'C' \Rightarrow \frac{OC}{OC'} = \frac{OB}{OB'} \Rightarrow \frac{OA}{OA'} = \frac{OC}{OC'} \xrightarrow{\text{عکس تالس}} AC \parallel A'C'$$

۱۸۵

$$DE \parallel AB \Rightarrow \frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC} \Rightarrow \frac{۲}{DB} = \frac{۱}{۰/۵} \Rightarrow DB = ۱ \Rightarrow AB = ۲ + ۱ = ۳$$
$$DE \parallel BC \Rightarrow \frac{AD}{AB} = \frac{DE}{BC} \Rightarrow \frac{۲}{۳} = \frac{DE}{۴} \Rightarrow DE = \frac{۸}{۳}$$

۱۸۶ تناسب‌های (الف) و (ت) و (ث) و (ح) نادرست هستند.
تناسب‌های (ب) و (پ) و (ج) و (چ) درست هستند.

۱۸۷ $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} \Rightarrow MN \parallel BC$

۱۸۸ اولاً چهارضلعی DEFB متوازی‌الاضلاع است زیرا اضلاع مقابل آن دو به دو موازیند. پس ضلع‌های مقابل آن مساویند. یعنی: $DE = BF \ , \ DB = EF$

ثانیاً: $DE \parallel BC \Rightarrow \frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC} \quad (۱)$

ثالثاً: $EF \parallel AB \Rightarrow \frac{BF}{BC} = \frac{AE}{AC} \quad (۲)$

در نتیجه: از (۱) و (۲) $\Rightarrow \frac{AD}{AB} = \frac{BF}{BC} \xrightarrow{BE = BF} \frac{AD}{AB} = \frac{DE}{BC}$

۱۸۹

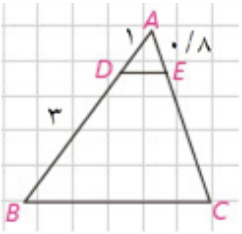
$$DE \parallel BC \Rightarrow \frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC} \Rightarrow \frac{AD}{AD + DB} = \frac{AE}{AE + EC}$$

$$\Rightarrow \frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC} \xrightarrow{\text{تفضیل از صورت}} \frac{AB - AD}{AB} = \frac{AC - AE}{AC} \Rightarrow \frac{DB}{AB} = \frac{CE}{AC}$$

۱۹۰

$$MN \parallel BC \Rightarrow \frac{AM}{BM} = \frac{AN}{NC} \Rightarrow \frac{x}{۳} = \frac{۲x - ۰/۵}{۴/۵} \Rightarrow ۴/۵x = ۶x - ۱/۵ \Rightarrow ۱/۵ = ۱/۵x \Rightarrow x = ۱$$

۱۹۱

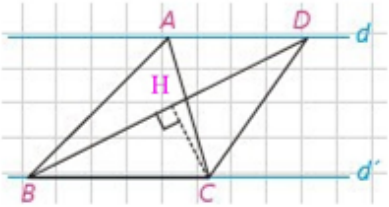


$$DE \parallel BC \Rightarrow \frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC} \Rightarrow \frac{۱}{۳} = \frac{۰/۸}{EC} \Rightarrow EC = ۲/۴$$

بنابراین:

$$AC = AE + EC = ۱/۸ + ۲/۴ = ۴/۲$$

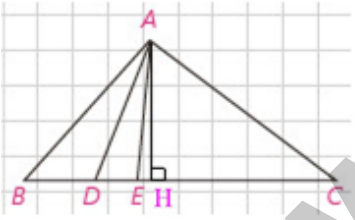
۱۹۲ در شکل عمود CH فاصله‌ی نقطه‌ی C از BD است. چون دو مثلث ABC و DBC دارای ارتفاع مساوی و قاعده‌ی مشترک هستند پس هم‌مساحتند. داریم:



$$S_{\overset{\Delta}{ABC}} = S_{\overset{\Delta}{BCD}} = ۸cm^۲$$

$$۸ = \frac{۱}{۲} \times BD \times CH \Rightarrow ۸ = \frac{۱}{\cancel{۲}_{۱}} \times \cancel{۶}^{۳} \times CH \Rightarrow CH = \frac{۸}{۳}$$

۱۹۳ ارتفاع AH را رسم می‌کنیم. در این صورت AH ارتفاع مشترک هر سه مثلث است.



$$S_{ACE} = ۳S_{ADE} \Rightarrow \frac{۱}{۲}\cancel{AH} \times CE = ۳ \times \frac{۱}{۲}\cancel{AH} \times DE \Rightarrow CE = ۳DE \quad (۱)$$

$$S_{ACE} = ۲S_{AOB} \Rightarrow \frac{۱}{۲}\cancel{AH} \times CE = ۲ \times \frac{۱}{۲}\cancel{AH} \times BD \Rightarrow CE = ۲BD \quad (۲)$$

حال با فرض $DE = x$ از (۱) نتیجه می‌گیریم $CE = ۳x$ و از (۲) نتیجه می‌گیریم $BD = \frac{۳}{۲}x$ پس داریم:

$$\frac{BC}{DE} = \frac{\frac{۳}{۲}x + x + ۳x}{x} = \frac{\frac{۱۱}{۲}x}{x} = \frac{۱۱}{۲}$$

$$\frac{DE}{BD} = \frac{x}{\frac{۳}{۲}x} = \frac{۲}{۳}$$

تلفن تماس: ۰۲۶۳۳۴۰۸۹۴۴

۱۹۴ الف)

$$\left.\begin{array}{l} \text{مساحت } ABC = \frac{1}{2} AC \times BD \\ \text{مساحت } ABC = \frac{1}{2} AB \times CE \end{array}\right\} \Rightarrow AC \times BD = AB \times CE \Rightarrow \frac{AC}{CE} = \frac{AB}{BD}, \frac{BD}{CE} = \frac{AB}{AC}$$

ب) خیر - حالت‌های مختلف تناسب

۱۹۵ الف) $\hat{D}_2$ زاویه‌ی خارجی مثلث ABD است پس $\hat{D}_2 = \hat{A}_1 + \hat{B}$ در نتیجه $\hat{D}_2 > \hat{A}_1$.

ب) چون AD نیمساز است پس $\hat{A}_1 = \hat{A}_2$ از طرف دیگر $\hat{D}_2 > \hat{A}_1$ پس $\hat{D}_2 > \hat{A}_2$.

پ) در مثلث $A\overset{\triangle}{D}C$ چون $\hat{D}_2 > \hat{A}_2$ پس $AC > DC$.

ت)

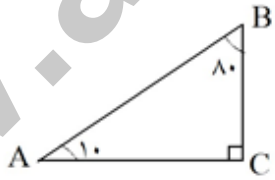
$$A\overset{\triangle}{D}C \text{ زاویه خارجی } \hat{D}_1 \Rightarrow \hat{D}_1 = \hat{A}_2 + \hat{C} \Rightarrow \hat{D}_1 > \hat{A}_2 \xrightarrow{\hat{A}_1 = \hat{A}_2} \hat{D}_1 > \hat{A}_1 \Rightarrow AB > BD$$

ث) با جمع نامساوی (پ) و (ت) نتیجه می‌گیریم:

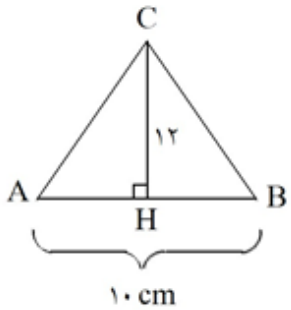
$$\left.\begin{array}{l} AC > DC \\ AB > BD \end{array}\right\} \xrightarrow{+} AC + AB > BC$$

نتیجه: در هر مثلث مجموع اندازه‌های هر دو ضلع از اندازه‌ی ضلع سوم بزرگتر است.

۱۹۶ الف) به عنوان مثال نقض در مثلث قائم‌الزاویه‌ی ABC اگر $\hat{A} = 10^\circ$ و $\hat{B} = 80^\circ$ آن‌گاه $4(10) \not> 90$



ب) در مثلث زیر ارتفاع CH از ضلع AB کوچک‌تر نیست. مثال نقض:



۱۹۷ فرض کنیم که $\hat{B} = \hat{C}$ لذا باید مثلث ABC متساوی‌الساقین باشد پس باید $AB = AC$ باشد و این مخالف فرض است.

۱۹۸ الف) خیر

$A = \{۱ , ۲\}$
$B = \{۳ , ۴ , ۵\}$
$A \not\subseteq B , B \not\subseteq A$

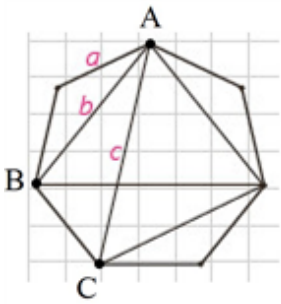
ب) خیر

مثلث اول $a = ۸ , h = ۳ \Rightarrow S_۱ = \frac{۳ \times ۸}{۲} = ۱۲$

مثلث دوم $a = ۱۲ , h = ۲ \Rightarrow S_۲ = \frac{۲ \times ۱۲}{۲} = ۱۲$

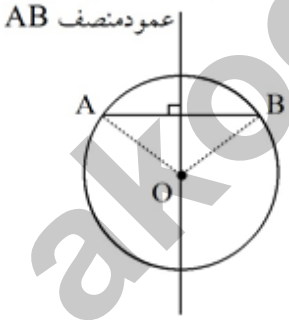
این دو مثلث هم‌مساحت هستند ولی دو مثلث هم‌نهشت نیستند.

۱۹۹

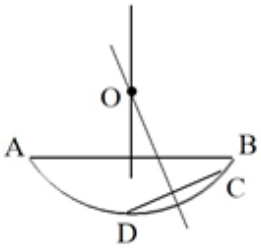


خیر - به عنوان مثال مثلث ABC متساوی‌الساقین نیست.

