حل المسائل ریاضیات گسسته

دوازدهم ریاضی

AKO

گروه مشاوره و برنامه ریزی آکو

درس ۱ استدلال ریاضی

نقش استدلال در زندگی انسان‌ها انکارناپذیر است. همهٔ ما در زندگی روزمره و یا در زندگی حرفه‌ای خود نیازمند کسب توانمندی در این زمینه هستیم. تسلیم عقل در برابر استدلال موهبتی الهی است که امکان تعامل بین انسان‌ها و توسعه علوم گوناگون و رشد و بالندگی را در زمینه‌های مختلف برای بشر فراهم ساخته است. استدلال و اثبات در ریاضیات نیز جایگاه ویژه‌ای دارد. درک و فهم ریاضی بدون توجه به استدلال امکان ندارد و آموزش ریاضیات را محدود به حفظ کردن رویه‌ها و الگوریتم‌ها خواهد کرد. آشنایی با روش‌های استدلال و اثبات در ریاضیات، هم به فهم ریاضیات و هم به بسط و توسعه آن کمک شایانی می‌نماید. هدف ما در این درس آشنایی با برخی از روش های استدلال و اثبات در ریاضی است.

مثال : درستی یا نادرستی گزاره‌های زیر را بررسی کنید :

الف) مجموع سه عدد طبیعی متوالی بر ۳ بخش‌پذیر است.

ب) عدد $۲^{۲^{n}} + ۱$ به ازای همه عددهای طبیعی n، عددی اول است.

حل : گاهی ممکن است برای فهم یک گزاره، مثال‌هایی را برای صدق آن بررسی کنیم.

برای نمونه برای گزاره الف داریم :

$۱۰ + ۱۱ + ۱۲ = ۳۳$ $\qquad$ $۵ + ۶ + ۷ = ۱۸$

$۳۱ + ۳۲ + ۳۳ = ۹۶$ $\qquad$ $۲۵ + ۲۶ + ۲۷ = ۷۸$

در همه موارد حاصل جمع های به‌دست آمده، درستی گزاره الف را نشان می‌دهند همچنین برای $n = ۱$, $n = ۲$, $n = ۳$ و $n = ۴$ حاصل $۲^{۲^{n}} + ۱$ به ترتیب برابر ۵، ۱۷، ۲۵۷ و ۶۵۵۳۷ است که همگی اعداد اول هستند و ظاهراً بر درستی گزاره ب دلالت می‌کنند.

آیا ارائه این مثال‌ها برای برقراری گزاره‌های الف و ب کافی هستند، اگر کافی نیست آیا ارائه مثال‌های بیشتر کفایت می‌کند؟

در مورد الف هر چقدر مثال ارائه کنید، مشاهده خواهید کرد که گزاره برقرار است، اما در مورد گزاره ب، اگر $n = ۵$ آن‌گاه :

$$۲^{۲^{۵}} + ۱ = ۴۲۹۴۹۶۷۲۹۷ = ۶۴۱ \times ۶۷۰۰۴۱۷$$

که به وضوح نشان می‌دهد، حاصل یک عدد اول نیست. همین «مثال نقض» نشان می‌دهد که گزارهٔ ب در حالت کلی درست نیست. این روش استدلال به‌صورت معمول برای رد کردن یک حکم کلی به‌کار می‌رود و استدلال به کمک «مثال نقض» است.

در مورد گزاره الف با اینکه نمی‌توانید مثال نقضی ارائه کنید، امّا درستی گزاره با ارائه مثال به‌دست نمی‌آید. مثلاً یک احتمال این است که نتوانید مثال نقضی ارائه کنید و یا اینکه تاکنون مثال نقضی برای آن ارائه نشده باشد. به هر حال در اینجا اثبات دشوار نیست. کافی است سه عدد طبیعی را با n، $n+1$ و $n+2$ نمایش دهیم. در این صورت داریم:

$$n + n+1 + n+2 = 3n+3 = 3(n+1)$$

که نشان می‌دهد گزاره الف در حالت کلی درست است.

این نوع اثبات کردن را «اثبات مستقیم» می‌نامند. البته اثبات مستقیم ممکن است کاملاً پیچیده باشد. هدف این کتاب طرح اثبات‌های دشوار نیست[1]. محتوای آموزش این درس در چارچوب مطالبی است که تاکنون آموخته‌اید. در کار در کلاس نمونه‌هایی از استدلال به روش «اثبات مستقیم» و استدلال به کمک «مثال نقض» را مشاهده خواهید کرد.

کار در کلاس

هریک از گزاره‌های زیر را اثبات و یا با ارائه مثال نقض رد کنید.

الف) مجموع هر دو عدد فرد، عددی زوج است. گزاره صحیح است. اثبات: کافیست دو عدد فرد را با $2n-1$, $2m-1$ به فرض $n,m \in \mathbb{Z}$ نمایش دهیم. در این صورت:

$2n-1+2m-1 = 2n+2m-2 = 2(n+m-1) \longrightarrow$ عدد زوج

ب) برای هر دو عدد حقیقی x و y: $\sqrt{x+y} = \sqrt{x} + \sqrt{y}$

اگر $x=9$ و $y=16$ آنگاه:

$$\left.\begin{array}{l}\sqrt{x+y} = \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5 \\ \sqrt{x}+\sqrt{y} = \sqrt{9}+\sqrt{16} = 3+4 = 7\end{array}\right\} \Rightarrow \sqrt{x+y} \neq \sqrt{x}+\sqrt{y}$$

بنابراین گزاره صحیح نیست.

پ) حاصل‌ضرب سه عدد طبیعی متوالی بر ۶ بخش‌پذیر است.

گزاره صحیح است. اثبات: کافیست سه عدد طبیعی متوالی را با $n+1$ و $n+2$ و $n+3$ به فرض $n \in \mathbb{N}$ نمایش دهیم. در این صورت حاصل‌ضرب آنها $(n+3)(n+2)(n+1)$ خواهد بود و می‌توان نوشت:

$$(n+3)(n+2)(n+1) = \frac{(n+3)(n+2)(n+1) \times n! \times 3!}{n! \times 3!} = \frac{(n+3)!}{n! \times 3!} \times 3! = \underbrace{\binom{n+3}{3}}_{\in \mathbb{N}} \times 6$$

$\Rightarrow$ $(n+3)(n+2)(n+1)$ بر ۶ بخش‌پذیر است.

ت) برای هر عدد طبیعی بزرگ‌تر از ۱، عدد $2^n - 1$ اول است.

اگر $n=4$ آنگاه: $2^4 - 1 = 16-1 = 15$ عدد اول نیست. بنابراین گزاره غلط است.

ث) مجموع هر دو عدد گویا، عددی گویاست.

گزاره صحیح است. اثبات: کافیست دو عدد گویا را $\frac{a}{b}$ و $\frac{c}{d}$ نمایش دهیم که a و b و c و d اعداد صحیح بوده و b و d مخالف صفر باشند، بنابراین:

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad+bc}{bd} = \frac{\text{عدد صحیح}}{\text{عدد صحیح ناصفر}} = \text{عدد گویا}$$

ج) اگر برای هر سه مجموعه A، B و C داشته باشیم $A \cup B = A \cup C$ آنگاه $B = C$.

اگر $A = \{1,2,3\}$ و $B = \{2,4\}$ و $C = \{4\}$ آنگاه $A \cup B = A \cup C = \{1,2,3,4\}$ ولی $B \neq C$.

چ) اگر k حاصل‌ضرب دو عدد طبیعی متوالی باشد، آنگاه $4k+1$ مربع کامل است.

گزاره صحیح است. اثبات: کافیست $k = n(n+1)$ به فرض $n \in \mathbb{N}$ در نظر گرفته شود. بنابراین:

$4k+1 = 4n(n+1)+1 = 4n^2+4n+1 = (2n+1)^2 \longrightarrow$ مربع کامل

خواندنی

یافتن مثال نقض ممکن است کار بسیار دشواری باشد. گاهی سال‌ها وقت برای یافتن مثال نقض لازم بوده است. به‌طور مثال عبارت $991n^2 + 1$ را برای nهای طبیعی درنظر بگیرید. اگر حاصل این عبارت را برای $n=1$، $n=2$، ... و $n=1000$ به‌دست آورید هیچ کدام مجذور کامل نمی‌باشند. آیا به نظر شما می‌توان حکم کرد که «برای nهای طبیعی عبارت $991n^2 + 1$ هیچ‌گاه مجذور کامل نیست.» پاسخ منفی است! سرپینسکی ریاضی‌دان معاصر لهستانی، کوچک‌ترین عدد طبیعی که به ازای آن $991n^2 + 1$ مجذور کامل باشد را ارائه کرد. این عدد ۲۹ رقم دارد! عدد $n = 12055735790331359447442538767$ مثال نقض موردنظر است.

۱ــ طرح مسائل در ارزشیابی‌ها باید در سطح مطالب کتاب باشد. طرح مسائل پیچیده که نیاز به دانش محتوایی سطح بالا دارند مورد تأیید مؤلفین نیست.

اثبات با درنظر گرفتن همه حالت‌ها

گاهی برای اثبات یک گزاره لازم است همهٔ موارد ممکن درمورد مسئله را درنظر بگیریم. به مثال زیر توجه کنید.

مثال: ثابت کنید برای هر عدد طبیعی n، $n^2 - 5n + 7$ عددی فرد است.

حل: دو حالت در اینجا ممکن است رخ دهد:

الف) n زوج است، به‌عبارت دیگر $n = 2k$ ($k \in \mathbb{N}$)؛ در این حالت داریم:

$$n^2 - 5n + 7 = (2k)^2 - 5(2k) + 7 = 4k^2 - 10k + 6 + 1 = 2(2k^2 - 5k + 3) + 1$$

که حاصل یک عدد فرد است.

ب) n فرد است، یعنی $n = 2k - 1$ ($k \in \mathbb{N}$)؛ در این حالت هم داریم:

$$n^2 - 5n + 7 = (2k-1)^2 - 5(2k-1) + 7 = 4k^2 - 4k + 1 - 10k + 5 + 7$$
$$= 4k^2 - 14k + 13 = 2(2k^2 - 7k + 6) + 1$$

که باز هم حاصل یک عدد فرد است.

به عبارت دیگر زوج یا فرد بودن n، فرد بودن $n^2 - 5n + 7$ را نتیجه می‌دهد.

اگر زوج بودن n را با p و فرد بودن n را با q و فرد بودن $n^2 - 5n + 7$ را با r نمایش دهیم، حکم را می‌توان به‌صورت گزاره $p \vee q \Rightarrow r$ نمایش داد. با توجه به هم‌ارزی $p \vee q \Rightarrow r \equiv (p \Rightarrow r) \wedge (q \Rightarrow r)$ شیوهٔ اثبات در مثال فوق توجیه می‌شود.

$$\begin{aligned} p \vee q \Rightarrow r &\equiv r \vee \sim(p \vee q) \\ &\equiv r \vee (\sim p \wedge \sim q) \\ &\equiv (r \vee \sim p) \wedge (r \vee \sim q) \\ &\equiv (p \Rightarrow r) \wedge (q \Rightarrow r) \end{aligned}$$

به‌طریق مشابه، برای هر تعداد متناهی گزارهٔ دلخواه داریم:

$$P_1 \vee P_2 \vee \ldots P_n \Rightarrow r \equiv (P_1 \Rightarrow r) \wedge (P_2 \Rightarrow r) \wedge \ldots (P_n \Rightarrow r)$$

نوعی دیگری از درنظر گرفتن حالت‌های ممکن، در مثال زیر ارائه شده است.

مثال: ثابت کنید اگر a و b دو عدد حقیقی باشند و $ab = 0$ آنگاه $a = 0$ یا $b = 0$.

حل: برای a دو حالت ممکن است رخ دهد:

الف) اگر $a = 0$، در این حالت حکم برقرار است (چرا؟) **زیرا گزاره $a = 0$ یا $b = 0$ یک ترکیب فصلی است و اگر $a = 0$ درست فرض شود، کل ترکیب درست خواهد بود.**

ب) اگر $a \neq 0$، در این حالت a^{-1} (معکوس a) یک عدد حقیقی است و با ضرب طرفین رابطه $ab = 0$ در a^{-1} داریم:

$$ab = 0 \Rightarrow a^{-1}(ab) = a^{-1} \times 0$$
$$\Rightarrow b = 0$$

بنابراین در هر دو حالت حکم برقرار است.

کار در کلاس

الف) اگر a و b دو عدد صحیح باشند و ab عددی فرد باشد، ثابت کنید a^2+b^2 زوج است.

فقط در حالتی ab فرد است که a و b هردو فرد باشند زیرا اگر حداقل یکی از آنها زوج باشد ab زوج خواهد شد.
بنابراین با فرض $a=2n-1$ و $b=2m-1$ ، $n,m\in\mathbb{Z}$ داریم:

$$a^2+b^2=(2n-1)^2+(2m-1)^2=4n^2-4n+1+4m^2-4m+1=4n^2-4n+4m^2+2=2(2n^2-2n+2m^2-2m+1)$$

که حاصل عددی زوج است.

ب) $A=\{3,4\}$ یک زیرمجموعه از مجموعه $S=\{1,2,\dots,6\}$ است و $n\in S$، اگر $\frac{n^2(n+1)^2}{4}$ یک عدد زوج باشد ثابت کنید $n\in A$.

کافیست همه‌ی شش عضو S را بررسی کنیم (در نظر گرفتن تمام حالت‌ها):

$n=1 \Rightarrow \frac{n^2(n+1)^2}{4}=\frac{1\times4}{4}=1 \rightarrow$ زوج نیست

$n=2 \Rightarrow \frac{n^2(n+1)^2}{4}=\frac{4\times9}{4}=9 \rightarrow$ زوج نیست

$n=3 \Rightarrow \frac{n^2(n+1)^2}{4}=\frac{9\times16}{4}=36 \rightarrow$ زوج است

$n=4 \Rightarrow \frac{n^2(n+1)^2}{4}=\frac{16\times25}{4}=100 \rightarrow$ زوج است

$n=5 \Rightarrow \frac{n^2(n+1)^2}{4}=\frac{25\times36}{4}=225 \rightarrow$ زوج نیست

$n=6 \Rightarrow \frac{n^2(n+1)^2}{4}=\frac{36\times49}{4}=441 \rightarrow$ زوج نیست

بنابراین فقط برای $n=3$ و $n=4$، عدد $\frac{n^2(n+1)^2}{4}$ یک عدد زوج می‌باشد به عبارت دیگر $n\in A$ است.

اثبات غیرمستقیم

اثبات به روش برهان خلف

در هندسه (۱) با اثبات به روش برهان خلف که نوعی اثبات غیرمستقیم است آشنا شده‌اید. در روش برهان خلف فرض می‌کنیم که حکم نادرست باشد و سپس با استفاده از قوانین منطق گزاره‌ها و دنباله‌ای از استدلال‌های درست و مبتنی بر فرض به یک نتیجه غیرممکن یا نتیجه متضاد با فرض می‌رسیم و از آنجا (با توجه به منطقی بودن همه مراحل) معلوم می‌شود که فرضِ نادرست بودنِ حکم باطل است و درستی حکم ثابت می‌گردد.

در تعاملات و محاورات روزمره هم ممکن است از این روش استدلال استفاده کنیم. آنجا که با فردی نظری کاملاً متضاد داریم و به درستی نظر خود اطمینان داریم، برای رسیدن به نتیجه موردنظرمان، موقتاً نظر مخالف خود را می‌پذیریم و با استفاده از دنباله‌ای از استدلال‌ها و ادبیاتی که مورد توافق دو طرف است، نشان می‌دهیم که پذیرفتن نظر او به بن بست یا تناقض منجر می‌شود.

مثال : ثابت کنید حاصل‌جمع یک عددگویا و یک عدد گنگ، عددی گنگ است.

حل : فرض کنیم که r یک عدد گویا و x یک عدد گنگ باشد. نشان می‌دهیم که $x+r$ یک عدد گنگ است. اگر (فرض خلف) $x+r$ گنگ نباشد، بنابراین عددی گویا است. از طرفی می‌دانیم که تفاضل دو عدد گویا، عددی گویاست، پس تفاضل $x+r$ و r باید عددی گویا باشد یعنی $r+x-r\in Q$ و از آنجا $x\in Q$ که با فرض ما در تناقض است. در نتیجه فرض خلف باطل است و حکم اثبات می‌گردد.

مثال : حاصل‌ضرب هر عدد گویای ناصفر در یک عدد گنگ، عددی گنگ است.

حل : فرض کنیم r یک عدد گویای ناصفر باشد و x عددی گنگ باشد ولی rx عددی گویا (فرض خلف) باشد. می‌دانیم که حاصل‌ضرب هر دو عدد گویا، عددی گویاست. علاوه بر این معکوس هر عدد گویای ناصفر هم عددی گویاست. بنابراین $(\frac{1}{r})(rx)\in Q$ و از آنجا $x\in Q$ که با فرض در تناقض است.

مثال : a_1، a_2 و a_3 عددهایی صحیح هستند و b_1، b_2 و b_3 هم همان اعداد ولی به ترتیب دیگری قرار گرفته‌اند. ثابت کنید $(a_1-b_1)(a_2-b_2)(a_3-b_3)$ عددی زوج است.

حل : برای درک بهتر مسئله، مثالی ارائه می‌کنیم. a_1، a_2 و a_3 را به‌ترتیب، ۵، ۸ و ۱ درنظر می‌گیریم و b_1، b_2 و b_3 را ۸، ۱ و ۵ درنظر می‌گیریم، داریم :

$$(a_1-b_1)(a_2-b_2)(a_3-b_3)=(5-8)(8-1)(1-5)=(-3)(7)(-4)=84$$

اگر $(a_1-b_1)(a_2-b_2)(a_3-b_3)$ زوج نباشد (فرض خلف) پس عددی فرد است. پس هر سه عامل a_1-b_1، a_2-b_2 و a_3-b_3 هم باید فرد باشند (چرا؟) و درنتیجه مجموع آنها هم باید عددی فرد باشد، یعنی $(a_1-b_1)+(a_2-b_2)+(a_3-b_3)$ باید عددی فرد باشد. امّا مجموع این سه عبارت صفر است!

زیرا فقط حاصلضرب سه عدد فرد ، عددی فرد خواهد شد و در صورتی که حداقل یکی از آنها زوج باشد ، حاصلضرب زوج می شود .

کار در کلاس

درستی گزاره‌های زیر را با استفاده از روش برهان خلف ثابت کنید.

الف) اگر x یک عدد گنگ باشد، ثابت کنید $\frac{1}{x}$ نیز گنگ است.

برهان خلف : فرض کنیم $\frac{1}{x}$ عددی گویا باشد، از طرفی می دانیم وارون هر عدد گویای ناصفر، عددی گویاست پس وارون $\frac{1}{x}$ یعنی x نیز گویاست که با فرض سؤال تناقض دارد، پس $\frac{1}{x}$ عددی گنگ است

ب) اگر تابع f در $x=a$ پیوسته ولی g در $x=a$ ناپیوسته باشد، ثابت کنید $f+g$ در $x=a$ ناپیوسته است.

برهان خلف : فرض کنیم $f+g$ در $x=a$ پیوسته باشد، از طرفی تفریق دو تابع پیوسته، پیوسته است پس $g=(f+g)-f$ در $x=a$ پیوسته است که با فرض سؤال تناقض دارد پس $f+g$ در $x=a$ ناپیوسته است.

اثبات‌های بازگشتی / گزاره‌های هم‌ارز

اگر ارزش دو گزاره یکسان باشد آنها را گزاره‌های هم ارز (هم ارزش) می‌نامیم.

اگر P و Q دو گزاره هم ارز (یعنی همواره هر دو درست یا هر دو نادرست) باشند، آن‌گاه گزاره‌های $P \Rightarrow Q$ و $Q \Rightarrow P$ هر دو درست هستند و در نتیجه $P \Leftrightarrow Q$ یک گزاره درست است.

به عکس اگر ترکیب دو شرطی $P \Leftrightarrow Q$ درست باشد، آن‌گاه P و Q دو گزاره هم ارز خواهند بود و اگر ارزش یکی از آنها را بدانیم، ارزش دیگری نیز همان خواهد بود. به کمک این موضوع می‌توانیم درستی یا نادرستی یک گزاره را بررسی کنیم. در عمل به‌طور معمول درستی یا نادرستی گزاره‌ای که معمولاً ساده‌تر است را انتخاب می‌کنیم. البته این کار ممکن است که در یک مرحله انجام نشود، به‌طور مثال اگر P، Q و R سه گزاره باشند و $Q \Leftrightarrow R$ و $P \Leftrightarrow Q$ یعنی ارزش سه گزاره یکسان است و اثبات درستی یا نادرستی هر یک، تکلیف دو گزاره دیگر را معلوم خواهد کرد. به‌هر حال ممکن است این عمل ادامه یابد و در تعدادی متناهی مرحله کار انجام شود.

با توجه به آنچه گفته شد، در هنگام استفاده از این روش اثبات (که گاهی به آن «روش بازگشتی» هم می‌گویند) توانایی ارائه ترکیب دو شرطی درست و مناسب بسیار اساسی است.

مثال : ترکیب دو شرطی $(a,b \in \mathbb{R})$ ، $a=b \Leftrightarrow a^3=b^3$ درست است ولی ترکیب دو شرطی $a=b \Leftrightarrow a^2=b^2$ درست نیست (چرا؟)

زیرا $a^2=b^2 \Rightarrow a=b \quad \vee \quad a=-b$ و نمی توان به طور قطع ادعا کرد $a^2=b^2 \Rightarrow a=b$

اگر $a,b \in \mathbb{R}$ کدام‌یک از ترکیب‌های دو شرطی زیر درست است؟

الف) $a < b \Leftrightarrow a^2 < b^2$

ب) $a < b \Leftrightarrow a^3 < b^3$ درست

نادرست ، به‌طور مثال از $-3 < 2$
نتیجه می‌شود که $9 < 4$ و این
نامساوی منطقی نیست

مثال : اگر $a > 0$ ثابت کنید $a + \frac{1}{a} \geq 2$

اگر $a > 0$، داریم : $a + \frac{1}{a} \geq 2 \Leftrightarrow a^2 + 1 \geq 2a$

این ترکیب دو شرطی بیان نمی‌کند که کدام گزاره درست است، بلکه تنها بیانگر آن است که دو گزاره هم ارز هستند و اثبات هر کدام، دیگری را نتیجه می‌دهد. به نظر شما چرا این دو گزاره هم ارز هستند؟ **زیرا می توان طرفین یک نامساوی را در هر عدد مثبت (مانند a)ضرب یا بر آن تقسیم کرد.** اثبات کدام‌یک ساده‌تر است؟ **اثبات $a^2 + 1 \geq 2a$ ساده تر است.**

همچنین $a^2 + 1 \geq 2a \Leftrightarrow a^2 + 1 - 2a \geq 0$

و درنهایت : $a^2 + 1 - 2a \geq 0 \Leftrightarrow (a-1)^2 \geq 0$

آخرین گزاره یعنی $(a-1)^2 \geq 0$ همواره برقرار است، به‌عبارت دیگر حکم هم ارز گزاره‌ای است که همواره برقرار است. پس حکم ثابت شده است. مراحل اثبات را (با شرط $a > 0$) به صورت زیر می‌توان خلاصه کرد :

$$
\begin{aligned}
a + \frac{1}{a} \geq 2 &\Leftrightarrow a^2 + 1 \geq 2a \\
&\Leftrightarrow a^2 + 1 - 2a \geq 0 \\
&\Leftrightarrow (a-1)^2 \geq 0 \quad \text{همواره برقرار است.}
\end{aligned}
$$

به هر حال این نوع استدلال در گفت‌وگوها و مذاکرات معمول هم مورد استفاده قرار می‌گیرد، آنجا که برای بررسی یک حکم، معادل آن را به مخاطب یادآوری می کنیم و از عباراتی نظیر : آنچه که شما می گویید معادل این است که ...، یا گفته شما به مثابه آن است که .... در آنجا باید از قوانین و ادبیات مورد پذیرش طرفین پیروی کنیم و در ریاضیات از منطق ریاضی. در هر حال در هنگام استفاده از این نوع استدلال در زندگی روزمره هم ممکن است پس از چند مرحله به نتیجه برسیم.

مثال : ثابت کنید میانگین حسابی دو عدد نامنفی، از میانگین هندسی آنها کمتر نیست.

حل : اگر a و b دو عدد نامنفی باشند، حکم ما چنین خواهد بود : $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$

$$
\begin{aligned}
\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab} &\Leftrightarrow a + b \geq 2\sqrt{ab} \\
&\Leftrightarrow a + b - 2\sqrt{ab} \geq 0 \\
&\Leftrightarrow (\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 \geq 0 \quad \text{گزاره همیشه درست.}
\end{aligned}
$$

مثال : اگر b و a دو عدد حقیقی باشند ثابت کنید : $a^2 + ab + b^2 \geq 0$

حل : $a^2 + ab + b^2 \geq 0 \Leftrightarrow (a + \frac{b}{2})^2 + \frac{3b^2}{4} \geq 0$

اثبات کوتاه و زیبایی است. حکم با یک گزاره همیشه درست (سمت راست) هم‌ارز است.

راه دوم :

$$a^2+ab+b^2\geq 0 \Leftrightarrow 2a^2+2ab+2b^2\geq 0$$
$$\Leftrightarrow a^2+b^2+2ab+a^2+b^2\geq 0$$
$$\Leftrightarrow (a+b)^2+a^2+b^2\geq 0$$ گزاره همیشه درست.

البته ممکن است شما هم راه‌حل دیگری برای این مسئله ارائه کنید.

شیوه‌ای که در این قسمت از درس مورد استفاده قرار گرفت را برای نشان دادن نادرستی یک گزاره نیز می‌توان به‌کار برد.

کار در کلاس

الف) اگر n یک عدد طبیعی باشد، آیا زوج بودن n و زوج بودن n^2 هم‌ارزند؟

بله هم‌ارز می‌باشند. اثبات :

برای n زوج است و نشان می‌دهیم n^2 زوج است :

$n=2k \Rightarrow n^2=4k^2=2(2k^2) \rightarrow$ زوج است

اثبات عکس : برای n^2 زوج است و نشان می‌دهیم n زوج است :

برهان خلف : اگر n زوج نباشد پس n عددی فرد خواهد بود یعنی :

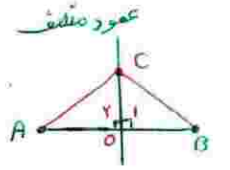
$n=2k-1 \Rightarrow n^2=4k^2-4k+1=2(2k^2-2k)+1 \rightarrow$ تناقض n^2 فرد است

بنابراین

n^2 زوج است $\Longleftrightarrow$ n زوج است

ب) آیا دو گزاره زیر هم‌ارزند؟

1 نقطه C روی عمود منصف پاره‌خط AB قرار دارد. 2 فاصله نقطه C از دو سر پاره‌خط AB یکسان است.

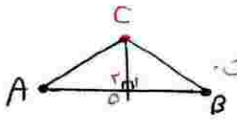


اثبات ① ⇐ ② :

$\hat{O}_1=\hat{O}_2$
$AO=OB$
$OC=OC$

$\xrightarrow{\text{ض ز ض}} \overset{\triangle}{AOC}\cong\overset{\triangle}{BOC} \Rightarrow AC=BC \Rightarrow$

فاصله نقطه‌ی C از دو سر پاره‌خط AB یکسان است



اثبات ② ⇐ ① : با فرض AC=BC ، ارتفاع OC وارد بر ضلع AB را رسم کرده، نشان می‌دهیم OC عمود منصف است.

$AC=BC$
$OC=OC$
$\hat{O}_1=\hat{O}_2=90^\circ$

$\xrightarrow{\text{وتر و یک ضلع زاویه قائمه}} \overset{\triangle}{AOC}\cong\overset{\triangle}{BOC} \Rightarrow AO=OB \Rightarrow$

OC عمود منصف پاره‌خط AB است

بنابراین : ① ⟺ ② یعنی دو گزاره هم‌ارزند.

تمرین

1 گزاره‌های زیر را به روش بازگشتی (گزاره‌های هم‌ارز) ثابت کنید : **پاسخ تمرینها در صفحات بعد می باشد.**

الف) اگر x و y دو عدد حقیقی **هم‌علامت** (مخالف صفر) باشند داریم : $\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\geq 2$

ب) برای هر سه عدد حقیقی x و y و z داریم :

$$x^2+y^2+z^2\geq xy+yz+zx$$
$$x^2+y^2+1\geq xy+x+y$$

2 عددی حقیقی مانند x ارائه کنید به‌طوری‌که $x^3<x^2$.

3 اگر α و β دو عدد گنگ باشند ولی $\alpha+\beta$ گویا باشد، ثابت کنید $\alpha-\beta$ و $\alpha+2\beta$ گنگ هستند.

4 آیا اعدادی صحیح مانند x و y وجود دارند که $x^2+y^2=(x+y)^2$

5 آیا مقادیر حقیقی و ناصفر a و b چنان وجود دارند که : $\frac{1}{a+b}=\frac{1}{a}+\frac{1}{b} \quad (a+b\neq 0)$

6 گزاره‌های زیر را اثبات و یا با ارائه مثال نقض آنها را رد کنید.

الف) مربع و مکعب هر عدد فرد عددی فرد است.

ب) میانگین پنج عدد طبیعی متوالی همان عدد وسطی است.

پاسخ تمرین صفحهٔ ۸ کتاب درسی:

① الف) اگر x و y دو عدد حقیقی هم‌علامت (مخالف صفر) باشند داریم: $\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\geq 2$

x و y هم‌علامت‌اند، بنابراین $xy>0$ خواهد بود.

$$\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\geq 2 \iff xy\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\right)\geq 2xy \iff x^2+y^2\geq 2xy \iff x^2+y^2-2xy\geq 0$$

$$\iff (x-y)^2\geq 0$$ همیشه درست

ب) برای هر سه عدد حقیقی x و y و z داریم:

$$(I)\quad x^2+y^2+z^2\geq xy+yz+zx$$

ابتدا طرفین نامساوی را در ۲ ضرب می‌کنیم:

$$\iff 2x^2+2y^2+2z^2\geq 2xy+2yz+2zx$$

$$\iff x^2+x^2+y^2+y^2+z^2+z^2-2xy-2yz-2zx\geq 0$$

$$\iff (x-y)^2+(x-z)^2+(y-z)^2\geq 0$$ همیشه درست

$$(II)\quad x^2+y^2+1\geq xy+x+y$$

ابتدا طرفین نامساوی را در ۲ ضرب می‌کنیم:

$$\iff 2x^2+2y^2+2\geq 2xy+2x+2y$$

$$\iff x^2+x^2+y^2+y^2+1+1-2xy-2x-2y\geq 0$$

$$\iff (x-y)^2+(x-1)^2+(y-1)^2\geq 0$$ همیشه درست

② عدد حقیقی مانند x ارائه کنید به طوری که $x^3<x^2$. جواب: $x=\frac{1}{2}$ ، $x=-1$ و $x=-2$ و ...

③ اگر α و β دو عدد گنگ باشند ولی $\alpha+\beta$ گویا باشد، ثابت کنید $\alpha-\beta$ و $\alpha+2\beta$ گنگ هستند.

(I) فرض کنیم $\alpha-\beta$ گویا باشد از طرفی $\alpha+\beta$ گویاست پس مجموع آن‌ها یعنی $\alpha+\beta+\alpha-\beta=2\alpha$ گویا بوده و در نتیجه α نیز گویاست که با فرض تناقض دارد پس $\alpha-\beta$ گنگ است.

(II) فرض کنیم $\alpha+2\beta$ گویا باشد از طرفی $\alpha+\beta$ گویاست پس تفاضل آن‌ها یعنی $(\alpha+2\beta)-(\alpha+\beta)=\beta$ گویاست که با فرض تناقض دارد پس $\alpha+2\beta$ گنگ است.

④ آیا اعدادی حقیقی مانند x و y وجود دارند که $x^2+y^2=(x+y)^2$

$$x^2+y^2=x^2+y^2+2xy \Rightarrow 2xy=0 \Rightarrow x=0 \lor y=0$$

حداقل یکی از اعداد x و y باید صفر باشد به طور مثال $x=0$ و $y=7$ جواب است.

⑤ آیا مقادیر حقیقی و ناصفر a و b چنان وجود دارند که: $\frac{1}{a+b}=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$ $(a+b\neq 0)$

خیر - اثبات: برهان خلف. فرض کنیم چنین اعدادی وجود داشته باشند، بنابراین:

$$\frac{1}{a+b}=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\Rightarrow \frac{1}{a+b}=\frac{a+b}{ab}\Rightarrow (a+b)^2=ab \Rightarrow a^2+b^2+2ab=ab$$

$$\Rightarrow a^2+b^2+ab=0 \xrightarrow{\times 2} 2a^2+2b^2+2ab=0 \Rightarrow a^2+a^2+b^2+b^2+2ab=0$$

$$\Rightarrow (a+b)^2+a^2+b^2=0 \Rightarrow a=0 \land b=0 \land a+b=0 \Rightarrow$$ تناقض

۶) الف) مربع و مکعب هر عدد فرد، عددی فرد است. صحیح است زیرا:

$2n-1$: عدد فرد ، $n \in \mathbb{Z}$

$\xrightarrow{\text{مربع}} (2n-1)^2 = 4n^2 - 4n + 1 = 2(2n^2 - 2n) + 1 \longrightarrow$ فرد است

$\xrightarrow{\text{مکعب}} (2n-1)^3 = 8n^3 - 12n^2 + 6n - 1 = 2(4n^3 - 6n^2 + 3n) - 1 \longrightarrow$ فرد است

ب) میانگین پنج عدد طبیعی متوالی همان عدد وسطی است. صحیح است زیرا:

پنج عدد طبیعی متوالی: $n+1$ و $n+2$ و $n+3$ و $n+4$ و $n+5$ و $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$

$$\text{میانگین اعداد} = \frac{\text{مجموع اعداد}}{\text{تعداد اعداد}} = \frac{5n+15}{5} = n+3 = \text{عدد وسطی}$$

درس ۲ بخش‌پذیری در اعداد صحیح[1]

قرار دادن تعدادی شیء در دسته‌های مساوی یا دسته‌بندی کردن تعدادی از چیزها را، بدون آنکه باقی‌مانده‌ای داشته باشیم، «عاد کردن» یا شمارش آن اشیا، توسط شمارنده‌ها می‌گویند. مثلاً، ۱۲ شیء را می‌توان با شمارنده‌های مثبتِ عدد ۱۲ یعنی ۱، ۲، ۳، ۴، ۶ و ۱۲ دسته‌بندی یا شمارش کرد.

در این فصل برای نمایش این مفهوم از نماد «|» استفاده کرده و مثلاً می‌نویسیم ۲|۱۲ و می‌خوانیم عدد ۲ عدد ۱۲ را می‌شمارد یا عاد می‌کند. بیان دیگر این مفهوم آن است که بگوییم عدد ۱۲ بر عدد ۲ بخش‌پذیر است (باقی ماندهٔ تقسیم صفر است).

توجه داشته باشید که دسته‌بندی کردن اشیا در دسته‌های صفرتایی یا شمارش تعدادی شیء خاص به‌صورت صفر تا صفر کار بی معنایی است؛ لذا صفر هیچ عدد غیر صفری را نمی‌شمارد و هیچ عدد غیر صفری بر صفر بخش‌پذیر نمی‌باشد در ضمن توجه داشته باشید که هر عدد بر خودش و بر ۱ بخش‌پذیر است؛ یعنی اگر a عددی طبیعی باشد $1|a$ و $a|a$. (عدد ۱ هر عدد صحیح را عاد می‌کند و هر عدد برخودش بخش‌پذیر است).

حال با توجه به اینکه مفهوم بخش‌پذیری b بر a معادل است با اینکه بنویسیم $a|b$ (عدد a، عدد b را می‌شمارد یا عدد a، عدد b را عاد می‌کند) مفهوم بخش‌پذیری را می‌توان برای هر دو عدد صحیح به‌کار برد، مثلاً می‌توان گفت، عدد ۲۸- بر ۴ بخش‌پذیر است (زیرا، $-28=4\times(-7)$ یا باقی‌مانده تقسیم ۲۸- بر عدد ۴ صفر است) پس در حالت کلّی و با تعمیم مفهوم عاد کردن به مجموعهٔ اعداد صحیح عاد کردن به‌صورت زیر تعریف می‌شود.

عدد صحیح a، که مخالف صفر است[2]، شمارندهٔ عدد b است ــ یا a، b را می‌شمارد یا $a|b$ یا b بر a بخش‌پذیر است ــ هرگاه عددی صحیح چون q وجود داشته باشد به‌طوری که $b=aq$.

اگر عدد b بر عدد a بخش‌پذیر نباشد یا عدد a عدد b را عاد نکند می‌نویسیم، $a \nmid b$

۱ــ در سراسر این فصل منظور از عدد، عدد صحیح است.

۲ــ اینکه صفر عدد صفر را می‌شمارد به‌صورت یک قرارداد پذیرفته می‌شود.

کار در کلاس

۱ با توجه به تعریف رابطهٔ عاد کردن جاهای خالی را پر کنید.

الف) $۷|۶۳ \Leftrightarrow ۶۳=۷\times ۹$

ب) $۹۱=۷\times ۱۳ \Leftrightarrow ۷|۹۱$

پ) $-۶|۵۴ \Leftrightarrow ۵۴=(-۹)\times(-۶)$

ت) $۵|-۳۵ \Leftrightarrow -۳۵=۵\times(-۷)$

ث) $۰=۱۸\times ۰ \Leftrightarrow ۱۸|۰$

ج) $a|۱ \Rightarrow a=+۱$ یا $a=-۱$

چ) $۲۶=۲\times ۱۳ \Rightarrow ۲|۲۶$ و $۱۳|۲۶$

۲ با استفاده از تعریف عاد کردن و قوانین ضرب و تقسیمِ اعداد توان‌دار با پایه‌های برابر، ابتدا نشان دهید که $۳^۵|۳^۹$ و سپس ثابت کنید:

$$\forall m,n\in\mathbb{N}; m\le n \Rightarrow a^m \mid a^n$$

$$(۳^۹=۳^۵\times ۳^۴ \overset{(۳^۴=q)}{\Rightarrow} ۳^۵|۳^۹)$$

$$a^n=a^m\times a^{n-m} \Rightarrow a^m | a^n$$

ویژگی‌های رابطهٔ عاد کردن

ویژگی ۱ : اگر عدد a عدد b را بشمارد، آنگاه هر مضرب صحیحِ عدد b را نیز می‌شمارد؛ یعنی :

$$\boxed{a|b \Rightarrow a|mb}$$

مثال: $۳|۶ \Rightarrow ۳|۶\times ۵\ ,\ ۳|۶\times ۴\ ,\ ۳|۶\times(-۷)\ ,\ \dots$

نتیجه : اگر عدد a عدد b را بشمارد، آنگاه $b^۲$ را می‌شمارد و در حالت کلّی b^n را می‌شمارد که $n\in\mathbb{N}$ است. یعنی :

الف) $a|b \Rightarrow a|b^۲$

ب) $a|b \Rightarrow a|b^n$

برای اثبات (الف) کافی است از ویژگی ۱ استفاده کرده و m را مساوی با b فرض کنیم؛ و برای اثبات (ب) نیز کافی است $m=b^{n-۱}$ فرض شود.

سؤال : آیا از اینکه $a|bc$ می‌توان نتیجه گرفت که a حداقل یکی از دو عدد b و c را عاد می‌کند؟ خیر نمی توان چنین نتیجه ای گرفت.

به گزاره‌های زیر دقت کنید و پس از آن پاسخ دهید :

الف) $۳|۶\times ۹$ و $۳|۶$ و $۳|۹$

ب) $۳|۶\times ۵$ و $۳|۶$ و $۳\nmid ۵$

ج) $۶|۳\times ۴$ و $۶\nmid ۳$ و $۶\nmid ۴$

سؤال : آیا از اینکه $a|b$ می‌توان نتیجه گرفت که $ka|kb$؟ آیا از $ka|kb$ می‌توان نتیجه گرفت $a|b$؟ $(k\in\mathbb{Z})$ $(k\neq ۰)$

$$a|b \Rightarrow b=aq \overset{\text{در } k \text{ ضرب}}{\Rightarrow} kb=kaq \Rightarrow ka|kb$$

$$ka|kb \Rightarrow kb=kaq \overset{\text{بر } k \text{ تقسیم}}{\Rightarrow} b=aq \Rightarrow a|b$$

ویژگی ۲ : اگر عدد a عدد b را بشمارد و عدد b نیز عدد c را بشمارد آنگاه عدد a عدد c را می‌شمارد.

$$\boxed{a|b \wedge b|c \Rightarrow a|c}$$

اثبات: $\begin{cases} a|b \Rightarrow b=aq_1 \ (1) \\ b|c \Rightarrow c=bq_2 \end{cases}$

$$c=bq_2 \overset{(1)}{\Rightarrow} c=aq_1q_2 \xrightarrow{q_1q_2=q} c=aq \Rightarrow a|c$$

این خاصیّت را «خاصیت تعدّی» برای رابطهٔ عاد کردن می‌نامیم.

سؤال : با استفاده از خاصیت تعدّی برای رابطهٔ عاد کردن، نشان دهید که :

$$a|b \Rightarrow a|b^n$$

اثبات: طبق فرض: $a|b$ و می‌دانیم: $b|b^n$ $\overset{\text{تعدی}}{\Rightarrow} a|b^n$

ویژگی ۳ : هرگاه عددی دو عدد را بشمارد آنگاه مجموع و تفاضل آن دو عدد را نیز می‌شمارد.

$$\boxed{a|b \wedge a|c \Rightarrow a|b\pm c}$$

اثبات: $\left.\begin{matrix} a|b \Rightarrow b=a\times q_1 \\ a|c \Rightarrow c=aq_2 \end{matrix}\right\} \Rightarrow b\pm c = a\underbrace{(q_1 \pm q_2)}_{q} \Rightarrow a|b\pm c$

سؤال : آیا از اینکه $a|b+c$ همواره می‌توان نتیجه گرفت که $a|b$ یا $a|c$؟ خیر به طور مثال $2|5\pm 3$ ولی $2\nmid 3$ و $2\nmid 5$

ویژگی ۴ : اگر $a|b$ و $b\neq 0$ در این صورت $|a|\leq|b|$.

اثبات : چون $a|b$ پس $b=aq$ و چون $b\neq 0$ پس $q\neq 0$ و چون $q\in\mathbb{Z}$ لذا $|q|\geq 1$. حال اگر طرفین نامساوی اخیر را در $|a|$ ضرب کنیم خواهیم داشت :

$$1\leq|q| \Rightarrow |a|\times 1 \leq |a||q| \Rightarrow |a|\leq|aq| \Rightarrow |a|\leq|b|$$

نتیجه : اگر $a|b$ و $b|a$ آنگاه $a=\pm b$.

اثبات : در صورتی که یکی از اعداد صفر باشند ، دیگری نیز صفر خواهد بود زیرا فقط صفر می تواند صفر را عاد کند . اما در حالتی که هر دو عدد ناصفر باشند ، خواهیم داشت :

$$\left.\begin{matrix} a|b \overset{(4)}{\Rightarrow} |a|\leq|b| \\ b|a \overset{(4)}{\Rightarrow} |b|\leq|a| \end{matrix}\right\} \Rightarrow |a|=|b| \Rightarrow a=\pm b$$

کار در کلاس

۱ اگر $a\neq 0$ عددی صحیح و دو عدد $(7m+6)$ و $(6m+5)$ بر a بخش‌پذیر باشند ثابت کنید $a=\pm 1$.

$$\left.\begin{matrix} a|7m+6 \Rightarrow a|42m+36 \\ a|6m+5 \Rightarrow a|42m+35 \end{matrix}\right\} \Rightarrow a|(42m+36)-(42m+35)$$

$\Rightarrow a|1 \Rightarrow a=\pm 1$ (چرا؟)

$$|a|\leq 1 \xrightarrow{|a|\in\mathbb{N}} |a|=1 \Rightarrow a=\pm 1$$

۲ اگر $a|b$ نشان دهید که $a^n|b^n$.

اثبات: $a|b \Rightarrow b=aq \Rightarrow b^n=a^nq^n \xrightarrow{q^n=q'} b^n=a^nq' \Rightarrow a^n|b^n$

۳ اگر $a|b$ و $c|d$ نشان دهید که $ac|bd$.

$$\left.\begin{array}{l} a|b \Rightarrow b=aq_1 \\ c|d \Rightarrow d=cq_2 \end{array}\right\} \Rightarrow b\times d=(a\times c)\underbrace{(q_1q_2)}_{q}$$

$$\Rightarrow b\times d=a\times c\times q \Rightarrow ac|bd$$

۴ اگر $a|b$ و $a|c$ نشان دهید که $a|mb\pm nc$.
(از ویژگی ۱ و ویژگی ۳ استفاده کنید).

$$\left.\begin{array}{l} a|b \Rightarrow a|mb \\ a|c \Rightarrow a|nc \end{array}\right\} \xrightarrow{\pm} a|mb\pm nc$$

شما در سال‌های قبل با تعریف و مفهوم اعداد اول آشنا شده‌اید و می‌دانید که هر عدد طبیعی و بزرگ‌تر از یک که هیچ شمارندهٔ مثبتی به‌جز یک و خودش نداشته باشد، عدد اول نامیده می‌شود. مجموعهٔ اعداد اول، که ثابت شده است مجموعه‌ای نامتناهی است، به‌صورت $P=\{2,3,5,7,11,...\}$ نمایش داده می‌شود.

تذکر : با توجه به تعریف عدد اول، اگر p عددی اول باشد و a عددی طبیعی و $a|p$ در این‌صورت $a=1$ یا $a=p$.

مثال : اگر عدد طبیعی a دو عدد $(9k+7)$ و $(7k+6)$ را عاد کند، ثابت کنید $a=1$ یا $a=5$.

$a|9k+7 \Rightarrow a|7\times(9k+7)$

$\Rightarrow a|63k+49$

$a|7k+6$

$\Rightarrow a|9\times(7k+6) \Rightarrow a|63k+54$

$\Rightarrow a|(63k+54)-(63k+49)$

$\Rightarrow a|5 \Rightarrow a=5$ یا $a=1$

خواندنی

می‌دانیم که هر عدد طبیعی و کوچک‌تر یا مساوی ۱۰ عدد $10!$ را عاد می‌کند (چرا؟) و به‌طور کلّی می‌توان نوشت: $\forall k\le n$ ، $k|n!$؛ بنابراین عدد $100!+2$ و همین‌طور عدد $100!+3$ و ... و بالاخره عدد $100!+100$ همه اعدادی غیراول هستند. بنابراین با توجه به اینکه اعداد $(100!+2)$ و $(100!+3)$ و ... $(100!+100)$، تعداد ۹۹ عدد طبیعی و متوالی‌اند ما توانسته‌ایم ۹۹ عدد طبیعی متوالی بیابیم که هیچ‌کدام اول نباشند.

آیا شما می‌توانید ۱۵ عدد طبیعی متوالی بیابید که هیچ‌کدام اول نباشند؟ $16!+2, 16!+3, ..., 16!+16$

(برای اینکه نشان دهیم عدد $100!+7$ بر ۷ بخش‌پذیر است، کافی است از عدد ۷ در دو عدد $100!$ و ۷، فاکتور بگیریم یا با استفاده از خواص عاد کردن بنویسیم: $7|100!$ و $7|7 \Rightarrow 7|100!+7$)

بزرگ‌ترین مقسومٌ‌علیه مشترک و کوچک‌ترین مضرب مشترک دو عدد

می‌خواهیم با توجه به تعریف رابطهٔ عاد کردن، مفاهیم ب م م (بزرگ‌ترین مقسومٌ‌علیه مشترک) و ک م م (کوچک‌ترین مضرب مشترک) دو عدد را معرفی کنیم.

توجه دارید که مقسوم‌علیه همان شمارنده است. به عبارت دیگر، اگر بنویسیم $a|b$، یعنی a شمارندهٔ b است یا b بر a بخش‌پذیر است و این یعنی a مقسوم‌علیه b است؛ و نیز توجه دارید که b مضرب a است، یعنی $b=aq$ یا $a|b$.

تعریف : عدد طبیعی d را ب م م دو عدد صحیح a و b می‌نامیم (a و b هر دو با هم صفر نیستند) و می‌نویسیم $(a,b)=d$، هرگاه دو شرط (الف) و (ب) برقرار باشد و اگر دو شرط زیر برقرار باشد آنگاه $(a,b)=d$.

الف) $d|a, d|b$

ب) $\forall m>0 : m|a, m|b \Rightarrow m\leq d$

شرط (الف) مقسومٌ‌علیه مشترک بودن را برای d تأمین می‌کند و شرط (ب) نشان می‌دهد که d از هر مقسوم‌علیه مشترک دلخواهی چون m بزرگ‌تر یا **مساوی** است.

اگر داشته باشیم $(a,b)=1$ در این صورت می‌گوییم، a و b نسبت به هم اول‌اند.

مثال : $(3,4)=1$, $(4,9)=1$, $(7,11)=1$, $(1,12)=1$

$(6,9)=3$, $(8,16)=8$, $(0,6)=6$, $(4,-6)=2$

تعریف : عدد طبیعی c را ک م م دو عدد صحیح و ناصفر a و b می‌نامیم و می‌نویسیم $[a,b]=c$، هرگاه دو شرط (الف) و (ب) برقرار باشد، و اگر این دو شرط برقرار باشد آنگاه $[a,b]=c$

الف) $a|c$, $b|c$

ب) $\forall m>0$, $a|m$, $b|m \Rightarrow c\leq m$

توضیح دهید که هریک از شرط‌های (الف) و (ب) کدام ویژگی را تأمین می‌کنند؟

شرط (الف) مضرب مشترک بودن را برای c تامین می کند و شرط (ب) نشان می دهد که از مضرب مشترک دلخواهی چون m، کوچکتر یا مساوی است .

مثال : $[3,4]=12$, $[6,4]=12$, $[1,8]=8$, $[-4,16]=16$

کار در کلاس

۱ با توجه به تعاریف ب م م و ک م م ثابت کنید :

الف) $a|b \Rightarrow (a,b)=|a|$

شرط اول : $|a|\,|a \xrightarrow{a|b} |a|\,|b$

شرط دوم : $\forall m>0 : m|a \wedge m|b \Rightarrow m|a \Rightarrow |m|\leq|a| \xrightarrow{m>0} m\leq|a|$

ب) $a|b \Rightarrow [a,b]=|b|$

شرط اول : $b\,|\,|b| \xrightarrow{a|b} a\,|\,|b|$

شرط دوم : $\forall m>0 : a|m \wedge b|m \Rightarrow b|m \Rightarrow |b|\leq|m| \xrightarrow{m>0} |b|\leq m$

راهنمایی : برای اثبات (الف) باید دو شرط موجود در تعریف ب م م را برای $|a|$ بررسی کنیم، یعنی نشان دهیم که $|a|\,|a$ و ... و نیز برای هر $m>0$ که $m|a$ و $m|b$ نشان دهیم $m\leq|a|$ و همین‌طور برای اثبات (ب) ...

۲ اگر p عددی اول باشد و $a \in \mathbb{Z}$ و $p \nmid a$ ، ثابت کنید، $(p,a) = ۱$

فرض کنیم $(p,a) = d$: $d \mid p \overset{p \text{ اول}}{\Rightarrow} d = ۱$ یا $d = p$ و $d \mid a$ ①

اگر $d = p \overset{①}{\Rightarrow} p \mid a$ (و این با فرض $p \nmid a$ تناقض دارد)

پس فقط $d = ۱$ یا $(p,a) = ۱$.

تذکر : توجه دارید که در مورد اعدادی که اول نباشند، مطلبِ کار در کلاس ۲ ممکن است برقرار نباشد :

مثال: $۴ \nmid ۶$ ولی $(۴,۶) = ۲ \neq ۱$

قضیه تقسیم و کاربردها

ممکن است در تقسیم عدد صحیح a بر عدد طبیعی b، باقی‌مانده صفر نباشد، یعنی a بر b بخش‌پذیر نباشد $(b \nmid a)$. در این‌صورت قضیهٔ تقسیم که به بیان آن خواهیم پرداخت (این قضیه را بدون اثبات می‌پذیریم) کمک می‌کند تا بحث بخش‌پذیری در $\mathbb{Z}$ را کامل کنیم.

قضیه تقسیم : اگر a عددی صحیح و b عددی طبیعی باشد در این‌صورت، اعدادی صحیح و منحصربه‌فرد مانند q و r یافت می‌شوند به قسمی که $a = bq + r$ و $۰ \leq r < b$.

مثال : اگر ۲۵ را بر ۷ تقسیم کنیم داریم : $q = ۳$ و $r = ۴$، و به عبارت دیگر $۲۵ = (۷ \times ۳) + ۴$. حال اگر -۲۵ را بر ۷ تقسیم کنیم و $q = -۳$ در نظر بگیریم، در این صورت تساوی $-۲۵ = ۷ \times (-۳) - ۴$ حاصل می‌شود که نمی‌توان (-۴) را به عنوان باقی‌مانده معرفی کرد، زیرا طبق قضیه تقسیم باقی‌مانده باید نامنفی و کوچک‌تر از مقسوم‌علیه باشد در این صورت با اضافه و کم کردن مضارب مثبتی از مقسومٌ‌علیه، شرایط قضیه تقسیم را برقرار می‌کنیم :

$$-۲۵ = ۷ \times (-۳) - ۴ = ۷ \times (-۳) - ۴ - ۷ + ۷$$

$$= ۷ \times (-۳) - ۷ + ۳ = ۷\underbrace{[(-۳) - ۱]}_{q} + ۳ = ۷q + ۳ \Rightarrow r = ۳$$

تذکر : همان‌طور که از دورهٔ ابتدایی به‌خاطر دارید در تقسیم عدد a بر b، a را مقسوم، b را مقسومٌ‌علیه، q را خارج قسمت و r را باقی‌مانده می‌نامیم.

مثال : اگر باقی‌ماندهٔ تقسیم اعداد m و n بر ۱۷ به‌ترتیب ۵ و ۳ باشد، در این‌صورت باقی‌ماندهٔ تقسیم عدد $(۲m - ۵n)$ بر ۱۷ را به‌دست آورید.

حل :

$$\begin{array}{l} m = ۱۷q_۱ + ۵ : \text{طبق فرض} \\ n = ۱۷q_۲ + ۳ : \text{طبق فرض} \end{array} \Rightarrow \begin{cases} ۲m = ۲ \times ۱۷q_۱ + ۱۰ \\ -۵n = (-۵) \times ۱۷q_۲ - ۱۵ \end{cases}$$

$$\Rightarrow (۲m - ۵n) = ۱۷\,(۲q_۱ - ۵q_۲) - ۵$$

$$= ۱۷\,(۲\,q_۱ - ۵q_۲) - ۵ - ۱۷ + ۱۷$$

$$= ۱۷(\underbrace{۲q_۱ - ۵q_۲}_{q_۳} - ۱) + ۱۷ - ۵$$

$$\Rightarrow (۲m - ۵n) = ۱۷(\underbrace{q_۳ - ۱}_{q}) + ۱۲$$

$$= ۱۷q + ۱۲ \Rightarrow r = ۱۲$$

افراز مجموعهٔ $\mathbb{Z}$ به کمک قضیه تقسیم

با توجه به قضیهٔ تقسیم، می‌دانیم که اگر a عددی صحیح و دلخواه باشد، با تقسیم آن بر عدد طبیعی b، و با توجه به اینکه باقی‌ماندهٔ تقسیم یعنی r در رابطهٔ $۰ \le r < b$ صدق می‌کند، برای a برحسب r دقیقاً b حالت وجود دارد، مثلاً اگر عدد صحیح a را بر ۵ تقسیم کنیم در این صورت یا a بر ۵ بخش‌پذیر است، یعنی $r = ۰$، یا باقی‌مانده تقسیم a بر ۵ عدد ۱ است یا . . . یا باقی‌ماندهٔ تقسیم ۴ است؛ به عبارت دیگر، $a = ۵k$ یا $a = ۵k + ۱$ یا $a = \cdots$ یا $a = ۵k + ۳$ یا $a = \cdots$ پس می‌توان گفت هر عدد صحیح مانند a را می‌توان به یکی از پنج صورت فوق نوشت.

مسئله ۱ : اگر $m \in \mathbb{Z}$ نشان دهید که m را به یکی از دو صورت $۲k$ یا $۲k + ۱$ (زوج یا فرد) می‌توان نوشت.

حل : کافی است m را بر ۲ تقسیم کنیم؛ در این صورت طبق قضیهٔ تقسیم خواهیم داشت :

$$m = ۲k + r\ ,\ ۰ \le r < ۲ \Rightarrow m = ۲k \text{ یا } m = ۲k + ۱$$

مسئله ۲ : ثابت کنید اگر $p > ۳$ عددی اول باشد، آنگاه به یکی از دو صورت $p = ۶k + ۱$ یا $p = ۶k + ۵$ نوشته می‌شود.

حل : کافی است p را بر ۶ تقسیم کنیم، در این صورت طبق قضیهٔ تقسیم خواهیم داشت :

$p = ۶k$ (۱)

$p = ۶k + ۱$ (۲)

$p = ۶k + ۲$ (۳)

$p = ۶k + ۳$ (۴)

$p = ۶k + ۴$ (۵)

$p = ۶k + ۵$ (۶)

p در حالت (۱)، (۳) و (۵) زوج است و لذا با اول بودنِ آن تناقض دارد. در حالت (۴) و با فاکتورگیری از ۳ داریم :

$p = ۳(۲k + ۱)$

یا $p = ۳k'$ یا $۳|p$ که با اول بودن p در تناقض است و لذا فقط حالت‌های (۲) و (۶) باقی می‌ماند و حکم اثبات می‌شود.

(توجه دارید که عکس مطلب فوق در حالت کلّی برقرار نیست؛ مثلاً $(۲۵ = ۶\times۴ + ۱)$ ولی ۲۵ اول نیست.)

مسئله۳ : ابتدا ثابت کنید که هر عدد صحیح و فرد مانند a به یکی از دو صورت $۴k + ۱$ یا $۴k + ۳$ نوشته می‌شود، سپس نشان دهید که مربع هر عدد فرد به شکل $(۸t + ۱)$ نوشته می‌شود (باقی‌ماندهٔ تقسیم مربع هر عدد فرد بر ۸، مساوی با ۱ است.)

حل : فرض کنیم $a\in\mathbb{Z}$ و a فرد باشد، اگر a را بر ۴ تقسیم کنیم خواهیم داشت :

$a=4k$ (۱)

$a=4k+1$ (۲)

$a=4k+2$ (۳)

$a=4k+3$ (۴)

(چهار مجموعهٔ $A_1=\{a\in\mathbb{Z}\,|\,a=4k\}$ و $A_2=\{a\in\mathbb{Z}\,|\,a=4k+1\}$ و $A_3=\{a\in\mathbb{Z}\,|\,a=4k+2\}$ و $A_4=\{a\in\mathbb{Z}\,|\,a=4k+3\}$ مجموعهٔ $\mathbb{Z}$ را افراز می‌کنند.)

حالت‌های (۱) و (۳) زوج بوده و لذا $a=4k+1$ یا $a=4k+3$

اگر $a=4k+1 \Rightarrow a^2=16k^2+8k+1=8\,(\underbrace{2k^2+k}_{k'})+1=8k'+1$

اگر $a=4k+3 \Rightarrow a^2=16k^2+24k+9=16k^2+24k+8+1$

$\Rightarrow a^2=8(\underbrace{2k^2+3k+1}_{t})+1=8t+1$

تمرین

۱ فرض می‌کنیم $ab=cd$ (a , b , c و d اعداد صحیح و ناصفرند) در این صورت پنج رابطهٔ عاد کردن از این تساوی نتیجه بگیرید.

۲ ثابت کنید : اگر $a|b$ آنگاه $a|-b$ و $-a|b$ و $-a|-b$.

۳ اگر $a>1$ و $a|9k+4$ و $a|5k+3$، ثابت کنید a عددی اول است.

۴ اگر عددی مانند k در $\mathbb{Z}$ باشد به‌طوری‌که $5|4k+1$، ثابت کنید : $25|16k^2+28k+6$

۵ آیا از اینکه $a|b$ و $c|d$، همواره می‌توان نتیجه گرفت که $a+c|b+d$؟

۶ ثابت کنید : الف) هر دو عدد صحیح و متوالی نسبت به هم اول‌اند. ب) هر دو عدد صحیح و فرد متوالی نسبت به هم اول‌اند.

(راهنمایی : فرض کنید $d=(m\,,\,m+1)$ و ثابت کنید $d|1$ و نتیجه بگیرید $d=1$.)

۷ اگر $p\neq q$ و p و q هر دو عدد اول باشند ثابت کنید $(p,q)=1$.

۸ اگر $m,n\in\mathbb{N}$ و $a,b\in\mathbb{Z}$ ثابت کنید :

$m\leq n\,,\,a|b\Rightarrow a^m|b^n$

۹ اگر باقی‌ماندهٔ تقسیم عدد a بر دو عدد ۷ و ۸ به‌ترتیب ۵ و ۷ باشد، باقی‌ماندهٔ تقسیم عدد a را بر ۵۶ بیابید.

۱۰ اگر a عددی صحیح و فرد باشد و $b|a+2$ در این صورت باقی‌ماندهٔ تقسیم عدد (a^2+b^2+3) بر ۸ را بیابید.

۱۱ اگر n عددی صحیح باشد ثابت کنید $3|n^3-n$

(راهنمایی : برای n سه حالت $n=3k$ و $n=3k+1$ و ... در نظر بگیرید و در هر حالت ثابت کنید $3|n^3-n$.)

۱۲ اگر در یک تقسیم، مقسوم و مقسومٌ‌علیه، هر دو بر عدد صحیح n بخش‌پذیر باشند، ثابت کنید باقی‌ماندهٔ تقسیم نیز همواره بر n بخش‌پذیر است.

۱۳ اگر a عددی صحیح و دلخواه باشد ثابت کنید همواره یکی از اعداد صحیح a یا $a+2$ یا $a+4$ بر ۳ بخش‌پذیر است.

۱۴ ثابت کنید تفاضل مکعب‌های دو عدد صحیح متوالی عددی فرد است.

۱۵ ثابت کنید حاصل ضرب سه عدد صحیح متوالی همواره بر !۳ بخش‌پذیر است.

۱۶ حاصل هر یک را به دست آورید : $(m \in \mathbb{Z})$

الف) $\left([m^2, m], m^5\right)$

ب) $(2m, 6m^3)$

پ) $(3m+1, 3m+2)$

ت) $\left[m^7, (m^2, m^3)\right]$

ث) $[(72, 48), 120]$

پاسخ تمرینهای صفحه ۱۶ کتاب

۱ فرض می‌کنیم $ab = cd$ (a, b, c و d اعداد صحیح و ناصفرند) در این صورت پنج رابطهٔ عاد کردن از این تساوی نتیجه بگیرید.

$a|cd$, $b|cd$, $c|ab$, $d|ab$, $ab|cd$

۲ ثابت کنید : اگر $a|b$ آنگاه $a|-b$ و $-a|b$ و $-a|-b$.

$$a|b \xrightarrow{\text{ویژگی ۱}} a|(-1)\times b \Rightarrow a|-b$$

$$-a|a \,,\ a|b \xrightarrow{\text{ویژگی ۲ تعدی}} -a|b$$

$$a|b \Rightarrow (-1)a|(-1)b \Rightarrow -a|-b$$

۳ اگر $a>1$ و $a|9k+4$ و $a|5k+3$، ثابت کنید a عددی اول است.

$$a|9k+4 \xrightarrow{\text{راست}\times 5} a|45k+20$$

$$a|5k+3 \xrightarrow{\text{راست}\times 9} a|45k+27$$

$$\Rightarrow a|(45k+27)-(45k+20) \Rightarrow a|7 \xrightarrow{a>1} a=7 \Rightarrow$$ عددی اول است a

۴ اگر عددی مانند k در $\mathbb{Z}$ باشد به‌طوری‌که $5|4k+1$، ثابت کنید : $25|16k^2+28k+6$

$$5|4k+1 \xrightarrow{\text{توان ۲}} 25|16k^2+8k+1$$

$$5|4k+1 \xrightarrow{\times 5} 25|20k+5$$

$$\xrightarrow{+} 25|16k^2+28k+6$$

۵ آیا از اینکه $a|b$ و $c|d$، همواره می‌توان نتیجه گرفت که $a+c|b+d$؟

خیر، به طور مثال $3|3$ و $2|4$ ولی $2+3 \nmid 4+3$.

۶ ثابت کنید: الف) هر دو عدد صحیح و متوالی نسبت به هم اول‌اند.

می‌گیریم: $m\in\mathbb{Z}, (m,m+1)=d \Rightarrow d|m \wedge d|m+1 \xrightarrow{\text{تفریق}} d|(m+1)-m \Rightarrow d|1 \xrightarrow{d>0} d=1$

ب) هر دو عدد صحیح و فرد متوالی نسبت به هم اول‌اند.

می‌گیریم: $k\in\mathbb{Z}, (2k+1, 2k+3)=d \Rightarrow d|2k+1 \wedge d|2k+3 \xrightarrow{\text{تفریق}} d|(2k+3)-(2k+1)$

$\Rightarrow d|2 \xrightarrow{d \text{ فرد است}} d=1$

۷ اگر $p\neq q$ و p و q هر دو عدد اول باشند ثابت کنید $(p,q)=1$.

برهان خلف: می‌گیریم $(p,q)=d$ و $d\neq 1$ باشد بنابراین:

$d|p \wedge d|q \xrightarrow{d\neq 1} d=p \wedge d=q \Rightarrow p=q$ تناقض

۸ اگر $m,n\in\mathbb{N}$ و $a,b\in\mathbb{Z}$ ثابت کنید: $m\leq n\,,\, a|b \Rightarrow a^m|b^n$

$a|b \xrightarrow{m \text{ توان}} a^m|b^m \xrightarrow{\text{راست} \times b^{n-m}} a^m|b^m\times b^{n-m} \Rightarrow a^m|b^n$

۹ اگر باقی‌ماندهٔ تقسیم عدد a بر دو عدد ۷ و ۸ به‌ترتیب ۵ و ۷ باشد، باقی‌ماندهٔ تقسیم عدد a را بر ۵۶ بیابید.

$a=7k+5 \xrightarrow{\times 8} 8a=56k+40$

$a=8k'+7 \xrightarrow{\times 7} 7a=56k'+49$

$\xrightarrow{\text{تفریق}} a=56k-56k'-9$

$\xrightarrow{-9=-56+47} a=56k-56k'-56+47$

$\Rightarrow a=56(\underbrace{k-k'-1}_{q})+47 \Rightarrow$ باقیمانده $r=47$

۱۰ اگر a عددی صحیح و فرد باشد و $b|a+2$ در این صورت باقی‌ماندهٔ تقسیم عدد (a^2+b^2+3) بر ۸ را بیابید.

می‌گیریم: $n\in\mathbb{Z}\,,\, a=2n+1 \xrightarrow{b|a+2} b|2n+3 \Rightarrow$ b عددی فرد است $\Rightarrow b=2m+1\,,\, m\in\mathbb{Z}$

$a^2+b^2+3=(2n+1)^2+(2m+1)^2+3=4n^2+4n+1+4m^2+4m+1+3$

$=4\underbrace{n(n+1)}_{2k}+4\underbrace{m(m+1)}_{2k'}+5=8k+8k'+5=8(\underbrace{k+k'}_{q})+5 \Rightarrow r=5$

۱۱ اگر n عددی صحیح باشد ثابت کنید $3|n^3-n$

$$n^3-n=n(n^2-1)=n(n-1)(n+1)$$

اگر $n=3k \Rightarrow n^3-n=3\underbrace{k(3k-1)(3k+1)}_{q} \Rightarrow 3|n^3-n$

اگر $n=3k+1 \Rightarrow n^3-n=(3k+1)(3k)(3k+2)=3\underbrace{k(3k+1)(3k+2)}_{q'} \Rightarrow 3|n^3-n$

اگر $n=3k+2 \Rightarrow n^3-n=(3k+2)(3k+1)\underbrace{(3k+3)}_{3(k+1)}=3\underbrace{(k+1)(3k+2)(3k+1)}_{q''} \Rightarrow 3|n^3-n$

بنابراین در هر حالت $3|n^3-n$ نشان دادیم.

۱۲ اگر در یک تقسیم، مقسوم و مقسوم‌علیه، هر دو بر عدد صحیح n بخش‌پذیر باشند، ثابت کنید باقی‌ماندهٔ تقسیم نیز همواره بر n بخش‌پذیر است.

با فرض $a=bq+r$ داریم:

$$\left.\begin{array}{l} n|a \\ n|b \Rightarrow n|bq \end{array}\right\} \Rightarrow n|a-bq \xrightarrow{a-bq=r} n|r$$

۱۳ اگر a عددی صحیح و دلخواه باشد ثابت کنید همواره یکی از اعداد صحیح a یا $a+2$ یا $a+4$ بر ۳ بخش‌پذیر است.

برای هر عدد صحیح دلخواه a یکی از سه حالت زیر وجود دارد:

حالت اول: $a=3k \Rightarrow 3|a$

حالت دوم: $a=3k+1 \Rightarrow a+2=3k+3 \Rightarrow a+2=3(k+1) \Rightarrow 3|a+2$

حالت سوم: $a=3k+2 \Rightarrow a+4=3k+6 \Rightarrow a+4=3(k+2) \Rightarrow 3|a+4$

بنابراین همواره یکی از اعداد صحیح a یا $a+2$ یا $a+4$ بر ۳ بخش‌پذیرند.

۱۴ ثابت کنید تفاضل مکعب‌های دو عدد صحیح متوالی عددی فرد است.

با فرض $n \in \mathbb{Z}$، دو عدد صحیح متوالی را به صورت n و $n+1$ در نظر می‌گیریم:

$(n+1)^3-n^3=\cancel{n^3}+3n^2+3n+1-\cancel{n^3}=3\underbrace{n(n+1)}_{2k}+1=2\underbrace{(3k)}_{q}+1 \Rightarrow$ عدد فرد است.

۱۵ ثابت کنید حاصل ضرب سه عدد صحیح متوالی همواره بر $3!$ بخش‌پذیر است.

اعداد صحیح متوالی را به صورت $n+1$ و n و $n-1$ در نظر می‌گیریم که حاصلضرب آن‌ها n^3-n خواهد شد و قبلاً (تمرین ۱۱) نشان دادیم که $3|n^3-n$، پس n^3-n بر ۳ بخش‌پذیر است.

از طرفی حاصلضرب هر دو عدد صحیح متوالی، مضرب ۲ است پس حاصلضرب سه عدد صحیح متوالی، بر ۲ بخش‌پذیر است.

بنابراین n^3-n بر ۶ یعنی $3!$ بخش‌پذیر است، در نتیجه $3!|n^3-n$.

۱۶ حاصل هر یک را به دست آورید : $(m \in \mathbb{Z})$

الف) $\left([m^2, m], m^5\right)$

$$\left(\underbrace{[m^2, m]}_{m^2}, m^5\right) = (m^2, m^5) = m^2 \qquad , m \neq 0$$

ب) $(2m, 6m^3)$

$$(2m, 6m^3) = 2|m| \qquad , m \neq 0$$

(توجه داشته باشید که $2m | 6m^3$)

پ) $(3m+1, 3m+2)$

$$(3m+1, 3m+2) = 1$$

(توجه داشته باشیم که $3m+1$, $3m+2$ دو عدد متوالی اند)

ت) $\left[m^7, (m^2, m^3)\right]$

$$\left[m^7, \underbrace{(m^2, m^3)}_{m^2}\right] = [m^7, m^2] = |m^7| \qquad , m \neq 0$$

ث) $[(72,48), 120]$

$$[\underbrace{(72, 48)}_{24}, 120] = [24, 120] = 120$$

(توجه داشته باشیم که $24 | 120$)

درس ۳ هم‌نهشتی در اعداد صحیح و کاربردها

فعالیت

در درس قبل دیدیم که باقی‌مانده‌های تقسیم اعداد بر ۴ عبارت‌اند از ۰، ۱، ۲ و ۳. حال اگر هر کدام از این باقی‌مانده‌ها را نمایندهٔ یک مجموعه از اعداد در نظر بگیریم که باقی‌ماندهٔ تقسیم هر عضو آن مجموعه بر عدد ۴، به‌ترتیب ۰، ۱، ۲ و ۳ باشد، داریم :

(مجموعهٔ اعدادی را که باقی‌ماندهٔ تقسیم آنها بر عدد m، مساوی با عدد r باشد با نماد $[r]_m$ نشان می‌دهیم)

$$A_۰=\{x\in \mathbb{Z}\ |x=۴k\}=\{\cdots,-۸,-۴,۰,۴,۸,\cdots,۱۶,\cdots\}=[۰]_۴$$
$$A_۱=\{x\in \mathbb{Z}\ |x=۴k+۱\}=\{\cdots,-۷,-۳,۱,۵,\cdots,۱۳,\cdots,۲۱,\cdots\}=[۱]_۴$$
$$A_۲=\{x\in \mathbb{Z}\ |x=۴k+۲\}=\{\cdots,-۶,\cdots,۲,۶,۱۰,\cdots\}=[۲]_۴$$
$$A_۳=\{x\in \mathbb{Z}\ |x=۴k+۳\}=\{\cdots,-۱۳,\cdots,-۵,-۱,۳,۷,۱۱,\cdots\}=[۳]_۴$$

۱ دو عضو دلخواه از مجموعهٔ $A_۰$ را درنظر بگیرید. آیا تفاضل این دو عدد مضرب ۴ است؟
بله مضرب ۴ است. به طور مثال اگر ۸ و ۱۶ انتخاب شوند ۸=۸-۱۶ مضرب ۴ می باشد.

۲ از مجموعهٔ $A_۱$ دو عضو دلخواه را درنظر بگیرید و تفاضل آنها را حساب کنید. آیا عدد حاصل مضرب ۴ است؟ بله مضرب ۴ است .به طور مثال : ۸=۵-۱۳ مضرب ۴ است .

۳ نتیجه‌ای را که از ۱ و ۲ گرفتید در حالت کلّی برای هر دو عضو دلخواه از $A_۱$ اثبات کنید.

فرض کنید $a,b\in A_۱ \Rightarrow \begin{cases} a=۴k_۱+۱ \\ b=۴k_۲+۱ \end{cases} \Rightarrow a-b=(۴k_۱+۱)-(۴k_۲+۱)$

$$\Rightarrow a-b=۴\underbrace{(k_۱-k_۲)}_{k_۳} \Rightarrow ۴|a-b$$

۴ آیا درست است که بگوییم اعضای مجموعهٔ $A_۲$ همگی بر عدد ۴، باقی‌ماندهٔ یکسان دارند؟ بله
در مورد مجموعهٔ $A_۳$ چه می‌توان گفت؟ تفاضل هر دو عدد دلخواه از $A_۳$ ، مضرب ۴ است .

می‌دانیم مجموعه‌های $A_۰$ ، $A_۱$ ، $A_۲$ و $A_۳$ یک افراز برای مجموعهٔ $\mathbb{Z}$ هستند و بنابراین هر دو عدد صحیح، مانند a و b، یا هر دو به یکی از این چهار مجموعه تعلق دارند و یا هر کدام در یک مجموعه

واقع‌اند (A_0 ، A_1 ، A_2 و A_3 اشتراکی با هم ندارند. چرا؟) **بنا به تعریف افراز ، نباید اشتراک داشته باشند .**

و لذا اگر a و b هر دو در یک مجموعه از این چهار مجموعه باشند(باقی‌ماندهٔ تقسیم a و b بر ۴ مساوی باشد

یا اصطلاحاً a و b بر ۴ هم باقی‌مانده باشند) همواره $4 | a-b$ و اگر این‌طور نباشد $4 \nmid a-b$.

تعریف : برای هر عدد طبیعی مانند m و هر دو عدد صحیح مانند a و b، اگر $m|a-b$، می‌گوییم «a هم‌نهشت با b است به‌سنج یا پیمانهٔ m»؛ و می‌نویسیم $a\overset{m}{\equiv}b$. تعریف رابطهٔ هم‌نهشتی به پیمانهٔ m، به زبان ریاضی عبارت است از :

$$\forall a,b\in\mathbb{Z}\ ,\ a\overset{m}{\equiv}b \Leftrightarrow m\,|\,a-b\ (m\in\mathbb{N})$$

مثال: $\begin{cases} 12\overset{5}{\equiv}2\ ,\ -11\overset{6}{\equiv}1 \\ -295\overset{10}{\equiv}-5\ ,\ 23\overset{3}{\equiv}-7 \end{cases}$

قرارداد : مجموعهٔ همهٔ اعداد صحیح که باقی‌ماندهٔ تقسیم آنها بر عدد طبیعی m برابر با r می‌باشد، یعنی $A_r=\{x\in\mathbb{Z}\,|\,x=mk+r\}$ را کلاس یا دستهٔ هم‌نهشتی r به پیمانهٔ m می‌نامیم و با نماد $[r]_m$ نمایش می‌دهیم.

برای استفاده از رابطهٔ هم‌نهشتی، ابتدا خواص و ویژگی‌های این رابطه را بررسی می‌کنیم که با توجه به تعریف این رابطه و خواص رابطهٔ عاد کردن، ویژگی‌های رابطهٔ هم‌نهشتی به‌راحتی اثبات می‌شوند. شما در کامل کردن اثبات‌ها شرکت کنید.

سه خاصیت مهم در هم نهشتی :

۱- $\forall m\in\mathbb{N}, a\in\mathbb{Z}: a\overset{m}{\equiv}a$ (هر عدد صحیح با خودش هم نهشت است.)

۲- برای هر $m\in\mathbb{N}$ و اعداد صحیح b,a داریم : $a\overset{m}{\equiv}b \Leftrightarrow b\overset{m}{\equiv}a$

۳- برای هر $m\in\mathbb{N}$ و اعداد صحیح c,b,a داریم : $a\overset{m}{\equiv}b \ \wedge\ b\overset{m}{\equiv}c \Rightarrow a\overset{m}{\equiv}c$ (خاصیت تعدی)

$$a\overset{m}{\equiv}b\Rightarrow\begin{cases} a+c\overset{m}{\equiv}b+c \\ a-c\overset{m}{\equiv}b-c \end{cases}$$

ویژگی ۱ : به دو طرف یک رابطهٔ هم‌نهشتی می‌توان عددی صحیح را اضافه یا از آن کم کرد.

اثبات :

$a\overset{m}{\equiv}b\Rightarrow m\,|\,a-b\Rightarrow m\,|\,a+c-b-c$

$\Rightarrow m\,|\,(a+c)-(b+c)\Rightarrow(a+c)\overset{m}{\equiv}(b+c)$

مثال : با توجه به فعالیت قبل فرض کنیم، $7\overset{4}{\equiv}-1$ ($[7]$, $[(-1)]\in A_3$) یا $(4\,|\,7-(-1))$ در این صورت اگر ۵ واحد به دو طرف این هم‌نهشتی اضافه کنیم فاصلهٔ این دو عدد یا تفاضل آنها همچنان حفظ شده و همان ۸ که مضرب ۴ است باقی می‌ماند. به عبارت دیگر، اعدادحاصل یعنی $12=5+7$ و $4=5+(-1)$ نیز در A_3 قرار خواهند گرفت.

$$a\overset{m}{\equiv}b\Rightarrow ac\overset{m}{\equiv}bc$$

ویژگی ۲ : دو طرف یک رابطهٔ هم‌نهشتی را می‌توان در عددی صحیح ضرب کرد.

اثبات :

$a\overset{m}{\equiv}b\Rightarrow m\,|\,a-b\Rightarrow m\,|\,c\times(a-b)\Rightarrow m\,|\,ac-bc$

$\Rightarrow ac\overset{m}{\equiv}bc$

تذکر: عکس ویژگی ۲ برقرار نیست، یعنی اگر $ac \overset{m}{\equiv} bc$، لزوماً نمی‌توان نتیجه گرفت که $a \overset{m}{\equiv} b$ (قانون حذف برای رابطهٔ هم‌نهشتی در حالت کلّی برقرار نیست) برای این مطلب یک مثال نقض بزنید.

$۲\times۲ \overset{۲}{\equiv} ۳\times۲$ ولی $۲ \overset{۲}{\not\equiv} ۳$

$$a \overset{m}{\equiv} b \Rightarrow a^n \overset{m}{\equiv} b^n$$

ویژگی ۳: (دو طرف یک رابطهٔ هم‌نهشتی را می‌توان به توان n رساند.) $(n \in \mathbb{N})$

مثال: $(۵ \overset{۳}{\equiv} ۲ \Rightarrow ۵^۳ \overset{۳}{\equiv} ۲^۳)$

اثبات: (از اتحاد $(a^n-b^n)=(a-b)(a^{n-1}+a^{n-2}b+\cdots+b^{n-1})$ استفاده می‌کنیم)

$$a \overset{m}{\equiv} b \Rightarrow m \mid a-b \Rightarrow m \mid (a-b)\underbrace{(a^{n-1}+a^{n-2}b+\cdots+b^{n-1})}_{c}$$

$$\Rightarrow m \mid a^n-b^n \Rightarrow a^n \overset{m}{\equiv} b^n$$

تذکر: می‌دانیم $۳^۲ \overset{۴}{\equiv} ۵^۲$ ولی $۳ \overset{۴}{\not\equiv} ۵$ بنابراین نتیجه می‌گیریم که **عکس ویژگی ۳ برقرار نیست.**

$$a \overset{m}{\equiv} b\ ,\ c \overset{m}{\equiv} d \Rightarrow \begin{cases} ac \overset{m}{\equiv} bd & ۱ \\ a+c \overset{m}{\equiv} b+d & ۲ \\ a-c \overset{m}{\equiv} b-d & ۳ \end{cases}$$

ویژگی ۴: دو طرف دو رابطهٔ هم‌نهشتی را که پیمانه‌های یکسان داشته باشند می‌توان با هم جمع یا از هم منها و یا در هم ضرب کرد.

$(۱۵ \overset{۵}{\equiv} ۱۰\ ,\ ۷ \overset{۵}{\equiv} ۲ \Rightarrow ۱۵\times۷ \overset{۵}{\equiv} ۱۰\times۲$ و $۱۵\times۲ \overset{۵}{\equiv} ۱۰\times۷)$

$۱۵+۷ \overset{۵}{\equiv} ۱۰+۲ \Rightarrow ۲۲ \overset{۵}{\equiv} ۱۲$ و

اثبات ۱:

$$\left.\begin{array}{l} a \overset{m}{\equiv} b \Rightarrow m \mid a-b \overset{\times c}{\Rightarrow} m \mid ac-bc \\ c \overset{m}{\equiv} d \Rightarrow m \mid c-d \overset{\times b}{\Rightarrow} m \mid bc-bd \end{array}\right\} \overset{+}{\Rightarrow} m \mid (ac-bc)+(bc-bd)$$

$$\Rightarrow m \mid ac-bd \Rightarrow ac \overset{m}{\equiv} bd$$

اثبات ۲ و ۳ به عهدهٔ شما:

$$\left.\begin{array}{l} a \overset{m}{\equiv} b \Rightarrow m \mid a-b \\ c \overset{m}{\equiv} d \Rightarrow m \mid c-d \end{array}\right\} \overset{\pm}{\longrightarrow} m \mid (a-b)\pm(c-d) \Rightarrow m \mid (a\pm c)-(b\pm d) \Rightarrow a\pm c \overset{m}{\equiv} b\pm d$$

تذکر مهم: اگر باقی‌ماندهٔ تقسیم a بر m مساوی با r باشد در این صورت $a \overset{m}{\equiv} r$

$$a = mq+r \Rightarrow a \overset{m}{\equiv} r$$

$(۱۷۹ = ۱۱\times۱۶+۳ \Rightarrow ۱۷۹ \overset{۱۱}{\equiv} ۳)$

اثبات :

$$a=mq+r \Rightarrow a-r=mq \Rightarrow m \mid a-r \Rightarrow a \overset{m}{\equiv} r$$

نتیجه ۱ : هرگاه بخواهیم کوچک‌ترین عدد نامنفی و هم‌نهشت با عدد a به پیمانهٔ m را مشخص کنیم، کافی است عدد a را بر m تقسیم کرده و باقی‌مانده را به‌دست آوریم.

مثال: $۲۹۶ \overset{۱۱}{\equiv} ? \rightarrow ۲۹۶ \overset{۱۱}{\equiv} ۱۰$

نتیجه ۲ : اگر دو عدد a و b تقسیم بر عدد طبیعی m، هم باقی‌مانده باشند در این صورت $a \overset{m}{\equiv} b$.