۲۰۰ الف) عمودمنصف AB از نقطه‌ی O (مرکز دایره) می‌گذرد. چون O از دو سر پاره‌خط AB می‌گذرد.

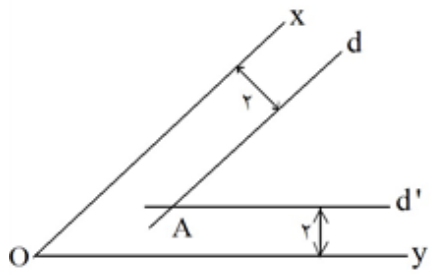


ب) نقطه‌ی پنالتی محل تقاطع عمودمنصف‌های دو وتر از قوس جلوی محوطه‌ی هجده قدم است. در شکل عمودمنصف‌های دو وتر AB و CD همدیگر را در نقطه‌ی O قطع کرده‌اند و O مرکز این قوس است.

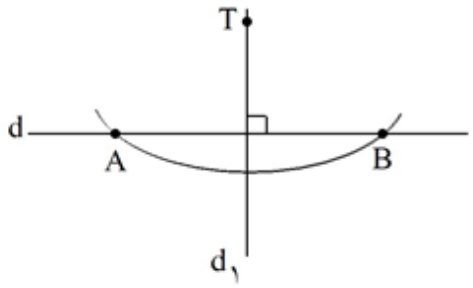


۲۰۱ الف) زاویه‌ی xOy را در نظر می‌گیریم. خط d را موازی ضلع Ox و به فاصله‌ی ۲ از آن رسم می‌کنیم و خط d' را موازی ضلع Oy و به فاصله‌ی ۲ از آن ترسیم می‌کنیم. نقطه‌ی تلاقی این دو خط (نقطه‌ی A) نقطه‌ی مورد نظر است.

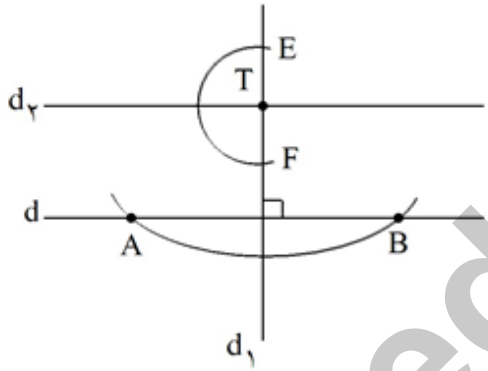
ب) چون نقطه‌ی A از دو ضلع زاویه‌ی xOy به یک فاصله است پس A روی نیمساز زاویه‌ی xOy است بنابراین OA نیمساز زاویه‌ی xOy است.



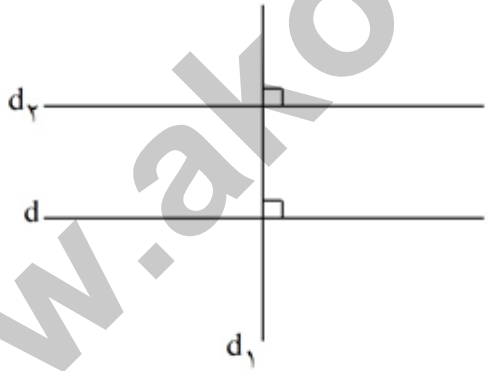
۲۰۲ ۱- به مرکز T کمانی رسم می‌کنیم تا خط d را در نقاط A و B قطع کند. عمودمنصف پاره‌خط AB بر خط d عمود است. (در شکل خط d_1 عمودمنصف AB است.)



۲- به مرکز T کمانی رسم می‌کنیم تا خط d_1 را در نقاط E و F قطع کند. عمودمنصف پاره‌خط EF بر خط d_1 عمود است. (در شکل خط d_2 عمودمنصف EF است.)

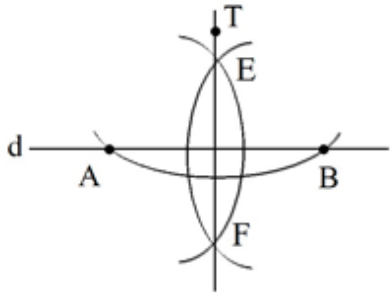


۳- دو خط d_2 و d بر خط d_1 عمودند پس بنابر عکس قضیه‌ی خطوط موازی و مورب با هم موازیند ($d \parallel d_2$).



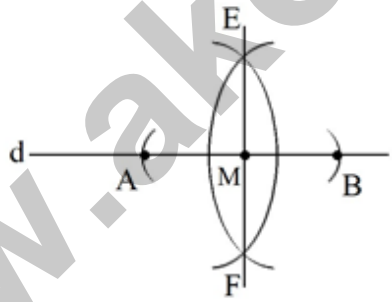
تلفن تماس: ۰۲۶۳۳۴۰۸۹۴۴

۲۰۳ ۱- به مرکز T کمانی رسم می‌کنیم که خط d را در دو نقطه‌ی متمایز A و B قطع کند.
۲- حال به مراکز A و B دو کمان مساوی به شعاع بزرگتر از نصف AB رسم می‌کنیم تا یکدیگر را در نقاط E و F قطع کنند. در این صورت EF عمودمنصف AB است.



۳- بله، زیرا نقطه‌ی T از دو سر پاره‌خط AB به یک فاصله است.
عمودمنصف پاره‌خط AB خطی است که بر خط d عمود و از نقطه‌ی وسط AB بگذرد.

۲۰۴ ۱- به شعاع دلخواه کمانی به مرکز M رسم می‌کنیم تا خط d را در نقاط B و A قطع کند. در این صورت M وسط پاره‌خط AB است.
۲- به مراکز A و B دو کمان به شعاعی بزرگتر از نصف AB رسم می‌کنیم تا همدیگر را در نقاط E و F قطع کنند. خط EF عمودمنصف AB است.

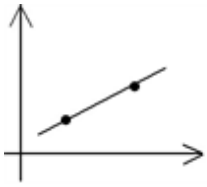


۳) عمودمنصف پاره‌خط AB خطی است که بر خط d عمود و از نقطه‌ی M می‌گذرد.

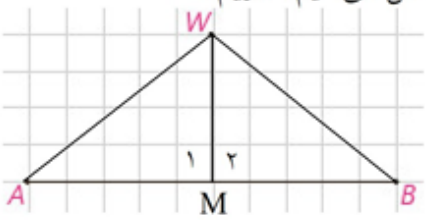
۲۰۵ پرگار را به اندازه‌ی بیش از نصف پاره‌خط AB باز کرده و از نقاط A و B دو کمان مساوی رسم می‌کنیم. خط حاصل از اتصال نقاط تقاطع این دو کمان عمودمنصف AB است.

۲۰۶

فقط یک خط



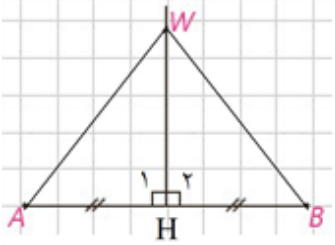
۲۰۷ از نقطه‌ی W به نقطه‌ی M وسط AB وصل می‌کنیم. داریم:



$$\left.\begin{array}{l} WA = WB \\ MW = MW \\ AM = BM \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{(ض ض ض)}} A\overset{\triangle}{M}W \cong B\overset{\triangle}{M}W \Rightarrow \hat{M}_۱ = \hat{M}_۲$$

و چون $\hat{M}_۱ + \hat{M}_۲ = ۱۸۰$ پس $\hat{M}_۱ = \hat{M}_۲ = ۹۰^\circ$ یعنی MW بر AB عمود است و چون نقطه‌ی M وسط پاره‌خط AB می‌باشد پس MW عمودمنصف پاره‌خط AB است.

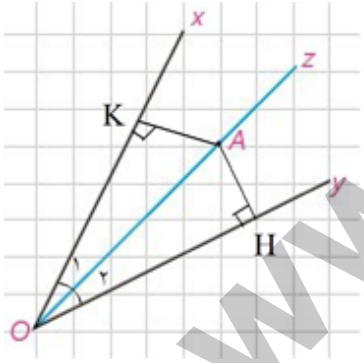
۲۰۸



$$\left.\begin{array}{l} AH = BH \\ \hat{H}_۱ = \hat{H}_۲ = ۹۰^\circ \\ WH = WH \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{(ض ز ض)}} A\overset{\triangle}{W}H \cong B\overset{\triangle}{W}H \Rightarrow AW = BW$$

۲۰۹ ابتدا یک زاویه دلخواه رسم می‌کنیم. از رأس زاویه یک کمان سپس از نقاط به دست آمده دو کمان با شعاع‌های مساوی رسم می‌کنیم طوری‌که این دو کمان متقاطع باشند. اگرنقطه‌ی تقاطع این دو کمان را به رأس زاویه وصل کنیم نیمساز زاویه به دست می‌آید.

۲۱۰



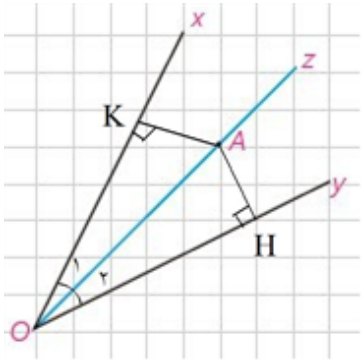
$$\left.\begin{array}{l} AH = AK \\ OA = OA \\ \hat{H} = \hat{K} = ۹۰^\circ \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{وتر و یک ضلع}} O\overset{\triangle}{A}H \cong O\overset{\triangle}{A}K \Rightarrow \hat{O}_۱ = \hat{O}_۲$$

یعنی OA نیمساز زاویه xOy است.