مثال : باقی‌ماندهٔ تقسیم عدد $A=(۲۷)^{۷}+۱۹$ را بر ۱۳ بیابید.

$$۲۷=۱۳\times۲+۱ \Rightarrow ۲۷ \overset{۱۳}{\equiv} ۱ \Rightarrow \underbrace{(۲۷)^{۷} \overset{۱۳}{\equiv} ۱^{۷}=۱}_{۱} \quad و \quad ۱۹=۱۳\times۱+۶$$

$$\Rightarrow \underbrace{۱۹ \overset{۱۳}{\equiv} ۶}_{۲} \xrightarrow{\text{با توجه به ① و ②}} (۲۷)^{۷}+۱۹ \overset{۱۳}{\equiv} ۱+۶ \xrightarrow{\text{با توجه به ①}} A \overset{۱۳}{\equiv} ۷ \Rightarrow r=۷$$

پس باقی‌ماندهٔ A بر ۱۳، برابر با ۷ می‌باشد.

مثال : باقی‌ماندهٔ تقسیم عدد $A=(۱۰۰۰)^{۱۳}\times۱۲+۱۰$ را بر ۷ بیابید.

$$۱۰۰۰=۷\times۱۴۲+۶ \Rightarrow ۱۰۰۰ \overset{۷}{\equiv} ۶ \quad و \quad ۶ \overset{۷}{\equiv} -۱ \Rightarrow ۱۰۰۰ \overset{۷}{\equiv} -۱$$

$$\Rightarrow (۱۰۰۰)^{۱۳} \overset{۷}{\equiv} (-۱)^{۱۳}=-۱ \qquad ۱۳$$

$$\Rightarrow (۱۰۰۰)^{۱۳}\times۱۲ \overset{۷}{\equiv} (-۱)\times۱۲=-۱۲$$

$$\Rightarrow (۱۰۰۰)^{۱۳}\times۱۲+۱۰ \overset{۷}{\equiv} (-۱۲)+۱۰=-۲ \quad و \quad -۲ \overset{۷}{\equiv} ۵$$

$$\Rightarrow (۱۰۰۰)^{۱۳}\times۱۲+۱۰ \overset{۷}{\equiv} ۵ \Rightarrow r=۵$$

$$a \overset{m}{\equiv} b \Rightarrow \begin{cases} a+mt \overset{m}{\equiv} b+mk \\ a-mt \overset{m}{\equiv} b-mk \end{cases}$$

ویژگی ۵ : می‌توان به دو طرف یا یک طرفِ یک رابطهٔ هم‌نهشتی هر مضربی از پیمانه را اضافه یا از آن کم کرد.

طبق فرض: $a \overset{m}{\equiv} b$

می‌دانیم: $mt \overset{m}{\equiv} mk$

$$\overset{\pm}{\Rightarrow} a \pm mt \overset{m}{\equiv} b \pm mk$$

مثال : می‌دانیم $۲ \overset{۵}{\equiv} ۷$ اگر به سمت چپ رابطه $۱۵=۵\times۳$ و به سمت راست آن $۲۵=۵\times۵$ واحد اضافه کنیم خواهیم داشت $۲+۲۵ \overset{۵}{\equiv} ۷+۱۵$ یا $۲۷ \overset{۵}{\equiv} ۲۲$ که این رابطه برقرار است.

$$ac \overset{m}{\equiv} bc\ ,\ (c,m)=d \Rightarrow a \overset{\frac{m}{d}}{\equiv} b$$

ویژگی ۶: اگر بخواهیم دو طرف یک رابطهٔ هم‌نهشتی را بر عددی تقسیم کنیم، باید پیمانهٔ آن هم‌نهشتی را بر ب م م آن عدد و پیمانه تقسیم کنیم. (این ویژگی را بدون اثبات می‌پذیریم)

نتیجه مهم: اگر $ac \overset{m}{\equiv} bc$ و $(c,m)=۱$ در این‌صورت $a \overset{m}{\equiv} b$ در واقع قاعدهٔ حذف در هم‌نهشتی‌ها، برای هر عدد که نسبت به پیمانه اول باشد، برقرار است.

مثال: واضح است که $۴\times۳ \overset{۳}{\equiv} ۴\times۶$ و چون $(۴,۳)=۱$ پس $۳ \overset{۳}{\equiv} ۶$.

فعالیت

همان‌طور که در دورهٔ ابتدایی آموختید عددنویسی در مبنای ۱۰ انجام می‌شود؛ که در آن ارزش مکانی ارقام، ده تا ده تا درنظر گرفته می‌شود (ده تا یکی می‌شود ده تا و ده تا ده تایی می‌شود صد تا و ده تا صد تایی می‌شود هزار تا و ...) بنابراین به راحتی می‌توانیم هر عدد را در مبنای ده بسط بدهیم. به‌عنوان مثال عدد ۱۳۹۷ را می‌توان به‌صورت زیر بسط داد:

$$۱۳۹۷ = ۱\times۱۰۰۰+۳\times۱۰۰+۹\times۱۰+۷$$

$$\Rightarrow ۱۳۹۷ = ۱\times۱۰^۳+۳\times۱۰^۲+۹\times۱۰+۷$$

۱ هر یک از دو عدد زیر را در مبنای ده بسط بدهید:

$$۱۳۸۸۱۰۹ = ۱\times۱۰^۶+۳\times۱۰^۵+۸\times۱۰^۴+۸\times۱۰^۳+۱\times۱۰^۲+۰\times۱۰^۱+۹$$

$$۱۳۵۷۱۱۲۲ = ۱\times۱۰^۷+۳\times۱۰^۶+۵\times۱۰^۵+۷\times۱۰^۴+۱\times۱۰^۳+۱\times۱۰^۲+۲\times۱۰^۱+۲$$

۲ باقی‌ماندهٔ تقسیم عدد $A=۱۳۵۸۱۱۲$ را بر عدد ۹ بیابید.

می‌دانیم $۱۰ \overset{۹}{\equiv} ۱$ و بنابر ویژگی‌های رابطهٔ هم‌نهشتی $۱۰^n \overset{۹}{\equiv} ۱$ بنابراین:

$$A=۱\times۱۰^۶+۳\times۱۰^۵+۵\times۱۰^۴+۸\times۱۰^۳+۱\times۱۰^۲+۱\times۱۰+۲$$

$$۱۰^۶ \overset{۹}{\equiv} ۱ \overset{\times۱}{\Rightarrow} ۱\times۱۰^۶ \overset{۹}{\equiv} ۱$$

$$۱۰^۵ \overset{۹}{\equiv} ۱ \overset{\times۳}{\Rightarrow} ۳\times۱۰^۵ \overset{۹}{\equiv} ۳$$

$$۱۰^۴ \overset{۹}{\equiv} ۱ \overset{\times۵}{\Rightarrow} ۵\times۱۰^۴ \overset{۹}{\equiv} ۵$$

$$۱۰^۳ \overset{۹}{\equiv} ۱ \Rightarrow ۸\times۱۰^۳ \overset{۹}{\equiv} ۸$$

$$۱۰^۲ \overset{۹}{\equiv} ۱ \Rightarrow ۱\times۱۰^۲ \overset{۹}{\equiv} ۱$$

$$۱۰ \overset{۹}{\equiv} ۱ \Rightarrow ۱\times۱۰ \overset{۹}{\equiv} ۱$$

$$۲ \overset{۹}{\equiv} ۲$$

با جمع طرفین هم‌نهشتی‌ها داریم:

$$A \overset{۹}{\equiv} ۱+۳+۵+۸+۱+۱+۲$$

اگر دقت کنید سمت راست هم‌نهشتیِ اخیر مجموعِ ارقام A است. بنابراین می‌توان گفت «باقی‌ماندهٔ تقسیم هر عدد بر ۹ برابر است با باقی‌ماندهٔ تقسیم مجموع ارقام آن عدد بر ۹»

عدد n رقمی $A=\overline{a_{n-1}a_{n-2}a_{n-3}\ldots a_2a_1a_0}$ را بسط دهید و در هم‌نهشتی به پیمانهٔ ۹ به‌جای هر توان ۱۰ عدد ۱ را قرار دهید، سپس همین نتیجه‌گیری را در حالت کلّی بررسی کنید.

$$A=10^{n-1}\times a_{n-1}+\cdots+\cdots+\cdots+10^{2}a_2+10\ a_1+10^{0}a_0$$

$$\Rightarrow A\overset{9}{\equiv}1\times a_{n-1}+\cdots+1\times a_1+a_0$$

$$\Rightarrow A\overset{9}{\equiv}a_{n-1}+a_{n-2}+\cdots+a_2+a_1+a_0$$

کار در کلاس

۱ با توجه به اینکه $10\overset{3}{\equiv}1$، نتیجه می‌گیریم، $\forall k\in\mathbb{N}\ ,\ 10^k\overset{3}{\equiv}1$، بنابراین، مشابه فعالیت قبل، باقی‌ماندهٔ تقسیم عدد $A=598348$ را بر ۳ بیابید و سپس یک قاعدهٔ کلّی برای یافتن باقی‌مانده تقسیم و بخش‌پذیری اعداد n رقمی بر ۳ بیان کنید.

۲ می‌دانیم که $10\overset{11}{\equiv}-1$؛ بنابراین برای هر n زوج، $10^n\overset{11}{\equiv}1$ و برای هر n فرد، $10^n\overset{11}{\equiv}-1$. حال اگر در هم‌نهشتی به پیمانهٔ ۱۱ و در بسط عدد $A=4985327$ به‌جای توان‌های زوجِ عدد ۱۰، عدد یک و به‌جای توان‌های فردِ عدد ۱۰، عدد (-1) قرار دهیم باقی‌ماندهٔ تقسیم عدد A را بر ۱۱ بیابید.

$$A=4\times10^{6}+9\times10^{5}+8\times10^{4}+\cdots+2\times10+7$$

$$\Rightarrow A\overset{11}{\equiv}4\times\cdots+\cdots\times(-1)+\cdots\times1+\cdots+2\times(-1)+7$$

$$\Rightarrow A\overset{11}{\equiv}7-2+3-5+8-9+4=6\Rightarrow r=\cdots$$

۳ می‌دانیم $10\overset{2}{\equiv}0$ و $10\overset{5}{\equiv}0$ و $10\overset{10}{\equiv}\cdots$ در این‌صورت:

$$\forall k\in\mathbb{N}\ ;\ 10^k\overset{2}{\equiv}\cdots \text{ و } 10^k\overset{5}{\equiv}\cdots \text{ و } 10^k\overset{10}{\equiv}0$$

بنابراین اگر در بسط هر عدد n رقمی مانند $A=\overline{a_{n-1}\ a_{n-2}\cdots a_2\ a_1\ a_0}$ به‌جای توان‌های عدد ۱۰ (در هم‌نهشتی‌های به پیمانهٔ ۲ و ۵ و ۱۰) صفر قرار دهیم خواهیم داشت:

$$A=10^{n-1}a_{n-1}+10^{n-2}a_{n-2}+\ldots+10^{2}a_2+10\ a_1+a_0$$

$$\Rightarrow A\overset{2}{\equiv}0\times a_{n-1}+\cdots+\cdots+\cdots\times a_2+\cdots+a_0$$

$$\Rightarrow A\overset{2}{\equiv}\cdots \text{ و } A\overset{5}{\equiv}\cdots \text{ و } A\overset{10}{\equiv}a_0$$

نتیجهٔ حاصل را برای یافتن باقی‌ماندهٔ تقسیم اعداد n رقمی بر ۲ و ۵ و ۱۰ و شرط بخش‌پذیری بر این اعداد را بیان کنید.

۱ با توجه به اینکه $10 \overset{3}{\equiv} 1$، نتیجه می‌گیریم، $\forall k \in \mathbb{N} ,\ 10^k \overset{3}{\equiv} 1$، بنابراین، مشابه فعالیت قبل، باقی‌ماندهٔ تقسیم عدد $A=598348$ را بر ۳ بیابید و سپس یک قاعده کلّی برای یافتن باقی‌مانده تقسیم و بخش‌پذیری اعداد n رقمی بر ۳ بیان کنید.

$$A = 5\times10^5 + 9\times10^4 + 8\times10^3 + 3\times10^2 + 4\times10^1 + 8$$

$$\left.\begin{array}{l}
10^5 \overset{3}{\equiv} 1 \xrightarrow{\times 5} 5\times10^5 \overset{3}{\equiv} 5 \\
10^4 \overset{3}{\equiv} 1 \xrightarrow{\times 9} 9\times10^5 \overset{3}{\equiv} 9 \\
10^3 \overset{3}{\equiv} 1 \xrightarrow{\times 8} 8\times10^3 \overset{3}{\equiv} 8 \\
10^2 \overset{3}{\equiv} 1 \xrightarrow{\times 3} 3\times10^2 \overset{3}{\equiv} 3 \\
10^1 \overset{3}{\equiv} 1 \xrightarrow{\times 4} 4\times10^1 \overset{3}{\equiv} 4 \\
8 \overset{3}{\equiv} 8
\end{array}\right\} \xrightarrow{+} A \overset{3}{\equiv} 5+9+8+3+4+8 \Rightarrow A \overset{3}{\equiv} 1 \Rightarrow r = 1$$

قاعده : باقیمانده تقسیم هر عدد بر ۳ ، برابر است با باقیمانده تقسیم مجموع ارقام آن عدد بر ۳ .

۲ می‌دانیم که $10 \overset{11}{\equiv} -1$؛ بنابراین برای هر n زوج، $10^n \overset{11}{\equiv} 1$ و برای هر n فرد، $10^n \overset{11}{\equiv} -1$. حال اگر در هم‌نهشتی به پیمانهٔ ۱۱ و در بسط عدد $A=4985327$ به‌جای توان‌های زوجِ عدد ۱۰، عدد یک و به‌جای توان‌های فردِ عدد ۱۰، عدد (۱-) قرار دهیم باقی‌ماندهٔ تقسیم عدد A را بر ۱۱ بیابید.

$$A=4\times10^6+9\times10^5+8\times10^4+\cdots+2\times10+7$$

$$\Rightarrow A \overset{11}{\equiv} 4\times 1 + 9\times(-1) + 8\times 1 + \cdots + 2\times(-1) + 7$$

$$\Rightarrow A \overset{11}{\equiv} 7-2+3-5+8-9+4 = 6 \Rightarrow r = 6$$

۳ می‌دانیم $10 \overset{2}{\equiv} 0$ و $10 \overset{5}{\equiv} 0$ و $10 \overset{10}{\equiv} 0$ در این‌صورت : $\forall k \in \mathbb{N} ;\ 10^k \overset{2}{\equiv} 0$ و $10^k \overset{5}{\equiv} 0$ و $10^k \overset{10}{\equiv} 0$

بنابراین اگر در بسط هر عدد n رقمی مانند $A=\overline{a_{n-1}\ a_{n-2}\cdots a_2\ a_1\ a_0}$ به‌جای توان‌های عدد ۱۰ (در هم‌نهشتی‌های به پیمانهٔ ۲ و ۵ و ۱۰) صفر قرار دهیم خواهیم داشت :

$$A=10^{n-1}a_{n-1}+10^{n-2}a_{n-2}+\ldots+10^2a_2+10\ a_1+a_0$$

$$\Rightarrow A \overset{2}{\equiv} 0\times a_{n-1} + 0\times a_{n-2} + \cdots + 0\times a_2 + 0\times a_1 + a_0$$

$$\Rightarrow A \overset{2}{\equiv} a_0 \text{ و } A \overset{5}{\equiv} a_0 \text{ و } A \overset{10}{\equiv} a_0$$

نتیجهٔ حاصل را برای یافتن باقی‌ماندهٔ تقسیم اعداد n رقمی بر ۲ و ۵ و ۱۰ و شرط بخش‌پذیری بر این اعداد را بیان کنید.

باقیمانده تقسیم هر عدد بر ۲ ، همان باقیمانده تقسیم رقم یکان آن عدد بر ۲ می باشد . بنابراین عددی بر ۲ بخش پذیر است که رقم یکان آن بر ۲ بخش پذیر باشد یعنی رقم یکان آن عددی زوج باشد .

باقیمانده تقسیم هر عدد بر ۵ ، همان باقیمانده تقسیم رقم یکان آن عدد بر ۵ می باشد . بنابراین عددی بر ۵ بخش پذیر است که رقم یکان آن بر ۵ بخش پذیر باشد یعنی رقم یکان آن صفر یا پنج باشد .

باقیمانده تقسیم هر عدد بر ۱۰ ، همان رقم یکان آن عدد می باشد . بنابراین عددی بر ۱۰ بخش پذیر است که رقم یکان صفر باشد .

یکی از کاربردهای هم‌نهشتی در تقویم‌نگاری و محاسبهٔ روزهای هفته برحسب تاریخ داده شده، مشخص شده است. به‌عنوان مثال : اگر اول مهر ماه در یک سال یکشنبه باشد، ۲۲ بهمن در همان سال چه روزی از هفته خواهد بود؟ برای پاسخ دادن به سؤالاتی شبیه این سؤال فعالیت زیر را انجام دهید.

فعالیت

می‌دانیم هر روز از روزهای هفته، مثلاً شنبه، پس از گذشت ۷ روز دوباره تکرار می‌شود. به‌عنوان مثال اگر ۱۲ فروردین در یک سال یکشنبه باشد در این‌صورت ۱۹=۱۲+۷ فروردین و ۲۶=۱۹+۷ فروردین نیز یکشنبه می‌باشد. در بحث تقویم و روزهای هفته دقت دارید که شش ماه اولِ سال همگی ۳۱ روزه و شش ماه دومِ سال غیر از اسفند (که، به‌جز سال کبیسه، ۲۹ روز است) همگی ۳۰ روزه می‌باشند.

حال فرض کنید در یک سال ۹ دی ماه[1] یکشنبه باشد، در همان سال ۲۸ دی‌ماه چند شنبه است؟

با توجه به مطالب مذکور ۱۶ دی و ۲۳ دی یکشنبه بوده و کافی است از ۲۳ دی تا ۲۸ دی ۵ روز بعد را حساب کنیم که به روز **جمعه** می‌رسیم.

حال اگر فاصلهٔ ۹ دی تا ۲۸ دی را حساب کنیم (۱۹=۹−۲۸) مشاهده می‌شود که ۱۹ روز فاصله داریم و چون $۱۹\overset{۷}{\equiv}۵$ لذا کافی است یکشنبه را مطابق جدول مقابل مبدأ فرض کرده و مشخص کنیم که ۵ روز بعد چه روزی از هفته است یا عدد ۵ متناظر با کدام روز است.

ی	د	س	چ	پ	ج	ش
۰	۱	۲	۳	۴	۵	۶

۱ اگر در یک سال، اول مهر شنبه باشد در این‌صورت ۱۲ بهمن در همان سال چه روزی است؟

ش	ی	د	س	چ	پ	ج
۰	۱	۲	۳	۴	۵	۶

۲۹ روز در مهر ماه و سه ماه آبان، آذر و دی و ۱۲ روز تا ۱۲ بهمن،

فاصلهٔ ۱ مهر است تا ۱۲ بهمن؛ یعنی d=۲۹+۳×۳۰+۱۲=۱۳۱

از طرفی $۱۳۱\overset{۷}{\equiv}۵$ و با توجه به جدول فوق روز متناظر با عدد ۵ پنجشنبه است، یعنی ۱۲ بهمن در آن سال پنجشنبه است.

۲ از روی تقویم سال جاری روز هفته را برای هفتم تیر مشخص کنید و با توجه به آن و به روش فوق مشخص کنید که ۲۲ بهمن در سال جاری چه روزی از هفته خواهد بود. درستی پاسخ خود را از روی تقویم نیز بررسی کنید.

می دانیم هفتم تیر پنجشنبه می باشد . بنابراین

$$d=(۳۱-۷)+۲\times۳۱+۴\times۳۰+۲۲\overset{۷}{\equiv}۳+(-۱)+۱+۱=۴$$

پ	ج	ش	ی	د	س	چ
۰	۱	۲	۳	۴	۵	۶

دوشنبه است .

معادلهٔ هم‌نهشتی

تعریف : یک رابطهٔ هم‌نهشتی همراه با مجهولی چون x به فرم $ax\overset{m}{\equiv}b$ را یک معادلهٔ هم‌نهشتی می‌نامیم؛ و منظور از حل معادلهٔ هم‌نهشتی پیدا کردن همهٔ جواب‌هایی چون $x_0\in\mathbb{Z}$ است که در این معادله صدق کنند، یعنی $ax_0\overset{m}{\equiv}b$. $(a,b\in\mathbb{Z})$

[1] ۹ دی ماه روز بصیرت نام‌گذاری شده است.

به‌عنوان مثال، معادلهٔ $x\overset{3}{\equiv}2$ را درنظر بگیرید. در این معادله x می‌تواند ۲ یا ۵ باشد. عدد بعدی که می‌تواند به جای x قرار بگیرد و در معادله صدق کند عدد ۸ است و اگر بخواهیم تمام جواب‌های این معادله یا جواب‌های عمومی آن را داشته باشیم کافی است از تعریف هم‌نهشتی استفاده کنیم،

$$x\overset{3}{\equiv}2 \Rightarrow 3 \mid x-2 \Rightarrow (x-2)=3k \Rightarrow x=3k+2$$

که اگر k را به‌ترتیب صفر و ۱ و ۲ قرار بدهیم همان جواب‌های $x_\circ=2$ و $x_\circ=5$ و $x_\circ=8$ را به‌دست می‌آوریم و برای هر $k\in\mathbb{Z}$، جوابی برای معادله به‌دست می‌آید. در معادلهٔ فوق ضریب x عدد یک است و اگر ضریب x عددی غیر از یک باشد برای دست‌یابی به جواب‌های عمومی معادله باید ضریب x را حذف کنیم که ویژگی‌های ۵ و ۶ و نتیجه ویژگی ۶ به ما کمک می‌کنند.

مثال : جواب‌های عمومی معادلهٔ $4x\overset{5}{\equiv}17$ را به‌دست آورید.

$$4x\overset{5}{\equiv}17\,,\ 17\overset{5}{\equiv}2 \Rightarrow 4x\overset{5}{\equiv}2$$

$$\overset{\text{ویژگی ۵}}{\Rightarrow}\ 4x\overset{5}{\equiv}2+(2\times5)$$

$$\Rightarrow 4x\overset{5}{\equiv}12 \overset{(4,5)=1}{\Rightarrow} \cancel{4}x\overset{5}{\equiv}\cancel{4}\times3$$

$$\Rightarrow x\overset{5}{\equiv}3 \Rightarrow x=5k+3$$

$$(5|x-3 \Rightarrow x-3=5k \Rightarrow x=5k+3)$$

مثال : همهٔ اعداد صحیحی را بیابید که سه برابر آنها منهای ۱۳ بر ۷ بخش‌پذیر باشند.

حل : اگر آن عدد را x فرض کنیم باید $7|3x-13$ یا $3x\overset{7}{\equiv}13$

$$3x\overset{7}{\equiv}13 \Rightarrow 3x\overset{7}{\equiv}13-7=6$$

$$\overset{(3,7)=1}{\Rightarrow}\ \cancel{3}x\overset{7}{\equiv}\cancel{3}\times2 \Rightarrow x=7k+2$$

قضیه : معادلهٔ هم‌نهشتی $ax\overset{m}{\equiv}b$ دارای جواب است اگر و فقط اگر $(a,m)|b$. این قضیه را بدون اثبات می‌پذیریم.

نتیجه : اگر $(a,m)=1$ چون برای هر b، همواره $1|b$ پس معادلهٔ $ax\overset{m}{\equiv}b$ همواره دارای جواب است.

مثال : معادلهٔ $6x\overset{9}{\equiv}11$ دارای جواب نیست زیرا، $(6,9)=3$ و $3\nmid11$ و معادلهٔ $4x\overset{6}{\equiv}18$ دارای جواب است. چرا؟ چون $2=(4,6)$ و $2|18$

این معادله را حل کنید :

$$4x\overset{6}{\equiv}18 \Rightarrow 2\times2x\overset{6}{\equiv}2\times9\,,\ (2,6)=2$$

$$\overset{\text{ویژگی ۶}}{\Rightarrow}\ 2x\overset{\frac{6}{2}}{\equiv}9$$

$$\Rightarrow 2x\overset{3}{\equiv}9$$

$$\Rightarrow 2x\overset{3}{\equiv}9+3=12$$

$$\Rightarrow \cancel{2}x\overset{3}{\equiv}\cancel{2}\times6 \Rightarrow x=3k+6$$

حل معادلات سیّاله و کاربردهای آن

فعالیت

۱ آیا می‌توانید یک کیسهٔ ۱۹ کیلویی را با وزنه‌های ۳ و ۴ کیلویی وزن کنید؟ (می‌توانید از یکی از دو وزنه یا هر دو باهم استفاده کنید و از هر وزنه به تعداد کافی در اختیار داریم)

یک جواب مسئله استفاده از ۴ وزنهٔ ۴ کیلویی و یک وزنهٔ ۳ کیلویی است.

$۴\times ۴ + ۱\times ۳ = ۱۹$

آیا برای این مسئله می‌توانید یک جواب دیگر بیابید؟

$۱\times ۴ + ۳\times ۵ = ۱۹$

در واقع شما به دنبال جواب‌های حسابی (صحیح و نامنفی) برای معادلهٔ $۴\times x + ۳\times y = ۱۹$ هستید.

(x تعداد وزنه‌های ۴ کیلویی به‌کار رفته و y تعداد وزنه‌های ۳ کیلویی به‌کار رفته است)

۲ اگر در قسمت قبل بخواهیم فقط از وزنه‌های ۲ و ۴ کیلویی استفاده کنیم آیا عمل توزین امکان‌پذیر است؟

باید جواب‌هایی چون $y \in W$ و x بیابیم که $۴\times x + ۲\times y = ۱۹$ چون مجموع دو عدد زوج همواره زوج است پس چنین x و y ای در W وجود ندارد.

تعریف : هرگاه بخواهیم جواب‌های معادلهٔ $ax+by=c$ یعنی x و y را در اعداد صحیح بیابیم و $c\in\mathbb{Z}$ و b و a در این صورت معادلهٔ مذکور ($ax+by=c$) را یک معادلهٔ سیّاله درجهٔ اول یا خطی می‌نامیم.

تبدیل یک معادلهٔ سیّاله به معادلهٔ هم‌نهشتی

معادلهٔ سیّالهٔ $ax+by=c$ دارای دو مجهول است و به دو صورت می‌تواند به یک معادلهٔ هم‌نهشتی (با مجهول x یا y) تبدیل شود :

$$ax+by=c \Rightarrow ax-c=(-b)y \Rightarrow -b\mid ax-c \Rightarrow b\mid ax-c$$

$$\Rightarrow ax \overset{b}{\equiv} c\ (b>۰) \text{ و } ax \overset{-b}{\equiv} c\ (b<۰) \text{ یا } ax \overset{|b|}{\equiv} c$$

و به‌طریق مشابه می‌توان نوشت :

$$by \overset{-a}{\equiv} c \text{ و } by \overset{a}{\equiv} c$$

تذکر: برای سهولت در حل معادله ی سیاله ، بهتر است از بین دو عدد $|a|$ و $|b|$ ، هر کدام کوچکتر است به عنوان پیمانه انتخاب شود .

به عنوان نمونه در حل معادله سیاله $۲x+۳y=۷$، می توان به دو صورت معادله هم نهشتی نوشت : $۲x \overset{۳}{\equiv} ۷$ یا $۳y \overset{۲}{\equiv} ۷$ ولی بهتر است در حالتی که پیمانه کوچکتر است ، یعنی $۳y \overset{۲}{\equiv} ۷$ نوشته شود.

تذکر : با توجه به قضیهٔ قبل نتیجه می‌گیریم که «شرط لازم و کافی برای آنکه معادلهٔ سیالهٔ $ax+by=c$ دارای جواب باشد آن است که، $(a,b)\mid c$

کار در کلاس

۱ با تبدیل معادلهٔ سیالهٔ $۴x+۵y=۹$ به معادلهٔ هم‌نهشتی و حل آن، جواب‌های عمومی این معادلهٔ سیاله را بیابید.

$۴x+۵y=۹ \Rightarrow ۴x\overset{۵}{\equiv}۹$

$\Rightarrow ۴x\overset{۵}{\equiv}۹-۵ \Rightarrow ۴x\overset{۵}{\equiv}۴$

$\Rightarrow x\overset{۵}{\equiv}۱ \Rightarrow \underline{x=۵k+۱}$

$\Rightarrow ۴(۵k+۱)+۵y=۹$

$\Rightarrow ۲۰k+۴+۵y=۹$

$\Rightarrow ۲۰k+۵y=۵$

$\Rightarrow ۴k+y=۱ \Rightarrow \underline{y=-۴k+۱}$

۲ در قسمت ۱ فعالیت قبل مشخص کنید به چند طریق می‌توان عمل وزن کردن را انجام داد.

کافی است جواب‌های عمومی معادلهٔ $۴x+۳y=۱۹$ را (برحسب k) بیابیم و به‌ازای هر $k\in\mathbb{Z}$ که x و y منفی نباشند تعداد حالت‌ها را شمارش کنیم:

$۴x+۳y=۱۹ \Rightarrow ۴x\overset{۳}{\equiv}۱۹$

$\Rightarrow ۴x\overset{۳}{\equiv}۱ \Rightarrow ۴x\overset{۳}{\equiv}۱+۳$

$\Rightarrow \cancel{۴}x\overset{۳}{\equiv}\cancel{۴}\times۱ \Rightarrow \underline{x=۳k+۱}$

$\Rightarrow ۴(۳k+۱)+۳y=۱۹$

$\Rightarrow ۱۲k+۴+۳y=۱۹$

$\Rightarrow ۱۲k+۳y=۱۵ \Rightarrow ۴k+y=۵$

$\Rightarrow \underline{y=-۴k+۵}$

$k=۰ \Rightarrow \begin{cases}x=۱\\y=۵\end{cases}$ و $k=۱ \Rightarrow \begin{cases}x=۴\\y=۱\end{cases}$

به‌ازای $k=۲$ و بیشتر از آن $y<۰$ و به‌ازای $k=-۱$ و کمتر از آن $x<۰$ که قابل قبول نمی‌باشند و لذا به دوصورت فوق می‌توان این کیسهٔ ۱۹ کیلویی را وزن کرد.

مثال: به چند طریق می‌توان ۱۸۰۰۰ تومان را به اسکناس‌های ۲۰۰۰ و ۵۰۰۰ تومانی تبدیل کرد؟

حل: اگر x و y را به‌ترتیب تعداد اسکناس‌های ۲۰۰۰ و ۵۰۰۰ تومانی فرض کنیم حل این مثال معادل است با تعداد جواب‌های نامنفی $۲۰۰۰x+۵۰۰۰y=۱۸۰۰۰$

$$2000x+5000y=18000$$

$$\Rightarrow 2x+5y=18$$

$$\Rightarrow 2x\overset{5}{\equiv}18 \text{ و } 18\overset{5}{\equiv}8$$

$$\Rightarrow \cancel{2}x\overset{5}{\equiv}\cancel{2}\times 4$$

$$\Rightarrow x\overset{5}{\equiv}4 \Rightarrow \underline{x=5k+4}$$

$$\Rightarrow 2(5k+4)+5y=18$$

$$\Rightarrow 10k+8+5y=18$$

$$\Rightarrow 10k+5y=10 \Rightarrow \underline{y=-2k+2}$$

$$k=0\Rightarrow\begin{cases}x=4\\y=2\end{cases} \text{ و } k=1\Rightarrow\begin{cases}x=9\\y=0\end{cases}$$

(فقط به‌ازای ۱ و ۰ $=k$ برای x و y جواب‌ها نامنفی هستند)

پس به دو طریق امکان تبدیل کردن ۱۸۰۰۰ تومان به اسکناس‌های ۲۰۰۰ و ۵۰۰۰ تومانی، وجود دارد.

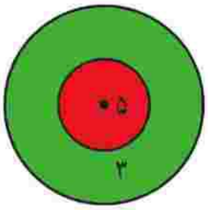
مثال : در یک رستوران فقط دو نوع خورش قورمه‌سبزی و قیمه وجود دارد. اگر ۵ نفر وارد این رستوران شوند به چند طریق می‌توانند سفارش غذا بدهند؟ (هر نفر فقط یک پرس غذا میل می‌کند)

حل : اگر تعداد چلو خورش قورمه‌سبزی و چلو خورش قیمهٔ سفارش داده شده را به‌ترتیب با x و y نشان دهیم خواهیم داشت :

$$x+y=5 \Rightarrow x\overset{1}{\equiv}5 \Rightarrow \underline{x=k+5}$$

$$\Rightarrow k+\cancel{5}+y=\cancel{5} \Rightarrow \underline{y=-k}$$

چون y و x اعدادی نامنفی هستند پس باید $k\in\{0,-1,-2,-3,-4,-5\}$ و لذا به ۶ طریق می‌توانند سفارش غذا بدهند.



مثال : تیراندازی به سمت یک هدف، شامل دو دایرهٔ هم مرکز، تیراندازی می‌کند. اگر او تیر را به دایرهٔ با شعاع کوچک‌تر بزند ۵ امتیاز و اگر به دایرهٔ بزرگ‌تر و خارج دایرهٔ کوچک‌تر بزند ۳ امتیاز می‌گیرد. اگر او کمتر از ۱۵ تیر انداخته و همهٔ تیرها به داخل دایرهٔ بزرگ‌تر اصابت کرده باشد و در پایان ۴۲ امتیاز گرفته باشد چند حالت برای او در این تیراندازی می‌تواند ثبت شود؟

حل : اگر x و y را به‌ترتیب تعداد اصابت‌ها به دایره کوچک‌تر و بزرگ‌تر فرض کنیم، داریم :

$$5x+3y=42 \Rightarrow 5x\overset{3}{\equiv}42$$

$$\Rightarrow 5x\overset{3}{\equiv}42+3 \Rightarrow \cancel{5}x\overset{3}{\equiv}\cancel{5}\times 9$$

$$\Rightarrow \underline{x=3k+9}$$

$$5(3k+9)+3y=42$$

$$\Rightarrow 15k+45+3y=42$$

$\Rightarrow ۱۵k+۳y=-۳ \Rightarrow \underline{y=-۵k-۱}$ $\qquad x,y\in W \Rightarrow k\in\{-۱,-۲,-۳\} \Rightarrow \begin{cases}x=۶\\y=۴\end{cases}, \begin{cases}x=۳\\y=۹\end{cases}, \begin{cases}x=۰\\y=۱۴\end{cases}$

($x=۶$ و $y=۴$ یعنی تیرانداز ۶ تیر را به دایرهٔ کوچک‌تر و ۴ تیر را به دایرهٔ بزرگ‌تر زده است).

پاسخ تمرین

۱ عدد ۱۳۹۸ به کدام دستهٔ هم‌نهشتی به پیمانهٔ ۹ تعلق دارد؟

$۱۳۹۸ \overset{۹}{\equiv} ۱+۳+۹+۸ \overset{۹}{\equiv} ۳ \Rightarrow$ به دستهٔ هم‌نهشتی $\{x\in\mathbb{Z} \mid x=۹k+۳\} = [۳]_۹$ تعلق دارد

۲ اگر $k\in\mathbb{Z}$، ثابت کنید فقط یکی از سه حالت زیر امکان‌پذیر است

$k \overset{۳}{\equiv} ۰$ یا $k \overset{۳}{\equiv} ۱$ یا $k \overset{۳}{\equiv} ۲$ (به عبارت دیگر، $k\in[۰]_۳$ یا $k\in[۱]_۳$ یا $k\in[۲]_۳$)

باقی‌ماندهٔ تقسیم هر عدد صحیح همچون k بر عدد ۳، یکی از اعداد ۰ یا ۱ یا ۲ می‌باشد به عبارت دیگر

$۳|k-۰$ یا $۳|k-۱$ یا $۳|k-۲$ و طبق تعریف هم‌نهشتی $k \overset{۳}{\equiv} ۰$ یا $k \overset{۳}{\equiv} ۱$ یا $k \overset{۳}{\equiv} ۲$.

۳ اگر $a \overset{m}{\equiv} b$ و $n|m$ ثابت کنید $a \overset{n}{\equiv} b$.

$$a \overset{m}{\equiv} b \Rightarrow m|a-b \xrightarrow[\text{تعدی}]{n|m} n|a-b \Rightarrow a \overset{n}{\equiv} b$$

۴ فرض کنیم، $a \overset{m}{\equiv} b$ و $b \overset{n}{\equiv} c$ و $(m,n)=d$ در این صورت ثابت کنید $a \overset{d}{\equiv} c$.

$$\left.\begin{array}{l} a \overset{m}{\equiv} b \xrightarrow[\text{تمرین ۳}]{d|m} a \overset{d}{\equiv} b \\ b \overset{n}{\equiv} c \xrightarrow[\text{تمرین ۳}]{d|n} b \overset{d}{\equiv} c \end{array}\right\} \Rightarrow a \overset{d}{\equiv} c$$

۵ ثابت کنید : اگر باقی‌مانده‌های تقسیم دو عدد a و b بر m مساوی باشند آن‌گاه $a \overset{m}{\equiv} b$.

روش اول: فرض کنیم باقیماندهٔ تقسیم دو عدد a و b بر m برابر r باشد، درنتیجه: $a \overset{m}{\equiv} r \wedge b \overset{m}{\equiv} r \Rightarrow a \overset{m}{\equiv} b$

روش دوم: $\left.\begin{array}{l} a=mq+r \\ b=mq'+r \end{array}\right\} \Rightarrow a-b=m(q-q') \Rightarrow m|a-b \xrightarrow{\text{تعریف هم‌نهشتی}} a \overset{m}{\equiv} b$

۶ عکس تمرین ۵ را بیان و اثبات کنید.

عکس تمرین ۵: اگر $a \overset{m}{\equiv} b$ آنگاه باقیماندهٔ تقسیم دو عدد a و b بر m، مساوی است.

اثبات: فرض کنیم باقیماندهٔ تقسیم a بر m، برابر r_1 و باقیماندهٔ تقسیم b بر m، برابر r_2 باشد، پس:

$$\left.\begin{array}{l} a=mq+r_1 \\ b=mq'+r_2 \end{array}\right\} \Rightarrow a-b=m(q-q')+(r_1-r_2) \quad ①$$

از طرفی: $a \overset{m}{\equiv} b \Rightarrow a-b=mq'' \quad ②$

$$\xrightarrow{①,②} mq''=m(q-q')+(r_1-r_2)$$

$$\left.\begin{array}{l} \Rightarrow r_1-r_2=m(q''-q-q') \Rightarrow m|r_1-r_2 \\ \text{از طرفی}: 0\leq r_1,r_2<m \Rightarrow |r_1-r_2|<m \end{array}\right\} \Rightarrow r_1-r_2=0 \Rightarrow r_1=r_2$$

۷ با استفاده از بسط دو جمله‌ای خیّام یعنی،

$$(a+b)^n=\binom{n}{0}\times a^n+\binom{n}{1}\times a^{n-1}b+\binom{n}{2}\times a^{n-2}b^2+\binom{n}{3}\times a^{n-3}b^3+\cdots+\binom{n}{n}\times b^n$$

ثابت کنید که برای هر $n\in\mathbb{N}$ و $a,b\in\mathbb{Z}$ همواره $(a+b)^n\overset{ab}{\equiv}a^n+b^n$.

$$\left.\begin{array}{l}\binom{n}{0}a^n=a^n\overset{ab}{\equiv}a^n\\ \binom{n}{1}a^{n-1}b\overset{ab}{\equiv}0\\ \binom{n}{2}a^{n-2}b^2\overset{ab}{\equiv}0\\ \binom{n}{3}a^{n-3}b^3\overset{ab}{\equiv}0\\ \vdots\\ \binom{n}{n-1}ab^{n-1}\overset{ab}{\equiv}0\\ \binom{n}{n}b^n=b^n\overset{ab}{\equiv}b^n\end{array}\right\}\xrightarrow{+}(a+b)^n\overset{ab}{\equiv}a^n+b^n$$

۸ با توجه به تمرین ۷ ثابت کنید عدد $23^{51}-11^{51}-12^{51}$ بر عدد ۱۳۲ بخش‌پذیر است.

طبق تمرین قبل (تمرین ۷) می‌توان نوشت:

$$(23)^{51}=(11+12)^{51}\overset{11\times12}{\equiv}11^{51}+12^{51}$$

$$\xrightarrow{-11^{51}-12^{51}}23^{51}-11^{51}-12^{51}\overset{132}{\equiv}0\longrightarrow$$ عدد $23^{51}-11^{51}-12^{51}$ بر ۱۳۲ بخش‌پذیر است

۹ باقی‌مانده تقسیم عدد $A=(2^{11}+7)\times 9$ را بر ۲۳ بیابید.

$$2^5\overset{23}{\equiv}9\xrightarrow{\text{توان ۲}}2^{10}\overset{23}{\equiv}81\xrightarrow{81\overset{23}{\equiv}12}2^{10}\overset{23}{\equiv}12\xrightarrow{\times2}2^{11}\overset{23}{\equiv}24$$

$$\xrightarrow{24\overset{23}{\equiv}1}2^{11}\overset{23}{\equiv}1\xrightarrow{+7}2^{11}+7\overset{23}{\equiv}8\xrightarrow{\times9}(2^{11}+1)\times9\overset{23}{\equiv}72$$

$$\xrightarrow{72\overset{23}{\equiv}3}A\overset{23}{\equiv}3\longrightarrow r=3$$

۱۰ اگر دو عدد $(3a-5)$ و $(4a-7)$ رقم یکان برابر داشته باشند رقم یکانِ عدد $(9a+6)$ را به‌دست آورید.

طبق تمرین ۵، دو عدد $3a-5$ و $4a-7$ به پیمانهٔ ۱۰، باید باهم همنهشت اند:

$$4a-7\overset{10}{\equiv}3a-5\Rightarrow4a-3a\overset{10}{\equiv}7-5\Rightarrow a\overset{10}{\equiv}2$$

$$\xrightarrow{\times9}9a\overset{10}{\equiv}18\xrightarrow{+6}9a+6\overset{10}{\equiv}24\xrightarrow{24\overset{10}{\equiv}4}9a+6\overset{10}{\equiv}4\Rightarrow$$ رقم یکان ۴ است

۱۱ باقی‌مانده تقسیم عدد $A = 1! + 2! + 3! + \ldots + 500!$ را بر ۱۰ به‌دست آورید (رقم یکان A را بیابید)

$$\left.\begin{array}{l} 1! \overset{10}{\equiv} 1 \\ 2! \overset{10}{\equiv} 2 \\ 3! \overset{10}{\equiv} 6 \\ 4! = 24 \overset{10}{\equiv} 4 \\ 5! = 120 \overset{10}{\equiv} 0 \\ 6! \overset{10}{\equiv} 0 \\ \vdots \\ 500! \overset{10}{\equiv} 0 \end{array}\right\} \xrightarrow{+} A \overset{10}{\equiv} 1+2+6+4+0+\cdots+0 = 13 \xrightarrow{13 \overset{10}{\equiv} 3} A \overset{10}{\equiv} 3$$

رقم یکان عدد A، ۳ است.

۱۲ جواب‌های عمومی معادلهٔ سیالهٔ خطی $7x + 5y = 11$ را به‌دست آورید.

$$\Rightarrow 7x \overset{5}{\equiv} 11 \Rightarrow 7x \overset{5}{\equiv} 11 + 2\times 5 = 21$$

$$\xrightarrow{\div 7} x \overset{5}{\equiv} 3 \Rightarrow x = 5k+3 \ , \ k \in \mathbb{Z}$$

$$\xrightarrow{7x+5y=11} 7(5k+3) + 5y = 11 \Rightarrow y = -7k-2 \ , \ k \in \mathbb{Z}$$

۱۳ به چند طریق می‌توان ۲۹۰۰۰ تومان را به اسکناس‌های ۲۰۰۰ و ۵۰۰۰ تومانی تبدیل کرد؟

تعداد اسکناس‌های ۲۰۰۰ تومانی را x و تعداد اسکناس‌های ۵۰۰۰ تومانی را y در نظر می‌گیریم بنابراین:

$$2000x + 5000y = 29000 \xrightarrow{\div 1000} 2x + 5y = 29$$

$$5y \overset{2}{\equiv} 29 \Rightarrow 5y \overset{2}{\equiv} 29 - 12\times 2 = 5 \xrightarrow{\div 5} y \overset{2}{\equiv} 1 \Rightarrow y = 2k+1$$

$$\xrightarrow{2x+5y=29} 2x + 5(2k+1) = 29 \Rightarrow x = -5k+12$$

k	۰	۱	۲
$y = 2k+1$: تعداد اسکناس‌های ۵۰۰۰ تومانی	۱	۳	۵
$x = -5k+12$: تعداد اسکناس‌های ۲۰۰۰ تومانی	۱۲	۷	۲

$\Rightarrow$ به ۳ طریق می‌توان خرد کرد

۱۴ معادله‌های هم‌نهشتی زیر را در صورت امکان حل کرده و جواب‌های عمومی آنها را به‌دست آورید.

الف) $423x \overset{11}{\equiv} 79$ می‌دانیم: $423 \overset{11}{\equiv} 5$ ، $79 \overset{11}{\equiv} 2$

$$\Rightarrow \text{معادلهٔ هم‌نهشتی: } 5x \overset{11}{\equiv} 2 \Rightarrow 5x \overset{11}{\equiv} 2 + 3\times 11 = 35 \xrightarrow{\div 5} x \overset{11}{\equiv} 7 \Rightarrow x = 11k+7 \ , \ k \in \mathbb{Z}$$

ب) $8x \overset{12}{\equiv} 20$

$$8x \overset{12}{\equiv} 20 - 12 = 8 \xrightarrow[(8,12)=4]{\div 8} x \overset{3}{\equiv} 1 \Rightarrow x = 3k+1 \ , k \in \mathbb{Z}$$

ج) $51x \overset{6}{\equiv} 11$

$(51, 6) = 3$ ، $3 \nmid 11 \Rightarrow$ معادله جواب ندارد

۱۵ اگر اول مهر ماه در یک سال روز یکشنبه باشد، ۷ اسفندماه در همان سال چه روزی از هفته است؟

مهر + آبان + آذر + دی + بهمن + اسفند $= (30-1) + 4\times 30 + 7 \overset{7}{\equiv} 2$

ی	د	س	چ	پ	ج	ش
۰	۱	۲	۳	۴	۵	۶

سه شنبه است

۱۶ اگر ۱۲ بهمن در یک سال جمعه باشد، ۳۱ مرداد ماه در همان سال چه روزی از هفته است؟

شهریور + مهر + آبان + آذر + دی + بهمن $= 31 + 4\times 30 + 12 \overset{7}{\equiv} 2$

در جدول برای روز جمعه عدد ۲ را می‌نویسیم، سپس اعداد قبل و بعد آن را تعیین می‌کنیم، عدد صفر مربوط به ۳۱ مرداد است.

چ	پ	ج	ش	ی	د	س
۰	۱	۲	۳	۴	۵	۶

۳۱ مرداد چهارشنبه بوده است

۱۷ همهٔ اعداد صحیح چون a را بیابید که ۵ برابر آنها به‌علاوهٔ ۹ بر ۱۱ بخش‌پذیر باشد.

$$5a+9 \overset{11}{\equiv} 0 \Rightarrow 5a \overset{11}{\equiv} -9 \Rightarrow 5a \overset{11}{\equiv} -9+4\times 11 = 35 \xrightarrow{\div 5} a \overset{11}{\equiv} 7 \Rightarrow a = 11k+7 \,,\, k\in \mathbb{Z}$$

۱۸ به چند طریق می‌توان یک کیسهٔ ۲۳ کیلویی را با وزنه‌های ۳ و ۵ کیلویی وزن کرد؟

تعداد وزنه‌های ۳ کیلویی را با x و تعداد وزنه‌های ۵ کیلویی را با y نمایش می‌دهیم، بنابراین:

$$3x+5y=23 \Rightarrow 5y \overset{3}{\equiv} 23 \to 5y \overset{3}{\equiv} 23-3=20 \xrightarrow{\div 5} y \overset{3}{\equiv} 4 \Rightarrow y=3k+4$$

$$\xrightarrow{3x+5y=23} 3x+5(3k+4)=23 \Rightarrow x=-5k+1$$

k	۰	۱-
$y=3k+4$: تعداد وزنه‌های ۵ کیلویی	۴	۱
$x=-5k+1$: تعداد وزنه‌های ۳ کیلویی	۱	۶

به دو طریق می‌توان وزن کرد

۱۹ به چند طریق می‌توان از بین دو نوع گل یک دسته گل شامل ۹ شاخه به دلخواه انتخاب کرد؟

تعداد گل‌های نوع اول را x و تعداد گل‌های نوع دوم را y می‌نامیم، بنابراین:

$$x+y=9 \Rightarrow x=-y+9 \Rightarrow x \overset{y}{\equiv} 9 \Rightarrow x=k+9 \xrightarrow{x+y=9} k+9+y=9 \Rightarrow y=-k$$

k	۰	۱-	۲-	۳-	۴-	۵-	۶-	۷-	۸-	۹-
$x=k+9$: تعداد گل‌های نوع اول	۹	۸	۷	۶	۵	۴	۳	۲	۱	۰
$y=-k$: تعداد گل‌های نوع دوم	۰	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹

به ده طریق می‌توان یک دسته گل شامل ۹ شاخه تهیه کرد.

۲۰ شخصی در یک مسابقهٔ علمی شرکت کرده است. او به سؤالات ۷ امتیازی و ۹ امتیازی پاسخ داده و مجموعاً ۷۳ امتیاز کسب کرده است. این شخص به چه صورت‌هایی توانسته این امتیاز را به‌دست آورد؟ (پاسخ به هر سؤال یا امتیاز کامل دارد و یا امتیازی ندارد)

تعداد سؤالات ۷ امتیازی که امتیاز کامل گرفته را با x و تعداد سؤالات ۹ امتیازی که امتیاز کامل گرفته را با y نمایش می‌دهیم، بنابراین:

$$7x+9y=73 \Rightarrow 9y \overset{7}{\equiv} 73 \xrightarrow{73 \overset{7}{\equiv} 3} 9y \overset{7}{\equiv} 3 \xrightarrow{\div 3} 3y \overset{7}{\equiv} 1 \Rightarrow 3y \overset{7}{\equiv} 1-7=-6$$

$$\xrightarrow{\div 3} y \overset{7}{\equiv} -2 \Rightarrow y=7k-2 \xrightarrow{7x+9y=73} 7x+9(7k-2)=73 \Rightarrow x=-9k+13$$

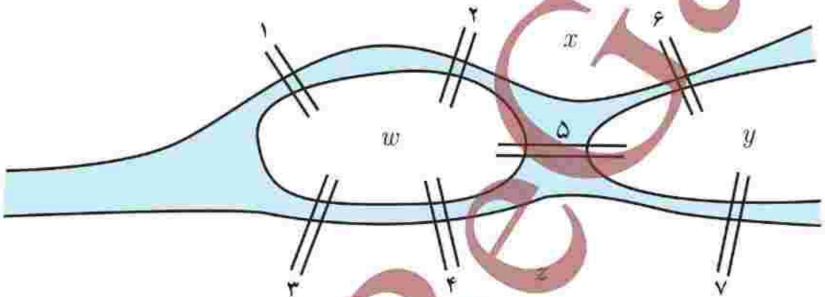
$k=1 \Rightarrow x=4$ و $y=5 \Rightarrow$ فقط به یک صورت می‌توانسته این امتیاز را کسب کند.

۲ گراف و مدل‌سازی

درس ۱ معرفی گراف

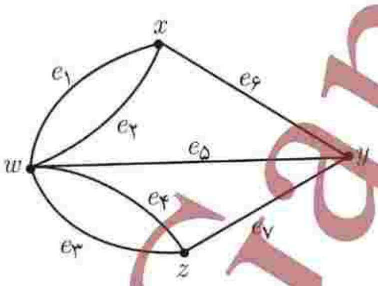
در اوایل قرن هجدهم، معمایی فکر برخی از اهالی شهر کونیگسبرگ (در حال حاضر در روسیه) را به خود مشغول کرده بود.

رودخانهٔ این شهر که از میان شهر عبور می‌کرد مانند آنچه در شکل زیر می‌بینید، شهر را به چند قسمت تقسیم می‌کرد. برخی از مردم این شهر کنجکاو بودند که بدانند آیا می‌توان با حرکت از یک نقطه از شهر و دقیقاً یکبار عبور از هر کدام از پل‌ها، به نقطهٔ شروع حرکت بازگشت؟



شکل ۱

لئونارد اویلر[1] (۱۷۸۳ ــ ۱۷۰۷)، ریاضی‌دان برجستهٔ سوئیسی، برای حل این مسئله از شکل زیر، که امروزه به آن «گراف» می‌گوییم، کمک گرفت و با استفاده از استدلال ثابت کرد که این کار امکان‌پذیر نیست.



شکل ۲

اگر چهار ناحیهٔ x و y و z و w را با ۴ نقطه نمایش دهیم و به ازای هر پل که بین دو ناحیه قرار دارد نقاط متناظر با آن ناحیه‌ها را به هم وصل نماییم شکل مقابل به‌دست می‌آید که گرافِ حاصل از مدل‌سازی مسئلهٔ مذکور است.

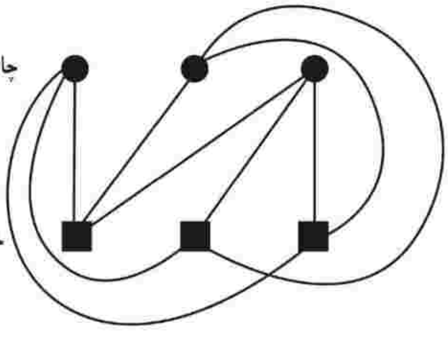
مدل‌سازی بسیاری از مسائل با گراف، دسته‌بندی منظم و تفکر منطقی دربارهٔ آنها را آسان‌تر می‌نماید.

اگرچه بیشتر مورخان تاریخ ریاضی شروع بحث گراف را از این مسئلهٔ اویلر می‌دانند، اما بی‌تردید

۱ـ Leonhard Euler

متفکران و ریاضی‌دانان دیگری پیش از آن تاریخ نیز برای حل مسائل از مدل‌سازی با گراف بهره گرفته‌اند. به‌طور مثال در حدود ۱۰۰ سال پیش از آن شیخ بهایی، ریاضی‌دان ایرانی[1] (۱۰۰۰ـ۹۲۵ خورشیدی) مسئله‌ای به این صورت طرح کرد :

سه خانه و سه چاه آب، مانند شکل مقابل مفروض‌اند. آیا می‌توان از هر چاه به هر خانه یک کانال آب حفر کرد به طوری که هیچ دو کانالی یکدیگر را قطع نکنند؟



شکل ۳

حل این مسئله هم ارتباط نزدیکی به مباحث گراف دارد. اگر خانه‌ها و چاه‌ها را ۶ نقطه مشخص کنیم و کانال‌ها را با خط‌ها یا منحنی‌ها نمایش دهیم در این صورت دو مجموعهٔ مجزای ۳ عضوی از نقاط داریم که باید نقاط مجموعهٔ اوّل به تک‌تک نقاط مجموعهٔ دوم وصل شوند. شکل حاصل از این کار یک گراف است و می‌توان نشان داد که این کار نشدنی است و لااقل دو تا از خط‌ها یکدیگر را قطع می‌کنند.

حال به مثالی از تحلیل یک وضعیت به کمک گراف می‌پردازیم.

مثال : ۵ تیم فوتبال a، b، c، d و e در یک گروه قرار دارند و تیم‌ها دوبه‌دو با هم بازی می‌کنند و برخی از این بازی‌ها انجام شده است و اطلاعات زیر را داریم :

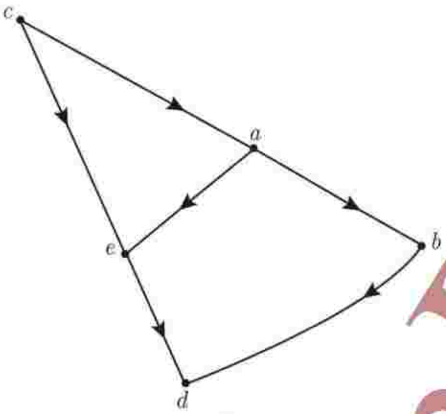
تیم a تیم‌های b و e را برده و به c باخته است.

تیم b به a باخته و از d برده است.

تیم c از تیم‌های a و e برده است.

تیم d به تیم‌های b و e باخته است.

تیم e به a و c باخته و از تیم d برده است.



شکل ۴

برای نمایش تمام اطلاعات بالا به‌صورت خلاصه، از نموداری به شکل ۴ استفاده می‌کنیم که به ازای هر تیم یک نقطه می‌گذاریم و هر دو نقطه را به هم وصل می‌کنیم اگر و تنها اگر تیم‌های مربوط به آنها با هم بازی کرده باشند؛ و جهت خط یا منحنی‌ای که دو نقطه را به هم وصل می‌کند باید از تیم برنده به سمت تیم بازنده باشد.

حال با یک نگاه به نمودار رسم شده، علاوه بر دریافت اطلاعات بالا به سادگی به سؤال‌های زیر نیز می‌توان جواب داد.

ــ مشخص کنید هر تیم با کدام تیم‌ها بازی نکرده است.

d,a ، e,b ، c,b ، c,d بازی نکرده اند .

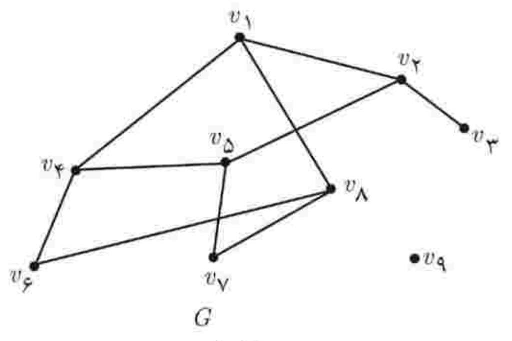
ــ اگر هر برد ۳ امتیاز داشته باشد در بازی‌هایی که تا اینجا انجام شده است کدام تیم‌ها بیشترین امتیاز را کسب کرده‌اند؟ **c,a**

۱ــ دکتر مهدی بهزاد، متولد ۱۳۱۵، ریاضی‌دان مشهور ایرانی، یکی از پیشگامانِ نظریه گراف در ایران است. بسیاری از پژوهش‌گران در این زمینه او را پدر علم گراف در ایران می‌دانند.

مسئله : سؤال دیگری مطرح کنید که با دیدن نمودار گرافِ مثال قبل بتوان به آن جواب داد.

سوال : کدام تیم فقط بُرد و کدام تیم فقط باخت داشته است ؟

پاسخ : تیم c فقط بُرد و تیم d فقط باخت داشته اند.



شکل ۵

همان‌طور که دیدیم یک گراف متشکل است از مجموعه‌ای از نقاط و مجموعه‌ای از پاره‌خط‌ها، که به هر یک از این نقاط **رأس** و به هر یک از پاره‌خط‌ها **یال** می‌گوییم. توجه کنید که یال‌ها لازم نیست حتماً پاره‌خط راست باشند و می‌توانند به‌صورت منحنی نیز باشند و در هر سرِ یال باید رأسی قرار داشته باشد. همان‌طور که دیدیم یک گراف را می‌توان با رسم نمودارِ آن نشان داد و نیز می‌توان آن را با نمادهای ریاضی معرفی کرد. در ادامه به شکلی ساده چند تعریف مقدماتی و نحوهٔ نمایش یک گراف را بررسی می‌کنیم.

گراف G را با ۹ رأس و ۱۰ یال، مانند شکل ۵، در نظر می‌گیریم و با بررسی آن برخی تعاریف را نیز مطرح می‌نماییم.

با توجه به اینکه یک گراف مجموعه‌ای از رئوس و یال‌هاست می‌توان به جای نمایش آن با شکل بالا، با نمادهای ریاضی مجموعهٔ یال‌ها و رئوس آن را به‌صورت زیر نمایش داد.

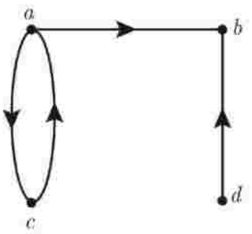
$V(G)=\{v_1 , v_2 , ... , v_8 , v_9\}$ [1] مجموعهٔ رأس‌های گراف G

$E(G)=\{v_1v_2 , v_1v_4 , v_1v_8 , v_2v_3 , v_2v_5 , v_4v_5 , v_4v_6 , v_5v_7 , v_6v_8 , v_7v_8\}$ [2] مجموعهٔ یال‌های گراف G

به‌وضوح، با داشتن شکلِ گراف، شما می‌توانید مجموعه‌های $V(G)$ و $E(G)$ را بنویسید و همچنین با داشتن دو مجموعهٔ $V(G)$ و $E(G)$ می‌توانید ابتدا به تعداد $n(V(G))$ (تعداد اعضای مجموعهٔ $V(G)$ که آن را با $|V(G)|$ نیز نمایش می‌دهیم) نقطه (رأس) مشخص نمایید و سپس با توجه به $E(G)$ رأس‌های متناظر را به هم وصل نمایید.

همان‌طور که در مثال تیم‌های فوتبال ملاحظه کردید گاهی اوقات لازم است برای یال‌ها جهت تعیین کنیم. به گرافی که برای یال‌های آن جهت تعیین شده باشد، **گراف جهت‌دار** می‌گوییم. در این حالت برای نمایش اینکه جهت یک یال از سمت کدام رأس به سمت کدام رأس است یال‌ها را با زوج مرتب نمایش می‌دهیم. به طور مثال مجموعهٔ رئوس و یال‌های گراف جهت‌دار شکل ۶ را این‌گونه نمایش می‌دهیم.

$V=\{a , b , c , d\} \quad E=\{(a,b),(a,c),(c,a)(d,b)\}$



شکل ۶

کار در کلاس

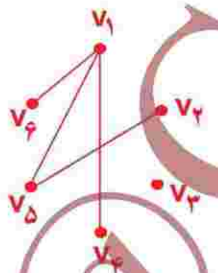
ــ دو مجموعهٔ $V(G)$ و $E(G)$ به صورت زیر داده شده‌اند. با توجه به آنها شکل گراف مورد نظر را بکشید.

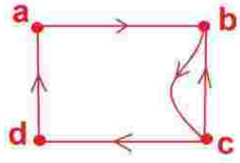
الف) $V(G)=\{v_1 , v_2 , ... , v_6\}$

$E(G)=\{v_1v_4 , v_2v_5 , v_6v_1 , v_5v_1\}$

ب) $V(G)=\{a , b , c , d\}$

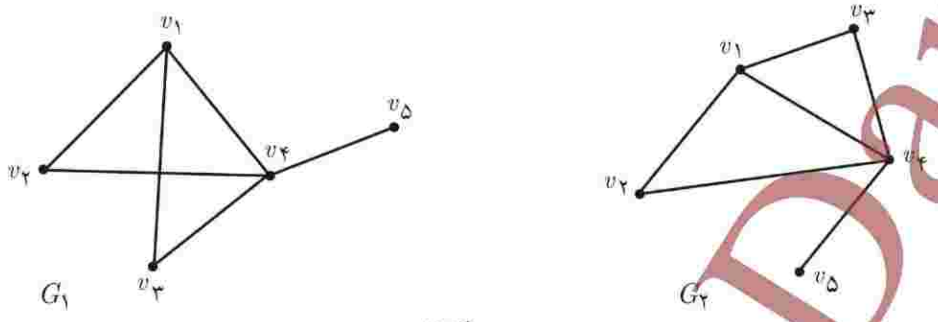
$E(G)=\{(a,b) , (b,c) , (c,b) , (c,d) , (d,a)\}$





۱ــ Vertex   ۲ــ Edge

توجه : برای رسم نمودار یک گراف (شکل گراف) روش یکتایی مدنظر نیست. آنچه مهم است این است که باید مشخص باشد که گراف مورد نظر گراف چند رأس و چند یال دارد و کدام یال به کدام رئوس متصل است. به طور مثال با نوشتن مجموعه‌های $V(G)$ و $E(G)$ برای هر یک از شکل‌های زیر، نشان دهید هر دو یک گراف را نمایش می‌دهند.



شکل ۷

$V(G_1)=\{v_1,v_2,v_3,v_4,v_5\}$

$E(G_1)=\{v_1v_2,v_1v_3,v_1v_4,v_2v_4,v_3v_4,v_4v_5\}$

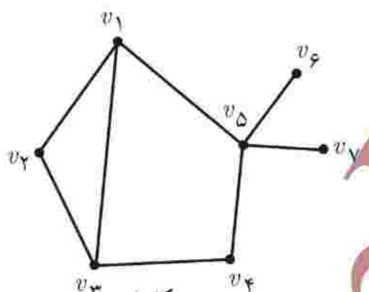
$V(G_2)=\{v_1,v_2,v_3,v_4,v_5\}$

$E(G_2)=\{v_1v_2,v_1v_3,v_1v_4,v_2v_4,v_3v_4,v_4v_5\}$

■ **مرتبه و اندازهٔ یک گراف :** تعداد رأس‌های گراف G یعنی $|V(G)|$ را مرتبهٔ آن گراف می‌گوییم و با $p(G)$ نمایش می‌دهیم و تعداد یال‌های گراف یعنی $|E(G)|$ را اندازهٔ گراف G می‌گوییم و با $q(G)$ نمایش می‌دهیم. معمولاً برای راحتی کار به جای $p(G)$ از p و به جای $q(G)$ از q استفاده می‌کنیم. به‌طور مثال گراف‌های نمایش داده شده در شکل ۷ از مرتبهٔ ۵ و اندازهٔ ۶ هستند. بنابراین $p=۵$ و $q=۶$.

■ **درجهٔ یک رأس :** درجهٔ رأس v در گراف G برابر است با تعداد یال‌هایی از گراف G که به رأس v متصل‌اند و آن را با $deg_G(v)$ یا به‌طور ساده‌تر با $deg(v)$ یا $d(v)$ نمایش می‌دهیم. اگر درجهٔ یک رأس فرد باشد آن را رأس فرد و اگر زوج باشد آن را رأس زوج می‌نامیم. به‌طور مثال در شکل مقابل داریم :

$deg(v_1)=۳ \quad , \quad deg(v_5)=۴$



شکل ۸

■ **گراف K ـ منتظم :** گرافی را که درجهٔ تمام رئوس آن با هم مساوی و برابر با عدد k باشند، گراف k ـ منتظم می‌نامیم. مثلاً گراف شکل ۹ یک گراف ۶ رأسیِ ۳ ـ منتظم است.

شکل ۹

■ **رأس تنها :** به رأسی که درجهٔ آن صفر باشد؛ یعنی هیچ یالی به آن متصل نباشد، رأس تنها (یا ایزوله) می‌گوییم.

■ گرافی را که تمام رئوس آن رأس تنها باشند، یعنی هیچ یالی نداشته باشد، **گراف تهی** می‌نامیم. بنابراین منظور از گراف تهیِ n رأسی، گرافی شامل n رأسِ تنها و بدون یال است.

کار در کلاس

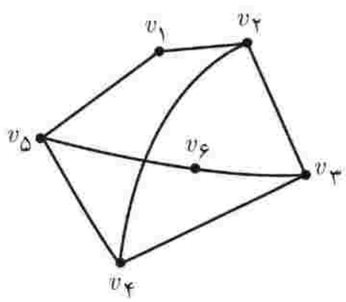
درجهٔ سایر رئوسِ گرافِ شکل ۸ را بنویسید و مشخص کنید کدام رئوس فرد و کدام رئوس زوج‌اند.

رئوس درجه فرد $\Leftarrow$ $d(v_1)=۳$, $d(v_3)=۳$, $d(v_6)=۱$, $d(v_7)=۱$

رئوس درجه زوج $\Leftarrow$ $d(v_2)=۲$, $d(v_4)=۲$, $d(v_5)=۴$


شکل ۱۰

بین دو رأس از یک گراف ممکن است بیش از یک یال وجود داشته باشد. همچنین یک یال ممکن است یک رأس را به خودِ آن رأس وصل نماید که در این صورت به این یال **طوقه**[1] گفته می‌شود. این دو مورد در شکل ۱۰ نمایش داده شده‌اند. گرافی را که در آن هیچ یک از این دو مورد اتفاق نیفتاده باشد را **گراف ساده** می‌گوییم. دیدیم که گراف حاصل از مدل‌سازی پل کونیگسبرگ یک گراف ساده نیست. ما در این کتاب فقط گراف‌های ساده را بررسی خواهیم کرد و از این به بعد منظورمان از گراف، گراف ساده است.


شکل ۱۱

■ **دو رأس مجاور (همسایه)**: دو رأس u و v را دو رأسِ همسایه یا مجاور گوییم هرگاه توسط یالی به هم وصل شده باشند، یعنی $uv\in E(G)$. به طور مثال در گراف شکل ۱۱، رأس v_1 با رئوس v_2 و v_5 همسایه است و رأس v_2 با رئوس v_1 و v_3 و v_4 همسایه است.

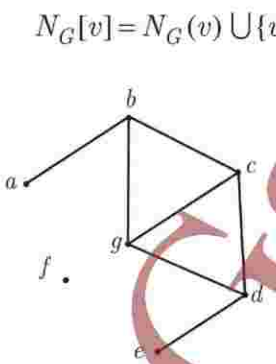
توجه: در زمان رسم نمودار یک گراف توجه داشته باشید که هیچ یالی خودش را قطع نکند و همچنین هیچ یالی نباید از روی رأسی که مربوط به دو سر آن یال نیست عبور نماید.

■ **مجموعهٔ همسایه‌های یک رأس**: فرض کنیم $v\in V(G)$، به مجموعهٔ رأس‌هایی از گراف G که به رأس v متصل هستند، «همسایگی باز رأس v» می‌گوییم و با $N_G(v)$ نمایش می‌دهیم. اضافه کردنِ خودِ رأسِ v به $N_G(v)$ «همسایگی بستهٔ رأس v» را به‌دست می‌دهد که آن را با $N_G[v]$ نمایش می‌دهیم. می‌توان این دو مجموعه را به صورت زیر نمایش داد:

$$N_G(v)=\{u\in V(G):\ uv\in E(G)\}$$

$$N_G[v]=N_G(v)\cup\{v\}$$

به‌طور مثال در گراف شکل ۱۲ داریم:


شکل ۱۲

$N_G(a)=\{b\}$ $N_G[a]=\{a,b\}$

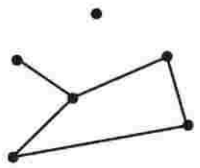
$N_G(c)=\{b,d,g\}$ $N_G[c]=\{b,c,d,g\}$

$N_G(f)=\varnothing$ $N_G[f]=\{f\}$

■ **دو یال مجاور**: دو یال را مجاور گوییم هرگاه رأسی وجود داشته باشد که هر دوی آنها به آن متصل باشند. به طور مثال در شکل ۱۲، یال‌های bc و cd مجاوراند.

۱_ Loop

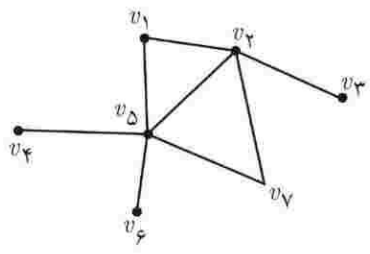
■ **بزرگ‌ترین و کوچک‌ترین درجهٔ یک گراف :** بزرگ‌ترین عدد در بین درجات رئوس گراف G را با $\Delta(G)$ و کوچک‌ترینِ آنها را با $\delta(G)$ نمایش می‌دهیم و به ترتیب آنها را ماکزیمم و مینیمم درجهٔ گراف می‌نامیم. به طور مثال در گراف شکل ۱۳ داریم :



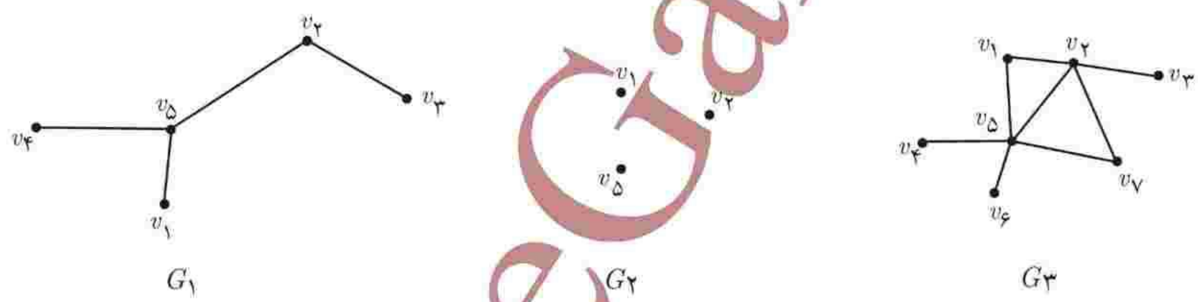
شکل ۱۳

$$\Delta(G)=3 \qquad , \qquad \delta(G)=0$$

■ **زیرگراف :** یک زیرگراف از گراف G گرافی است که مجموعهٔ رئوس آن زیرمجموعه‌ای از مجموعهٔ رئوس گراف G، و مجموعهٔ یال‌های آن زیرمجموعه‌ای از مجموعهٔ یال‌های G باشد. به طور مثال گراف‌های G_1 و G_2 و G_3 که در شکل ۱۵ آمده‌اند، زیرگراف‌هایی از گراف G در شکل ۱۴ هستند.

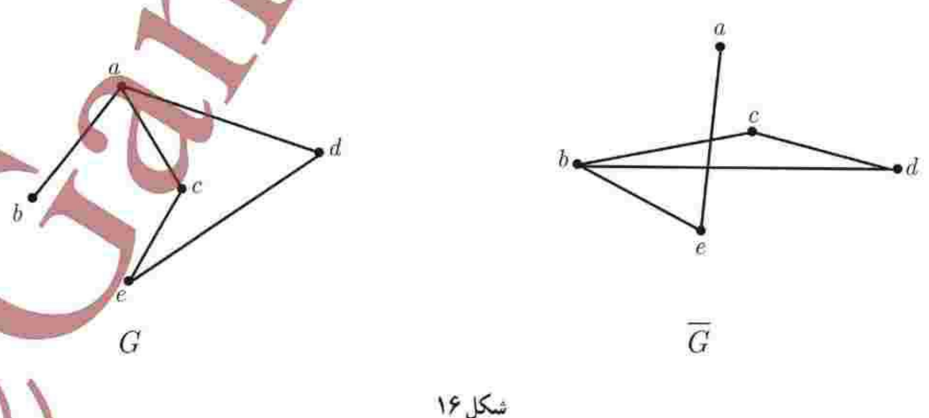


شکل ۱۴



شکل ۱۵

■ **مکمل یک گراف :** مکمل گرافی مانند G که آن را با G^c یا $\overline{G}$ نمایش می‌دهیم گرافی است که مجموعهٔ رئوس آن همان مجموعهٔ رئوس گراف G است و بین دو رأس از G^c یک یال است اگر و تنها اگر بین همان دو رأس در G یالی وجود نداشته باشد. در شکل ۱۶ یک گراف و مکملش نمایش داده شده است.



شکل ۱۶

مسئله ۱ : اگر G یک گراف با n رأس و v یک رأسِ آن باشد و $d_G(v)$ و $d_{\overline{G}}(v)$ به ترتیب درجهٔ رأس v در گراف‌های G و $\overline{G}$ باشند، مقدار $d_G(v)+d_{\overline{G}}(v)$ را به‌دست آورید.

این مجموع برابر است با تعداد یال هایی که امکان رسم آنها از یک راس در گراف ساده ، وجود دارد . از طرفی در یک گراف ساده ی n راسی حداکثر $n-1$ یال از یک راس آن می گذرد بنابراین : $d_G(v)+d_{\overline{G}}(v)=n-1$

مسئله ۲ : یک گراف n رأسی حداکثر چند یال می‌تواند داشته باشد؟

برابر است با تعداد پاره خطهایی که با وجود n نقطه غیر واقع بر خط راست می توان رسم کرد یعنی : $\binom{n}{2}=\frac{n(n-1)}{2}$

مسئله ۳ : اگر G یک گراف n رأسی باشد، مقدار $q(G)+q(\overline{G})$ را به‌دست آورید.

این مجموع برابر است با حداکثر تعداد یال های ممکن در یک گراف ساده n راسی ، که بنا به مسئله قبل $\frac{n(n-1)}{2}$ خواهد بود .

■ **گراف کامل** : گرافی را که هر رأس آن با تمام رئوسِ دیگر، مجاور باشد گراف کامل می‌نامیم. گراف کاملِ n رأسی را با K_n نمایش می‌دهیم. می‌توان گفت K_n یک گراف n رأسی و $n-1$–منتظم است.

مسئله ۱ : یک گراف کامل p رأسی چند یال دارد؟ بنا به مسئله ۲ در بالای صفحه ، تعداد یال ها برابر است با : $\frac{p(p-1)}{2}$

مسئله ۲ : اگر G یک گراف p رأسی باشد، چه رابطه‌ای بین تعداد یال‌های گراف‌های G، $\overline{G}$ و K_p وجود دارد؟ $q(G)+q(\overline{G})=q(K_p)$

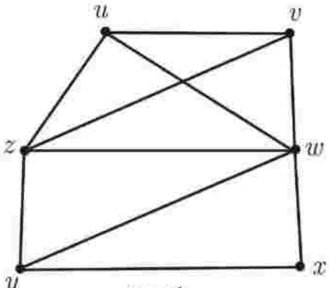
مسئله ۳ : مکمل گراف کامل چه نوع گرافی است؟ گراف تهی

■ **مسیر** : اگر u و v دو رأس از گراف G باشند، یک مسیر از u به v (یک $u-v$ مسیر) در G دنباله‌ای از رئوس دوبه‌دو متمایز در G است که از u شروع و به v ختم می‌شود به طوری که هر دو رأس متوالی این دنباله در G مجاور هم باشند. طول یک مسیر برابر است با تعداد یال‌های موجود در آن مسیر (یکی کمتر از تعداد رئوس موجود در آن مسیر). قرارداد می‌کنیم که دنبالهٔ متشکل از تنها یک رأسِ v، یک مسیر است با طول صفر از رأس v به خودش.

مثال

uwv یک $u-v$ مسیر به طول ۲ است.

$uzywv$ یک $u-v$ مسیر به طول ۴ است.



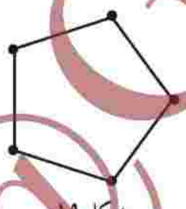
شکل ۱۷

■ گرافی را که تنها از یک **مسیرِ n رأسی** تشکیل شده باشد با P_n نمایش می‌دهیم.
به‌طور مثال P_5 در شکل ۱۸ نمایش داده شده است.


شکل ۱۸

■ **دور** : دنبالهٔ $v_1\,v_2\,v_3\,\ldots\,v_n\,v_1$ $(n\geq 3)$ از رئوس دو به دو متمایز که در آن هر رأس با رأس بعدی مجاور است را یک دور به طول n می‌نامیم. به‌طور مثال در گراف شکل ۱۷ $uvwu$، $ywuzy$، $xwvuzyx$ دورهایی به ترتیب با طول ۳ و ۴ و ۶ هستند.

■ گرافی را که تنها از یک **دورِ n رأسی** تشکیل شده باشد را با C_n نمایش می‌دهیم.
به‌طور مثال C_5 در شکل ۱۹ نمایش داده شده است.


شکل ۱۹

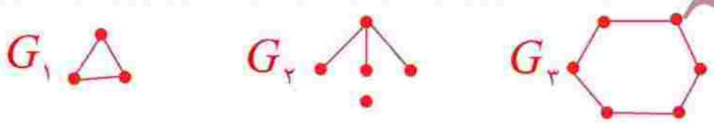
مسئله : در گراف شکل ۱۷، دوری به طول ۵ بیابید. $uvwyzu$

همبندی و ناهمبندی یک گراف : گراف G را **همبند** می‌نامیم هرگاه بین هر دو رأسِ آن حداقل یک مسیر وجود داشته باشد، در غیر این صورت آن را **ناهمبند** می‌نامیم. به‌طور مثال گراف H در شکل ۲۰ همبند و گراف G ناهمبند است زیرا مثلاً بین رئوس v و w هیچ مسیری وجود ندارد.

شکل ۲۰

فعالیت

۱ سه گراف دلخواه رسم کنید.



۲ مجموع درجات رئوس هر یک از ۳ گرافی را که رسم کرده‌اید محاسبه کنید.

G_1 مجموع درجات رئوس گراف$=۲+۲+۲=۶$ G_2 مجموع درجات رئوس گراف$=۳+۱+۱+۱+۰=۶$ G_3 مجموع درجات رئوس گراف$=۲+۲+۲+۲+۲+۲=۱۲$

۳ تعداد یال‌های هر یک از ۳ گراف را محاسبه نمایید.

G_1 تعداد یالهای گراف$=۳$ و G_2 تعداد یالهای گراف$=۳$ و G_3 تعداد یالهای گراف$=۶$

۴ حدس می‌زنید چه رابطه‌ای بین تعداد یال‌ها و مجموع درجات رئوس یک گراف وجود دارد.

مجموع درجات رئوس گراف$=۲×$(تعداد یال های گراف)

۵ پاسخ خود را با دوستانتان مطرح کرده و در این باره بحث کنید.

فعالیت

۱ یک گراف دلخواه مانند G با n رأسِ v_1 ، v_2 ، ... و v_n و m یال e_1 ، e_2 ، ... و e_m در نظر بگیرید.

۲ تمام یال‌های گراف G را حذف کنید.

۳ مجموع درجات تمام رئوس گراف حاصل چند است؟ صفر تعداد یال‌های گراف حاصل چند است؟ صفر

و این دو عدد چه ارتباطی با هم دارند؟ ظاهراً با هم برابرند!!!

۴ یال e_1 را در جای خود (بین همان دو رأسی که e_1 قبل از حذف شدن بین آنها قرار داشت) قرار دهید و به سؤال ۳ جواب دهید.

مجموع درجات برابر ۲ و تعداد یالها ۱ می باشد .

۵ تمام یال‌های e_2 ، e_3 ، ... و e_m را یکی‌یکی در جای خود قرار دهید تا به گراف اولیهٔ G برسید و پس از اضافه‌کردن هر یال مجدداً برای گراف جدید ساخته شده به سؤال ۳ جواب دهید.

مجموع درجات ۴ و تعداد یالها ۲ است .

مجموع درجات ۶ و تعداد یالها ۳ است.

مجموع درجات $۲m$ و تعداد یالها m است .

۶ آیا مجموع درجات رئوس یک گراف می‌تواند عددی فرد باشد؟ چرا؟

خیر ، زیرا با اضافه کردن هر یال ، ۲ واحد به مجموع درجات افزوده می شود و با توجه به این که مجموع درجات در ابتدا صفر بوده ، غیر ممکن است که عددی فرد شود .

۷ برای تساوی $\sum_{i=1}^{n}\deg(v_i)=\deg(v_1)+\deg(v_2)+\cdots+\deg(v_n)=۲m$ استدلال خود را بیان نمایید.

در شمارش درجه ها ، هر یال دارای دو راس است ، بنابراین در مجموع آنها هر یال دو بار حساب شده است ، پس مجموع درجات دو برابر تعداد یالهاست .

با توجه به آنچه در این فعالیت به‌دست آوردیم، می‌توان قضیهٔ زیر را بیان نمود.

قضیه : اگر G یک گراف با مرتبهٔ p و اندازهٔ q و $V=\{v_1 , v_2 , \ldots , v_p\}$ مجموعهٔ رئوس آن باشند، آنگاه: $\sum_{i=1}^{p}\deg v_i = ۲q$

نتیجه : تعداد رأس‌های فرد هر گراف، عددی زوج است.

اثبات : فرض کنیم G یک گراف و A مجموعهٔ همهٔ رئوسِ فردِ گراف G و B مجموعهٔ همهٔ رئوس زوجِ گراف G باشد. در این صورت داریم $\sum_{v\in V(G)} \deg(v) = \sum_{v\in A} \deg(v) + \sum_{v\in B} \deg(v)$.

از طرفی $\sum_{v\in V(G)} \deg(v)$ و $\sum_{v\in B} \deg(v)$ زوج‌اند. (چرا؟) طبق قضیه مجموع درجات رئوس ، زوج می باشد پس $\sum_{v\in V(G)} \deg(v)$ زوج است.