توجه: حالت (ض ز ض) را نیز می‌توان به کار برد.

تلفن تماس: ۰۲۶۳۳۴۰۸۹۴۴

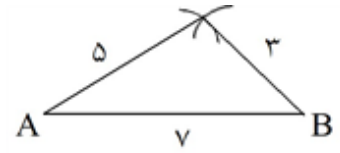
۲۱۱



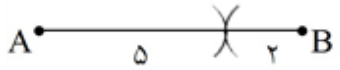
$$\left.\begin{array}{l}\hat{H} = \hat{K} = ۹۰^\circ \\ \hat{O}_۱ = \hat{O}_۲ \\ \text{مشترک } OA = OA\end{array}\right\} \xrightarrow{\text{وتر و یک زاویه حاده}} \overset{\triangle}{OAH} \cong \overset{\triangle}{OAK} \Rightarrow AH = AK$$

توجه: حالت هم‌نهشتی (ز ض ز) را نیز می‌توان به کار برد.

۲۱۲



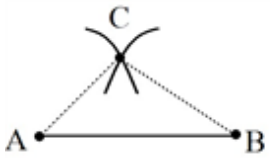
الف) جای خالی اول: ۵ و جای خالی دوم: ۳



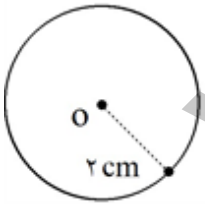
ب) جای خالی اول: ۵ و جای خالی دوم: ۲

پ) جای خالی اول: ۳ و جای خالی دوم: ۲

۲۱۳ ابتدا با خط کش یک پاره‌خط به اندازه ۶ سانتی‌متر رسم می‌کنیم. سپس از دو سر این پاره‌خط یک کمان به شعاع ۴ و از یک کمان به شعاع ۵ رسم می‌کنیم. مثلث ABC جواب مسئله است.

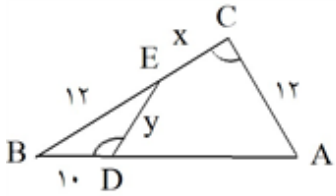


۲۱۴ کافی است به مرکز O و شعاع دلخواه مثلاً شعاع ۲ سانتی‌متر دایره رسم کنیم.



تلفن تماس: ۰۲۶۳۳۴۰۸۹۴۴

۲۱۵



$$(\hat{C} = B\hat{D}E\ ,\ \hat{B} = \hat{B}) \Rightarrow B\overset{\triangle}{D}E \sim A\overset{\triangle}{B}C$$

$$\Rightarrow \frac{۱۲}{۴۰} = \frac{y}{۱۲} = \frac{۱۰}{x + ۱۲}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} ۴۰y = ۱۴۴ \Rightarrow y = \frac{۱۸}{۵} \\ ۱۲x + ۱۴۴ = ۴۰۰ \Rightarrow x = \frac{۶۴}{۳} \end{cases}$$

۲۱۶

$$\frac{۴}{x} = \frac{x}{۹} \Rightarrow x = ۶$$

$$\frac{۴}{۱۰} = \frac{y + ۲}{۱۵} \Rightarrow ۱۰y + ۲۰ = ۶۰ \Rightarrow y = ۴$$

۲۱۷

$$\begin{cases} \frac{a}{۵} = x \Rightarrow a = ۵x \\ \frac{b}{۷} = x \Rightarrow b = ۷x \\ \frac{c}{۱۳} = x \Rightarrow c = ۱۳x \end{cases} \Rightarrow \frac{۷a - ۴b}{۲c} = \frac{۷(۵x) - ۴(۷x)}{۲(۱۳x)} = \frac{۳۵x - ۲۸x}{۲۶x} = \frac{۷x}{۲۶x} = \frac{۷}{۲۶}$$

۲۱۸

$$\left.\begin{matrix} \hat{B} = \hat{D} \\ \hat{A}_۱ = \hat{A}_۲ \end{matrix}\right\} \Rightarrow \underset{(۰/۵)}{A\overset{\triangle}{D}E \cong A\overset{\triangle}{B}C} \Rightarrow \underset{(۰/۲۵)}{\frac{۱۰}{۵} = \frac{x}{۲} = \frac{y}{۳}} \Rightarrow \begin{cases} x = ۴ \\ y = ۶ \end{cases} (۰/۵)$$

تساوی دو زاویه

۲۱۹

$$c^۲ = x.a \Rightarrow h^۲ = xy$$

۲۲۰ دو مثلث با حالت تساوی دو زاویه متشابه هستند.

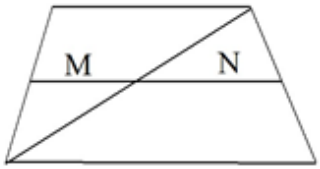
$$\frac{۶}{۱۲} = \frac{۱۰}{y + a} = \frac{a}{۱۰ + x}$$

$$a = \sqrt{۱۰۰ - ۳۶} = ۸$$

$$x = ۶\ ,\ y = ۱۲$$

تلفن تماس: ۰۲۶۳۳۴۰۸۹۴۴

۲۲۱



$$\frac{x}{x+۱}=\frac{x+۰/۵}{x+۲}\Rightarrow x^۲+۲x=x^۲+۱/۵x+۰/۵$$

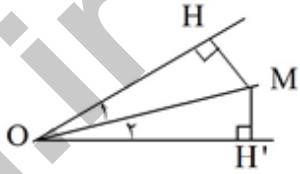
$$۰/۵x=۰/۵\Rightarrow x=۱$$

$$\frac{M}{۵}=\frac{۲}{۳}\Rightarrow M=\frac{۱۰}{۳}$$

$$\frac{N}{۸}=\frac{۱/۵}{۴/۵}\Rightarrow N=\frac{۸}{۳}$$

$$y=M+N=\frac{۱۰}{۳}+\frac{۸}{۳}=۶$$

۲۲۲



$$\hat{O}_۱=\hat{O}_۲$$

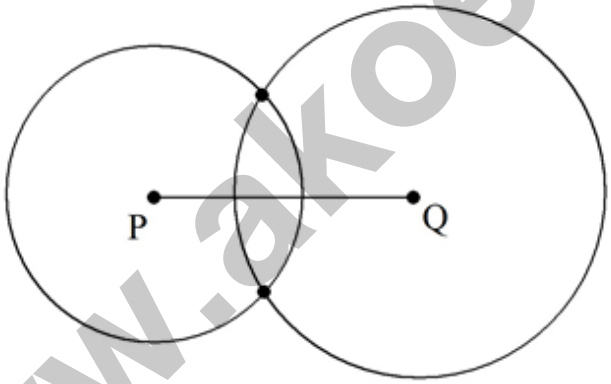
OM

$$\hat{H}=<\hat{H}'=۹۰\Rightarrow O\hat{M}H=O\hat{M}H'\Rightarrow MH=MH'$$

۲۲۳

الف) در پاره‌خط موازی PQ به فاصله ۲ سانتی‌متر

ب) باید دو دایره به مرکزیت P به شعاع ۴ و به مرکزیت Q به شعاع ۵ واحد رسم کنیم و این دو دایره یکدیگر را در دو نقطه قطع می‌کنند.



۲۲۴

الف)

$$\frac{y}{۱۵}=\frac{۴}{۱۲}\Rightarrow y=۵$$

$$x=۱۵-۵=۱۰$$

ب)

$$\frac{۲}{۸}=\frac{۳}{y}\Rightarrow y=۱۲$$

$$\frac{۲}{۶}=\frac{۱۲-x}{x}\Rightarrow ۷۲-۶x=۲x\Rightarrow ۸x=۷۲\Rightarrow x=۹$$

تلفن تماس: ۰۲۶۳۳۴۰۸۹۴۴

۲۲۵ الف) با توجه به قضیه‌ی تالس داریم:

$$\frac{AP}{BP}=\frac{AQ}{QC}\Rightarrow\frac{۹}{x}=\frac{x}{۴}\Rightarrow x^{۲}=۳۶\Rightarrow x=۶$$

با توجه به تعمیم قضیه‌ی تالس داریم:

$$\frac{AQ}{AC}=\frac{PQ}{BC}\Rightarrow\frac{x}{x+۴}=\frac{۲y-۱}{x+۲}\xrightarrow{x=۶}\frac{۶}{۱۰}=\frac{۲y-۱}{۸}\Rightarrow ۲y-۱=\frac{۴۸}{۱۰}\Rightarrow ۲y-۱=۴/۸$$

$$\Rightarrow ۲y=۵/۸\Rightarrow y=۲/۹$$

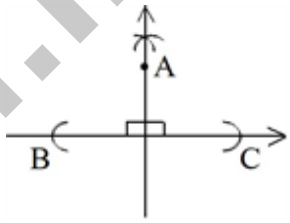
ب) با توجه به قضیه‌ی تالس داریم:

$$\frac{AP}{BP}=\frac{AQ}{CQ}\Rightarrow\frac{۴x}{۵}=\frac{۲۰}{x}\Rightarrow ۴x^{۲}=۱۰۰\Rightarrow x^{۲}=۲۵\Rightarrow x=۵$$

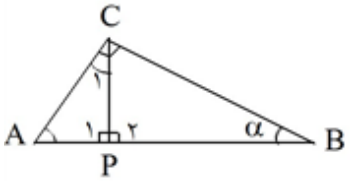
با توجه به تعمیم قضیه‌ی تالس داریم:

$$\frac{AQ}{AC}=\frac{PQ}{BC}\Rightarrow\frac{۲۰}{۲۰+x}=\frac{x+۱۵}{y-۱۰}\xrightarrow{x=۵}\frac{۲۰}{۲۵}=\frac{۲۰}{y-۱۰}\Rightarrow y-۱۰=۲۵\Rightarrow y=۳۵$$