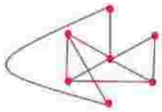
از طرفی درجه هر راس B عددی زوج است و مجموع چند عدد زوج ، عددی زوج است لذا $\sum_{v\in B} \deg(v)$ زوج می باشد .

بنابراین $\sum_{v\in A} \deg(v)$ نیز عددی زوج است و این نتیجه می‌دهد که $n(A)$ عددی زوج است. (چرا؟)

درجه هر راس A فرد می باشد ، لذا باید تعداد آنها زوج باشد تا مجموع درجات عددی زوج شود .

فعالیت

یک جمع ۷ نفره از دانش‌آموزان یک کلاس را در نظر بگیرید. فرض کنید دوستی بین اعضای این گروه یک رابطهٔ دوطرفه است، یعنی هر دو نفر از آنها یا هر دو با هم دوست‌اند و یا هیچ‌یک با دیگری دوست نیست. اکنون :



الف) گرافِ ۷ رأسی G را تشکیل دهید به این صورت که به ازای هر دانش‌آموز یک رأس قرار دهید، سپس هر دو رأس را به هم وصل کنید اگر و تنها اگر دانش‌آموزان متناظر با آن دو رأس با هم دوست باشند.

ب) با استفاده از قضیهٔ قبل نشان دهید که امکان ندارد درجهٔ تمام رئوسِ گرافِ حاصل برابر با ۳ باشد.

اگر درجه تمام رئوس گراف حاصل ۳ باشد آنگاه مجموع درجات رئوس $۳ \times ۷ = ۲۱$ خواهد شد که عددی فرد است و با قضیه تناقض دارد زیرا باید مجموع درجات رئوس عددی زوج باشد .

پ) با توجه به مراحل قبل و با استفاده از گراف نشان دهید که اگر تعداد افراد یک جمع عددی فرد باشد امکان ندارد تمام نفرات آن جمع، دارای تعداد فردی دوست در آن جمع باشند.

اگر تمام نفرات جمعِ فرد نفری ، دارای فرد تا دوست باشند ، یعنی در یک گراف تعداد رئوس درجه فرد ، فردتا است که با نتیجه گرفته شده از قضیه (بالای صفحه) تناقض دارد . لذا چنین موردی امکان پذیر نیست .

فعالیت

فرض کنید G یک گراف باشد و داشته باشیم $\delta(G) \geq ۴$. می‌خواهیم نشان دهیم که G شامل یک مسیر به طول بزرگ‌تر یا مساوی ۴ است.

۱ رأس دلخواه v_1 را در G در نظر می‌گیریم. حتماً v_1 به رأس دیگری متصل است. (چرا؟) فرض کنیم آن رأس v_2 باشد.
زیرا اگر به راس دیگری متصل نباشد درجه آن صفر خواهد بود ، در حالی که طبق فرض مسئله کمترین درجه ۴ در نظر گرفته شده است .

۲ حتماً v_2 به رأسی به جز رأس v_1 متصل است. (چرا؟) فرض می‌کنیم آن رأس v_3 باشد.
زیرا اگر چنین نباشد ، درجه آن ۱ خواهدبود که با فرض مسئه (کمترین درجه ۴ است) تناقض دارد .

۳ حتماً v_3 به رأسی از مجموعهٔ $V(G)-\{v_1 , v_2\}$ وصل است (چرا؟) فرض می‌کنیم آن رأس v_4 باشد.
زیرا در غیر این صورت ، درجه آن حداکثر ۲ خواهد بود و با فرض مسئله (کمترین درجه ۴ است)تناقض دارد .

۴ حتماً v_4 به رأسی از مجموعهٔ $V(G)-\{v_1 , v_2 , v_3\}$ وصل است (چرا؟) فرض می‌کنیم آن رأس v_5 باشد.
زیرا اگر چنین نباشد ، درجه آن حداکثر ۳ شده که با فرض مسئله (کمترین درجه ۴ است) تناقض دارد .

۵ مسیر $v_1 v_2 v_3 v_4 v_5$ یک مسیر به طول ۴ در گراف G است.

کار در کلاس

در هر یک از حالت‌های زیر تعداد یال‌های گراف G را به‌دست آورید.

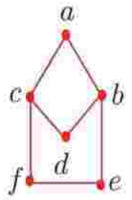
الف) G یک گراف n رأسی K ـ منتظم است. طبق قضیه : $۲q = n \times k \Rightarrow q = \frac{۱}{۲}nk$

ب) G یک گراف n رأسی کامل است. $(G=K_n)$

درجه هر راس $n-۱$ خواهد بود ، درنتیجه گراف $(n-۱)$-منتظم است. لذا طبق قسمت قبل : $q = \frac{۱}{۲}n(n-۱)$

تمرین

۱ گراف G با مجموعهٔ رأس‌های $V(G)=\{a,b,c,d,e,f\}$ و مجموعهٔ یال‌های $E(G)=\{ab,ac,cd,ef,db,cf,be\}$ مفروض است. نمودار آن را رسم کنید و به موارد زیر جواب دهید.



الف) مرتبه و اندازه گراف G را بنویسید. $p=6 \quad , \quad q=7$

ب) درجهٔ رأس‌های G را مشخص نمایید.

$\deg(a)=\deg(d)=\deg(e)=\deg(f)=2$ و $\deg(b)=\deg(c)=3$

پ) کدام رأس‌های گراف G با رأس f مجاورند؟ c,e

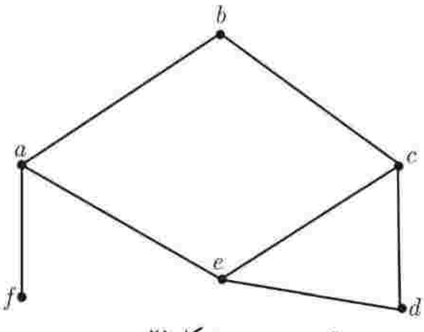
ت) مجموع درجات رئوس این گراف برابر چند است؟ $14=2+3+2+2+3+2$

ث) گراف H با مجموعه رأس‌های $V(H)=\{v_1,v_2,v_3,v_4\}$ و مجموعهٔ یال‌های $E(H)=\{v_1v_2,v_1v_3,v_2v_3,v_2v_4,v_3v_4,v_4v_1\}$ مفروض است. بدون کشیدن نمودار آن به قسمت‌های (الف) تا (ت) در مورد گراف H پاسخ دهید.

الف) $p=4 \quad , \quad q=6$ ب) $\deg(v_1)=\deg(v_2)=\deg(v_3)=\deg(v_4)=3$

پ) راس f در این گراف تعریف نشده است. ت) $4\times 3=12$

۲ گراف G (شکل ۲۱) را در نظر بگیرید.



شکل ۲۱

الف) مجموعه‌های $V(G)$ و $E(G)$ را بنویسید.

$V(G)=\{a,b,c,d,e,f,g\}$ و $E(G)=\{ab,ae,af,bc,cd,ce,de\}$

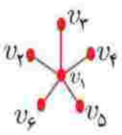
ب) $\Delta(G)$ و $\delta(G)$ را مشخص نمایید. $\Delta(G)=3 \ , \ \delta(G)=0$

پ) مجموعهٔ همسایه‌های رأس‌های f و g و e را بنویسید.

$N_G(f)=\{a\}$ و $N_G(g)=\varnothing$ و $N_G(e)=\{a,c,d\}$

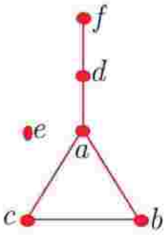
ت) اگر $N_G(x)=\{a,c\}$، آنگاه x کدام رأس است؟ x راسی هست که هم با a و هم با c همسایه باشد، با توجه به شکل، $x=b$ است.

۳ گراف G با مجموعهٔ رأس‌های $V(G)=\{v_1,v_2,v_3,v_4,v_5,v_6\}$ مفروض است. اگر $N_G(v_1)$ دارای ۵ عضو باشد و مجموعه‌های $N_G(v_i)$ برای $2\le i\le 6$ تک‌عضوی باشند، گراف G را رسم کنید.



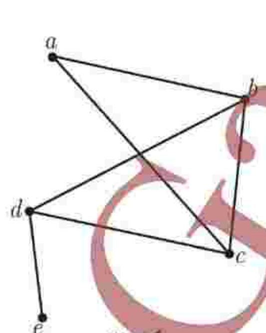
۴ در گراف G با مجموعهٔ رأس‌های $V(G)=\{a,b,c,d,e,f\}$ داریم:

$N_G(c)=\{a,b\}$	$N_G(b)=\{a,c\}$	$N_G(a)=\{b,c,d\}$
$N_G(f)=\{d\}$	$N_G(e)=\{\ \}$	$N_G(d)=\{a,f\}$



گراف G را رسم و اندازهٔ آن را مشخص کنید. $q=5$

۵ گراف G (شکل ۲۲) رسم شده است. مجموع درجه‌های رأس‌های گراف $\overline{G}$ را مشخص کنید و همچنین درجات رئوس a و c در گراف $\overline{G}$ را تعیین نمایید.



شکل ۲۲

تعداد یالهای گراف $\overline{G}$ = تعداد کل یال های ممکن درگراف ۵ راسی (K_5) − تعداد یالهای گراف G

$$\Rightarrow \text{تعداد یالهای گراف } \overline{G} = \frac{5\times 4}{2}-6=4 \xrightarrow{\times 2} \boxed{\text{مجموع درجات گراف } \overline{G} = 8}$$

درجه هر راس در گراف کامل ۴ است $\Longrightarrow$

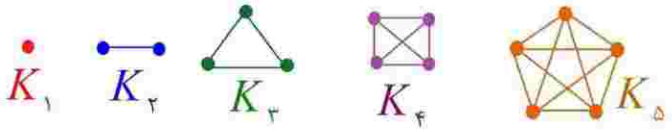
$$\begin{cases} \deg_G(a)=2 \Rightarrow \deg_{\overline{G}}(a)=4-2=2 \\ \deg_G(c)=3 \Rightarrow \deg_{\overline{G}}(c)=4-3=1 \end{cases}$$

۶ گراف کامل K_p دارای ۳۶ یال است. در این گراف $\Delta(G)$ و $\delta(G)$ را مشخص کنید.

در گراف کامل p راسی تعداد یالها برابر است با $\frac{p(p-1)}{2}$ در نتیجه : $\frac{p(p-1)}{2} = 36 \Rightarrow p(p-1) = 72 \Rightarrow p = 9$

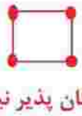
از طرفی گراف کامل K_9 یک گراف ۸ - منتظم است . بنابراین درجه تمام رئوس یکسان بوده و $\Delta = \delta = 8$ است .

۷ گراف‌های کامل از مرتبهٔ ۱ تا ۵ را رسم کنید.



۸ در هر یک از حالات زیر در صورت امکان یک گراف r- منتظم از مرتبهٔ n رسم کنید.

الف) $n = 4$ $r = 1$ 

ب) $n = 4$ $r = 2$ 

پ) $n = 5$ $r = 2$ 

ت) $n = 5$ $r = 3$ امکان پذیر نیست زیرا مجموع درجات $3 \times 5 = 15$ عدد فرد بوده و طبق قضیه باید زوج باشد .

ث) $n = 6$ $r = 4$ 

ج) $n = 7$ $r = 3$ امکان پذیر نیست زیرا مجموع درجات $3 \times 7 = 21$ عدد فرد بوده و طبق قضیه باید زوج باشد .

۹ برای هر یک از حالت‌های زیر در صورت امکان یک گراف ۵ رأسی رسم کنید به‌طوری‌که :

الف) یک رأس تنها داشته باشد. 

ب) دو رأس تنها داشته باشد. 

پ) سه رأس تنها داشته باشد. 

ت) چهار رأس تنها داشته باشد. امکان پذیر نیست ، زیرا اگر بخواهیم چهار راس تنها باشند ، راس پنجم نمی‌تواند به هیچکدام از آنها متصل شود پس راس پنجم نیز تنها خواهد ماند!

ث) پنج رأس تنها داشته باشد. 

۱۰ هفت نفر در یک اتاق هستند و برخی از آنها با یکدیگر دست می‌دهند. ۶ نفر از آنها هر کدام دقیقاً با ۲ نفر دست داده‌اند. نشان دهید نفر هفتم نمی‌تواند دقیقاً با ۵ نفر دست داده باشد.

اگر هفت نفر را به عنوان ۷ راس یک گراف در نظر بگیریم و در صورتی که دو نفر با هم دست دهند ، بین دو راس منسوب به آنها یال رسم کنیم ، در نتیجه ۶ راس گراف درجه ۲ خواهد بود و اگر راس هفتم درجه ۵ باشد ، یعنی گراف دارای یک راس درجه فرد است که با نتیجه ی قضیه تناقض دارد زیرا باید تعداد رئوس درجه فرد ، زوج تا باشد . پس نفر هفتم نمی تواند با ۵ نفر دست داده باشد .

۱۱ علی، سامان، محمد، ناصر و مهرداد، در یک شبکهٔ اجتماعی عضو هستند و هر کدام از آنها ممکن است در فهرست دوستان هر کدام از ۴ نفرِ دیگر باشد یا نباشد.

الف) چند حالت مختلف می‌تواند وجود داشته باشد؟ ۵ نفر را به عنوان ۵ راس یک گراف جهت دار در نظر می گیریم.

به طور مثال اگر نام علی در فهرست دوستان سامان وجود دارد ، یک یال جهت دار از علی به سمت سامان رسم می کنیم . و بر عکس اگر نام سامان در فهرست دوستان علی باشد یک یال جهت دار از سامان به علی رسم می کنیم . به همین ترتیب الی آخر پیش می رویم .

حداکثر تعداد یالها در گراف جهت دار ۵ راسی $p(p-1) = 5 \times 4 = 20$ می باشد .

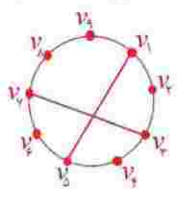
از طرفی برای هر یال دو حالت داریم (وجود داشتن یا وجود نداشتن آن یال) پس تعداد کل حالات برای آن 2^{20} می باشد .

ب) اگر بودن در فهرست دوستان، رابطه‌ای دوطرفه داشته باشد؛ یعنی هر دونفر، یا هر دو در فهرست دوستان هم هستند و یا هیچ‌کدام در فهرست دوستان دیگری نیست، در این صورت چند حالت مختلف می‌تواند وجود داشته باشد؟

این قسمت همچون قسمت الف بوده ، با این تفاوت که گراف جهت دار نیست ، پس حداکثر تعداد یالها $\frac{p(p-1)}{2} = \frac{5 \times 4}{2} = 10$ می باشد .

بنابراین تعداد کل حالات 2^{10} است .

۱۲ یک گراف ۹ رأسی رسم کنید به‌طوری‌که : الف) دورهایی به طول ۵ و ۶ و ۷ و ۹ داشته باشد و هیچ دوری به طول غیر از اعداد مذکور نداشته باشد.



دور به طول ۵: $v_1 v_2 v_3 v_4 v_5 v_1$ دور به طول ۶: $v_1 v_5 v_6 v_7 v_8 v_9 v_1$

دور به طول ۷: $v_1 v_5 v_6 v_7 v_8 v_9 v_1$ دور به طول ۹: $v_1 v_2 v_3 v_4 v_5 v_6 v_7 v_8 v_9 v_1$

ب) دورهایی به طول ۵ و ۶ و ۷ و ۸ و ۹ داشته باشد و دوری به طول غیر از اعداد مذکور نداشته باشد.

ابتدا همچون قسمت الف گرافی با دوری به طول ۹ رسم می کنیم و از v_1 به v_5 یالی رسم کرده تا دورهایی به طول ۶ و۵ ساخته شود.

حال برای ساختن دورهایی به طولهای ۷و۸ باید یال دیگری رسم کنیم . به طور مثال راس v_2 را انتخاب می کنیم که فقط می توان آن را به راس v_7 رسم کرد زیرا در غیر این صورت دورهایی به طول ۳ یا ۴ ایجاد می شود که خواست مسئله نیست .

اگر مطابق شکل (یال آبی رنگ) v_2 را به v_7 وصل کنیم دور به طول ۸ ایجاد می شود($v_2 v_3 v_4 v_5 v_1 v_9 v_8 v_7 v_2$) ولی دور به طول ۷ ایجاد نمی شود !

همچنین در قسمت قبل مشاهده شد که اگر راس v_3 انتخاب شود ، دور به طول ۷ ایجاد شده ولی به طول ۸ ایجاد نمی شود !

به همین تریتب با انتخاب رئوس دیگرمتوجه می شویم‌که این کار با رسم دو قطر امکان پذیر نیست .

اما در صورتی که سه قطر رسم کنیم ، یکی برای ایجاد دورهایی به طول ۵و۶ و دیگری برای دور به طول ۷ و سومی برای ایجاد دور به طول ۸ ، باز هم قابل قبول نبوده زیرا دورهایی به طول ۳ یا ۴ نیز ساخته شده که خواسته مسئله نیست . بنابراین چنین گرافی وجود ندارد .

۱۳ فرض کنید G یک گراف باشد و $\delta(G) \geq K$. درستی یا نادرستی هر یک از موارد زیر را ثابت کنید.

الف) G لزوماً شامل یک مسیر به طول K است. درست است. اثبات:

راس دلخواه v_1 را در گراف G در نظر می گیریم، حتماً v_1 به راس دیگری (مثل v_2) متصل است، زیرا در غیر این صورت $\delta = 0$ خواهد شد.

همچنین v_2 به راسی به جز v_1 متصل می باشد (مثل v_3) زیرا در غیر این صورت $\delta = 1$ خواهد شد.

حتماً v_3 به راسی به غیر از v_1 و v_2 (مثل v_4) وصل است، زیرا در غیر این صورت، حداکثر مقدار δ، دو خواهد بود.

این روند ادامه دارد تا به راس جدید v_K برسیم که با استدلال مشابه قبل بایستی به راس جدیدی مانند v_{k+1} وصل باشد.

بنابراین مسیر $v_1 v_2 v_3 \cdots v_{k+1}$ یک مسیر به طول k در گراف G است.

ب) G لزوماً شامل یک مسیر به طول $K + 1$ است. نادرست است. مثال های نقض برای رَد آن مطرح می کنیم:

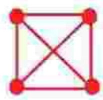
مثال نقض اول: در گراف یک راسی روبرو $K = \delta = 0$ مسیری به طول $1 = 1 + 0$ وجود ندارد. 

مثال نقض دوم: در گراف دو راسی روبرو $K = \delta = 1$ مسیری به طول $2 = 1 + 1$ وجود ندارد. 

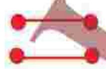
توجه: هر گراف کامل می تواند یک مثال نقض برای آن محسوب شود.

۱۴ یک گراف ۴ رأسی غیرتهیِ K- منتظم بکشید که:

الف) K بیشترین مقدار ممکن را داشته باشد.

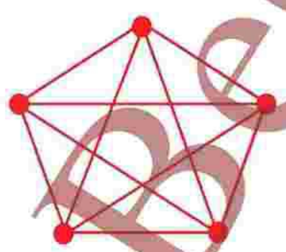


ب) K کمترین مقدار ممکن را داشته باشد.

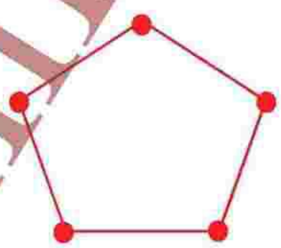


۱۵ یک گراف ۵ رأسیِ غیرتهیِ K- منتظم بکشید که:

الف) K بیشترین مقدار ممکن را داشته باشد.



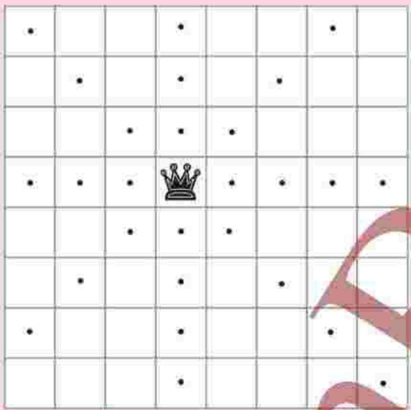
ب) K کمترین مقدار ممکن را داشته باشد.



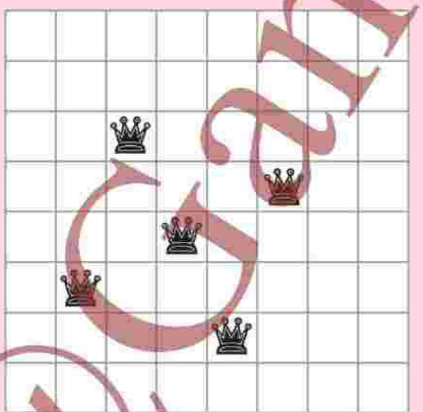
درس ۲ مدل‌سازی با گراف

برخی از مسائل روزمرهٔ زندگی را می‌توان به کمک مدل‌سازی نخست به یک مسئلهٔ ریاضی تبدیل نمود و سپس با حل مسئله ریاضی، مسئلهٔ اصلی را نیز حل کرد. به‌طور کلی، بعضی مفاهیم ریاضی در مدل‌سازی مسائل زندگی واقعی بسیار پرکاربرد هستند. «**احاطه‌گری**» یکی از این مفاهیم پرکاربرد است که در ادامه با تاریخچه، مفهوم و کاربردهایی از آن آشنا خواهیم شد.

تاریخچه

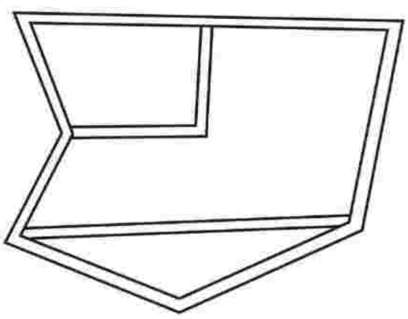


در قرن نوزدهم میلادی مسائلی مانند «یافتن حداقل تعداد مهرهٔ وزیری که می‌توانند با چینش مناسب تمام صفحهٔ شطرنج را بپوشانند» (یعنی هر خانهٔ صفحهٔ شطرنج که در آن وزیر قرار نگرفته است توسط حداقل یک وزیر تهدید شده باشند) ذهن برخی از مردم اروپا را به خود مشغول کرده بود.



تفکر دربارهٔ پرسش‌هایی از این دست باعث به‌وجود آمدن مفهومی در شاخهٔ گراف در ریاضیات با نام **احاطه‌گری** شد. برای آشنایی با این مفهوم به مسئلهٔ بعد دقت کنید.

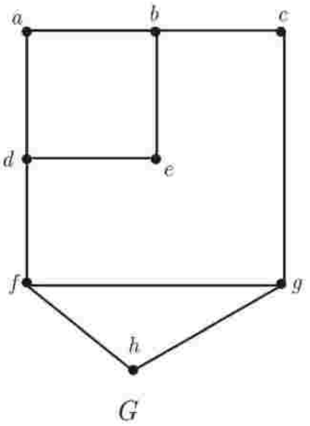
شکل مقابل نقشهٔ منطقه‌ای از یک شهر است. قرار است در برخی تقاطع‌های این شهر دستگاه‌های خودپرداز به‌گونه‌ای نصب شود که دو شرط زیر را داشته باشد:



شکل ۱

۱ برای راحتی شهروندان دستگاه‌ها به‌گونه‌ای نصب شده باشند که هر فرد در هر تقاطعی که قرار گرفته باشد، یا در همان تقاطع به دستگاه خودپرداز دسترسی داشته باشد و یا حداکثر با رفتن به یک تقاطع مجاور به دستگاه خودپرداز دسترسی پیدا کند.

۲ به جهت صرفه‌جویی در هزینه‌ها با کمترین تعداد دستگاه خودپرداز ممکن این کار صورت بگیرد.



شکل ۲

حال فرض کنید منطقهٔ مورد نظر را با گراف شکل ۲ مدل‌سازی کرده باشیم.

الف) در این مدل‌سازی تقاطع‌ها و خیابان‌های بین آنها هر کدام به چه صورت نمایش داده شده‌اند؟ تقاطع ها همان رئوس گراف و خیابان ها یال های گراف هستند.

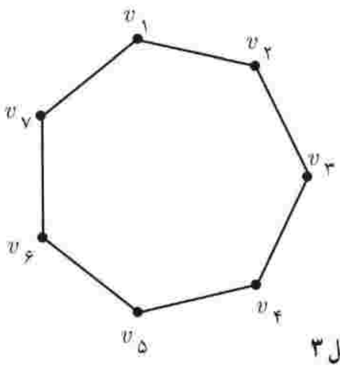
ب) رأس‌هایی از گراف را مشخص کنید که، با توجه به مدل‌سازی انجام شده، اگر خودپردازها در آن تقاطع‌ها قرار گیرند، شرط ۱ برآورده گردد. چنین مجموعه‌ای از رئوس را یک مجموعهٔ **احاطه‌گر** برای گراف می‌نامیم. به‌طور مثال مجموعهٔ شامل همه رئوس گراف G، یک مجموعه احاطه‌گر است. آیا می‌توانید یک مجموعهٔ احاطه‌گر ۴ عضوی مثال بزنید؟ $\{a, e, g, f\}$

تعریف: زیر مجموعهٔ D از مجموعهٔ رئوس گراف G را مجموعهٔ احاطه‌گر می‌نامیم هرگاه هر رأس از گراف یا در D باشد و یا حداقل با یکی از رئوس موجود در D مجاور باشد.

معمولاً به سادگی می‌توان مجموعه‌های مختلفی از رئوس گراف G را مشخص کرد که در شرط ۱ صدق کنند؛ به عبارتی یک گراف می‌تواند مجموعه‌های احاطه‌گر گوناگونی داشته باشد. از طرفی واضح است که هر مجموعه که شامل یک مجموعهٔ احاطه‌گر باشد، احاطه‌گر است. در بین تمام مجموعه‌های احاطه‌گر یک گراف، مجموعه‌ای را که کمترین تعداد عضو را داشته باشد **مجموعهٔ احاطه‌گر مینیمم** آن گراف می‌نامیم. اگر چنین مجموعه‌ای را برای گراف G بیابیم، این مجموعه در هر دو شرط ۱ و ۲ مطرح شده در مسئلهٔ بالا صدق خواهد کرد.

تعریف: در بین تمام مجموعه‌های احاطه‌گر گراف G، مجموعه یا مجموعه‌های احاطه‌گری که کمترین تعداد عضو را دارند **مجموعهٔ احاطه‌گر مینیمم** و تعداد اعضای چنین مجموعه‌ای را **عدد احاطه‌گری گراف G** می‌نامیم و آن را با $\gamma(G)$ نمایش می‌دهیم.

گاهی اوقات برای راحتی به یک مجموعهٔ احاطه‌گر مینیمم از گراف G، یک γـ مجموعه می‌گوییم.



شکل ۳

مثال : برای گراف شکل ۳ که دور C_7 است، مجموعهٔ $\{v_1 , v_3 , v_5 , v_7\}$ یک مجموعهٔ احاطه‌گر و مجموعه‌های $\{v_1 , v_4 , v_7\}$ و $\{v_1 , v_3 , v_5\}$ دو مجموعهٔ احاطه‌گر مینیمم یا اصطلاحاً دو γـ‌مجموعه‌اند؛ و داریم $\gamma(G) = 3$.

مثال : فرض کنید a، b، c، d، e، f، g، h، i، j و k شهرهای یک استان باشند و فاصله‌های مستقیم این شهرها از یکدیگر، دو به دو، مطابق جدول زیر باشند.

شایسته است در سطر اول نام شهرها با حروف کوچک نوشته شوند .
لذا این تغییر اعمال شده است.

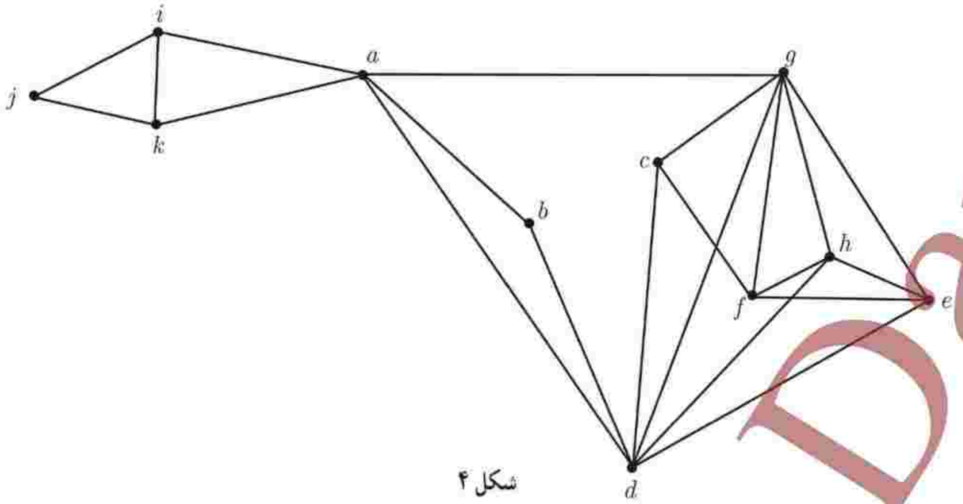
	a	b	c	d	e	f	g	h	i	j	k
a	۰	۵۰	۸۰	۴۰	۶۰	۹۰	۵۰	۷۰	۵۰	۶۰	۵۰
b	۵۰	۰	۵۵	۳۰	۶۰	۷۰	۶۰	۶۰	۹۰	۸۵	۸۰
c	۸۰	۵۵	۰	۴۰	۶۰	۲۰	۵۰	۵۵	۱۰۰	۹۵	۹۰
d	۴۰	۳۰	۴۰	۰	۳۰	۵۵	۳۰	۳۰	۸۰	۷۵	۷۰
e	۶۰	۶۰	۶۰	۳۰	۰	۵۰	۱۰	۵	۶۰	۵۵	۵۵
f	۹۰	۷۰	۲۰	۵۵	۵۰	۰	۴۰	۴۵	۱۰۰	۹۰	۸۰
g	۵۰	۶۰	۵۰	۳۰	۱۰	۴۰	۰	۵	۷۰	۶۵	۶۰
h	۷۰	۶۰	۵۵	۳۰	۵	۴۵	۵	۰	۶۵	۶۰	۵۵
i	۵۰	۹۰	۱۰۰	۸۰	۶۰	۱۰۰	۷۰	۶۵	۰	۵	۱۰
j	۶۰	۸۵	۹۵	۷۵	۵۵	۹۰	۶۵	۶۰	۵	۰	۵
k	۵۰	۸۰	۹۰	۷۰	۵۵	۸۰	۶۰	۵۵	۱۰	۵	۰

می‌خواهیم تعدادی ایستگاه رادیویی در برخی از شهرهای این استان تأسیس کنیم به‌طوری که همهٔ شهرهای استان از پوشش امواج رادیویی برخوردار گردند. و از طرفی برای کاهش هزینه‌ها می‌خواهیم کمترین تعداد ممکن ایستگاه رادیویی را احداث کنیم. اگر هر ایستگاه رادیویی تا ۵۰ کیلومتر اطراف خود را پوشش دهد، حداقل چند ایستگاه رادیویی احتیاج داریم و در چه شهرهایی باید آنها را احداث کنیم؟

حل : برای مدل‌سازی این مسئله کافی است گراف مربوط به آن را به این طریق رسم کنیم که به جای هر شهر یک رأس قرار دهیم و سپس دو رأس را به هم وصل کنیم اگر و تنها اگر فاصلهٔ مستقیم آن دو شهر از ۵۰ کیلومتر بیشتر نباشد. در این صورت مجموعهٔ احاطه‌گرِ مینیمم برای گراف مذکور، جواب مسئله را مشخص می‌کند. (چرا؟)

به دلیل وجود خاصیت احاطه گری،هر شهر از پوشش امواج رادیویی برخوردار می گردد . همچنین به جهت مینیمم بودن احاطه گری ، کمترین تعداد ممکن ایستگاه رادیویی و به دنبال آن کمترین میزان هزینه صورت خواهد گرفت.

با توجه به آنچه گفته شد گرافِ زیر، گرافِ حاصل از مدل‌سازی برای این مسئله است.

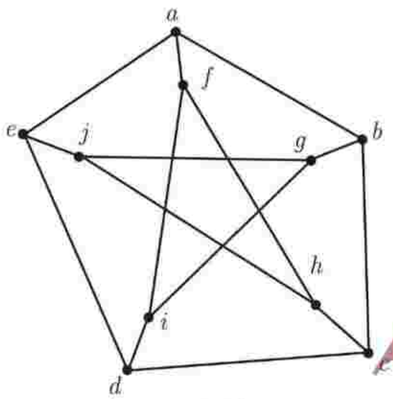


شکل ۴

حال کافی است یک مجموعهٔ احاطه‌گر مینیمم در این گراف بیابیم و ایستگاه‌های رادیویی را در شهرهای متناظر با رئوس این مجموعه احاطه‌گرِ مینیمال مستقر کنیم. یافتن یک مجموعهٔ احاطه‌گر مینیمم برای گراف فوق در تمرینات پایان درس به شما واگذار شده است.

کار در کلاس

۱ مشخص کنید کدام یک ازمجموعه‌های زیر برای گراف شکل ۵ احاطه‌گر هست و کدام نیست؟



شکل ۵

الف) $A=\{a,b,c,d,e\}$ احاطه گر هست

ب) $B=\{f,g,h,i,j\}$ احاطه گر هست

پ) $C=\{a,b,j,h,g\}$ احاطه گر نیست

ت) $D=\{a,i,h\}$ احاطه گر هست

ث) $E=\{f,g,h,e,d\}$ احاطه گر هست

ج) $F=\{f,g,h,e\}$ احاطه گر هست

۲ از مجموعه‌های مطرح شده در سؤال ۱ که احاطه‌گر بودند در کدام یک از آنها رأس یا رأس‌هایی وجود دارد که با حذف آنها مجموعهٔ باقی‌مانده هنوز احاطه‌گر باشد؟ قسمت ث ، اگر از مجموعه ی $E=\{f,g,h,e,d\}$ راس d را حذف کنیم ، مجموعه جدید همان مجموعه ی $F=\{f,g,h,e\}$ بوده که احاطه گر است .

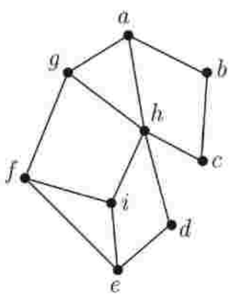
تعریف : یک مجموعهٔ احاطه‌گر را که با حذف هر یک از رأس‌هایش دیگر احاطه‌گر نباشد احاطه‌گر **مینیمال** می‌نامیم.

۳ مجموعه‌ای احاطه‌گر با کمترین تعداد رأس که می‌توانید، بنویسید و پاسخ خود را با پاسخ هم کلاسی‌های خود مقایسه کنید.

$\{c,j,f\}$

۴ یک مجموعهٔ احاطه‌گر مینیمال مشخص کنید که مینیمم نباشد. $A=\{a,b,c,d,e\}$

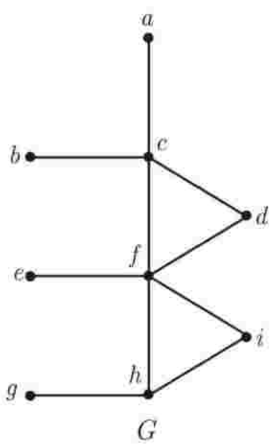
۵ آیا می‌توان هر مجموعهٔ احاطه‌گر دلخواه غیرمینیمال را با حذف برخی رئوسش به یک مجموعهٔ احاطه‌گر مینیمال تبدیل کرد؟(استدلال کنید) بله ، اگر $A=\{v_1,v_2,\dots,v_n\}$ یک مجموعه احاطه گر باشد ، عضوی مانند v_1 را در نظر می گیریم ، اگر با حذف آن ، هنوز مجموعه احاطه گر باقی ماند ، آن را حذف می کنیم ، در غیر این صورت آن را نگه داشته و همین کار را برای سایر رئوس انجام می دهیم .
با توجه به غیر مینیمال بودنِ مجموعه ، قطعاً حداقل یک عضو یافت می شود که با حذف آن ، هنوز مجموعه احاطه گر خواهد ماند .


شکل ۶

مثال : در گراف شکل ۶ یک مجموعهٔ احاطه‌گر غیرمینیمال انتخاب کنید و با حذف برخی رأس‌ها، آن را به یک مجموعهٔ احاطه‌گر مینیمال تبدیل نمایید.

حل : مجموعهٔ $\{a , b , c , d , e , f\}$ یک مجموعهٔ احاطه‌گر است. از آنجا که با حذف برخی رأس‌های آن (مثلاً رأس a) این مجموعه باز هم احاطه‌گر خواهد بود، لذا احاطه‌گر مینیمال نیست. حال با حذف سه رأس a، c و e از آن، مجموعهٔ $\{b,d,f\}$ حاصل می‌شود که باز هم احاطه‌گراست اما چون این مجموعه با حذف هر یک از رأس‌هایش دیگر احاطه‌گر نخواهد بود لذا احاطه‌گر مینیمال است.

کار در کلاس


شکل ۷

در گراف شکل ۷ :

۱ مجموعه‌ای از رئوس را مشخص نمایید که احاطه‌گر باشد. $\{c ,f ,i ,g\}$

۲ مجموعه‌ای از رئوس را مشخص نمایید که احاطه‌گر مینیمال باشد. $\{c,f ,g\}$

۳ یک مجموعهٔ احاطه‌گر ۳ عضوی مشخص نمایید. $\{c,e,h\}$

۴ آیا رأسی در گراف G وجود دارد که دو رأس از ۳ رأس b، e و g را احاطه کند؟ خیر

۵ حداقل تعداد رأس‌هایی که تمام رئوس گراف را احاطه می‌کنند چندتاست؟ ($\gamma(G)$ چند است؟) $\gamma(G)=۳$

معرفی یک نماد

با مفهوم جزء صحیح[1] یک عدد آشنا هستید و می‌دانید که اگر x یک عدد صحیح باشد، $[x]$ برابر با خود x است، و اگر عدد صحیح نباشد، عدد صحیح قبل از x است.

$$[x]=\begin{cases} x & x\in\mathbb{Z} \\ \text{بزرگ‌ترین عدد صحیح کوچک‌تر از } x & x\notin\mathbb{Z}\end{cases}$$

حال فرض کنید تعدادی از کارمندان یک شرکت قرار است با چند تاکسی به محلی بروند و هر ۴ نفر یک تاکسی نیاز دارند.

الف) اگر تعداد کارمندان ۱۲ نفر باشد، چند تاکسی نیاز است؟ ۳ تاکسی

۱ـ گاهی اوقات به جزء صحیح یک عدد، کفِ آن عدد هم گفته می‌شود. در برخی کتاب‌ها $[a]$ را با $\lfloor a \rfloor$ نمایش می‌دهند و به آن کفِ a می‌گویند.

ب) اگر تعداد کارمندان ۱۴ نفر باشد چند تاکسی نیاز است؟ ۴ تاکسی

پ) اگر تعداد کارمندان ۱۶ نفر باشد چند تاکسی نیاز است؟ ۴ تاکسی

ت) آیا با تقسیم تعداد کارمندان به عدد ۴، تعداد تاکسی‌های مورد نیاز به‌دست می‌آید؟ اگر عدد حاصل عدد صحیح نباشد چه تعداد تاکسی نیاز است؟ تعداد کارمندان را بر عدد ۴ تقسیم می کنیم ، اگر عدد صحیحی بدست آمد همان عدد تعداد تاکسی ها است .در غیر این صورت کوچکترین عدد صحیح بعد از آن ، نشان دهنده تعداد تاکسی ها می باشد .

ث) مفهوم سقف یک عدد که در ادامه مطرح شده است را می‌توان در مواردی مشابه آنچه در اینجا مطرح شد به‌کار برد.

در صورتی که x عددی غیر صحیح باشد برای نمایش عدد صحیحِ بعد از x از $\lceil x \rceil$ استفاده می‌کنیم و آن را سقفِ x می‌خوانیم. در حالت کلی

$$\lceil x \rceil = \begin{cases} x & x \in \mathbb{Z} \\ \text{کوچک‌ترین عدد صحیح بزرگ‌تر از } x & x \notin \mathbb{Z} \end{cases}$$

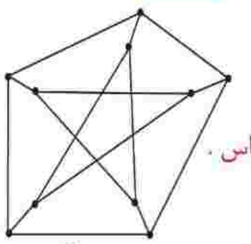
بنابراین:

$[۳/۵] = ۳$ $\qquad [۳] = ۳$

$\lceil ۳/۵ \rceil = ۴$ $\qquad \lceil ۳ \rceil = ۳$

■ سؤال: برای کدام اعداد کف و سقف آنها با هم برابر است؟ اعداد صحیح

فعالیت



G

شکل ۸

۱ در هر گراف، هر رأس خودش و تمام رئوس مجاورش را احاطه می‌کند.

۲ در گراف مقابل Δ چند است؟ $\Delta = ۳$

۳ هر رأس حداکثر چند رأس را احاطه می‌کند؟ هر راس خودش و تمام رئوس مجاورش را احاطه می کند یعنی ۴ راس. و این تعداد چه ارتباطی با Δ دارد؟ این تعداد همان $\Delta + ۱$ است.

۴ آیا ۲ رأس می‌توانند همهٔ رئوس گراف G را احاطه کنند؟ خیر

۵ حداقل $\left\lceil \frac{۱۰}{۴} \right\rceil$ رأس برای احاطهٔ همهٔ رئوس لازم است. چرا؟ یک راس آن حداکثر ۴ راس را احاطه می کند . حال اگر راس دیگری را چنان انتخاب کنیم که رئوس احاطه شده قبلی مجاور آن نباشند ، آنگاه این راس نیز ۴ راس دیگر را احاطه می کند . لذا از بین ۱۰ راس ۸ راس احاطه شده اند . که باید برای احاطه ی دو راس باقی مانده از راس جدیدی استفاده کنیم ، پس حداقل ۳ راس برای احاطه ی همه ی راس ها نیاز داریم . از طرفی $۳ = \left\lceil \frac{۱۰}{۴} \right\rceil$ می باشد .

۶ $\gamma(G)$ چند است؟ $\gamma(G) = ۳$

۷ در یک گراف دلخواه با ماکزیمم درجهٔ Δ ، یک رأس دلخواه حداکثر چند رأس را احاطه می‌کند؟ $\Delta + ۱$

۸ تعداد کمتر از $\left\lceil \frac{n}{\Delta+۱} \right\rceil$ رأس نمی‌توانند تمام n رأسِ یک گراف را احاطه کنند. چرا؟

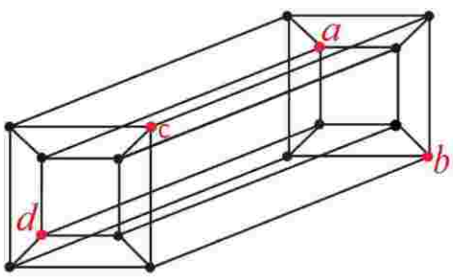
یک راس دخواه حداکثر $\Delta + ۱$ راس را احاطه می کند . حال برای تعیین حداقل تعداد رئوسی که تمام n راس گراف را احاطه کنند ، باید حساب کرد برای جابجایی n مسافر به چند تاکسی با ظرفیت حداکثر $\Delta + ۱$ نفر احتیاج داریم . برای این کار نسبت $\frac{n}{\Delta+۱}$ را حساب می کنیم ، اگر عدد صحیح شد که جواب می باشد ، در غیر این صورت کوچکترین عدد صحیح بعدی آن جواب است تا اینکه تمام رئوس احاطه شده باشند . و این همان $\left\lceil \frac{n}{\Delta+۱} \right\rceil$ است.

بنابراین:

اگر G یک گراف n رأسی با ماکزیمم درجهٔ Δ باشد و D یک مجموعهٔ احاطه‌گر در آن باشد، آنگاه $\left\lceil \frac{n}{\Delta+1} \right\rceil \le |D|$ و از آنجا که $\gamma(G)$ نیز اندازه یک مجموعهٔ احاطه‌گر است همواره داریم $\left\lceil \frac{n}{\Delta+1} \right\rceil \le \gamma(G)$ (اصطلاحاً گفته می‌شود در گراف G عدد $\left\lceil \frac{n}{\Delta+1} \right\rceil$ یک کران پایین است برای $\gamma(G)$؛ یعنی $\gamma(G)$ نمی‌تواند از آن کمتر شود).

کار در کلاس

۱ یک شبکه رایانه‌ای متشکل از ۱۶ کامپیوتر را در نظر بگیرید که در آن هر کامپیوتر، مطابق شکل ۹ به چند کامپیوتر دیگر متصل است. گراف شکل ۹ یک مدل‌سازی از شبکه مورد نظر است که در آن هر رأس نمایشگر یک کامپیوتر است و یال بین دو رأس نمایانگر آن است که کامپیوترهای نظیر به آن دو رأس مستقیماً با هم در ارتباط‌اند. می‌خواهیم مجموعه‌ای با کمترین تعداد ممکن از کامپیوترها (رأس‌ها) انتخاب کنیم. به‌طوری که توسط این مجموعه از کامپیوترها به تمام کامپیوترهای این شبکه وصل باشیم. مجموعهٔ انتخاب شده از رئوس برای گراف مورد نظر چه نوع مجموعه‌ای است؟ مجموعه ی احاطه گر مینیمم

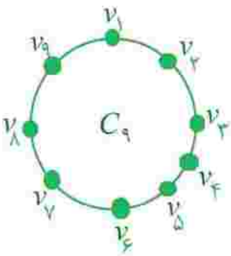


شکل ۹

۲ با توجه به رابطهٔ $\left\lceil \frac{n}{\Delta+1} \right\rceil \le \gamma(G)$ ، حداقل چند رأس برای احاطه کردن تمام رئوس این گراف لازم است؟ $\left\lceil \frac{16}{4+1} \right\rceil = 4$

آیا می‌توانید مجموعه‌ای احاطه‌گر با این تعداد رأس مشخص نمایید؟ $\{a,b,c,d\}$

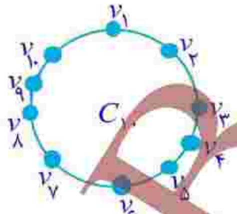
۳ گراف‌های P_{10} , P_9 , C_{10} و C_9 را رسم کنید و عدد احاطه‌گری هر یک را مشخص نمایید



$\gamma(C_9) \ge \left\lceil \frac{9}{2+1} \right\rceil = 3$

$\{v_2, v_5, v_8\}$

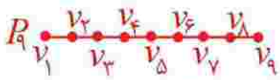
$\Rightarrow \gamma(C_9) = 3$



$\gamma(C_{10}) \ge \left\lceil \frac{10}{2+1} \right\rceil = 4$

$\{v_1, v_4, v_7, v_9\}$

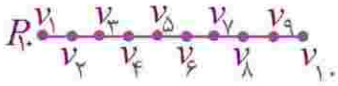
$\Rightarrow \gamma(C_{10}) = 4$



$\gamma(P_9) \ge \left\lceil \frac{9}{2+1} \right\rceil = 3$

$\{v_2, v_5, v_8\}$

$\Rightarrow \gamma(P_9) = 3$



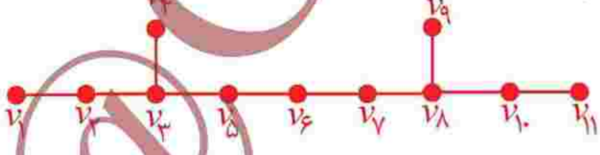
$\gamma(P_{10}) \ge \left\lceil \frac{10}{2+1} \right\rceil = 4$

$\{v_1, v_4, v_7, v_{10}\}$

$\Rightarrow \gamma(P_{10}) = 4$

۴ گرافی مشخص کنید که برای آن عدد احاطه‌گر برابر $\left\lceil \frac{n}{\Delta+1} \right\rceil$ باشد. در گراف P_9 عدد احاطه گری $3 = \left\lceil \frac{9}{2+1} \right\rceil$ است.

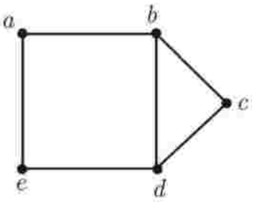
۵ گرافی مشخص کنید که برای آن عدد احاطه‌گر برابر $\left\lceil \frac{n}{\Delta+1} \right\rceil$ نباشد.



مجموعه احاطه گر مینیمم $= \{v_2, v_4, v_6, v_8, v_{11}\}$

$\Rightarrow \gamma(G) = 5 \neq \left\lceil \frac{11}{4} \right\rceil$

مثال : عدد احاطه‌گری گراف شکل ۱۰ را مشخص و ادعای خود را ثابت کنید.


شکل ۱۰

حل : به سادگی می‌توان دید که مجموعهٔ دو عضوی $\{a,c\}$ یک مجموعه احاطه‌گر است.

بنابراین عدد احاطه‌گری این گراف کوچک‌تر یا مساوی ۲ است؛ یعنی $\gamma(G) \leq ۲$.

اما اگر $\gamma(G)=۱$، یعنی یک رأس در گراف G وجود دارد که به تنهایی تمام رئوس دیگر را احاطه کرده است (به تمام رئوس دیگر وصل است) یعنی رأسی با درجهٔ ۴ در گراف وجود دارد که با توجه به گراف G می‌بینیم که چنین رأسی وجود ندارد و لذا $\gamma(G)>۱$. بنابراین $۱<\gamma(G)\leq ۲$ و لذا $\gamma(G)=۲$.

روش دیگر برای حل : نوع دیگری از استدلال به این صورت است که باتوجه به کران پایین مطرح شده برای $\gamma(G)$ و اینکه $\Delta(G)=۳$ داریم :

$$\left\lceil \frac{n}{\Delta+۱} \right\rceil \leq \gamma(G) \Rightarrow \left\lceil \frac{۵}{۴} \right\rceil \leq \gamma(G)$$

بنابراین $۲ \leq \gamma(G)$ و با توجه به مجموعهٔ احاطه‌گر دو عضوی ارائه شده در بالا داریم $\gamma(G) \leq ۲$ و لذا $\gamma(G)=۲$.

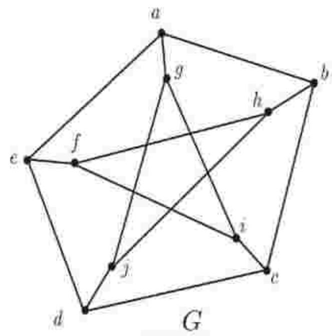
کار در کلاس

۱ تمام γـ مجموعه‌های (مجموعه‌های احاطه‌گر مینیمم) گراف G در مثال قبل را بنویسید.

$\{a,c\},\{b,d\},\{b,e\},\{a,d\},\{a,b\},\{c,e\},\{e,d\}$

۲ عدد احاطه‌گری را برای هر یک از گراف‌های زیر مشخص کنید.

الف)

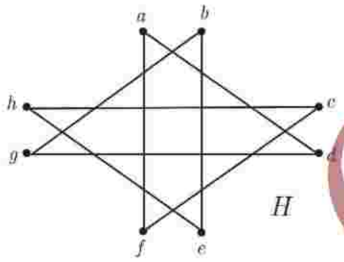


$\gamma(G) \geq \left\lceil \frac{۱۰}{۳+۱} \right\rceil = ۳$

از طرفی $\{a,c,h\}$ یک مجموعه احاطه گری است ، بنابراین :

$\gamma(G)=۳$

ب)



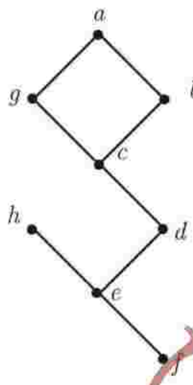
$\gamma(H) \geq \left\lceil \frac{۸}{۲+۱} \right\rceil = ۳$

از طرفی $\{a,b,c\}$ یک مجموعه احاطه گری است ، بنابراین :

$\gamma(G)=۳$

فعالیت

۱ می‌خواهیم عدد احاطه‌گری گراف شکل ۱۲ را مشخص کنیم.


شکل ۱۲

الف) ابتدا می‌بینیم که با توجه به کران پایین $\left\lceil \frac{n}{\Delta+۱} \right\rceil$ برای $\gamma(G)$ حداقل $\left\lceil \frac{۸}{۴} \right\rceil = ۲$ رأس برای احاطه کردن رئوس لازم است اما در مراحل بعدی می‌بینیم که ۲ رأس برای احاطه تمام رئوس این گراف کافی نیست.

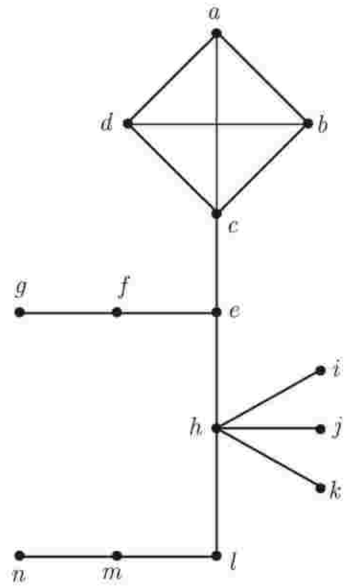
ب) برای احاطه‌کردن رئوس a، b، c، d و g حداقل دو تا از آنها باید در مجموعهٔ احاطه‌گر باشند. (چرا؟) زیرا $\left\lceil \frac{۵}{۳+۱} \right\rceil = ۲$

پ) برای احاطه‌کردن رئوس e، f و h حداقل یکی از آنها باید انتخاب شوند. (چرا؟) $\left\lceil \frac{۳}{۳+۱} \right\rceil = ۱$

ت) بنابراین حداقل ۳ رأس باید در هر مجموعهٔ احاطه‌گر از گراف G باشد یعنی $\gamma(G)\geq ۳$.

ث) از طرفی چون $\{a,c,e\}$ یک مجموعهٔ احاطه‌گر است، $\gamma(G)\leq ۳$. پس $\gamma(G)=۳$.

۲ می‌خواهیم عدد احاطه‌گر گراف شکل ۱۳ را مشخص نماییم.



شکل ۱۳

الف) ابتدا کران پایین $\left\lceil \frac{n}{\Delta+1} \right\rceil$ را بررسی می‌کنیم که عدد $3=\left\lceil \frac{14}{6} \right\rceil$ را می‌دهد. پس $\gamma(G)\geq 3$.

ب) اما حداقل یکی از رئوس a، b، c و d باید انتخاب شود. چرا؟ $\left\lceil \frac{4}{4+1} \right\rceil=1$

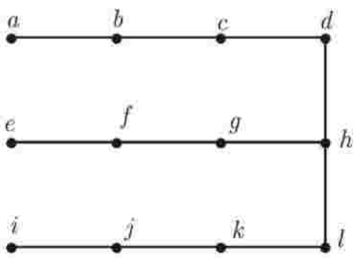
پ) حداقل یکی از رئوس e، f و g باید انتخاب شود. چرا؟ $\left\lceil \frac{3}{3+1} \right\rceil=1$

ت) حداقل یکی از رئوس h، i، j و k باید انتخاب شود. چرا؟ $\left\lceil \frac{4}{5+1} \right\rceil=1$

ث) حداقل یکی از رئوس l، m و n باید انتخاب شود. چرا؟ $\left\lceil \frac{3}{2+1} \right\rceil=1$

ج) بنابراین حداقل ۴ رأس در هر مجموعهٔ احاطه‌گر باید باشد. لذا $\gamma(G)\geq 4$ و با توجه به اینکه $\{c,f,h,m\}$ یک مجموعهٔ احاطه‌گر است لذا $\gamma(G)\leq 4$ بنابراین $\gamma(G)=4$.

مثال : عدد احاطه‌گری گراف شکل ۱۴ را به‌دست آورید و یک مجموعهٔ احاطه‌گر مینیمم برای آن ارائه کنید.



شکل ۱۴

حل : برای احاطه‌کردن رأس a لازم است یکی از دو رأس a و b در مجموعهٔ احاطه‌گر باشند و بهتر آن است که رأس b انتخاب شود.(چرا؟)

زیرا با این انتخاب ، راس c نیز احاطه می شود ، که برای مینیمم کردن احاطه گری مفید است .

به همین صورت رئوس j و f را نیز می‌توان در مجموعهٔ احاطه‌گر در نظر گرفت.

حال مجموعهٔ $\{b,f,j\}$ تمام رئوس گراف به جز سه رأس l,h,d را احاطه می‌کند و برای احاطهٔ این سه رأس نیز کافی است رأس h اضافه شود یعنی $\{b,f,j,h\}$ یک مجموعهٔ احاطه‌گر است.

از طرفی با کمتر از ۴ رأس نیز نمی‌توان رئوس این گراف را احاطه کرد. زیرا مثلاً اگر ۳ رأس تمام رئوس را احاطه کنند، چون هیچ رأسی بیش از ۴ رأس را احاطه نمی‌کند (چرا؟) زیرا حداکثر درجه رئوس ۳ است.

باید هر کدام از این ۳ رأس دقیقاً ۴ رأس را احاطه کنند تا تمام ۱۲ رأس گراف احاطه شده باشند این یعنی باید حداقل ۳ رأس از درجهٔ ۳ داشته باشیم و چنین رأس‌هایی در این گراف وجود ندارند. پس حداقل تعداد رئوس لازم برای احاطه تمام رئوس این گراف همان ۴ تا است.

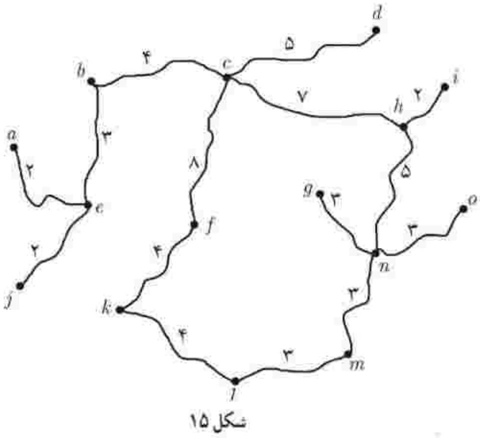
۱ در مثال ایستگاه‌های رادیویی (دومین مثال این درس)

الف) تعداد و محل نصب ایستگاه‌ها را مشخص نمایید. حداقل سه ایستگاه باید نصب شود ، که می توان آن ایستگاه ها را به صورت $\{g,a,k\}$ یا $\{f,d,j\}$ یا $\{g,b,i\}$ یا $\{d,c,i\}$ یا . . . انتخاب کرد.

ب) اگر مجبور باشیم یکی از ایستگاه‌ها را در شهر b احداث کنیم حداقل چند ایستگاه دیگر و در چه شهرهایی باید احداث کنیم؟

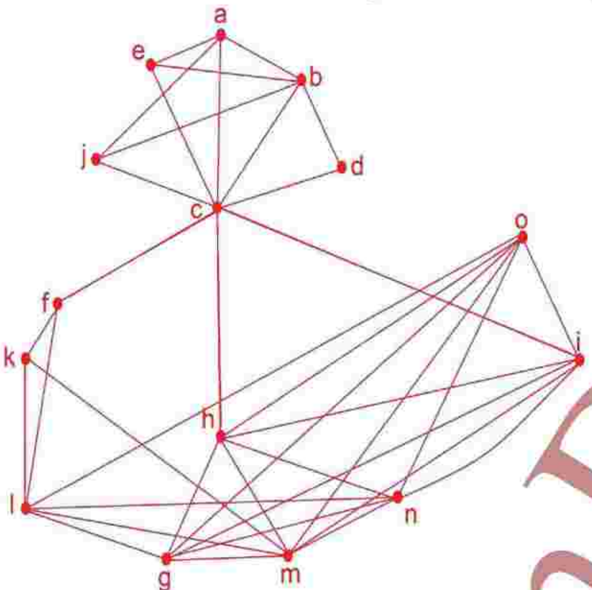
حداقل دو ایستگاه دیگر باید احداث نمود . این دو ایستگاه می تواند $\{i,g\}$ یا $\{f,k\}$ یا ... باشد .

۲ نقشهٔ مقابل نقشهٔ یک منطقه شامل چند روستا و جاده‌های بین آن روستاهاست و مسافت جاده‌های بین روستاها در آن مشخص شده است. قصد داریم چند بیمارستان مجهز در برخی روستاها احداث کنیم به‌گونه‌ای که فاصلهٔ هر روستا تا نزدیک‌ترین بیمارستان به آن روستا از ۱۰ کیلومتر بیشتر نباشد و از طرفی کمترین تعداد ممکن بیمارستان را احداث کنیم. ابتدا با توجه به نقشهٔ فوق، مسئلهٔ مورد نظر را با یک گراف مناسب مدل‌سازی کنید و سپس تعداد و محل احداث بیمارستان‌ها را مشخص کنید.



شکل ۱۵

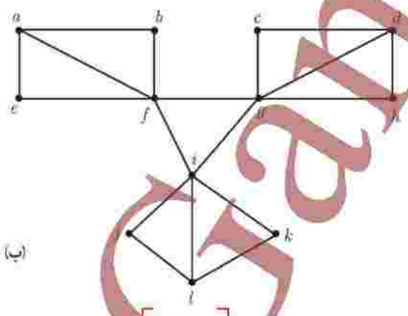
ابتدا هر روستا را به عنوان یک راس گراف (با حرف کوچک انگلیسی) مشخص می کنیم ، سپس بین دو راس (دو روستا) به شرطی یال رسم می کنیم که فاصله ی بین آن دو بیشتر از ۱۰ کیلومتر نباشد .



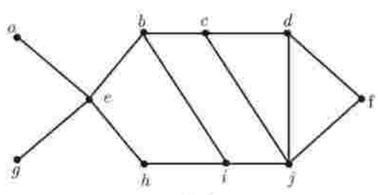
$$\gamma(G) \geq \left\lceil \frac{۱۵}{۸+۱} \right\rceil = ۲$$

یک مجموعه ی احاطه گری می تواند $\{c,m\}$ باشد . بنابراین کافیست دو بیمارستان در روستاهای c,m احداث کرد .

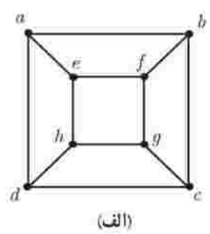
۳ عدد احاطه‌گری را برای هر یک از گراف‌های زیر مشخص نمایید.



(پ)



(ب)



(الف)

$$\gamma(G) \geq \left\lceil \frac{۸}{۳+۱} \right\rceil = ۲$$

مجموعه $\{a,g\}$ یک مجموعه ی احاطه گری برای آن است .پس $\gamma(G)=۲$

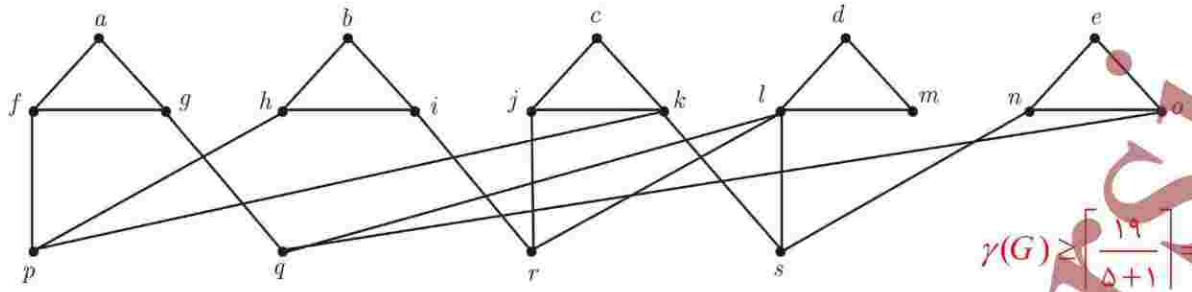
$$\gamma(G) \geq \left\lceil \frac{۱۰}{۴+۱} \right\rceil = ۲$$

مجموعه $\{e,j\}$ یک مجموعه ی احاطه گری برای آن است .پس $\gamma(G)=۲$

$$\gamma(G) \geq \left\lceil \frac{۱۲}{۵+۱} \right\rceil = ۲$$

مجموعه $\{f,d,l\}$ یک مجموعه ی احاطه گری برای آن است .پس $\gamma(G)=۳$

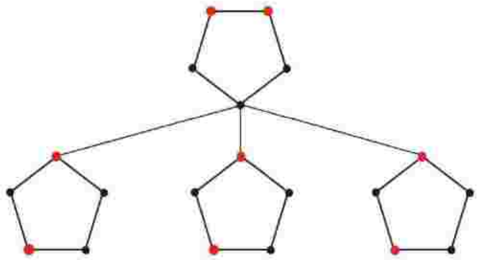
(ت)



$$\gamma(G) \ge \left\lceil \frac{19}{5+1} \right\rceil = 4$$

از طرفی از هر مثلث حداقل یک راس باید انتخاب کنیم ، به عنوان نمونه مجموعه $\{f,i,k,l,e\}$ یک مجموعه احاطه گری آن است . بنابراین : $\gamma(G)=5$

(ث)

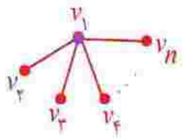


$$\gamma(G) \ge \left\lceil \frac{20}{5+1} \right\rceil = 4$$

از طرفی از هر پنج ضلعی حداقل دو راس باید انتخاب کنیم ،
لذا $8=4\times 2$ یعنی : $\gamma(G)=8$ به عنوان نمونه رئوس قرمز رنگ به عنوان یک مجموعه احاطه گری محسوب می شوند .

۴ اگر برای گراف G داشته باشیم $\gamma(G)=1$، در این صورت به چه ویژگی‌هایی از گراف G می‌توان پی‌برد؟ ($\Delta(G)$ و حداقل و حداکثر تعداد یال‌هایی را که گراف G می‌تواند داشته باشد مشخص کنید.)

حداقل یک راس با ماکزیمم درجه (راس فول) وجود دارد .



با فرض اینکه گراف دارای n راس باشد ، حداقل باید $n-1$ یال داشته باشد که می توان شکل مقابل را برای آن پیشنهاد کرد :

حداکثر میزان تعداد یال $\frac{n(n-1)}{2}$ می باشد (حالتی که گراف کامل باشد). در هر صورت $\Delta(G)=n-1$ است .

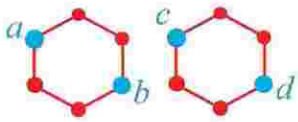
۵ $\gamma(P_n)$ و $\gamma(C_n)$ را به ازای هر $n\in \mathbb{N}$ مشخص کنید.

با توجه به اینکه در هر دو ، حداکثر درجه رئوس ۲ می باشد داریم :

$$\gamma(P_n)=\gamma(C_n)=\left\lceil \frac{n}{2+1} \right\rceil=\left\lceil \frac{n}{3} \right\rceil$$

۶ اگر G یک گراف k- منتظم n رأسی باشد نشان دهید $\left\lceil \frac{n}{k+1} \right\rceil \le \gamma(G)$

در گراف $k-$ منتظم n رأسی ، $\Delta=\delta=k$ می باشد ، بنابراین : $\gamma(G)\ge \left\lceil \frac{n}{k+1} \right\rceil$

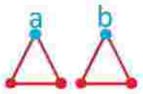


۷ یک گراف ۲ــ منتظم ۱۲ رأسی بکشید که عدد احاطه‌گری آن کمترین مقدار ممکن باشد.

$\gamma(G)\ge \left\lceil \frac{12}{2+1} \right\rceil=4$ ، مجموعه ی $\{a,b,c,d\}$ یک مجموعه ی احاطه گری است . بنابراین عدد احاطه گری آن ۴ می باشد .

۸ الف) یک گراف ۶ رأسی که γ- مجموعهٔ آن با اندازه یک باشد رسم کنید.

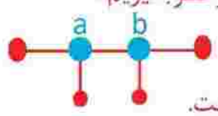
مجموعه احاطه گری آن $\{a\}$ است .



ب) یک گراف ۶ رأسی که γ- مجموعهٔ آن با اندازه دو باشد رسم کنید. در گراف مقابل مجموعه احاطه گری $\{a,b\}$ است .

پ) فرض کنید n و k دو عدد طبیعی باشند و $k\le n$. روشی برای رسم یک گراف n رأسی که عدد احاطه‌گری آن k باشد، ارائه دهید.

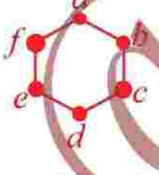
کافیست گراف را به صورت k بخشی رسم کنیم و در هر بخش راسی که همه ی رئوس آن بخش را احاطه می کند در نظربگیریم .



۹ الف) یک گراف ۶ رأسی با عدد احاطه‌گری ۲ رسم کنید که یک مجموعهٔ احاطه‌گر یکتا با اندازهٔ ۲ داشته باشد.

مجموعه ی احاطه گری آن $\{a,b\}$ است.

ب) یک گراف ۶ رأسی با عدد احاطه‌گری ۲ رسم کنید که بیش از یک مجموعهٔ احاطه‌گر با اندازهٔ ۲ داشته باشد.



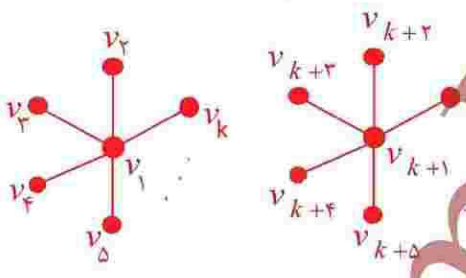
گراف مقابل دارای سه مجموعه ی احاطه گری به اندازه ۲ می باشد . که عبارتند از :

$\{e,b\}$ و $\{f,c\}$ و $\{a,d\}$

۱۰ برای هر $n \in \mathbb{N}$ $(n \geq ۴)$ دلخواه توضیح دهید که

الف) چگونه می‌توانید یک گراف n رأسی با عدد احاطه‌گری ۲ رسم کنید که یک مجموعه احاطه‌گر یکتا با اندازهٔ ۲ داشته باشد.

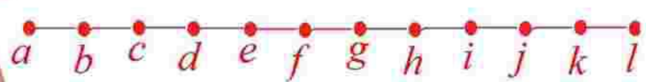
کافیست مطابق شکل روبرو ، یک گراف دو بخشی رسم کنیم به طوری که یک بخش آن شامل k راس و بخش دیگر آن شامل $n-k$ راس باشد.



ب) چگونه می‌توانید یک گراف n رأسی با عدد احاطه‌گری ۲ رسم کنید که بیش از یک مجموعهٔ احاطه‌گر با اندازه ۲ داشته باشد.

مطابق شکل روبرو باید گراف را رسم کرد . که دو مجموعه ی احاطه گری آن $\{v_۱, v_n\}$ و $\{v_۱, v_{n-۱}\}$ می باشند .

۱۱ گراف $P_{۱۲}$ را رسم کنید.



الف) یک ۴ــ مجموعه از آن را مشخص نمایید. مجموعه $\{b, e, h, k\}$ یک۴- مجموعه است

ب) یک مجموعهٔ احاطه‌گر مینیمال ۶ عضوی از آن را مشخص نمایید. مجموعه $\{b, c, f, g, j, k\}$ یک مجموعه احاطه گر مینیمال ۶ عضوی است .

۳ ترکیبیّات (شمارش)

درس ۱ مباحثی در ترکیبیّات

یادآوری و تکمیل

در سال‌های قبل با ابزارهایی همچون اصل جمع و اصل ضرب برای شمارش آشنا شده و با بعضی از تکنیک‌ها و روش‌های شمارش مانند تبدیل[1] r شیء از n شیء (انتخاب r شیء که ترتیب انتخاب آنها مهم باشد) و ترکیب[2] r شیء از n شیء (انتخاب r شیء که ترتیب انتخاب آنها مهم نباشد) نیز آشنایی داشته و از آنها در حل مسائل شمارشی استفاده کرده‌اید.

گاهی اوقات برای شمارش در حالت‌های خاص باید از روش‌هایی همچون دسته‌بندی اشیا یا تقسیم کل جایگشت‌های ممکن بر تعداد حالت‌هایی که تکراری یا بی‌اثر محسوب می‌شوند، استفاده کنیم.

در این درس با توجه به طرح و حل مثال‌هایی، شما با این روش‌ها آشنا خواهید شد.

مثال : فرض کنید می‌خواهیم با سه حرف «ج»، «پ» و «ژ» و ارقام ۲، ۳، ۴ و ۵ یک رمز شامل ۷ کاراکتر تشکیل دهیم، مطلوب است :

الف) تعداد کل رمزهایی که می‌توان تشکیل داد.

ب) تعداد رمزهایی که در هر یک از آنها همواره حروف کنار یکدیگرند.

پ) تعداد رمزهایی که در هر یک از آنها همواره ارقام کنار یکدیگرند.

ت) تعداد رمزهایی که در هر یک از آنها همواره ارقام کنار هم و حروف نیز کنار هم باشند.

حل :

الف) ۳ حرف و ۴ رقم روی هم ۷ شیء متمایز بوده و به !۷ طریق می‌توانند کنار هم قرار گیرند و رمز تولید کنند.

ب) کافی است ابتدا سه حرف را با هم یک شیء درنظر بگیریم و آنها را با ۴ رقم داده شده روی هم ۵ شیء فرض کنیم. در این‌صورت !۵ جایگشت دارند؛ در هر جایگشت، سه حرفِ داده شده هم در عین

۱ـ $(n)_r = \dfrac{n!}{(n-r)!}$

۲ـ $\dbinom{n}{r} = \dfrac{n!}{r!(n-r)!}$

حال که کنار هم هستند !۳ جایگشت دارند و لذا طبق اصل ضرب تعداد کل رمزهای موردنظر برابر است با $5!\times 3!$

$$\boxed{۲}\ \boxed{۳}\ \underbrace{\boxed{چ}\ \boxed{پ}\ \boxed{ژ}}_{\text{۳! جایگشت}}\ \boxed{۵}\ \boxed{۴}$$

پ) مشابه قسمت (ب) ابتدا ۴ رقم داده شده را یک شیء فرض می‌کنیم که با ۳ حرف مفروض روی هم ۴ شیء بوده و !۴ جایگشت داشته و در هر جایگشت ۴ رقم داده شده هم !۴ در کنار هم جایگشت دارند، لذا تعداد رمز مورد نظر، طبق اصل ضرب عبارت است از $4!\times 4!$

$$\boxed{پ}\ \underbrace{\boxed{۳}\ \boxed{۲}\ \boxed{۵}\ \boxed{۴}}_{\text{۴! جایگشت}}\ \boxed{ژ}\ \boxed{چ}$$

ت) حروف را یک شیء و ارقام را نیز با هم یک شیء فرض می‌کنیم که روی هم دو شیء شده و !۳ حروف در کنار هم و !۴ نیز ارقام کنار هم جایگشت دارند که طبق اصل ضرب تعداد رمزهای موردنظر عبارت‌است از $2!\times 3!\times 4!$

$$\underbrace{\boxed{۲}\ \boxed{۴}\ \boxed{۳}\ \boxed{۵}}_{\text{۴! جایگشت}}\ \underbrace{\boxed{پ}\ \boxed{ژ}\ \boxed{چ}}_{\text{۳! جایگشت}}$$

ما برای حل این مثال از دسته‌بندی اشیا استفاده کردیم.

حال مسئله‌ای را طرح و حل می‌کنیم ولی هیچ توضیحی برای حل آن نمی‌دهیم تا شما خودتان راه‌حل این مسئله را توضیح دهید.

مثال : ۵ دانش‌آموز پایهٔ دوازدهم و ۴ دانش‌آموز پایهٔ یازدهم به چند طریق می‌توانند کنار هم (در یک ردیف) قرار بگیرند اگر بخواهیم :

الف) همواره دانش‌آموزان هر پایه کنار هم باشند.

ب) به‌صورت یک‌درمیان قرار بگیرند (هیچ دو دانش‌آموز هم پایه کنار هم نباشند).

پ) اگر دانش‌آموزان پایهٔ یازدهم نیز ۵ نفر باشند، به چند طریق می‌توان آنها را به‌صورت یک‌درمیان قرار داد؟

الف) $5!\times 4!\times 2!$

روش اول : ب) $5!\times 4!$

روش دوم : $\underline{5}\ \underline{4}\ \underline{4}\ \underline{3}\ \underline{3}\ \underline{2}\ \underline{2}\ \underline{1}\ \underline{1} \longrightarrow 5\times 4\times 4\times 3\times 3\times 2\times 2=5!\times 4!$

پ) $(5!\times 5!)\times 2$

جایگشت‌های با تکرار

گاهی اوقات چند شیء تکراری یا یکسان در بین اشیا یافت می‌شود. در این حالت تعداد جایگشت‌های این اشیا با تعداد جایگشت‌ها در حالتی که هیچ دو شیء یکسانی در بین اشیا نباشد، متفاوت بوده و به نظر می‌رسد کمتر باشد. به عنوان مثال تعداد جایگشت‌های سه حرف a ، b و c برابر با $۳!=۶$ است ولی تعداد جایگشت‌های سه حرف a و a و b برابر با ۳ است (baa , aba , aab) درواقع چون جابه‌جایی دو حرف a حالت جدیدی تولید نمی‌کند و حالت تکراری به حساب می‌آید پس در واقع می‌بایست تعداد کلّ جایگشت‌ها را بر تعداد حالت‌هایی که دو حرف تکراری می‌توانند جابه‌جا شوند یعنی !۲ تقسیم کنیم، پس پاسخ این سؤال $۳=\frac{۳!}{۲!}$ است.

چون دو حرف a به !۲ طریق می‌توانند با هم جابه‌جا شوند و این تعداد جابه‌جایی به صورت ضربی در !۳ محاسبه شده و نباید محاسبه می‌شد، پس باید با تقسیم !۳ بر !۲ از عملیات ضربی خارج شود.

کار در کلاس

محاسبه کنید با ارقام ۲، ۱، ۱ و ۱ چند رمز چهار رقمی می‌توان نوشت؟

اگر ۴ رقم متمایز بودند جواب این سؤال !۴ بود ولی چون در این !۴ و به‌صورت ضربی، !۳ حالتِ ممکن برای یک‌ها محاسبه شده و نباید محاسبه می‌شد، لذا کافی است برای رسیدن به جواب، تعداد کل حالت‌ها را بر تعداد حالت‌هایی که رمز ۴ رقمی جدید تولید نمی‌شود تقسیم کنیم یعنی پاسخ، $۴=\frac{۴!}{۳!}$ است.

اعداد ۴ رقمی ممکن $\underbrace{۱۱۱۲,۱۱۲۱,۱۲۱۱,۲۱۱۱}_{\text{۴ رمز ممکن}}$

تذکر : هرگاه n شیء مفروض باشند و در بین آنها k شیء تکراری یا مشابه وجود داشته باشد، برای محاسبهٔ تعداد جایگشت‌های این n شیء ابتدا آنها را متمایز فرض کرده و جایگشت‌های آنها را حساب می‌کنیم و سپس حاصل را بر جایگشت‌های اشیای تکراری (به دلیل ورود در محاسبات به صورت ضربی) تقسیم می‌کنیم؛ یعنی این تعداد برابر است با : $\frac{n!}{k!}$.

با همین استدلال می‌توان قضیهٔ زیر را، که به آن قضیهٔ جایگشت با تکرار می‌گوییم، بیان کرد :

قضیهٔ جایگشت با تکرار : اگر n شیء مفروض باشند، به‌طوری که $n_۱$ تای آنها از نوع اول و یکسان و $n_۲$ تای آنها از نوع دوم و یکسان و ... و n_k تای آنها از نوع k ام و یکسان باشند، در این صورت تعداد کل جایگشت‌های این اشیا برابر است با :

$$\frac{n!}{n_۱!\times n_۲!\times\cdots\times n_k!}$$

مثال : با ارقام ۵، ۴، ۴، ۲، ۳، ۳، ۲، ۲، ۱ و ۱ چند عدد ۹ رقمی می‌توان نوشت؟

حل : طبق قضیهٔ جایگشت با تکرار

$$\frac{۹!}{\underbrace{۲!}_{\text{تعداد چهارها}}\times \underbrace{۳!}_{\text{تعداد دوها}}\times \underbrace{۲!}_{\text{تعداد یک‌ها}}}$$

مثال : ۹ نفر به چند طریق می‌توانند در سه اتاق ۲ نفره، ۳ نفره و ۴ نفره واقع در یک هتل اسکان یابند؟

کل جایگشت‌های ۹ نفر عبارت از !۹ است که چون دونفری که در اتاق دونفره هستند با جابه‌جایی آنها مجدداً همان دو نفر در همان اتاق بوده و حالت جدیدی تولید نمی‌شود و نیز جابه‌جایی سه نفر و چهار نفر در اتاق‌های سه‌نفره و چهارنفره حالت جدیدی تولید نمی‌کند و تعداد این جایگشت‌های بی‌اثر برای دو نفر، سه نفر و چهار نفر به‌ترتیب !۲، !۳ و !۴ است، پس پاسخ این سؤال طبق قضیه برابر است با $\frac{9!}{2!\times 3!\times 4!}$. این مثال به روشی دیگر و با استفاده از ترکیب برای انتخاب افراد (جابه‌جایی افراد انتخاب شده برای اتاق‌ها مهم نیست) :

$$\underbrace{\binom{9}{2}}_{\text{انتخاب دو نفر برای اتاق دونفره}}\times\underbrace{\binom{7}{3}}_{\text{انتخاب سه نفر از ۷ نفر باقی برای اتاق سه‌نفره}}\times\binom{4}{4}=\frac{9!}{2!\times \cancel{7!}}\times\frac{\cancel{7!}}{3!\times 4!}\times 1=\frac{9!}{2!\times 3!\times 4!}$$

فعالیت

شخصی وارد یک گل فروشی می‌شود و می‌خواهد دسته‌گلی شامل سه شاخه گل، از بین سه نوع گل مریم، رُز و میخک، انتخاب کند. (از هر نوع گل به تعداد فراوان موجود است)

۱ هر سطر جدول زیر یک انتخاب را نمایش می‌دهد، شما این جدول را کامل کنید.

	دسته‌گل انتخابی	مریم	رُز	میخک
۱	یک شاخه گل مریم، یک شاخه گل رُز و یک شاخه گل میخک	*	*	*
۲	دو شاخه گل میخک و یک شاخه گل مریم	*		**
۳	سه شاخه گل رُز	...	***	...
۴	یک شاخه گل میخک و دو شاخه گل رُز	...	**	*
۵	سه شاخه گل مریم	***	...	...
۶	یک شاخه گل میخک و دو شاخه گل مریم	**	...	*
۷	دو شاخه گل مریم و یک شاخه گل رُز	**	*	...
۸	سه شاخه گل میخک	...	...	***
۹	دو شاخه گل میخک و یک شاخه گل رُز	...	*	**
۱۰	دوشاخه گل رُز و یک شاخه گل مریم	*	**	...

همان‌طور که مشاهده می‌کنید برای جدا کردن سه نوع گل از دو خط عمودی و برای مشخص کردن تعداد انتخاب‌ها از هر نوع گل از * استفاده شده است.

۲ آیا در هر حالت از حالت‌های ۱ تا ۱۰ جابه‌جایی ستاره‌ها با هم دسته گل جدیدی تولید می‌کند؟ خیر

جابه‌جایی دو خط عمودی با هم چطور؟ خیر

۳ با توجه به قضیهٔ جایگشت با تکرار تعداد کلّ جایگشت‌های این ۵ شیء (۳ ستاره و ۲ خط عمودی) را به‌دست آورید.

$$\binom{۳+۲}{۲}=\binom{۵}{۲}=\frac{۵!}{۲!\times ۳!}=$$ تعداد کل جایگشت‌ها

۴ این مسئله را در حالت کلّی و برای انتخاب دلخواه n شاخه گل از بین k نوع گل بررسی کنید.

$n=$ تعداد ستاره‌ها = تعداد شاخه گل‌های انتخابی

$k-۱=$ تعداد خط‌های عمودی برای جدا کردن k نوع گل

$n+(k-۱)=$ تعداد کل اشیا (شامل ستاره‌ها و خط‌های عمودی)

$$\binom{n+(k-۱)}{k-۱}=\frac{[n+(k-۱)]!}{n!\times(k-۱)!}=$$ تعداد کل جایگشت‌ها

جابه‌جایی ستاره‌ها باهم، دسته گل جدیدی تولید نمی‌کند.

جابجایی خطهای عمود با هم دسته گل جدیدی تولید نمی کند.