۲۲۶



۲۲۷ الف) با توجه به شکل، دو مثلث APC و BCP دو زاویه‌ی برابر دارند.



$$\left(\hat{P}_{۱}=\hat{P}_{۲}=۹۰^{\circ}\ \text{و}\ \hat{B}=\hat{C}_{۱}=\alpha\right)$$

تناسب بین اضلاع متناظر را می‌نویسیم:

نسبت ضلع های روبه روی α

$$\frac{AP}{PC}=\frac{PC}{PB}\Rightarrow PC^{۲}=AP\times PB$$

نسبت ضلع های روبه روی $۹۰^{\circ}-\alpha$

ب)

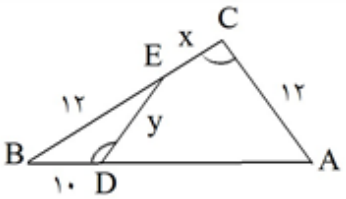
$$BC^{۲}=AB^{۲}+AC^{۲}\Rightarrow BC^{۲}=۳۶+۶۴\Rightarrow BC=۱۰$$

$$AB\times AC=AH\times BC\Rightarrow ۶\times ۸=x\times ۱۰\Rightarrow x=\frac{۴۸}{۱۰}=۴/۸$$

$$AC^{۲}=CH\times BC\Rightarrow ۸^{۲}=y\times ۱۰\Rightarrow y=\frac{۶۴}{۱۰}=۶/۴$$

۲۲۸ $\frac{x+y+z}{۱۲}=\frac{۲}{۷}\Rightarrow x+y+z=\frac{۲۴}{۷}$

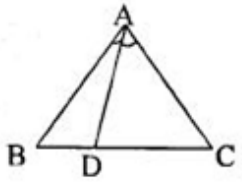
۲۲۹



$$(\hat{C}=B\hat{D}E\,,\ \hat{B}=\hat{B})\Rightarrow B\overset{\triangle}{D}E\sim A\overset{\triangle}{B}C\Rightarrow\frac{BE}{AB}=\frac{DE}{AC}=\frac{BD}{BC}\Rightarrow\frac{۱۲}{۴۰}=\frac{y}{۱۲}=\frac{۱۰}{x+۱۲}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}۴۰y=۱۴۴\Rightarrow y=\frac{۱۸}{۵}\\ ۱۲x+۱۴۴=۴۰۰\Rightarrow x=\frac{۶۴}{۳}\end{cases}$$

۲۳۰ در مثلث متساوی‌الاضلاع ABC , AB = AC است. بنابراین در دو مثلث ABD و ADC : (۰/۲۵) داریم:



$\begin{cases}AB=AC\\ BD<DC\end{cases}$ AD ضلع مشترک (۰/۲۵)

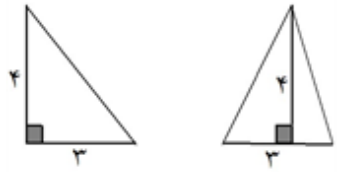
$\Rightarrow$ عکس قضیه ی لولا (۰/۲۵) $B\hat{A}D<D\hat{A}C$

۲۳۱ قضیه شرطی: اگر چهارضلعی مستطیل باشد، آن‌گاه آن چهارضلعی متوازی‌الاضلاع است. (۰/۲۵)

عکس قضیه: اگر چهارضلعی متوازی‌الاضلاع باشد، آن‌گاه آن چهارضلعی مستطیل است.

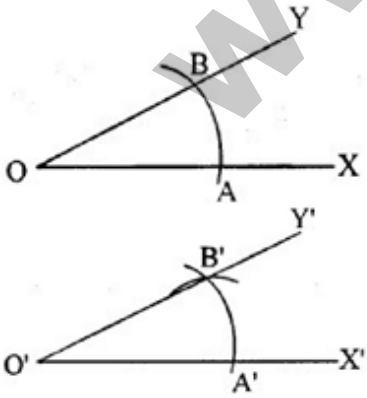
این یک قضیه نیست. مثال نقض: متوازی‌الاضلاع مقابل (۰/۲۵)

۲۳۲



۲۳۳

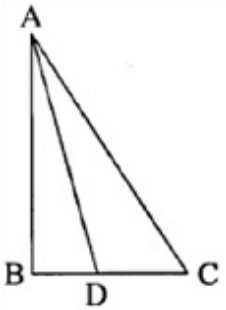
۲۳۴ زاویه‌ی XOY داده شده است. به مرکز O و شعاع دلخواه کمانی می‌زنیم تا OX و OY را در نقاط A و B قطع کند. نیم‌خط O'X' را رسم و به همان شعاع و به مرکز O' کمان دوم را می‌زنیم تا O'X' را A' قطع کند. (۰/۲۵) سپس به مرکز A' و شعاعی به طول AB کمان دیگری می‌زنیم تا کمان دوم را در نقطه‌ی B' قطع کند. O' را به B' وصل کرده و امتداد می‌دهیم تا نیم‌خط O'Y' حاصل شود. زاویه‌ی X'O'Y' جواب مسئله است. (۰/۲۵) زیرا دو مثلث OAB و O'A'B' بنا به تساوی سه ضلع، هم‌نهشتند پس دو زاویه‌ی فوق برابرند. (۰/۲۵)



رسم شکل (۰/۲۵)

تلفن تماس: ۰۲۶۳۳۴۰۸۹۴۴

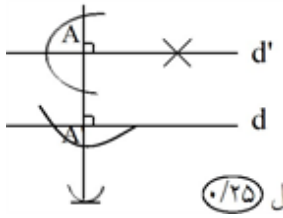
۲۳۵ AD نیمساز زاویه‌ی A است، بنابراین:



$$\frac{AB}{AC}=\frac{BD}{DC}\ (۰/۲۵) \Rightarrow \frac{۱۲}{۱۶}=\frac{BD}{۷-BD}\ (۰/۲۵)$$

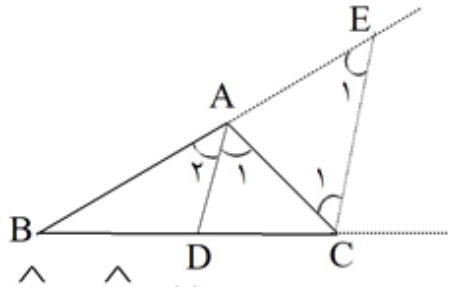
$$\Rightarrow BD=۳\ (۰/۲۵) \quad DC=۷-۳=۴\ (۰/۲۵)$$

۲۳۶ مساله را حل شده فرض می‌کنیم. می‌دانیم که دو خط عمود بر یک خط با هم موازیند. ابتدا از نقطه‌ی A بر خط d عمودی رسم می‌کنیم (۰/۲۵) تا آن‌را در نقطه‌ی 'A قطع کند. سپس از نقطه‌ی A خطی عمود بر 'AA رسم می‌کنیم. (۰/۲۵) و آن‌را 'd می‌نامیم. خط 'd همان خط مطلوب است.



شکل (۰/۲۵)

۲۳۷ برهان: فرض کنیم AD نیم‌ساز داخلی زاویه‌ی A باشد ضلع‌های BA و BC را امتداد می‌دهیم و از رأس C خطی به موازات نیم‌ساز زاویه‌ی A (یعنی AD) رسم می‌کنیم تا امتداد BA را در E قطع کند. (۰/۲۵) چون AD موازی CE است، اگر AC را به‌عنوان خط مورب در نظر بگیریم آن‌گاه: (۱) $\hat{A}_۱=\hat{C}_۱$ ، و اگر BE را به‌عنوان خط مورب آن‌ها در نظر بگیریم آن‌گاه (۲) $\hat{A}_۲=\hat{E}_۱$ (۰/۲۵) ، از طرفی طبق فرض مساله، AD نیم‌ساز است در نتیجه: (۳) $\hat{A}_۱=\hat{A}_۲$ ، حال از رابطه‌های (۱) ، (۲) و (۳) می‌توان نتیجه گرفت: $\hat{C}_۱=\hat{E}_۱$ (۰/۲۵) ، پس مثلث AEC متساوی‌الساقین است و (۴) $AE=AC$ (۰/۲۵) ، در مثلث BEC ، AD موازی EC است، پس طبق قضیه‌ی تالس داریم: (۵) $\frac{AB}{AE}=\frac{BD}{DC}$ (۰/۲۵) ، با توجه به رابطه‌ی (۴) اگر در رابطه‌ی (۵) به‌جای AE مساوی آن AC را جایگزین کنیم، خواهیم داشت: (۰/۲۵) $\frac{AB}{AC}=\frac{BD}{DC}$ که حکم ثابت می‌شود.