مثال : به چند طریق می‌توان از بین ۴ نوع گل، دسته‌گلی شامل ۸ شاخه گل را به دلخواه انتخاب کرد؟

حل :

انواع گل $=k=۴$

تعداد شاخه گل انتخابی به دلخواه $=n=۸$

$$\xRightarrow{\text{فعالیت قبل}}\binom{n+k-۱}{k-۱}=\binom{۱۱}{۳}=\frac{۱۱!}{۳!\times ۸!}$$

مثال : به چند طریق می‌توان دسته‌گلی شامل ۹ شاخه گل را از بین ۴ نوع گل انتخاب کرد، به شرط آنکه از هر نوع گل حداقل ۱ شاخه انتخاب شود؟

حل : ابتدا ۱ شاخه (به اجبار) از هر نوع گل برمی‌داریم. ۵=۴−۹ شاخه گل باقی‌مانده را به‌دلخواه از بین ۴ نوع گل انتخاب می‌کنیم :

$k=۴$

تعداد انتخاب‌های دلخواه $\leftarrow n=۹-۴=۵$

$$\Rightarrow \text{تعداد حالت‌های مطلوب}=\binom{n+k-۱}{k-۱}=\binom{۸}{۳}$$

فعالیت

می‌خواهیم تعداد انتخاب‌های دلخواه ۷ شاخه گل از بین سه نوع گل را مشخص کنیم. اگر فرض کنیم $x_۱$ تعداد انتخاب‌ها از گل نوع اول و $x_۲$ تعداد انتخاب‌ها از گل نوع دوم و $x_۳$ تعداد انتخاب ها از گل نوع سوم باشد، در این صورت می‌بایست جمع انتخاب‌ها از سه نوع گل، برابر با ۷ باشد یعنی $x_۱+x_۲+x_۳=۷$ با توجه به اینکه هر جواب صحیح و نامنفی این معادله نشان‌دهندهٔ یک انتخاب هفت‌تایی از سه نوع گل بوده و برعکس هر انتخاب هفت‌تایی از این سه نوع گل یک جواب صحیح و نامنفی برای این معادله است جدول زیر را کامل کرده و سپس تعداد جواب‌های معادله را به‌دست آورید.

$x_1+x_2+x_3=۷$	تعداد انتخاب‌ها از گل نوع سوم x_3	تعداد انتخاب‌ها از گل نوع دوم x_2	تعداد انتخاب‌ها از گل نوع اول x_1
۱+۰+۶=۷	۶	۰	۱
۱+۱+۵=۷	۵	۱	۱
۴+۲+۱=۷	۱	۲	۴
۰+۷+۰=۷	۰	۷	۰
۱+۴+۲=۷	۲	۴	۱
۰+۳+۴=۷	۴	۳	۰

تعداد جواب‌های صحیح و نامنفی معادلهٔ $x_1+x_2+x_3=۷$ برابر است با تعداد انتخاب‌های دلخواه ۷ شاخه گل از بین سه نوع گل یعنی، $\binom{n+k-1}{k-1}=\binom{۹}{۲}=۳۶$

با توجه به فعالیت قبل می‌توان گفت:

تعداد جواب‌های صحیح و نامنفی معادلهٔ $x_1+x_2+\dots+x_k=n$ برابر است با تعداد انتخاب‌های دلخواه n شاخه گل از بین k نوع گل یعنی برابر است با $\binom{n+k-1}{k-1}$

کار در کلاس

۱ معادلهٔ $x_1+x_2+x_3=۷$ چند جواب صحیح و مثبت دارد؟ (**راهنمایی**: مثال را ملاحظه کنید، از هر نوع گل حداقل ۱ شاخه انتخاب شود.)

ابتدا از هر نوع گل یک شاخه بر می داریم : $\underbrace{(x_1-۱)}_{y_1}+\underbrace{(x_2-۱)}_{y_2}+\underbrace{(x_3-۱)}_{y_3}=۷-۱-۱-۱ \Rightarrow y_1+y_2+y_3=۴$

تعداد جواب های صحیح و نامنفی معادله ی‌جدید (همان تعداد انتخاب های دلخواه ۴ شاخه گل از بین ۳ نوع گل) پاسخ سوال می باشد ، که برابر است با : $\binom{۴+۳-۱}{۳-۱}=\binom{۶}{۲}=۱۵$

۲ نشان دهید تعداد جواب‌های صحیح و مثبت معادلهٔ $x_1+x_2+\dots+x_k=n$ برابر است با $\binom{n-1}{k-1}$. (**راهنمایی**: ابتدا از هر نوع گل ۱ شاخه برداشته و لذا تعداد انتخاب‌های دلخواه به $(n-k)$ تقلیل می‌یابد و...) دقیقاً مشابه سوال قبل عمل می کنیم :

$$\underbrace{(x_1-۱)}_{y_1}+\underbrace{(x_2-۱)}_{y_2}+\dots+\underbrace{(x_k-۱)}_{y_k}=n\underbrace{-۱-۱-\dots-۱}_{-k}\Rightarrow y_1+y_2+\dots+y_k=n-k$$

$\binom{n-1}{k-1}=\binom{(n-k)+k-1}{k-1}=$ تعداد جوابهای صحیح و نامنفی معادله جدید = تعداد جواب های صحیح و مثبت معادله ی مورد سوال $\Leftarrow$

۳ معادلهٔ $x_1+x_2+\dots+x_5=۱۴$ چند جواب صحیح و نامنفی دارد به شرط انکه $x_1>۱$ و $x_3>۳$ باشد؟[1]

$x_1>۱\Rightarrow x_1\ge ۲\Rightarrow \underbrace{x_1-۲}_{y_1}\ge ۰\Rightarrow \boxed{x_1=y_1+۲}$

$x_3>۳\Rightarrow x_3\ge ۴\Rightarrow \underbrace{x_3-۴}_{y_3}\ge ۰\Rightarrow \boxed{x_3=y_3+۴}$

$\Leftarrow$ معادله جدید : $y_1+۲+x_2+y_3+۴+x_4+x_5=۱۴$

$\Rightarrow y_1+x_2+y_3+x_4+x_5=۸$

تعداد جوابهای صحیح و نامنفی معادله ی اخیر ، پاسخ می باشد ، یعنی : $\binom{۱۲}{۴}=\binom{۸+۵-۱}{۵-۱}$

۱ــ طرح سؤال‌هایی برای معادلات سیّاله که شرط‌هایی برای x_iها به‌صورت $a\le x_i\le b$ در ان لحاظ شده باشد در امتحانات و ارزشیابی‌ها جایز نیست.

۴ معادلهٔ $x_۱+x_۲+\cdots x_۵=۱۱$ چند جواب صحیح و مثبت دارد؟ ($x_i \geq ۱$ ، $۱ \leq i \leq ۵$)

از شرط قرار داده شده ($x_i \geq ۱$) نتیجه می شود ، پاسخ مسئله ، همان تعداد جواب های صحیح و مثبت (طبیعی) معادله می باشد ، که طبق سوال ۲ ، برابر است با : $\binom{۱۱-۱}{۵-۱}=\binom{۱۰}{۴}=۲۱۰$

۵ معادلهٔ $x_۱+x_۲+\cdots+x_۶=۱۲$ چند جواب صحیح و مثبت دارد به شرط آنکه $x_۳=۴$ و $x_۵>۲$ باشد؟

$$\left.\begin{array}{l} x_۵>۲\Rightarrow \underbrace{x_۵-۲}_{y_۵}>۰ \Rightarrow x_۵=y_۵+۲ \\ x_۳=۴ \end{array}\right\} \Rightarrow \text{معادله جدید: } x_۱+x_۲+۴+x_۴+y_۵+۲+x_۶=۱۲$$

$$\Rightarrow x_۱+x_۲+x_۴+y_۵+x_۶=۶$$

حال با توجه به رابطه بدست آمده در سوال ۲، تعداد جواب ها برابر است با : $\binom{۶-۱}{۵-۱}=\binom{۵}{۴}=۵$

حال می‌خواهیم ابزارهای شمارشی دیگری را معرفی کنیم که با استفاده از آنها می‌توان به حل مسائلی پرداخت که حل آنها با استفاده از روش‌های معمولی، دشوار و گاهی اوقات بسیار وقت‌گیر است!

مربع‌های لاتین

سه مدرس به نام‌های احمدی، کریمی و عباسی قصد دارند در یک روز در سه جلسه ۱۰ــ۸، ۱۲ــ۱۰ و ۴ــ۲ در سه کلاس A، B و C تدریس کنند. هر کلاس سه جلسهٔ درسی خواهد داشت و هر مدرس در هریک از کلاس‌ها دقیقاً یک‌بار باید تدریس کند. نام مدرس‌ها را در جدول مقابل به گونه‌ای وارد کنید که شرایط خواسته شده محقق گردد.

کلاس‌ها / جلسات	۱۰ــ۸	۱۲ــ۱۰	۴ــ۲
A	احمدی	کریمی	عباسی
B	عباسی	احمدی	کریمی
C	کریمی	عباسی	احمدی

فعالیت

۱ به جای نام سه مدرس مذکور به ترتیب اعداد ۱، ۲ و ۳ را قرار دهید و یک جدول ۳ × ۳ از اعداد به‌دست آورید.

۱	۲	۳
۳	۱	۲
۲	۳	۱

۲ موارد معادل در دو ستون چپ و راست را به هم وصل کنید.

الف) در هیچ سطری عدد تکراری نداریم. — a) هیچ مدرسی در یک جلسه موظف به تدریس در دو کلاس نشده است.

ب) در هیچ ستونی عدد تکراری نداریم. — b) هر یک از مدرسین در تمام کلاس‌ها تدریس داشته است.

پ) هر یک از اعداد در تمام سطرها آمده است. — c) هیچ مدرسی در یک کلاس دوبار تدریس نکرده است.

ت) هر یک از اعداد در تمام ستون‌ها آمده است. — d) هر یک از مدرسین در هر یک از جلسه‌ها تدریس داشته است.

تعریف : یک جدول مربعی از اعدادِ ۱، ۲، ... و n به شکل یک مربع $n \times n$ را که سطرها و ستون‌های آن با اعداد ۱، ۲، ... و n پر شده باشد و در هیچ سطر آن و نیز در هیچ ستون آن عدد تکراری وجود نداشته باشد، «**مربع لاتین**[1]» می‌نامیم. (به هر یک از اعدادِ درون مربع لاتین یک درایه می‌گوییم.)

۱ــ اویلر برای نام‌گذاری این مربع‌ها از حروف لاتین استفاده می‌کرد، به همین دلیل این مربع‌ها به نام مربع‌های لاتین معروف شده‌اند.

مثال : دو مربع لاتین ۳ × ۳ و دو مربع لاتین ۴ × ۴ در زیر نمایش داده شده است.

۱	۲	۳
۲	۳	۱
۳	۱	۲

۱	۲	۳
۳	۱	۲
۲	۳	۱

۲	۳	۴	۱
۴	۱	۲	۳
۱	۴	۳	۲
۳	۲	۱	۴

۲	۳	۴	۱
۳	۲	۱	۴
۴	۱	۲	۳
۱	۴	۳	۲

کار در کلاس

۱ دو مربع لاتین ۵ × ۵ بنویسید.

۳	۴	۵	۱	۲
۲	۳	۴	۵	۱
۴	۵	۱	۲	۳
۱	۲	۳	۴	۵
۵	۱	۲	۳	۴

۱	۲	۳	۴	۵
۲	۳	۴	۵	۱
۳	۴	۵	۱	۲
۴	۵	۱	۲	۳
۵	۱	۲	۳	۴

۲ با استدلال کلاسی بگویید که چرا با تعویض جای دو سطر (دو ستون) از یک مربع لاتین شکل حاصل باز هم یک مربع لاتین است؟

زیرا در هر سطر و در هر ستون ، هر کدام از اعداد ۱ تا n فقط یک بار نوشته شده اند .

۳ شکل زیر یک مربع لاتین $n \times n$ است که به آن «**مربع لاتین چرخشی**» می‌گوییم. مربع لاتین بودن آن را چگونه توجیه می‌کنید؟

زیرا در هر سطر و در هر ستون ، هر کدام از اعداد ۱ تا n فقط یک بار نوشته شده اند .

$$
\begin{array}{cccccccc}
۱ & ۲ & ۳ & \cdots & \cdots & \cdots & n-۱ & n \\
n & ۱ & ۲ & ۳ & \cdots & \cdots & n-۲ & n-۱ \\
n-۱ & n & ۱ & ۲ & ۳ & \cdots & n-۳ & n-۲ \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
۳ & ۴ & ۵ & & & & ۱ & ۲ \\
۲ & ۳ & ۴ & \cdots & \cdots & \cdots & n & ۱
\end{array}
$$

با توجه به آنچه در کار در کلاس دیدیم برای هر عدد طبیعی مانند n، مربع لاتین $n \times n$ وجود دارد.

حال فرض کنیم یک مربع لاتین مانند شکل زیر داریم و با اعمال یک جایگشت بر روی ۱ , ۲ , ۳ , ... , n یک مربع جدید به‌دست آورده‌ایم. خواهیم دید که مربع به‌دست آمده نیز یک مربع لاتین خواهد بود، زیرا در غیر این صورت در سطر یا ستونی از مربع جدید عضو تکراری وجود خواهد داشت که این موضوع با توجه به خواص جایگشت ایجاب می‌کند که در سطر یا ستونی از مربع اوّل نیز عضو تکراری وجود داشته باشد و این با مربع لاتین بودن آن در تناقض است.

۴	۱	۳	۲
۲	۳	۱	۴
۳	۲	۴	۱
۱	۴	۲	۳

۱ → ۳
۲ → ۲
۳ → ۴
۴ → ۱

۳	۴	۱	۲
۲	۱	۴	۳
۱	۲	۳	۴
۴	۳	۲	۱

با جایگزینی اعداد ۱، ۲، ۳ و ۴ از جدول اول به ترتیب با اعداد ۳، ۲، ۴ و ۱ جدول دوم حاصل شده است.

کار در کلاس

برای هر یک از مربع‌های لاتین زیر یک جایگشت مشخص نمایید. سپس برای هر یک از جایگشت‌ها از روی مربع لاتین داده شده یک مربع لاتین به‌دست آورید.

۲	۱	۴	۳
۴	۳	۲	۱
۳	۴	۱	۲
۱	۲	۳	۴

۱ → ۲
۲ → ۱
۳ → ۴
۴ → ۳

۱	۲	۳	۴
۳	۴	۱	۲
۴	۳	۲	۱
۲	۱	۴	۳

۱	۲	۳
۲	۳	۱
۳	۱	۲

۱ → ۲
۲ → ۳
۳ → ۱

۲	۳	۱
۳	۱	۲
۱	۲	۳

۱	۳	۵	۴	۲
۵	۴	۲	۱	۳
۲	۱	۳	۵	۴
۳	۵	۴	۲	۱
۴	۲	۱	۳	۵

۱ → ۴
۲ → ۲
۳ → ۵
۴ → ۳
۵ → ۱

۴	۵	۱	۳	۲
۱	۳	۲	۴	۵
۲	۴	۵	۱	۳
۵	۱	۳	۲	۴
۳	۲	۴	۵	۱

دو مربع لاتین متعامد

تعریف : فرض کنید A و B دو مربع لاتین هم‌مرتبه باشند به طوری که از کنار هم قرار دادن درایه‌های نظیر از این دو مربع، مربع جدیدی از همان مرتبه حاصل شود که هر خانهٔ آن حاوی یک عدد دو رقمی است که تمام رقم‌های سمت چپ مربوط به مربع A و تمام رقم‌های سمت راست مربوط به مربع B (و یا برعکس) است. در این صورت گوییم دو مربع لاتین A و B «متعامدند» هرگاه هیچ‌یک از اعداد دو رقمی موجود در خانه‌های مربع جدید تکرار نشده باشند.

به‌طور مثال برای دو مربع A و B به‌صورت زیر داریم:

$A =$

۲	۳	۴	۱
۳	۲	۱	۴
۴	۱	۲	۳
۱	۴	۳	۲

$B =$

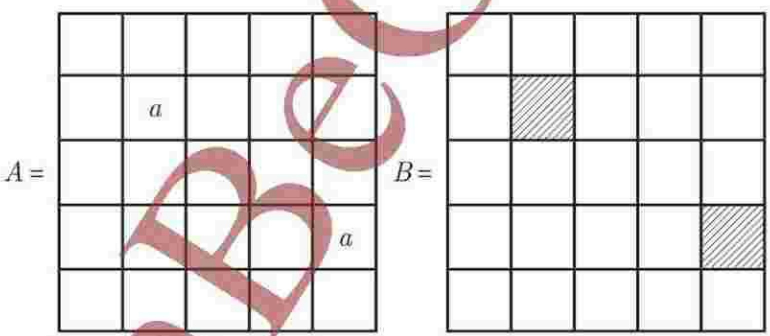
۲	۳	۴	۱
۴	۱	۲	۳
۱	۴	۳	۲
۳	۲	۱	۴

$\Rightarrow$

۲۲	۳۳	۴۴	۱۱
۳۴	۲۱	۱۲	۴۳
۴۱	۱۴	۲۳	۳۲
۱۳	۴۲	۳۱	۲۴

یک محک برای تشخیص متعامد بودن دو مربع لاتین بدین صورت است که برای متعامد بودن باید هر دو جایگاه (درایه) در یکی از مربع‌ها که اعداد یکسانی دارند، جایگاه‌های (درایه‌های) نظیر به آنها از مربع دیگر اعداد متمایزی داشته باشند. این محک معمولاً زمانی که می‌خواهیم نشان دهیم دو مربع لاتین متعامد نیستند به کار می‌رود. به این صورت که کافی است در یکی از دو مربع دو درایهٔ یکسان پیدا کنیم به‌طوری که در جایگاه‌های نظیر به این دو درایه در مربع دیگر نیز درایه‌های یکسان (یکسان با هم و نه لزوماً یکسان با درایه‌های مربع اوّل) وجود داشته باشد.

به طور مثال در شکل زیر اگر در مربع لاتینِ A دو عدد یکسان (مانند a در شکل) به گونه‌ای بیابیم که در جایگاه‌های متناظر با آنها در مربع لاتینِ B (جایگاه‌های هاشور خورده) نیز اعداد یکسانی باشند، مثلاً خانه‌های هاشور خورده هر دو حاوی عدد b باشند در این صورت دو مربع A و B متعامد نیستند.



مثال: در هر مورد متعامد بودن دو مربع لاتین داده شده را بررسی کنید.

۲	۱	۳
۱	۳	۲
۳	۲	۱

۳	۲	۱
۱	۳	۲
۲	۱	۳

(الف)

۳	۱	۲
۲	۳	۱
۱	۲	۳

۱	۲	۳
۳	۱	۲
۲	۳	۱

(ب)

۱	۲	۳	۴
۴	۱	۲	۳
۳	۴	۱	۲
۲	۳	۴	۱

۳	۲	۱	۴
۱	۴	۳	۲
۴	۱	۲	۳
۲	۳	۴	۱

(پ)

حل : الف) مربع حاصل از کنار هم قرار دادن درایه‌های دو مربع داده شده به صورت مقابل است و چون عدد دو رقمی تکراری در آن نیست لذا دو ماتریس داده شده متعامدند.

۳۲	۲۱	۱۳
۱۱	۳۳	۲۲
۲۳	۱۲	۳۱

ب) خیر، متعامد نیستند؛ زیرا مثلاً جایگاه سطر اول ستون اول و جایگاه سطر دوم ستون دوم در مربع اول درایه‌های یکسان (هر دو عدد یک هستند) دارند و دو مربع دوم نیز درایه‌های یکسان (هر دو عدد ۳ هستند) دارند.

۱		
	۱	

۳		
	۳	

پ) خیر، متعامد نیستند؛ زیرا مثلاً جایگاه سطر اول ستون دوم و جایگاه سطر چهارم ستون اول در مربع اول درایه‌های یکسان (هر دو عدد ۲ هستند) دارند و در مربع دوم نیز درایه‌های یکسان (هر عدد ۲ هستند) دارند.

	۲		
۲			

	۲		
۲			

کار در کلاس

۱ چند مربع لاتین ۱ × ۱ وجود دارد؟ یک مربع وجود دارد که به صورت روبروست :

۱

۲ آیا دو مربع لاتین ۲ × ۲ متعامد وجود دارد؟

خیر ، زیرا فقط دو مربع لاتین ۲×۲ وجود دارد (شکل روبرو)، که تلفیق آنها دارای عضو تکراری است .

۱	۲
۲	۱

و

۲	۱
۱	۲

تلفیق

۱۲	۲۱
۲۱	۱۲

۳ بررسی کنید که آیا دو مربع لاتین ۳ × ۳ روبه‌رو متعامدند؟

۱	۲	۳
۳	۱	۲
۲	۳	۱

۱	۲	۳
۲	۳	۱
۳	۱	۲

تلفیق

۱۱	۲۲	۳۳
۳۲	۱۳	۲۱
۲۳	۳۱	۱۲

بله ، زیرا در تلفیق آنها عضو تکراری وجود ندارد .

۴ آیا دو مربع لاتینِ ۴×۴ زیر متعامدند؟ بله زیرا در تلفیق آنها عضو تکراری وجود ندارد.

$A =$

۳	۴	۱	۲
۴	۳	۲	۱
۱	۲	۳	۴
۲	۱	۴	۳

$B =$

۳	۴	۱	۲
۱	۲	۳	۴
۲	۱	۴	۳
۴	۳	۲	۱

تلفیق

۳۳	۴۴	۱۱	۲۲
۴۱	۳۲	۲۳	۱۴
۱۲	۲۱	۳۴	۴۳
۲۴	۱۳	۴۲	۳۱

دیدیم که برای ۲ و ۱ $= n$، دو مربع لاتین متعامد $n \times n$ وجود ندارد. ثابت شده است[1] که اگر ۶ و ۲ و ۱ $\neq n$، دو مربع لاتین متعامد از مرتبهٔ n وجود دارد و برای ۶ و ۲ و ۱ $= n$ دو مربع لاتین متعامد از مرتبهٔ n وجود ندارد.

۵ با انجام یک جایگشت دلخواه برای اعضای B، مربع لاتین جدیدی به‌دست آورید و آن را B' بنامید. بررسی کنید که آیا A و B' متعامدند؟

$۱ \rightarrow ۲$
$۲ \rightarrow ۴$
$۳ \rightarrow ۳$
$۴ \rightarrow ۱$

$B' =$

۳	۱	۲	۴
۲	۴	۳	۱
۴	۲	۱	۳
۱	۳	۴	۲

تلفیق

۳۳	۴۱	۱۲	۲۴
۴۲	۳۴	۲۳	۱۱
۱۴	۲۲	۳۱	۴۳
۲۱	۱۳	۴۴	۳۲

بله متعامدند زیرا در تلفیق آنها عضو تکراری نداریم.

خواندنی

اویلر[2] در سال ۱۷۸۲ ادعا کرد که برای تمام اعداد طبیعی n به صورت $n = ۴k + ۲$، دو مربع لاتین متعامد از مرتبهٔ n وجود ندارد. در واقع اویلر پس از بررسی‌های زیاد بر روی وجود دو مربع لاتین متعامد از مرتبهٔ ۶ و به نتیجه نرسیدن در این باره، حدس فوق را مطرح نمود. این مسئله تا سال ۱۹۰۰ حل نشده باقی ماند تا در این سال یک افسر فرانسوی به نام تاری[3] ثابت کرد که ادعای اویلر برای ۶ $= n$ درست است. تا سال ۱۹۵۹ برای ۱۰ $= n$ و اعداد بزرگ‌تر کسی جواب را نمی‌دانست. در سال ۱۹۶۰ یک ریاضی‌دان آمریکایی به نام پارکر[4] و دو ریاضی‌دان هندی به نام‌های بوس[5] و شریخاند[6] ثابت کردند که حدس اویلر به جز برای حالت ۶ $= n$ برای سایر $n = ۴k + ۲$ درست نیست؛ یعنی برای هر عدد ۶ و ۲ و ۱ $\neq n$ حداقل دو مربع لاتین متعامد از مرتبهٔ n وجود دارد.

۱ــ اثبات این مطلب در این کتاب مد نظر نیست.

۲ــ Euler
۳ــ Tarry
۴ــ Parker
۵ــ Bose
۶ــ Shrikhande

فعالیت

می‌خواهیم نشان دهیم اگر دو مربع لاتین متعامد باشند، مربع لاتینی که با جایگشت بر روی اعضای یکی از آنها به‌دست می‌آید نیز با مربع لاتینِ دیگر متعامد است؛ به عبارتی اگر A و B دو مربع لاتین متعامد باشند و B_2 مربع لاتینِ حاصل از اِعمال یک جایگشت بر اعضای B باشد، آنگاه A و B_2 نیز متعامدند.

۱ فرض کنید A و B دو مربع لاتین متعامد باشند و B_1 نیز مربع لاتینِ حاصل از تعویض تمام اعداد ۱ و ۲ با هم، در B باشد. (یعنی در B به جای تمام ۱ها، ۲ و به جای تمام ۲ها، ۱ قرار دهیم و آن را B_1 بنامیم.) نشان دهید A و B_1 متعامدند. (**راهنمایی** : دو درایهٔ یکسان در A را در نظر بگیرید و نشان دهید که جایگاه‌های متناظر با آنها در B_2 نمی‌توانند اعداد یکسانی داشته باشند.)

دو درایهٔ یکسان در A را درنظر می گیریم ، اگر درایه های نظیر آنها در B_1 یکسان باشند ، آنگاه این درایه ها در B نیز یکسان خواهند بود ، که با متعامد بودن A و B تناقض دارد . پس A و B_1 متعامدند .

۲ فرض کنید A و B دو مربع لاتین متعامد باشند و B_2 مربع لاتینِ حاصل از اِعمال یک جایگشت بر اعضای B باشد. نشان دهید A و B_2 نیز متعامدند. (**راهنمایی** : دو درایهٔ یکسان در A در نظر بگیرید و با برهان خلف نشان دهید درایه‌های نظیر به آنها در B_2 نمی‌توانند اعداد یکسانی داشته باشند. برای این کار از برهان خلف و خاصیت جایگشت استفاده کنید.)

دو درایه یکسان در A را درنظر می گیریم ، اگر درایه های نظیر آنها در B_2 یکسان باشند ، آنگاه این درایه ها در B نیز یکسان خواهند بود ، که با متعامد بودن A و B تناقض دارد . پس A و B_2 متعامدند .

مثال : قرار است ۵ کارگر با ۵ نوع ماشین نخ‌ریسی و ۵ نوع الیاف در ۵ روز هفته کار کنند به گونه‌ای که هر کارگر با هر نوع ماشین و هر نوع الیاف دقیقاً یک‌بار کار کرده باشد و نیز هر الیاف در هر ماشین دقیقاً یک‌بار به‌کار گرفته شود. برای این مسئله برنامه‌ریزی کنید.

الف) ابتدا فرض کنید بخواهیم برای کارِ ۵ کارگر با ۵ ماشین ریسندگی در ۵ روز هفته به گونه‌ای برنامه‌ریزی کنیم که هر کارگر در هر روز با یک ماشین ریسندگی و در طول هفته با هر دستگاه دقیقاً یک‌بار کار کرده باشد.

برای حل این مسئله می‌توانیم از یک مربع لاتین 5×5 استفاده کنیم. فرض کنید هر **ستون** نشان‌دهندهٔ یک **کارگر** و هر **سطر** نشان‌دهندهٔ یک **روز هفته** و هر کدام از **اعدادِ** ۱ و ۲ و ... و ۵ که در مربع لاتین ظاهر شده‌اند نمایانگر یکی از **ماشین‌های ریسندگی** باشند. بنابراین مثلاً در روز دوشنبه کارگر W_1 با ماشین ریسندگی شماره ۲ کار می‌کند.

$A =$

	W_1	W_2	W_3	W_4	W_5
شنبه	۱	۴	۲	۵	۳
یکشنبه	۴	۲	۵	۳	۱
دوشنبه	۲	۵	۳	۱	۴
سه‌شنبه	۵	۳	۱	۴	۲
چهارشنبه	۳	۱	۴	۲	۵

ب) حال فرض کنید که در مسئله مطرح شده در قسمت (الف) ۵ نوع الیاف مختلف هم وجود داشته باشد و بخواهیم به گونه‌ای برنامه‌ریزی کنیم که هر کارگر از هر نوع الیاف هم دقیقاً یک‌بار استفاده کند.

برای این کار مانند قسمت (الف) یک مربع لاتین می‌کشیم و هر **ستون** را نشان‌دهندهٔ یک **کارگر** و هر **سطر** را نشان‌دهندهٔ یک **روز هفته** و هر کدام از **اعداد** ۱ و ۲ و ... و ۵ را که در مربع لاتین ظاهر شده‌اند

$B =$

	W_1	W_2	W_3	W_4	W_5
شنبه	۳	۱	۴	۲	۵
یکشنبه	۵	۳	۱	۴	۲
دوشنبه	۲	۵	۳	۱	۴
سه‌شنبه	۴	۲	۵	۳	۱
چهارشنبه	۱	۴	۲	۵	۳

نمایانگر یکی از انواع **الیاف** در نظر می‌گیریم. با توجه به مربع لاتین، مثلاً در روز سه‌شنبه کارگر شمارهٔ ۴ با الیاف شمارهٔ ۳ کار می‌کند.

پ) حال اگر درایه‌های نظیر از دو مربع A و B را در کنار هم در یک مربع جدید قرار دهیم یک مربع 5×5 به شکل زیر خواهیم داشت و می‌توانیم تمام اطلاعات فوق را از همین مربع استخراج کنیم. به‌طور مثال کارگر شمارهٔ ۴ در روز یکشنبه با ماشین شمارهٔ ۳ و الیاف شمارهٔ ۴ کار می‌کند. تا اینجا برنامه‌ریزی ما با استفاده از دو مربع لاتین انجام شده است، اما دو مربع لاتین A و B متعامد هم هستند و این ویژگی آنها تا اینجا به کار نیامده است. می‌دانیم که متعامد بودن دو مربع A و B به این معناست که مربع دو رنگ حاصل، در هیچ خانه‌ای عدد دو رقمی تکراری ندارد. از آنجا که اعداد سمت چپ شمارهٔ ماشین ریسندگی و اعداد سمت راست شمارهٔ الیاف مورد استفاده هستند لذا در صورتی که دو مربع استفاده شده متعامد باشند هر الیاف در هر ماشین دقیقاً یک‌بار به کار رفته است.

	W_1	W_2	W_3	W_4	W_5
شنبه	۱۳	۴۱	۲۴	۵۲	۳۵
یکشنبه	۴۵	۲۳	۵۱	۳۴	۱۲
دوشنبه	۲۲	۵۵	۳۳	۱۱	۴۴
سه‌شنبه	۵۴	۳۲	۱۵	۴۳	۲۱
چهارشنبه	۳۱	۱۴	۴۲	۲۵	۵۳

کار در کلاس

۱ در قسمت (الف) از مثال قبل، چرا می‌توان مطمئن بود که هر کارگر در طول هفته با هر دستگاه دقیقاً یک‌بار کار کرده است؟
چون مربع نوشته شده ، مربع لاتین است و هر عدد نشان دهنده یک ماشین می باشد .

۲ در قسمت (ب) از مثال قبل، چرا می‌توان مطمئن بود که هر کارگر با هر یک از الیاف‌ها دقیقاً یک‌بار کار می‌کند.
چون مربع مربوطه ، مربع لاتین است و هر عدد نمایشگر یک نوع الیاف است .

۳ در قسمت (پ) از مثال قبل، چرا می‌توان مطمئن بود که هر یک از الیاف‌ها در هر یک از ماشین‌های ریسندگی دقیقاً یک‌بار به کار گرفته شده است؟ چون A و B متعامدند .

۴ اگر سه برادرِ تقریباً هم‌سن‌وسال در خانه سه کت و سه پیراهن داشته باشند و بخواهند در سه روز اوّل هفته از این لباس‌ها به‌گونه‌ای استفاده کنند که هر فرد هر یک از کت‌ها و هر یک از پیراهن‌ها را دقیقاً یک‌بار استفاده کرده باشد و هر کت با هر پیراهن نیز دقیقاً یک‌بار مورد استفاده قرار بگیرد، چگونه می‌توانند این کار را انجام دهند؟

	b_1	b_2	b_3
شنبه	۱	۲	۳
یکشنبه	۲	۳	۱
دوشنبه	۳	۱	۲

ابتدا برای استفاده سه برادر از ۳ کُت در سه روز هفته به گونه ای برنامه ریزی می کنیم که هر کدام در هر روز یک کُت بپوشد . لذا مربع لاتین روبرو را چنان رسم کرده که هر سطر نشان دهنده یکی از سه روز هفته و هر ستون نشان دهنده یکی از برادران باشد و هر کدام از اعداد ۱و۲و۳ در آن مربع ، نمایانگر یکی از کُت ها باشد .

	b_1	b_2	b_3
شنبه	۱	۲	۳
یکشنبه	۳	۱	۲
دوشنبه	۲	۳	۱

به همین ترتیب یک مربع لاتین دیگر که هر سطر نشان دهنده ی یکی از روزهای هفته و هر ستون نشان دهنده یکی از برادران است و هر کدام از اعداد ۱و۲و۳ در آن مربع ، نمایانگر یکی از پیراهن ها باشد ، رسم می کنیم . به طوری که با مربع قبلی متعامد باشد . (شکل روبرو)

تلفیق دو مربع بالا

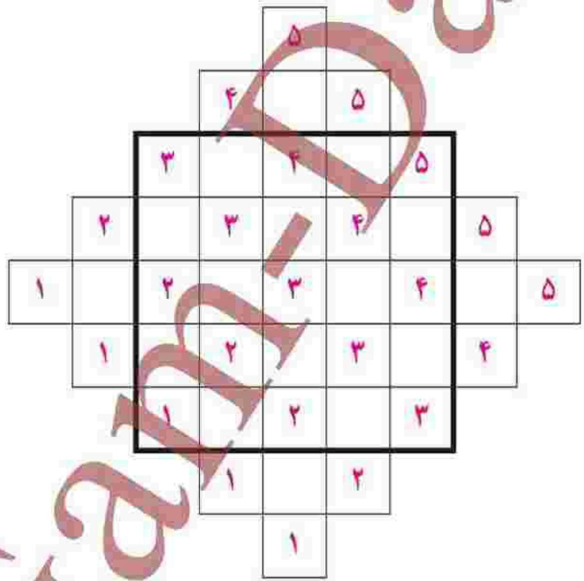
	b_1	b_2	b_3
شنبه	۱۱	۲۲	۳۳
یکشنبه	۲۳	۳۱	۱۲
دوشنبه	۳۲	۱۳	۲۱

تلفیق دو مربع(شکل روبرو) که متعامد می باشد ، برنامه مورد نظر را در اختیار ما قرار می دهد .
به طور مثال در روز شنبه برادر اول باید کُت۱ و پیراهن ۱ را بپوشد و در روز یکشنبه کُت ۲ و پیراهن ۳ را بپوشد و . . .

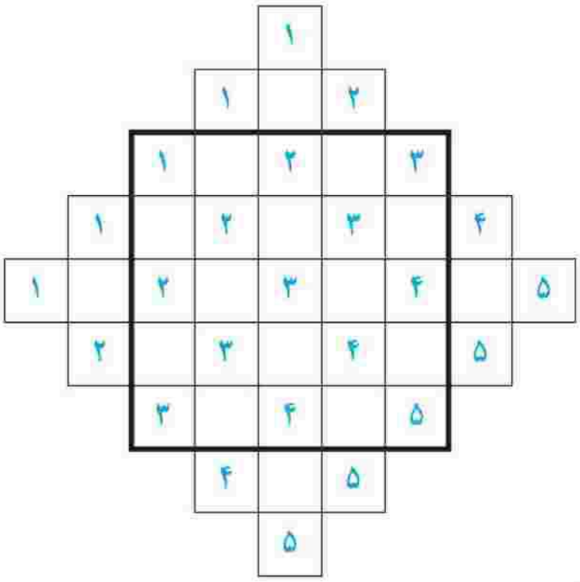
یک روش برای ساختن دو مربع لاتین متعامد از مرتبهٔ یک عدد فرد[1]

با انجام مراحل زیر می‌توانید دو مربع لاتین ۵ × ۵ متعامد به‌دست آورید.

۱ اعداد ۱، ۲، . . . و ۵ با نظمی خاص (به نحوهٔ چینش اعداد دقت کنید) در دو شکل (الف) و (ب) چیده شده‌اند.

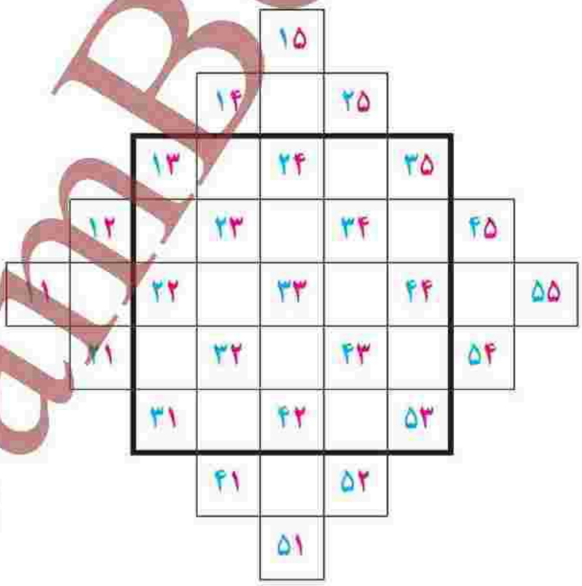


الف)



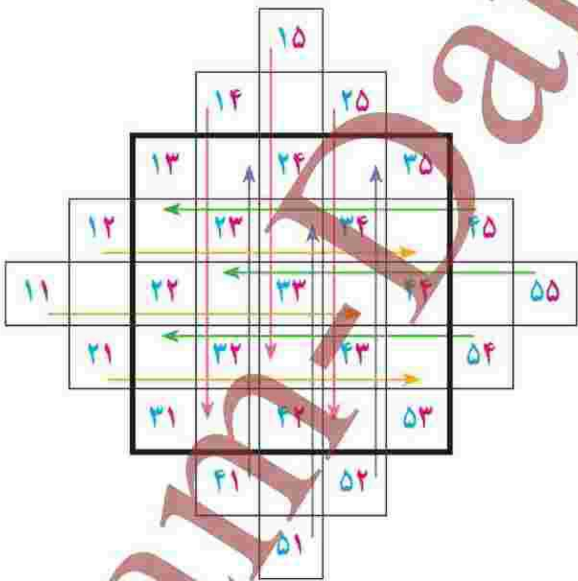
ب)

۲ از کنار هم قرار دادن اعداد متناظر از شکل‌های (الف) و (ب) شکل زیر به‌دست می‌آید که در آن عدد دورقمی تکراری وجود ندارد.



۱ــ از آنجا که روش ساختن دو مربع لاتین متعامد از مرتبهٔ غیرفرد چندان ساده نیست، لذا در این کتاب به آن پرداخته نمی‌شود.

۳ حال مربع پررنگِ ۵ × ۵ وسط، در شکل مرحلهٔ ۲ را در نظر بگیرید (شکل زیر) و با انتقال اعداد خارج از این مربع به داخل آن با روش زیر مربع مقابل را پر کنید.



۱۳	۴۱	۲۴	۵۲	۳۵
۴۵	۲۳	۵۱	۳۴	۱۲
۲۲	۵۵	۳۳	۱۱	۴۴
۵۴	۳۲	۱۵	۴۳	۲۱
۳۱	۱۴	۴۲	۲۵	۵۳

الف) در هر کدام از مربع‌های سمت چپ، ۵ خانه به سمت راست انتقال دهید.

ب) در هر کدام از مربع‌های سمت راست، ۵ خانه به سمت چپ انتقال دهید.

پ) در هر کدام از مربع‌های بالا، ۵ خانه به پایین انتقال دهید.

ت) در هر کدام از مربع‌های پایین، ۵ خانه به بالا انتقال دهید.

۴ حال دو مربع ۵ × ۵ بکشید و در یکی از آنها اعداد سمت چپ در مربع مرحلهٔ قبل و در دیگری اعداد سمتِ راست را قرار دهید. دو مربع لاتین حاصل متعامد خواهند بود.

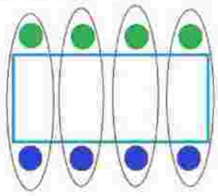
۳	۱	۴	۲	۵
۵	۳	۱	۴	۲
۲	۵	۳	۱	۴
۴	۲	۵	۳	۱
۱	۴	۲	۵	۳

۱	۴	۲	۵	۳
۴	۲	۵	۳	۱
۲	۵	۳	۱	۴
۵	۳	۱	۴	۲
۳	۱	۴	۲	۵

۵ با روشی کاملاً مشابه آنچه دیدید برای هر n فرد می‌توانید دو مربع لاتین متعامد از مرتبهٔ n به‌دست آورید.

تمرین

۱ می‌خواهیم ۸ نفر را که دوبه‌دو برادر یکدیگرند در دو طرفِ طولِ یک میز مستطیل شکل بنشانیم. اگر بخواهیم هر نفر روبه‌روی برادرش بنشیند، به چند طریق می‌توان این کار را انجام داد؟



مسئله را به این صورت بیان می کنیم که :

مطابق شکل دور یک میز ۴ جفت صندلی روبروی هم داریم که می خواهیم ۴ جفت برادر را روی آنها بنشانیم . طبق اصل شمارش این عمل به !۴ حالت امکان پذیر است .

از طرفی برای هر جفت صندلی که دو برادر می خواهند روی آن بنشینند ۲ حالت داریم(کدام برادر روی صندلی آبی و کدام روی صندلی سبز بنشیند) و با وجود ۴ صندلی طبق اصل شمارش باید !۴ در $۲^۴$ ضرب شود . بنابراین جواب مسئله $۲^۴ \times !۴$ است .

۲ اگر داشته باشیم $A=\{۱,۲,۳,۴\}$ و $B=\{۵,۶,۷,۸,۹\}$، در این‌صورت چند رمز یا کد ۵ رقمی می‌توان نوشت که هر یک شامل دو رقم متمایز از A و سه رقم متمایز از B باشد؟

تعداد حالات انتخاب ۲ رقم از ۴ رقم مجموعه یAبرابر است با : $\binom{۴}{۲}$

تعداد حالات انتخاب ۳ رقم از ۵ رقم مجموعه یBبرابر است با : $\binom{۵}{۳}$

از طرفی تعداد حالات چینش ۵ رقم به صورت یک کد ۵ رقمی برابر !۵ می باشد ،لذا طبق اصل ضرب جواب مسئله $!۵ \times \binom{۵}{۳} \times \binom{۴}{۲}$ است .