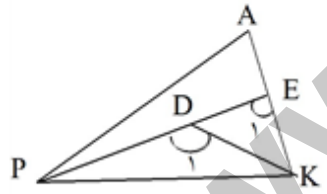


۲۳۸ ضلع PD را امتداد می‌دهیم تا ضلع AK را در E قطع کند. (۰/۲۵)

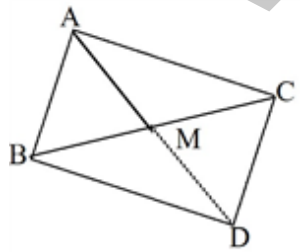
$\hat{D}_۱$ زاویه خارجی مثلث $D\hat{E}K$ است بنابراین: $\hat{D}_۱>\hat{E}_۱$ (۰/۲۵)

$\hat{E}_۱$ زاویه خارجی مثلث $A\hat{P}E$ است بنابراین : $\hat{E}_۱>\hat{A}$ (۰/۲۵)

پس $\hat{D}_۱>\hat{A}$ (۰/۲۵)



۲۳۹ در مثلث ABC میانه‌ی AM را به اندازه‌ی خودش امتداد می‌دهیم تا به نقطه‌ی D برسیم از D به C و B وصل می‌کنیم. (۰/۲۵) در این صورت چهار ضلعی ABCD متوازی‌الاضلاع خواهد بود. زیرا اقطارش منصف یکدیگرند. (۰/۲۵)

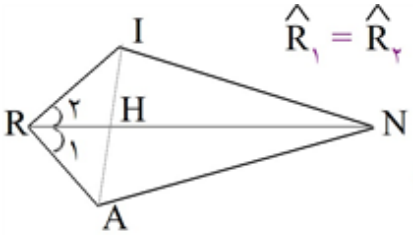


$$\overset{\triangle}{ADC}: AD<AC+DC\ (۰/۲۵) \Rightarrow ۲AM<AC+AB$$

$$\Rightarrow AM<\frac{AC+AB}{۲}\ (۰/۲۵)$$

تلفن تماس: ۰۲۶۳۳۴۰۸۹۴۴

۲۴۰ برهان خلف: فرض کنیم RN نیمساز زاویه‌ی $A\hat{R}I$ باشد. (۰/۲۵) بنابراین داریم: $\hat{R}_1 = \hat{R}_2$



در نتیجه: $\overset{\triangle}{RIN} \cong \overset{\triangle}{RAN}$ (ض ز ض) (۰/۲۵)، پس $IN = AN$

که این با فرض مسأله تناقض دارد (۰/۲۵)، بنابراین فرض خلف باطل و حکم مسأله ثابت است. (۰/۲۵)

۲۴۱ فرض: $\hat{A} > \hat{B}$ حکم: $BC > AC$

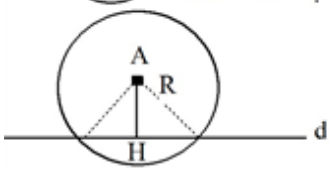
برهان خلف: فرض می‌کنیم $AC \geq BC$ (۰/۲۵) دو حالت زیر را درنظر می‌گیریم:

الف) $AC=BC$ در این حالت مثلث متساوی‌الساقین است. پس $\hat{A}=\hat{B}$ که این خلاف فرض است. (۰/۵)

ب) $AC>BC$ در این حالت با توجه به قضیه‌ی لولا $\hat{A}<\hat{B}$ که این نیز خلاف فرض است. (۰/۵)

پس فرض خلف باطل است و حکم درست می‌باشد.

۲۴۲ دایره‌ای به شعاع R و به مرکز A را رسم می‌کنیم. محل برخورد این دایره با خط d جواب مسأله است. (۰/۲۵)



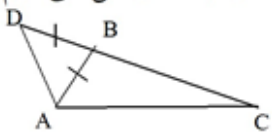
اگر $AH > R$ مسأله جواب ندارد. (۰/۲۵)

اگر $AH = R$ مسأله یک جواب دارد. (۰/۲۵)

اگر $AH < R$ مسأله دو جواب دارد. (۰/۲۵)

۲۴۳ فرض: ABC یک مثلث است حکم: $AB + BC > AC$

برهان: ضلع BC را از رأس B امتداد می‌دهیم و به اندازه‌ی AB روی آن جدا می‌کنیم تا نقطه‌ی D به دست آید. سپس D را به A وصل می‌کنیم. (۰/۲۵) بنابراین در مثلث ABD داریم:



$BD = AB \Rightarrow \hat{D}_1 = \hat{A}_1$ (۰/۲۵)

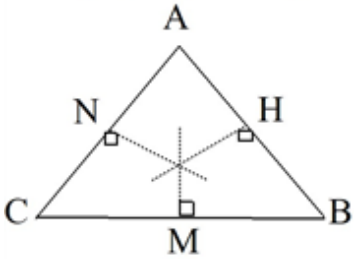
همچنین در مثلث ADC داریم:

$DC = DB + BC \Rightarrow DC = AB + BC$ (۰/۲۵)

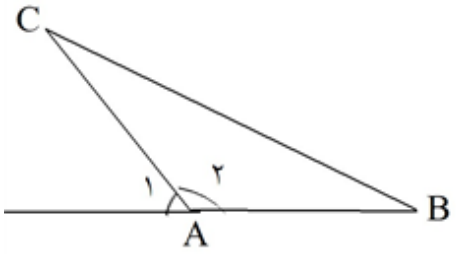
باتوجه به شکل $D\hat{A}C > \hat{A}_1$ بنابراین $D\hat{A}C > \hat{D}_1$ در نتیجه $DC > AC$ (۰/۲۵) بنابراین $AB + BC > AC$

۲۴۴ به مرکز رأس زاویه‌ی (O) و به شعاع دلخواه یک دایره رسم می‌کنیم که این دایره هرکدام از ضلع‌های زاویه را در یک نقطه قطع می‌کند. به مرکز نقاط به‌دست آمده و به شعاع دایره‌ی قبل، دایره‌هایی رسم می‌کنیم. این دایره‌ها هم‌دیگر را قطع می‌کنند. از محل تقاطع دایره‌ها به O وصل می‌کنیم. پاره‌خط رسم شده، نیمساز زاویه‌ی مذکور است. (۰/۷۵)

۲۴۵ در مثلثی که هر سه زاویه‌ی آن کوچکتر از °۹۰ باشد محل همرسی عمود منصف‌ها در داخل مثلث قرار می‌گیرد.

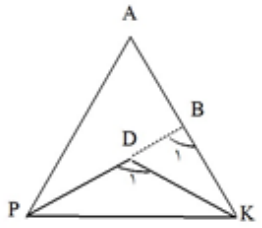


۲۴۶ در مثلث ABC زاویه‌ی A منفرجه است و زاویه‌ی خارجی $\hat{A}_1$ از زاویه‌ی داخلی $\hat{A}_2$ بزرگتر نیست.



۲۴۷ مثلثی که دو زاویه‌ی برابر داشته باشد، دارای دو ضلع برابراست.

۲۴۸ PD را امتداد می‌دهیم تا ضلع AK را در نقطه‌ی B قطع کند. می‌دانیم هر زاویه‌ی خارجی مثلث بزرگتر از زاویه‌ی داخلی غیر مجاورش است.



۱) داخلی $\hat{A} < \hat{B}_1$ خارجی در مثلث $\widehat{APB}$

۲) داخلی $\hat{B}_1 < \hat{D}_1$ خارجی در مثلث $\widehat{BDK}$

از رابطه‌ی (۱) و (۲) می‌توانیم نتیجه بگیریم:

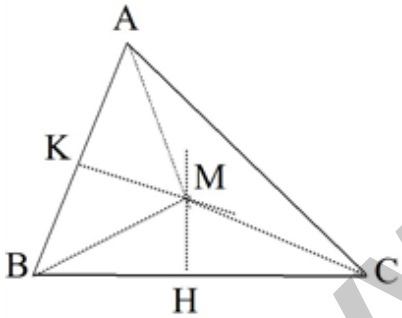
$$\hat{D}_1 > \hat{B}_1 > \hat{A} \Rightarrow \hat{D}_1 > \hat{A} \Rightarrow \widehat{PDK} > \widehat{PAK}$$

۲۴۹ به مثالی که کلیت یک حکم را از بین ببرد مثال نقض گفته می‌شود.

اگر $x > 0$ آن‌گاه $x^2 > x$ عدد $\frac{1}{2}$ مثال نقض برای قضیه‌ی شرطی است زیرا $\left(\frac{1}{2}\right)^2 > \frac{1}{2}$.

۲۵۰ فرض: عمودمنصف KM و HM

حکم: عمودمنصف‌ها همرسند.



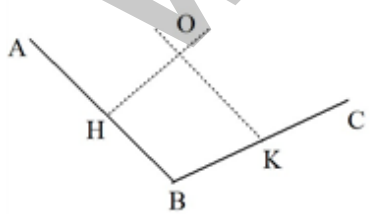
برهان: عمودمنصف‌های اضلاع AB و BC را رسم می‌کنیم. تا یکدیگررا درنقطه‌ی M قطع کنند. این دو عمودمنصف متقاطع‌اند زیرا اگرموازی باشند باید اضلاع مثلث یعنی AB و BC هم موازی باشند و این امکان ندارد.

می‌دانیم هر نقطه روی عمود منصف از دوسر پاره‌خط به یک فاصله است پس:

$$\begin{cases} M \in KM \Rightarrow AM = BM \\ M \in HM \Rightarrow CM = BM \end{cases} \Rightarrow AM = CM$$

M ازدو سر پاره‌خط AC به یک فاصله است پس روی عمودمنصف AC است یعنی عمودمنصفها همرسند.

۲۵۱ هر نقطه روی عمودمنصف یک پاره‌خط از دو سر پاره‌خط به یک فاصله است.



A را به B و B را به C وصل می‌کنیم عمودمنصف‌های پاره‌خطهای AB و BC را رسم می‌کنیم.

این دو عمودمنصف یکدیگر را در نقطه‌ی O قطع می‌کنند.

این نقطه جواب مسئله است واز هر سه نقطه به یک فاصله است.

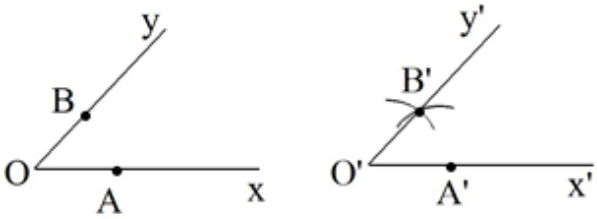
$O \in AB$ عمود منصف $\rightarrow OA = OB$

$O \in BC$ عمود منصف $\rightarrow OB = OC \Rightarrow OA = OB = OC$

۲۵۲ دایره‌ای به مرکز A و شعاع L رسم می‌کنیم. محل تلاقی دایره با خط d جواب مسئله است.

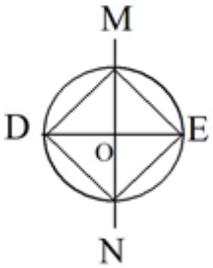
بحث: اگر دایره خط را قطع نکند مسئله جواب ندارد.
اگر دایره بر خط مماس باشد مسئله فقط یک جواب دارد.
اگر دایره با خط متقاطع باشد مسئله ۲ جواب دارد.

۲۵۳



نقاط دلخواه A , B را روی ox و oy انتخاب می‌کنیم. سپس O'A' را روی o'x' به اندازه‌ی OA جدا می‌کنیم. به مرکز O' و شعاع OB و به مرکز A' و به شعاع AB کمانهایی می‌زنیم تا یکدیگر را در نقطه‌ی B' قطع کنند. آنگاه زاویه‌ی B'O'A' با زاویه‌ی xoy برابر خواهد بود. زیرا دو مثلث $\widehat{OAB}$ و $\widehat{O'A'B'}$ به حالت سه ضلع برابرند.

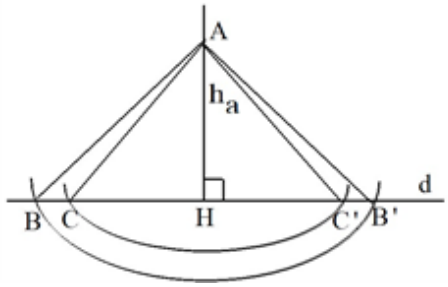
۲۵۴ عمودمنصف DE را رسم می‌کنیم. سپس به مرکز O و شعاع OD دایره‌ای رسم می‌کنیم تا عمودمنصف DE را در نقاط M , N قطع کند. در این صورت چهارضلعی MDNE مربع است. به‌طوری‌که DE قطر آن می‌باشد.



۲۵۵ چهارضلعی ADBC متوازی‌الاضلاع است. زیرا در این چهارضلعی، اضلاع مقابل مساویند. AD = BC و AC = BD بنابراین AD || d .

۲۵۶ در مثلث $\widehat{ABD}$ پاره‌خط AC میانه است و طول این میانه نصف ضلع BD می‌باشد و در مثلث قائم‌الزاویه میانه نصف ضلع وارد بر آن است. پس AD ⊥ I .

۲۵۷ خط d را رسم می‌کنیم در نقطه‌ی H روی آن عمودی بر خط d وارد می‌کنیم. روی این خط عمود، پاره‌خط AH را مساوی h_a جدا می‌کنیم. به مرکز A و شعاعهای b , c کمانهایی می‌زنیم تا خط d را در نقاط C , C' , B , B' قطع کند. آنگاه $\widehat{ABC}$ ، $\widehat{AB'C}$ ، $\widehat{ABC'}$ ، $\widehat{AB'C'}$ مثلث‌های مورد نظر می‌باشند.

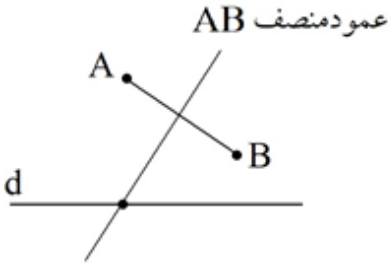


۲۵۸ مکان هندسی نقاطی که از دو نقطه‌ی A , B به یک فاصله هستند، عمودمنصف پاره‌خط AB می‌باشد. نقطه‌ی تلاقی عمودمنصف AB با خط d جواب این مسئله می‌باشد.

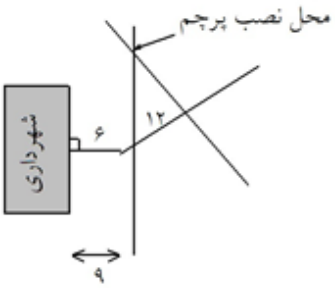
اگر خط d عمودمنصف AB را قطع کند مسئله فقط یک جواب دارد.

اگر خط d موازی عمودمنصف AB باشد مسئله جواب ندارد.

اگر خط d منطبق بر عمودمنصف AB باشد مسئله بی‌شمار جواب دارد.



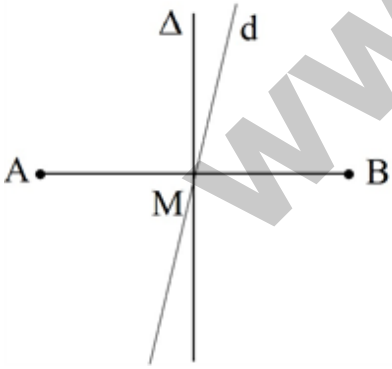
۲۵۹ مکان هندسی نقاطی که از دیواره‌ی ساختمان شهرداری به فاصله‌ی ۹ متری می‌باشد خطی موازی دیواره‌ی ساختمان شهرداری می‌باشد. در ضمن مکان هندسی نقاطی که از S , F به یک فاصله هستند، عمودمنصف پاره‌خط FS می‌باشد. نقطه تلاقی عمودمنصف FS با خط موازی با دیواره‌ی ساختمان، محل نصب پرچم است.



۲۶۰

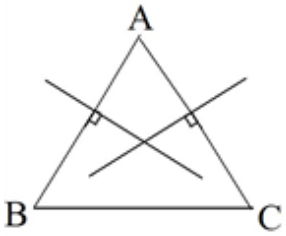
$$\left.\begin{array}{l} AM = AK \Rightarrow \hat{M}_1 = \hat{K} \\ \text{زاویه خارجی } \hat{M}_1 > \hat{P} \end{array}\right\} \Rightarrow \hat{K} > \hat{P} \Rightarrow AP > AK$$

۲۶۱ فرض کنیم پاره‌خط AB دارای دو خط عمودمنصف باشد و دو خط d و Δ عمودمنصف پاره‌خط AB باشند، در این صورت در نقطه‌ی M وسط AB دو خط بر AB عمود شده است و این ممکن نیست. پس هر پاره‌خط فقط یک عمودمنصف دارد.

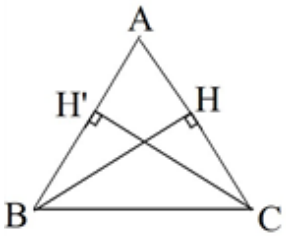


تلفن تماس: ۰۲۶۳۳۴۰۸۹۴۴

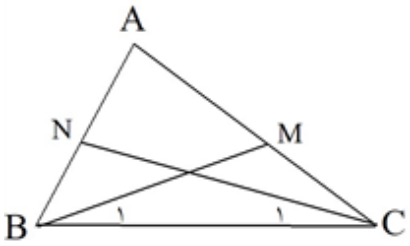
۲۶۲ فرض کنیم عمودمنصفهای اضلاع AB , AC در مثلث $\widehat{ABC}$ موازی باشند. در این صورت اضلاع AB , AC در یک راستا قرار می‌گیرند. و این در مثلث غیرممکن است پس دو عمودمنصف متقاطعند.



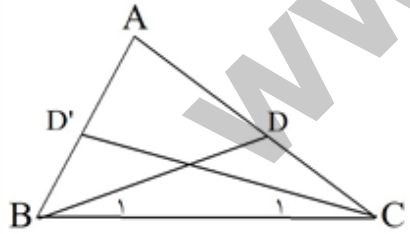
۲۶۳ فرض کنیم دو ارتفاع BH , CH' در مثلث $\widehat{ABC}$ موازی باشند. در این صورت اضلاع AB , AC در یک راستا قرار می‌گیرند و این در مثلث غیرممکن است پس دو ارتفاع متقاطعند.



۲۶۴ اگر دو میانه‌ی وارد بر اضلاع AB , AC در مثلث $\widehat{ABC}$ موازی باشند، آنگاه زوایای $\hat{B}_1$, $\hat{C}_1$ طبق قضیه‌ی خطوط موازی و مورب باید مکمل باشند. که چنین چیزی در مثلث درست نیست. پس دو میانه متقاطعند.



۲۶۵ اگر دو نیمساز داخلی زوایای B , C در مثلث $\widehat{ABC}$ موازی باشند آنگاه زوایای $\hat{B}_1$, $\hat{C}_1$ طبق قضیه‌ی خطوط موازی و مورب باید مکمل باشند که چنین چیزی در مثلث درست نیست. پس دو نیمساز داخلی زوایای $\hat{B}$, $\hat{C}$ متقاطعند.



۲۶۶ فرض کنیم $BC = B'C'$ باشد.

$$\begin{cases} AB = A'B' \\ AC = A'C' \\ BC = B'C' \end{cases} \Rightarrow \widehat{ABC} \cong \widehat{A'B'C'} \Rightarrow \hat{A} = \hat{A'}$$

و این خلاف فرض $\hat{A} \neq \hat{A'}$ می‌باشد پس $BC \neq B'C'$.

۲۶۷ فرض کنیم OM بر NP عمود باشد آنگاه داریم.

$$\left.\begin{array}{l} MN = MP \\ MR = MR \\ \hat{R}_۱ = \hat{R}_۲ = ۹۰^\circ \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{وتر و یک ضلع}} \widehat{MNR} \cong \widehat{MPR} \Rightarrow \hat{M}_۱ = \hat{M}_۲$$

$$\left.\begin{array}{l} \hat{M}_۱ = \hat{M}_۲ \\ MN = MP \\ OM = OM \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{ض ز ض}} \widehat{MNO} \cong \widehat{MPO} \Rightarrow ON = OP$$

و این خلاف فرض $ON \neq OP$ می‌باشد، پس OM بر NP عمود نیست.

۲۶۸ فرض کنیم OM نیمساز زاویه‌ی $\widehat{PMN}$ باشد.

$$\left.\begin{array}{l} \hat{M}_۱ = \hat{M}_۲ \\ MP = MN \\ OM = OM \end{array}\right\} \Rightarrow \widehat{OMN} \cong \widehat{OMP} \Rightarrow ON = OP$$

و این خلاف فرض $ON \neq OP$ می‌باشد پس OM نیمساز زاویه‌ی $\widehat{PMN}$ نیست.

۲۶۹ فرض کنیم $a \nparallel c$ در این صورت چون $b \parallel c$ وقتی a خط c را قطع می‌کند، پس باید a خط b را نیز قطع کند و این خلاف فرض $a \parallel b$ می‌باشد. بنابراین $a \parallel c$.

۲۷۰ $BT = BU \Rightarrow \hat{T}_۱ = \hat{U}_۱ \Rightarrow \hat{T}_۱ + \hat{T}_۲ > \hat{U}_۱ \Rightarrow \widehat{BTN} > \widehat{TUB}$

۲۷۱ قضیه‌ی شرطی: اگر کسی در شیراز زندگی کند، آنگاه در استان فارس است.
عکس قضیه‌ی شرطی: اگر کسی در استان فارس باشد، آنگاه در شیراز زندگی می‌کند.
عکس قضیه‌ی فوق درست نیست. زیرا کسی که در استان فارس باشد، لزومی ندارد حتماً در شیراز زندگی کند.

۲۷۲ قضیه‌ی شرطی: اگر دو مثلث همنهشت باشند، آنگاه دارای مساحت‌های برابر هستند.
عکس قضیه‌ی شرطی: اگر دو مثلث دارای مساحت‌های برابر باشند، آنگاه همنهشت هستند.
عکس قضیه‌ی فوق یک قضیه نیست. زیرا یک مثلث قائم‌الزاویه و یک مثلث متساوی‌الاضلاع می‌توانند دارای مساحت برابر باشند، در صورتی که همنهشت نیستند.

۲۷۳ در دو مثلث متشابه نسبت ارتفاعهای نظیر با نسبت تشابه برابر است.

$$\overset{\triangle}{HGI} \sim \overset{\triangle}{DEF} \Rightarrow \frac{GK}{DJ} = \frac{HI}{EF} \Rightarrow \frac{۳}{۲} = \frac{۲۰}{EF} \Rightarrow EF = \frac{۴۰}{۳}$$

۲۷۴ فرض کنید دو مثلث $\overset{\triangle}{ABC}$ و $\overset{\triangle}{A'B'C'}$ متشابه هستند و AM و A'M' میانه‌های نظیر در این دو مثلث هستند.

$$\left.\begin{array}{l} \overset{\triangle}{ABC} \sim \overset{\triangle}{A'B'C'} \Rightarrow \frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} \Rightarrow \frac{AB}{A'B'} = \frac{۲BM}{۲B'M'} \Rightarrow \frac{AB}{A'B'} = \frac{BM}{B'M'} \\ \overset{\triangle}{ABC} \sim \overset{\triangle}{A'B'C'} \Rightarrow \hat{B} = \hat{B'} \end{array}\right\} \overset{\text{(ض ز ض)}}{\Rightarrow} ABM \sim A'B'M' \Rightarrow \frac{AM}{A'M'} = \frac{AB}{A'B'}$$

پس نسبت میانه‌ها در دو مثلث متشابه با نسبت تشابه برابر است.

۲۷۵ در دو مثلث متشابه نسبت نیمسازهای نظیر با نسبت تشابه برابر است.

$$\overset{\triangle}{ABD} \sim \overset{\triangle}{EFG} \Rightarrow \frac{BC}{FH} = \frac{AD}{EG} \Rightarrow \frac{x}{x-۳} = \frac{۲۴}{۱۸} \Rightarrow ۱۸x = ۲۴x - ۷۲ \Rightarrow ۶x = ۷۲ \Rightarrow x = ۱۲$$

۲۷۶

$$\left.\begin{array}{l}\hat{C} = B\hat{D}E \\ \hat{B} = \hat{B}\end{array}\right\} \Rightarrow \overset{\triangle}{BDE} \sim \overset{\triangle}{ABC} \Rightarrow \frac{BD}{BC} = \frac{ED}{AC} = \frac{BE}{AB}$$

$$\Rightarrow \frac{۱۸}{۲۴+x} = \frac{y}{۲۴} = \frac{۲۴}{۴۸} \Rightarrow \begin{cases} \frac{۱۸}{۲۴+x} = \frac{۱}{۲} \Rightarrow ۲۴ + x = ۳۶ \Rightarrow x = ۱۲ \\ \frac{y}{۲۴} = \frac{۱}{۲} \Rightarrow ۲y = ۲۴ \Rightarrow y = ۱۲ \end{cases}$$

۲۷۷ دو مثلث متشابه نیستند زیرا زوایای نظیر در آنها برابر نیستند.

۲۷۸

$$\hat{Q} = \hat{N} = ۹۰^\circ \Rightarrow PQ \parallel LN \xrightarrow{\text{تالس}} \frac{JQ}{JN} = \frac{JP}{JL} \Rightarrow \frac{۶۰}{۲۴۰} = \frac{۱۰۰}{JL} \Rightarrow JL = \frac{۲۴۰ \times ۱۰۰}{۶۰} = ۴۰۰$$

۲۷۹

$$MN \parallel BC \xrightarrow{\text{تالس}} \frac{AN}{AC} = \frac{AM}{AB} \Rightarrow \frac{۲}{x} = \frac{۴}{۱۰} \Rightarrow x = \frac{۲ \times ۱۰}{۴} = ۵$$

۲۸۰

$$MN \parallel BC \xrightarrow{\text{تالس}} \frac{AM}{MB} = \frac{AN}{NC} \Rightarrow \frac{۱۶}{x} = \frac{x}{۴} \Rightarrow x^۲ = ۶۴ \Rightarrow x = ۸$$

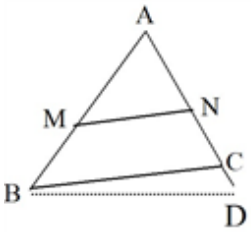
۲۸۱

$$MN \parallel BC \xrightarrow{\text{تالس}} \frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} \Rightarrow \frac{x}{۲۴} = \frac{۱۵}{۳۶} \Rightarrow x = \frac{۲۴ \times ۱۵}{۳۶} = ۱۰$$

۲۸۲

$$MN \parallel BC \xrightarrow{\text{تالس}} \frac{AM}{MB} = \frac{AN}{NC} \Rightarrow \frac{۴}{x} = \frac{۵}{۳} \Rightarrow x = \frac{۱۲}{۵}$$

۲۸۳



$$\left.\begin{array}{l} BD \parallel MN \xrightarrow{\text{تالس}} \frac{AM}{MB} = \frac{AN}{ND} \\ \Rightarrow \text{فرض}\ \frac{AM}{MB} = \frac{AN}{NC} \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{AN}{ND} = \frac{AN}{NC} \Rightarrow NC = ND$$

پس نقاط D و C بر هم منطبق هستند.

۲۸۴ در تناسب، حاصلضرب طرفین با حاصلضرب وسطین برابر است.

$$\frac{x}{۱۸۰ - x} = \frac{۳}{۷} \Rightarrow ۷x = ۵۴۰ - ۳x$$

$$۱۰x = ۵۴۰$$

$$x = ۵۴$$

۲۸۵ در تناسب، ضرب وسطین با ضرب طرفین برابر است.

$$۴x = ۵ \times ۲۴$$
$$x = ۳۰$$

۲۸۶ در تناسب می‌توان صورتها را با هم و مخرجها را با هم جمع کرد به طوریکه نسبت تغییر نمی‌کند. پس داریم:

$$\frac{a}{۲} = \frac{b}{۳} = \frac{c}{۴} = \frac{d}{۵} \Rightarrow \frac{a+b+c+d}{۲+۳+۴+۵} = \frac{a}{۲} \Rightarrow \frac{a+b+c+d}{۱۴} = \frac{a}{۲}$$

۲۸۷ در تناسب می‌توان صورتها را با هم و مخرجها را با هم جمع نمود به طوریکه نسبت تغییر نمی‌کند. پس به جای □ می‌توان $\frac{۱}{۲}$ یا $\frac{x}{y}$ را قرار داد.

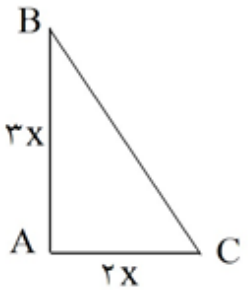
$$\frac{x+۱}{y+۲} = \frac{۱}{۲}$$

۲۸۸ در تناسب می‌توان جای طرفین را عوض کرد.

۲۸۹

$$(\text{طول سیم})^۲ = ۳۰^۲ + ۲۵^۲$$
$$(\text{طول سیم})^۲ = ۹۰۰ + ۶۲۵ = ۱۵۲۵$$
$$\text{طول سیم} = \sqrt{۱۵۲۵}\,m$$

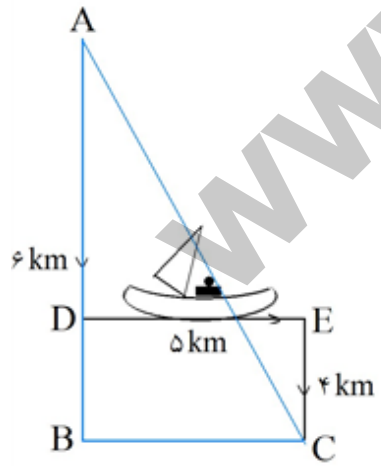
۲۹۰ فرض کنیم $AC = ۲x$ و $AB = ۳x$ باشند داریم:



$$S = \frac{۱}{۲}AB \times AC$$
$$۲۷ = \frac{۱}{۲}(۲x)(۳x)$$
$$x^۲ = ۹$$
$$x = ۳$$

$$\begin{cases} AB = ۹ , AC = ۶ \\ BC^۲ = AB^۲ + AC^۲ \\ BC^۲ = ۹^۲ + ۶^۲ = ۱۱۷ \\ BC = \sqrt{۱۱۷} \end{cases}$$

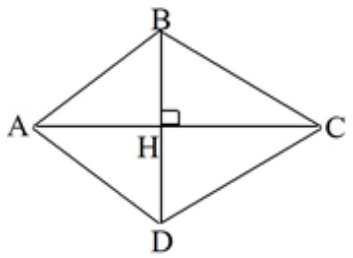
۲۹۱ اگر از A به C وصل کنیم و از نقطه‌ی C موازی DE و از نقطه‌ی D موازی CE خطوطی رسم کنیم تا یک‌دیگر را در نقطه‌ی B قطع کنند، آن‌گاه مثلث قائم‌الزاویه $\overset{\triangle}{ABC}$ به‌دست می‌آید، به طوری که $AB = ۱۰$ و $BC = ۵$ داریم:



$$AC^۲ = AB^۲ + BC^۲$$
$$\Rightarrow AC^۲ = ۱۰^۲ + ۵^۲ = ۱۲۵ \Rightarrow AC = ۵\sqrt{۵}\,km$$

تلفن تماس: ۰۲۶۳۳۴۰۸۹۴۴

۲۹۲ فرض کنید اقطار چهار ضلعی ABCD بر هم عمود باشند.



$$S_{ABCD} = S_{ABD} + S_{BCD}$$

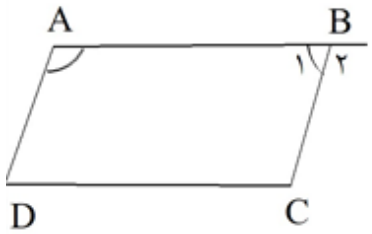
$$S_{ABCD} = \frac{۱}{۲}AH \times BD + \frac{۱}{۲}CH \times BD$$

$$S_{ABCD} = \frac{۱}{۲}BD\,(AH + CH)$$

$$S_{ABCD} = \frac{۱}{۲}BD \times AC$$

پس مساحت این چهارضلعی مساوی نصف حاصل ضرب قطرهای آن می‌باشد.

۲۹۳

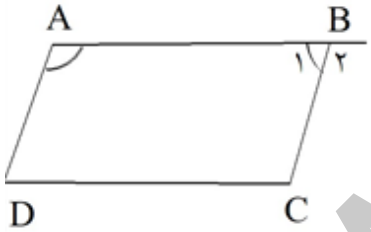


با توجه به فرض $\Rightarrow \hat{A} + \hat{B}_۱ = ۱۸۰^\circ$

از طرفی $\hat{B}_۱ + \hat{B}_۲ = ۱۸۰^\circ$ بنابراین $\hat{A} = \hat{B}_۲$ در نتیجه $AD \parallel BC$.

به همین ترتیب ثابت می‌شود $AB \parallel DC$. پس چهارضلعی ABCD متوازی‌الاضلاع است.

۲۹۴ فرض کنید در چهارضلعی ABCD داشته باشیم $\hat{A} = \hat{C}$ و $\hat{B} = \hat{D}$، مجموع زوایای هر چهارضلعی ۳۶۰° است.



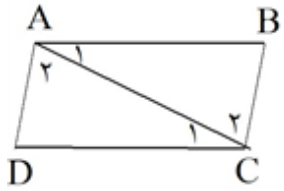
داریم:

$$\hat{A} + \hat{B}_۱ + \hat{C} + \hat{D} = ۳۶۰ \Rightarrow ۲\hat{A} + ۲\hat{B}_۱ = ۳۶۰ \Rightarrow \hat{A} + \hat{B}_۱ = ۱۸۰^\circ$$

از طرفی $\hat{B}_۱ + \hat{B}_۲ = ۱۸۰^\circ$ بنابراین $\hat{A} = \hat{B}_۲$ در نتیجه $AD \parallel BC$. به همین ترتیب ثابت می‌شود $AB \parallel DC$ پس ABCD متوازی‌الاضلاع است.

۲۹۵ فرض کنید در چهارضلعی ABCD دو ضلع AB و CD موازی و مساوی باشند. قطر AC را رسم می‌کنیم.

$$\left.\begin{array}{l} AB \parallel CD \\ \text{مورب } AC \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} \hat{A}_۱ = \hat{C}_۱ \\ AC = AC \\ AB = DC \end{array}\right\} \Rightarrow \overset{\triangle}{ABC} \cong \overset{\triangle}{ADC} \rightarrow \hat{A}_۲ = \hat{C}_۲ \xrightarrow[\text{موازی و مورب}]{\text{عکس قضیه ی خطوط}} AD \parallel BC$$

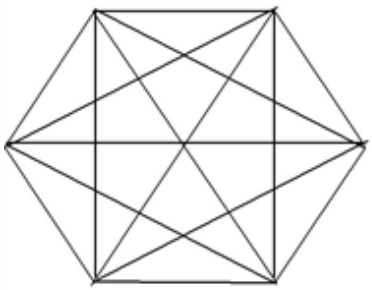


پس چهارضلعی ABCD متوازی‌الاضلاع است.

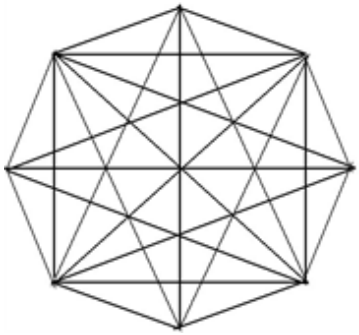
تلفن تماس: ۰۲۶۳۳۴۰۸۹۴۴

۲۹۶ مثلث قطر ندارد.

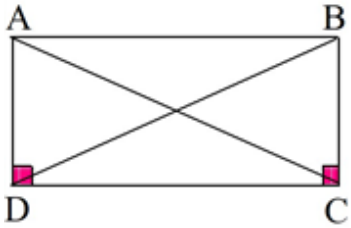
شش ضلعی دارای ۹ قطر می‌باشد (مطابق شکل مقابل)



هشت ضلعی دارای ۲۰ قطر می‌باشد. (مطابق شکل مقابل)



۲۹۷

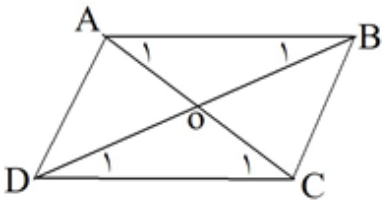


$$\left.\begin{array}{l} AD = BC \text{ اضلاع مقابل} \\ DC = DC \text{ مستطیل مساویند} \\ \hat{D} = \hat{C} = ۹۰ \end{array}\right\} \xRightarrow{\text{(ض ز ض)}} \overset{\triangle}{ADC} \cong \overset{\triangle}{BDC} \Rightarrow AC = BD$$

بنابراین در مستطیل قطرها مساویند. در ضمن مستطیل نوعی متوازی‌الاضلاع است پس قطرهای مستطیل منصف یکدیگرند.

۲۹۸ فرض کنیم O نقطه‌ی تلاقی اقطار متوازی‌الاضلاع ABCD باشد.

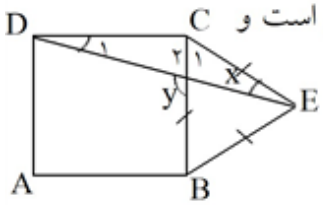
$$\left.\begin{array}{l} \left.\begin{array}{l} AB \parallel CD \\ \text{مورب } AC \end{array}\right\} \Rightarrow \hat{A}_۱ = \hat{C}_۱ \\ \left.\begin{array}{l} AB \parallel CD \\ \text{مورب } BD \end{array}\right\} \Rightarrow \hat{B}_۱ = \hat{D}_۱ \\ \text{اضلاع مقابل متوازی الاضلاع مساویند } AB = CD \end{array}\right\} \xRightarrow{\text{(ز ض ز)}} \overset{\triangle}{AOB} \cong \overset{\triangle}{DOC} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} OA = OC \\ OB = OD \end{array}\right.$$



بنابراین در متوازی الاضلاع اقطار منصف یکدیگرند.

تلفن تماس: ۰۲۶۳۳۴۰۸۹۴۴

۲۹۹ مثلث $\overset{\triangle}{BCE}$ مثلث متساوی‌الاضلاع می‌باشد پس $\hat{C}_1 = ۶۰^\circ$ از طرفی $\hat{C}_2 = ۹۰^\circ$ پس $D\hat{C}E = ۱۵۰^\circ$.



در ضمن $CE = CD$ هر دو برابر ضلع مربع هستند پس مثلث DCE متساوی‌الساقین است و

$$\hat{D}_1 = x = \frac{۱۸۰ - ۱۵۰}{۲} = ۱۵^\circ$$

$y = D_1 + C_2 \Rightarrow y = ۱۵ + ۹۰ = ۱۰۵^\circ$ زاویه خارجی مثلث $\overset{\triangle}{DCY}$.

۳۰۰ مثلث OAB متساوی‌الاضلاع می‌باشد پس $\hat{A}_1 = ۶۰$ در نتیجه $\hat{A}_2 = ۳۰$. از طرفی مثلث $\overset{\triangle}{OAD}$ متساوی‌الساقین است زیرا دو ساق AO و AD برابر ضلع مربع می باشد.

$$\hat{D}_1 = y = \frac{۱۸۰ - ۳۰}{۲} = ۷۵^\circ \Rightarrow \hat{D}_2 = ۱۵^\circ$$

به همین ترتیب $C_2 = ۱۵$. پس زاویه‌ی x برابر است با : $x = ۱۸۰ - (۱۵ + ۱۵) = ۱۵۰^\circ$

تلفن تماس: ۰۲۶۳۳۴۰۸۹۴۴