۳ ۴ کتاب فیزیک متفاوت و ۵ کتاب ریاضی متفاوت را می‌توانیم به چند طریق در قفسه‌ای و در یک ردیف بچینیم. به نظر شما، این عمل به چند روش امکان‌پذیر است؟ اگر:

الف) هیچ محدودیتی نباشد؛ چیدن ۹ کتاب بدون هیچ محدودیت به !۹ طریق امکان پذیر است .

ب) همواره کتاب‌های فیزیک کنار هم باشند؛

۴ کتاب فیزیک را به عنوان یک پک کتاب که به همراه ۵ کتاب ریاضی ، ۶ شیء محسوب می شود و تعداد جایگشت آنها !۶ خواهد بود .

از طرفی ۴ کتاب فیزیک به تعداد !۴ طریق با هم امکان جابجایی دارند ، لذا طبق اصل ضرب ، جواب مسئله $!۶ \times !۴$ است .

پ) هیچ دو کتاب ریاضی کنار هم نباشند؛

باید کتاب ها بنا به موضوع یکی در میان چیده شوند : $RFRFRFRFR$

لذا برای ریاضی ها !۵ و برای فیزیک ها !۴ حالت داریم و طبق اصل ضرب در کل $!۵ \times !۴$ روش امکان پذیر است .

ت) یک کتاب ریاضیِ خاص و دو کتاب فیزیک خاص همواره کنار هم باشند.

کتاب های خاص را به عنوان یک پک ۳ تایی که به !۳ طریق کنار هم قرار می گیرند در نظر می گیریم.

از طرفی یک پک به همراه ۶ کتاب باقی مانده به !۷ طریق می توان کنار هم چید .

در نتیجه بنا به اصل ضرب به $!۳ \times !۷$ روش امکان پذیر است .

۴ برای کنار هم قرار گرفتن ۴ دانش‌آموز پایهٔ دوازدهم و ۶ دانش‌آموز پایهٔ یازدهم مسئله‌ای طرح کنید که پاسخ آن $!۷\times!۴$ باشد.

۴ دانش آموز پایه دوازدهم و ۶ دانش آموز پایه یازدهم به چند طریق می توانند در یک صف کنار هم قرار گیرند ، به طوری که همواره دانش آموزان پایه دوازدهم پهلوی هم باشند ؟

۵ با ارقام ۵، ۶، ۷، ۷، ۵ و ۷ چه تعداد کد ۶ رقمی می‌توان نوشت؟ $\frac{!۶}{!۲ \times !۳}$

۶ می‌خواهیم روی تعدادی جعبهٔ حاوی اجناس تولید شدهٔ خاصی را کدگذاری و هر جعبه را با یک کد، شامل ۹ حرفِ a,a,b,a,c,c,d,d,d، از بقیه مجزا کنیم. حداکثر چند جعبه را می‌توانیم با این کدها از بقیه مجزا کنیم؟ $\frac{!۹}{!۳ \times !۲ \times !۳}$

۷ ۷ نفر به چند طریق می‌توانند در دو اتاق دونفره و یک اتاق سه نفره قرار بگیرند؟ $\frac{7!}{3!\times 2!\times 2!}$

۸ به چند طریق می‌توان از بین ۵ نوع گل ۱۱ شاخه گل انتخاب کرد اگر بخواهیم :

الف) به دلخواه انتخاب کنیم؛ x_i را به عنوان گل نوع i اُم معرفی می کنیم در نتیجه جواب مسئله ، همان تعداد جواب های صحیح نامنفی معادله $x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=11$ است . بنابراین پاسخ آن $\binom{15}{4}=\binom{11+5-1}{5-1}$ است .

ب) از هر نوع گل حداقل ۱ شاخه انتخاب کنیم؛

تعداد جواب های صحیح مثبت معادله قسمت قبل، جواب مسئله می باشد یعنی : $\binom{10}{4}=\binom{11-1}{5-1}$

پ) از گل نوع دوم حداقل دو شاخه و از گل نوع پنجم بیش از سه شاخه انتخاب کنیم؛

یعنی در معادله $x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=11$ شرایط $x_2\geq 2$ و $x_5>3$ به همراه صحیح و نامنفی بودن دیگر متغیر های آن برقرار است .

$$x_2\geq 2 \Rightarrow \underbrace{x_2-2}_{y_2}\geq 0 \Rightarrow \boxed{x_2=y_2+2}$$

$$x_5>3 \Rightarrow x_5\geq 4 \Rightarrow \underbrace{x_5-4}_{y_5}\geq 0 \Rightarrow \boxed{x_5=y_5+4}$$

$$\Rightarrow x_1+y_2+2+x_3+x_4+y_5+4=11$$

$$\Rightarrow x_1+y_2+x_3+x_4+y_5=5 \Rightarrow \binom{5+5-1}{5-1}=\binom{9}{4}$$

ت) از گل نوع سوم انتخاب نکرده و از گل نوع چهارم حداقل ۵ شاخه انتخاب کنیم.

یعنی در معادله $x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=11$ شرایط $x_3=0$ و $x_4\geq 5$ به همراه صحیح و نامنفی بودن دیگر متغیر های آن برقرار است .

$$x_4\geq 5 \Rightarrow \underbrace{x_4-5}_{y_4}\geq 0 \Rightarrow \boxed{x_4=y_4+5} \xrightarrow{x_3=0} x_1+x_2+0+y_4+5+x_5=11$$

$$\Rightarrow x_1+x_2+y_4+x_5=6 \Rightarrow \binom{6+4-1}{4-1}=\binom{9}{3}$$

۹ مطلوب است تعداد جواب‌های صحیح و نامنفی هریک از معادلات زیر با شرط‌های داده شده :

الف) $x_1+x_2+\cdots+x_5=10 \qquad x_i>0\ ,\ 2\leq i\leq 5$

$$\xrightarrow{2\leq i\leq 5} x_i>0 \Rightarrow x_i\geq 1 \Rightarrow \underbrace{x_i-1}_{y_i}\geq 0 \Rightarrow \boxed{x_i=y_i+1} \Rightarrow x_1+y_2+1+y_3+1+y_4+1+y_5+1=10$$

$$\Rightarrow x_1+y_2+y_3+y_4+y_5=6 \Rightarrow \binom{6+5-1}{5-1}=\binom{10}{4}$$

ب) $x_1+x_2+\cdots+x_6=12 \qquad x_1>2\ ,\ x_5\geq 4$

$$x_1>2 \Rightarrow x_1\geq 3 \Rightarrow \underbrace{x_1-3}_{y_1}\geq 0 \Rightarrow \boxed{x_1=y_1+3}$$

$$x_5\geq 4 \Rightarrow \underbrace{x_5-4}_{y_5}\geq 0 \Rightarrow \boxed{x_5=y_5+4}$$

$$\Rightarrow y_1+3+x_2+x_3+x_4+y_5+4+x_6=12$$

$$\Rightarrow y_1+x_2+x_3+x_4+y_5+x_6=5 \Rightarrow \binom{5+6-1}{6-1}=\binom{10}{5}$$

پ) $x_1+x_2+\cdots+x_5=11 \qquad x_i\geq 1\ ,\ 1\leq i\leq 5$

طبق شرط مسئله ، باید تعداد جواب های صحیح و مثبت(طبیعی) را محاسبه کنیم که برابر است با : $\binom{11-1}{5-1}=\binom{10}{4}$

ت) $x_1+3x_2+x_3+x_4=7 \qquad x_i\geq 0\ ,1\leq i\leq 4$

بدیهی است که با توجه به ضریب x_2، برای آن ۳ حالت می توان در نظر گرفت :

حالت اول : $x_2=0 \Rightarrow x_1+x_3+x_4=7 \Rightarrow$ تعداد جواب های صحیح نامنفی $=\binom{7+3-1}{3-1}=\binom{9}{2}=36$

حالت دوم : $x_2=1 \Rightarrow x_1+x_3+x_4=4 \Rightarrow$ تعداد جواب های صحیح نامنفی $=\binom{4+3-1}{3-1}=\binom{6}{2}=15$

حالت سوم : $x_2=2 \Rightarrow x_1+x_3+x_4=1 \Rightarrow$ تعداد جواب های صحیح نامنفی $=\binom{1+3-1}{3-1}=\binom{3}{2}=3$

$$36+15+3=54$$

ث) $x_1+\sqrt{x_2}+x_3+x_4=3 \qquad x_i\geq 0\ ,1\leq i\leq 4$

با توجه به شرایط معادله، چهار حالت برای x_2 وجود دارد :

حالت اول : $x_2=0 \Rightarrow x_1+x_3+x_4=3 \Rightarrow$ تعداد جواب های صحیح نامنفی $=\binom{3+3-1}{3-1}=\binom{5}{2}=10$

حالت دوم : $x_2=1 \Rightarrow x_1+x_3+x_4=2 \Rightarrow$ تعداد جواب های صحیح نامنفی $=\binom{2+3-1}{3-1}=\binom{4}{2}=6$

حالت سوم : $x_2=4 \Rightarrow x_1+x_3+x_4=1 \Rightarrow$ تعداد جواب های صحیح نامنفی $=\binom{1+3-1}{3-1}=\binom{3}{2}=3$

حالت چهارم : $x_2=9 \Rightarrow x_1+x_3+x_4=0 \Rightarrow$ تعداد جواب های صحیح نامنفی $=\binom{0+3-1}{3-1}=\binom{2}{2}=1$

بنابراین تعداد جواب های صحیح نامنفی معادله برابر است با : $10+6+3+1=20$

۱۰ به چند طریق می‌توان ۵ توپ یکسان را بین ۳ نفر و به دلخواه توزیع کرد؟

$$x_۱ + x_۲ + x_۳ = ۵ \xrightarrow{x_i \geq ۰} \text{تعداد جواب های صحیح نامنفی} = \binom{۵+۳-۱}{۳-۱} = \binom{۷}{۲} = ۲۱$$

به ۲۱ طریق می توان ۵ توپ یکسان را بین ۳ نفر توزیع کرد .

۱۱ به چند طریق می‌توان ۸ توپ یکسان را بین ۴ نفر توزیع کرد هرگاه بخواهیم هر نفر حداقل یک توپ داشته باشد؟

$$x_۱ + x_۲ + x_۳ + x_۴ = ۸ \xrightarrow{x_i \geq ۱} \text{تعداد جواب های صحیح و مثبت (طبیعی)} = \binom{۸-۱}{۴-۱} = \binom{۷}{۳} = ۳۵$$

به ۳۵ طریق می توان ۸ توپ یکسان را بین ۴ نفر چنان توزیع کرد که به هر نفر حداقل یک توپ تعلق گیرد.

۱۲ آیا مربع لاتینِ حاصل از اِعمال یک جایگشت روی اعضای یک مربع لاتین دلخواه می‌تواند با مربع اولیه متعامد باشد؟

خیر امکان ندارد متعامد باشند زیرا اگر مثلاً در جایگشت، $۱ \longrightarrow a$ باشد ، آنگاه در مقابل تمام ۱ های مربع اول ، عدد a در مربع دوم ظاهر می شود که در مربع تلفیق زوج $۱a$ تکراری خواهد بود .

برای درک بهتر به مربع روبرو همراه با جایگشت آن دقت کنید :

۱	۲	۳
۲	۳	۱
۳	۱	۲

$۱ \to a$
$۲ \to ?$
$۳ \to ?$

a	?	?
?	?	a
?	a	?

۱۳ مربع لاتین ۳ × ۳ مقابل را در نظر بگیرید.

$A =$

۳	۱	۲
۱	۲	۳
۲	۳	۱

الف) سطر دوم و سومِ مربع A را جابه‌جا کنید و مربع حاصل را $A_۱$ بنامید. آیا A و $A_۱$ متعامدند؟

$A_۱ =$

۳	۱	۲
۲	۳	۱
۱	۲	۳

تلفیق

۳۳	۱۱	۲۲
۱۲	۲۳	۳۱
۲۱	۳۲	۱۳

متعامدند .

ب) ابتدا سطرِ اول و سطرِ سوم مربع A را جابه‌جا کنید. سپس در مربع حاصل، سطر دوم و سوم را جابه‌جا کنید و مربع حاصل را $A_۲$ بنامید. آیا A و $A_۲$ متعامدند؟

$A_۲ =$

۲	۳	۱
۳	۱	۲
۱	۲	۳

و $A =$

۳	۱	۲
۱	۲	۳
۲	۳	۱

متعامد نیستند زیرا مطابق شکل روبرو ، برای دو عدد یکسان ۱ ، دو عدد یکسان ۲ نظیر شده است .

پ) با توجه به قسمت‌های (الف) و (ب) به سؤالات زیر جواب دهید.

۱ــ آیا می‌توان گفت با تعویض جای سطرهای یک مربع لاتین، همواره مربع لاتینی متعامد با مربع لاتین اول به دست می‌آید؟

خیر ، به طور قطع نمی توان گفت ، ممکن است متعامد باشند یا نباشند .

۲ــ آیا می‌توان گفت با تعویض جای سطرهای یک مربع لاتین، همواره مربع لاتینی غیرمتعامد با مربع لاتین اول به دست می‌آید؟

خیر ، در بعضی مواقع ممکن است .

۱۴ قرار است شش مدرس T_1، T_2 و ... و T_6 در شش جلسهٔ متوالی در شش کلاسِ C_1، C_2 و ... و C_6 به گونه‌ای تدریس کنند که هر مدرس در هر کلاس دقیقاً یک جلسه تدریس کند. برای این منظور برنامه‌ریزی نمایید.

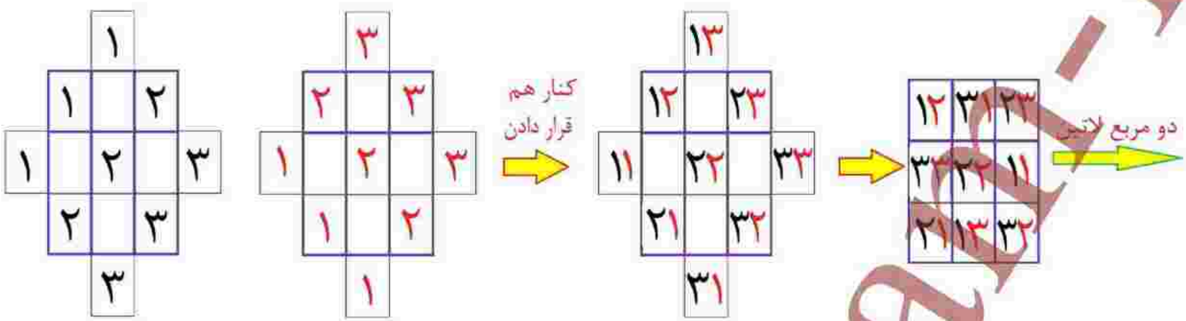
	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5	C_6
جلسه اول	T_1	T_2	T_3	T_4	T_5	T_6
جلسه دوم	T_6	T_1	T_2	T_3	T_4	T_5
جلسه سوم	T_5	T_6	T_1	T_2	T_3	T_4
جلسه چهارم	T_4	T_5	T_6	T_1	T_2	T_3
جلسه پنجم	T_3	T_4	T_5	T_6	T_1	T_2
جلسه ششم	T_2	T_3	T_4	T_5	T_6	T_1

یک مربع لاتین 6×6 که هر سطر آن یکی از جلسات و هر ستون آن یکی از کلاس ها را مشخص می کند.

به عنوان نمونه معلم T_1 جلسه اول را در کلاس C_1 است.

و معلم T_6 جلسه چهارم را در کلاس C_3 است.

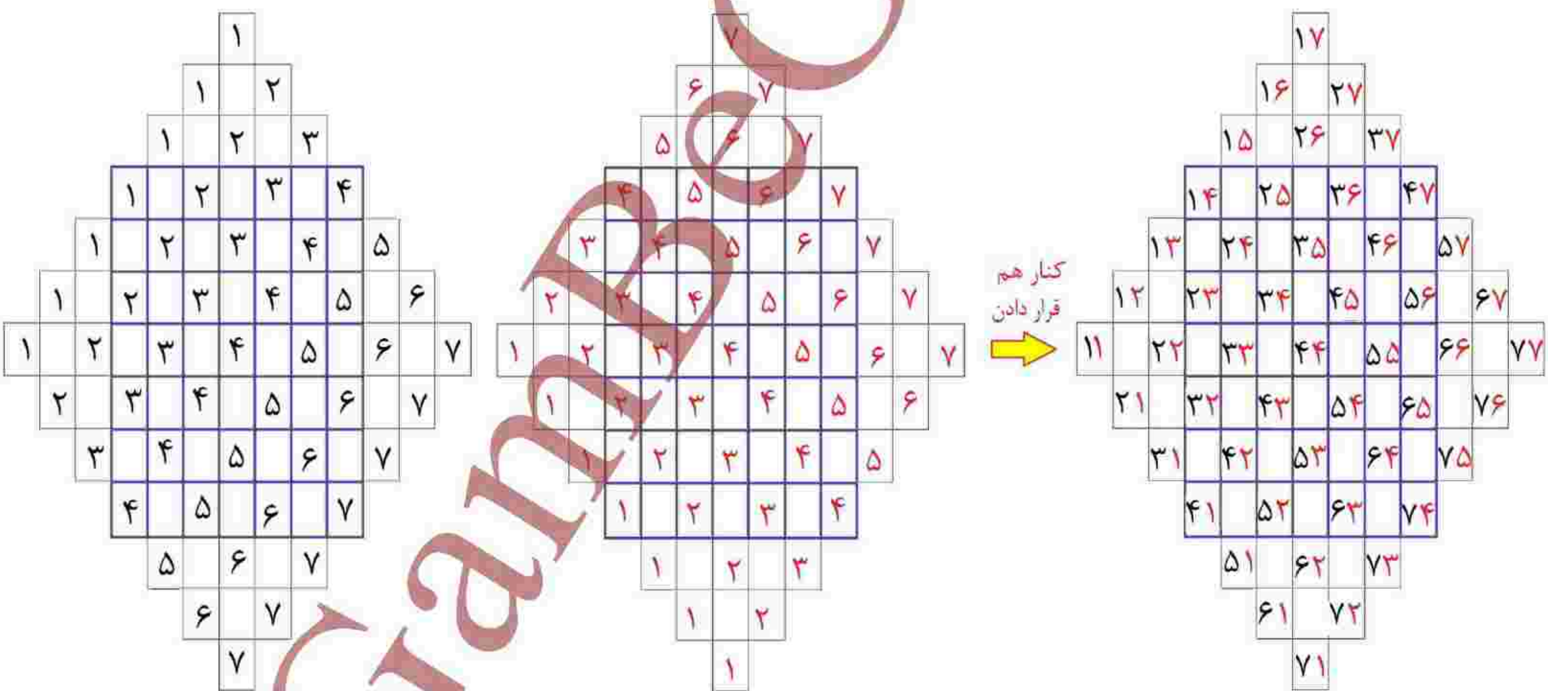
۱۵ دو مربع لاتین متعامد از مرتبهٔ ۳ و دو مربع لاتین متعامد از مرتبهٔ ۷ بنویسید.



۲	۱	۳
۳	۲	۱
۱	۳	۲

و

۱	۳	۲
۳	۲	۱
۲	۱	۳



۱۴	۵۱	۲۵	۶۲	۳۶	۷۳	۴۷
۵۷	۲۴	۶۱	۳۵	۷۲	۴۶	۱۳
۲۳	۶۷	۳۴	۷۱	۴۵	۱۲	۵۶
۶۶	۳۳	۷۷	۴۴	۱۱	۵۵	۲۲
۳۲	۷۶	۴۳	۱۷	۵۴	۲۱	۶۵
۷۵	۴۲	۱۶	۵۳	۲۷	۶۴	۳۱
۴۱	۱۵	۵۲	۲۶	۶۳	۳۷	۷۴

دو مربع لاتین

۱	۵	۲	۶	۳	۷	۴
۵	۲	۶	۳	۷	۴	۱
۲	۶	۳	۷	۴	۱	۵
۶	۳	۷	۴	۱	۵	۲
۳	۷	۴	۱	۵	۲	۶
۷	۴	۱	۵	۲	۶	۳
۴	۱	۵	۲	۶	۳	۷

و

۴	۱	۵	۲	۶	۳	۷
۷	۴	۱	۵	۲	۶	۳
۳	۷	۴	۱	۵	۲	۶
۶	۳	۷	۴	۱	۵	۲
۲	۶	۳	۷	۴	۱	۵
۵	۲	۶	۳	۷	۴	۱
۱	۵	۲	۶	۳	۷	۴

۱۶ در یک مسابقهٔ اتومبیل‌رانی قرار است ۷ راننده در هفت روزِ هفته با هفت ماشین مختلف در هفت مسیر مختلف مسابقه دهند به‌طوری که شرایط زیر برقرار باشد :

الف) هر راننده هر روز با یک ماشین در یک مسیر رانندگی کند؛

ب) هر راننده با هر ماشین دقیقاً یک روز رانندگی کند؛

پ) هر راننده هر روز دقیقاً در یک مسیر رانندگی کند؛

ت) هر ماشین در هر مسیر دقیقاً یک‌بار به کار گرفته شود.

ــ برای این منظور یک برنامه‌ریزی انجام دهید.

کافیست دو مربع لاتین ۷×۷ بنویسیم ، به طوری که سطر های آنها ، روز های هفته و ستون های آنها راننده ها نام گذاری شوند .

((برای سهولت در نوشتن ، راننده ها را a,b,c,d,e,f,g نام گذاری می کنیم .))

اگر آن دو مربع را A و B بنامیم ، اعداد درون مربع های A شماره ماشین و اعداد درون مربع های B شماره مسیر را مشخص می کنند .

لذا مربع حاصل از کنار هم قرار دادن درایه های آنها ، جواب مسئله است .

برای این منظور از مربع های بدست آمده در سوال ۱۵ استفاده می کنیم :

$A=$

	a	b	c	d	e	f	g
شنبه	۱	۵	۲	۶	۳	۷	۴
یکشنبه	۵	۲	۶	۳	۷	۴	۱
دوشنبه	۲	۶	۳	۷	۴	۱	۵
سه شنبه	۶	۳	۷	۴	۱	۵	۲
چهارشنبه	۳	۷	۴	۱	۵	۲	۶
پنجشنبه	۷	۴	۱	۵	۲	۶	۳
جمعه	۴	۱	۵	۲	۶	۳	۷

و

$B=$

	a	b	c	d	e	f	g
شنبه	۴	۱	۵	۲	۶	۳	۷
یکشنبه	۷	۴	۱	۵	۲	۶	۳
دوشنبه	۳	۷	۴	۱	۵	۲	۶
سه شنبه	۶	۳	۷	۴	۱	۵	۲
چهارشنبه	۲	۶	۳	۷	۴	۱	۵
پنجشنبه	۵	۲	۶	۳	۷	۴	۱
جمعه	۱	۵	۲	۶	۳	۷	۴

تلفیق

	a	b	c	d	e	f	g
شنبه	۱۴	۵۱	۲۵	۶۲	۳۶	۷۳	۴۷
یکشنبه	۵۷	۲۴	۶۱	۳۵	۷۲	۴۶	۱۳
دوشنبه	۲۳	۶۷	۳۴	۷۱	۴۵	۱۲	۵۶
سه شنبه	۶۶	۳۳	۷۷	۴۴	۱۱	۵۵	۲۲
چهارشنبه	۳۲	۷۶	۴۳	۱۷	۵۴	۲۱	۶۵
پنجشنبه	۷۵	۴۲	۱۶	۵۳	۲۷	۶۴	۳۱
جمعه	۴۱	۱۵	۵۲	۲۶	۶۳	۳۷	۷۴

به عنوان نمونه راننده a روز شنبه با ماشین شماره ۱ در مسیر شماره ۴ خواهد بود .

اصل شمول و عدم شمول

واضح است که برای محاسبهٔ تعداد اعضای $(A\cup B)$ یعنی $|A\cup B|$ چون اعضای $(A\cap B)$ هم در A و هم در B هستند، اگر اعضای A و B را روی هم حساب کنیم اعضای $(A\cap B)$ دو بار محاسبه شده‌اند و می‌بایست یک‌بار از این مجموع کم شود و لذا خواهیم داشت :

$$|A\cup B|=|A|+|B|-|A\cap B|$$

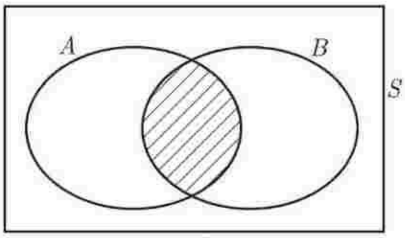
این تساوی به **اصل شمول** و **عدم شمول** برای دو مجموعه معروف است. (برای اختصار آن را **اصل شمول** می‌نامیم).

با توجه به تعریف متمم اگر S مجموعهٔ مرجع A و B باشد، داریم :

$$|(A\cup B)'|=|\overline{A\cup B}|=|S|-|A\cup B|$$

این تساوی نتیجهٔ اصل شمول است.

نتیجهٔ مهم : اگر S مجموعه‌ای متناهی و A و B زیرمجموعه‌های S باشند، در این صورت تعداد اعضایی از S که در هیچ یک از مجموعه‌های A و B قرار ندارند. برابر است با :



شکل ۱

$$|S|-|A\cup B|=|S|-|A|-|B|+|A\cap B|$$

مثال : در یک کلاس ۲۵ نفری ۱۵ نفر فوتبال و ۱۴ نفر والیبال بازی می‌کنند. مشخص کنید چند نفر نه فوتبال بازی می‌کنند و نه والیبال، به شرط آنکه بدانیم ۹ نفر هم فوتبال و هم والیبال بازی می‌کنند.

حل : ابتدا با استفاده از اصل شمول تعداد افرادی را که حداقل در یکی از دو رشتهٔ ورزشی بازی می‌کنند مشخص می‌کنیم و سپس با استفاده از نتیجهٔ اصل شمول تعداد افرادی را که در هیچ رشته ورزشی شرکت ندارند به‌دست می‌آوریم.

اگر مجموعهٔ افرادی را که فوتبال و والیبال بازی می‌کنند به‌ترتیب F و V بنامیم در این‌صورت خواهیم داشت:

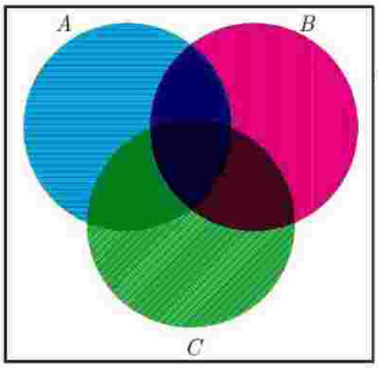
$$|F\cup V|=|F|+|V|-|F\cap V| \Rightarrow |F\cup V|=۱۵+۱۴-۹=۲۰$$

$\Rightarrow$ تعداد افرادی که نه در F و نه در V هستند $=|\overline{F\cup V}|=|S|-|F\cup V|=۲۵-۲۰=۵$

اصل شمول را می‌توان برای بیش از دو مجموعه هم تعمیم داده و بیان کرد که ما در این کتاب برای حداکثر سه مجموعه آن را بیان و مسائلی را با استفاده از این اصل طرح و حل خواهیم کرد.

اصل شمول برای سه مجموعه: اگر A، B و C زیرمجموعه‌هایی از مجموعهٔ مرجع S باشند، در این‌صورت همواره تساوی زیر (اصل شمول) برقرار است:

$$|A\cup B\cup C|=|A|+|B|+|C|-|A\cap B|-|A\cap C|-|B\cap C|+|A\cap B\cap C|$$



شکل ۲

(توضیح دهید چرا اشتراک‌های دوتایی کم و اشتراک سه تایی اضافه شده است؟)

چون در جمع تکی ها ، اشتراک های دو تایی مکرر شمرده شده اند ، باید اضافی آن حذف شود . لذا اشتراک های دو تایی را کم می کنیم .

از طرفی طی کم کردن آن اشتراک ها ، اشتراک سه تایی که قبلاً ۳ بار حساب شده ، ۳ بار هم کم می شود ، پس باید یکبار افزوده گردد .

با استفاده از تعریف متمم، نتیجهٔ اصل شمول نیز به صورت زیر بیان می‌شود:

(تعداد اعضایی از S که در هیچ یک از مجموعه‌های A و B و C قرار ندارند) $|\overline{A\cup B\cup C}|=|S|-|A\cup B\cup C|$

فعالیت

چند عدد طبیعی مانند n، به‌طوری‌که $۱\le n\le ۴۰۰$، وجود دارد که بر هیچ یک از اعداد ۳، ۴ و ۵ بخش‌پذیر نباشند؟ (بر ۳ بخش‌پذیر نباشند، بر ۴ بخش‌پذیر نبوده و بر ۵ نیز بخش‌پذیر نباشند).

۱ در بین اعداد ۱۲، ۲۵، ۱۰ و ۱۳ کدام یک موردنظر می‌باشند؟ ۱۳ زیرا بر هیچکدام از اعداد ۳و۴و۵ بخش پذیر نیست .

۲ آیا عدد ۶۰ جزء اعداد موردنظر است؟ خیر ، زیرا بر هر سه عدد ۳و۴و۵ بخش پذیر است .

۳ اگر مجموعهٔ اعدادی را که بر ۳ بخش‌پذیرند A و اعداد بخش‌پذیر بر ۴ را B و اعداد بخش‌پذیر بر ۵ را C بنامیم، $\overline{A}$، $\overline{B}$ و $\overline{C}$ را تعریف کنید.

$\overline{A}$ = مجموعه اعدادی که بر ۳ بخش پذیر نیستند . $\overline{B}$ = مجموعه اعدادی که بر ۴ بخش پذیر نیستند . $\overline{C}$ = مجموعه اعدادی که بر ۵ بخش پذیر نیستند .

آیا مجموعهٔ $(\overline{A}\cap\overline{B}\cap\overline{C})$ همه اعداد موردنظر را شامل می‌شود؟ بله

۴ آیا تساوی $(\overline{A}\cap\overline{B}\cap\overline{C})=(\overline{A\cup B\cup C})$ برقرار است؟ بله ، زیرا :

$$\overline{A\cup B\cup C}=\overline{(A\cup B)\cup C}\overset{\text{دمورگان}}{=\!=}\overline{A\cup B}\cap\overline{C}\overset{\text{دمورگان}}{=\!=}(\overline{A}\cap\overline{B})\cap\overline{C}=\overline{A}\cap\overline{B}\cap\overline{C}$$

۵ با توجه به تساوی اخیر و اصل شمول و نتیجهٔ اصل شمول جاهای خالی را پر کرده و تعداد اعداد خواسته شده را محاسبه کنید. (منظور از [ ] جزء صحیح است).

$$A=\{۱\le n\le ۴۰۰ \mid ۳\mid n\}\rightarrow |A|=\left[\frac{۴۰۰}{۳}\right]=۱۳۳$$

(از هر سه عدد متوالی یکی بر ۳ بخش‌پذیر است، پس تعداد اعداد طبیعی از ۱ تا k که بر سه بخش‌پذیرند برابر است با $\left[\frac{k}{۳}\right]$).

$$B=\{۱\le n\le ۴۰۰ \mid ۴\mid n\}\rightarrow |B|=\left[\frac{۴۰۰}{۴}\right]=۱۰۰$$

$$C=\{۱\le n\le ۴۰۰ \mid ۵\mid n\}\rightarrow |C|=\left[\frac{۴۰۰}{۵}\right]=۸۰$$

($A\cap B$) یعنی مجموعهٔ اعدادی که هم بر ۳ و هم بر ۴ بخش‌پذیرند و با توجه به قضیه‌ای در نظریه اعداد، «مجموعهٔ اعدادی که بر a و بر b بخش‌پذیر باشد با مجموعهٔ اعدادی که بر «ک‌م‌م» آن دو عدد یعنی بر $[a,b]$ بخش‌پذیرند، برابر می‌باشد». (این قضیه برای سه عدد یا بیشتر نیز برقرار است)

$$|A\cap B|=\left[\frac{۴۰۰}{[۳,۴]}\right]=\left[\frac{۴۰۰}{۱۲}\right]=۳۳$$

$$|A\cap C|=\left[\frac{۴۰۰}{[۳,۵]}\right]=\left[\frac{۴۰۰}{۱۵}\right]=۲۶$$

$$|B\cap C|=\left[\frac{۴۰۰}{[۴,۵]}\right]=\left[\frac{۴۰۰}{۲۰}\right]=۲۰$$

$$|A\cap B\cap C|=\left[\frac{۴۰۰}{۶۰}\right]=۶ \qquad ([۳,۴,۵]=[[۳,۴],۵]=[۱۲,۵]=۶۰)$$

$$|\overline{A}\cap\overline{B}\cap\overline{C}|=|\overline{A\cup B\cup C}|=|S|-|A\cup B\cup C|$$
$$=۴۰۰-(|A|+|B|+|C|-|A\cap B|-|A\cap C|-|B\cap C|+|A\cap B\cap C|)$$
$$=۴۰۰-(۱۳۳+۱۰۰+۸۰-۳۳-۲۶-۲۰+۶)=۱۶۰$$

کار در کلاس

چند عدد طبیعی مانند n، به‌طوری که $۱\le n\le ۳۵۰$، وجود دارد که بر هیچ یک از اعداد ۵،۴ و ۶ بخش‌پذیر نباشند؟

(توجه داشته باشید که $[۵,۶]=۳۰\ ,\ [۴,۶]=۱۲\ ,\ [۵,۴,۶]=۶۰$)

مجموعه اعداد بخش پذیر بر۴ ، را با A و مجموعه اعداد بخش پذیر بر ۵ را با B و مجموعه اعداد بخش پذیر بر ۶ را با C نمایش می دهیم . بنابراین :

$$|A|=\left[\frac{۳۵۰}{۴}\right]=۸۷ \quad و \quad |B|=\left[\frac{۳۵۰}{۵}\right]=۷۰ \quad و \quad |C|=\left[\frac{۳۵۰}{۶}\right]=۵۸ \quad و \quad |A\cap B|=\left[\frac{۳۵۰}{۲۰}\right]=۱۷$$

$$|B\cap C|=\left[\frac{۳۵۰}{۳۰}\right]=۱۱ \quad و \quad |C\cap A|=\left[\frac{۳۵۰}{۱۲}\right]=۲۹ \quad و \quad |A\cap B\cap C|=\left[\frac{۳۵۰}{۶۰}\right]=۵$$

$$|\overline{A}\cap\overline{B}\cap\overline{C}|=|\overline{A\cup B\cup C}|=|S|-|A\cup B\cup C|=۳۵۰-(۸۷+۷۰+۵۸-۱۷-۱۱-۲۹+۵)=۱۸۷$$

مثال : اگر یک قفل رمزدار شامل ۴ رقم از صفر تا ۹ باشد و بدانیم که رمز بسته شده روی قفل حداقل یک رقم ۷ و یک رقم ۸ را شامل می‌شود و امتحان کردن هر رمز ۴ رقمی ۵ ثانیه طول بکشد حداکثر چه زمانی لازم است تا این قفل باز شود؟ (در رمز، قرار گرفتن رقم صفر در سمت چپ اشکالی ندارد) (این مسئله معادل است با شمارش تعداد ۴ رقمی‌هایی که در هریک از آنها هر یک از ارقام ۷ و ۸ وجود داشته باشد.

حل : یک رمز ۴ رقمی را به‌صورت $\overline{abcd}$ نمایش می‌دهیم که در آن a، b، c و d ارقام صفر تا ۹ می‌باشند. محاسبهٔ تعداد چنین ارقامی به‌صورت مستقیم کاری وقت‌گیر است و امکان دارد رمزهایی را چندبار محاسبه کنیم یا رمزهایی را از قلم بیندازیم، لذا از اصل شمول استفاده می‌کنیم.

ابتدا مجموعه‌های A و B را به‌صورت زیر و مخالف با آنچه موردنظر مسئله است تعریف می‌کنیم!

$$A=\{\overline{abcd}\mid a,b,c,d\neq ۷\}\rightarrow |A|=۹\times۹\times۹\times۹$$

$$B=\{\overline{abcd}\mid a,b,c,d\neq ۸\}\rightarrow |B|=۹\times۹\times۹\times۹$$

$$(A\cap B)=\{\overline{abcd}\mid a,b,c,d\neq ۷,۸\}\rightarrow |A\cap B|=۸\times۸\times۸\times۸$$

واضح است که منظور از $\overline{A}$ مجموعهٔ اعداد ۴ رقمی است که در هر یک از آنها رقم ۷ به‌کار رفته است و منظور از $\overline{B}$

اعداد ۴ رقمی است که در آنها عدد ۸ به‌کار رفته است. البته $(\overline{A}\cap\overline{B})$ یعنی مجموعهٔ اعداد ۴ رقمی که در آنها هم رقم ۷ و هم رقم ۸ به‌کار رفته است و تعداد اعضای این مجموعه پاسخ سؤال مطرح شده است.

$10\ \ 10\ \ 10\ \ 10 \longrightarrow$ تعداد کل ۴ رقمی‌ها $= |S| = 10\times10\times10\times10 = 10000$

رقم اول رقم دوم رقم سوم رقم چهارم

$|\overline{A}\cap\overline{B}| = |\overline{A\cup B}| = |S| - |A\cup B|$

$= 10000 - (9^4 + 9^4 - 8^4) = 974$

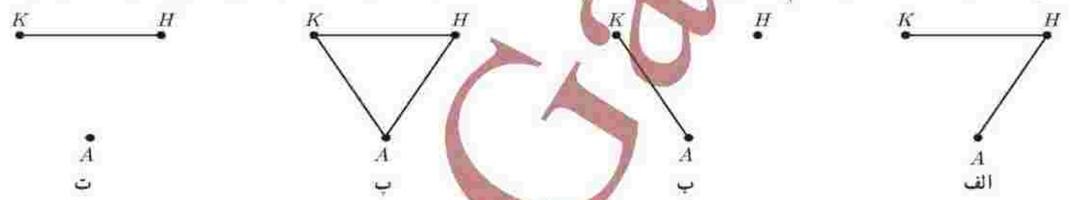
زمان لازم برحسب ثانیه $= 974\times5 = 4870$

کار در کلاس

در استان مرکزی، در نزدیکی شهر محلات، سه روستای خورهه، آبگرم و حاجی‌آباد وجود دارد. اگر بخواهیم جاده‌هایی بین این سه روستا طراحی کنیم، به‌طوری که پس از تکمیل راه‌ها، هیچ روستایی تنها نماند (حداقل به یک روستای دیگر وصل باشد) به چند طریق می‌توان چنین راه‌هایی را طراحی کرد؟

اگر روستاها را K، A و H بنامیم، در این صورت یافتن تعداد چنین راه‌هایی معادل است با پیدا کردن تعدادی گراف‌های ساده که با سه رأس K، A و H می‌توان تعریف کرد به‌طوری که در آنها هیچ رأسی تنها نباشد.

۱ از چهار گراف سادهٔ زیر کدام‌ها موردنظرند و کدام‌ها را نباید شمرد؟ گراف های ب و ت را نباید شمرد زیرا یک راس تنها می ماند .



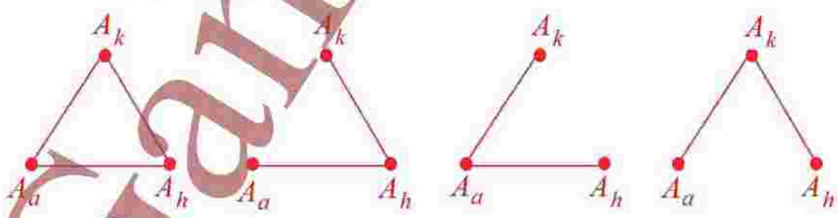
شکل ۳

۲ کل جاده‌های بین سه روستا یعنی کل گراف‌های ممکن که با سه رأس می‌توان تعریف کرد برابر است با: $|S| = 2^{\binom{3}{2}} = 2^3 = 8$
(بین هر دو روستا از این سه روستا می‌توان یک جاده درنظر گرفت که هر جاده می‌تواند در طراحیِ ما، باشد یا نباشد).

۳ اگر A_k را مجموعهٔ راه‌های طراحی شده‌ای که در آنها روستای K تنها بماند تعریف کنیم، به همین صورت A_a و A_h را تعریف کنید و با استفاده از نتیجهٔ اصل شمول جواب را بیابید و گراف‌های متناظر با آنها را رسم کنید.

$|A_k| = |A_a| = |A_h| = 2$ و $|A_k\cap A_a| = |A_a\cap A_h| = |A_h\cap A_k| = 1$ و $|A_k\cap A_a\cap A_h| = 1$

$\Rightarrow |\overline{A_k}\cap\overline{A_a}\cap\overline{A_h}| = |\overline{A_k\cup A_a\cup A_h}| = |S| - |A_k\cup A_a\cup A_h| = 8 - (2+2+2-1-1-1+1) = 4$



۴ توضیح دهید که چرا تساوی‌های زیر برقرارند؟

الف) $|A_k| = |A_a| = |A_h| = 2$ یکی از روستا ها را کنار گذاشته و فقط بین دو روستای دیگر می تواند یک جاده باشد یا نباشد . لذا ۲ حالت داریم .

ب) $|A_k\cap A_a| = |A_k\cap A_h| = |A_a\cap A_h| = 1$ یک راس مانده و فقط یک حالت داریم و آن گراف تهی است .

پ) $|A_k\cap A_a\cap A_h| = 1$ تمام رئوس بدون یال هستند (بین روستاها جاده نیست) که گراف تهی بوده و فقط یک حالت محسوب می شود .

فعالیت

اگر f تابعی از مجموعهٔ A به مجموعهٔ B باشد و $|A|=m$ و $|B|=n$، در این صورت برای هر $a_i \in A$ که $1 \le i \le m$ می‌توان به n طریق $f(a_i)$ را تعریف کرد ($f(a_i)=b_1$ یا $f(a_i)=b_2$ یا . . . یا $f(a_i)=b_n$) و لذا طبق اصل ضرب تعداد کل توابع از A به B برابر است با: $|B|^{|A|}=n^m$. حال اگر $|A|=5$ و $|B|=3$، در این‌صورت می‌خواهیم تعداد توابعی چون f از A به B را تعیین کنیم به‌طوری که $R_f=B$. (روی تمام اعضای B، پیکانی رسم شده باشد، به چنین تابع‌هایی، تابع پوشا گفته می‌شود.)

۱ اگر فرض کنیم $B=\{b_1, b_2, b_3\}$ و $A=\{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5\}$ و تعریف کنیم،

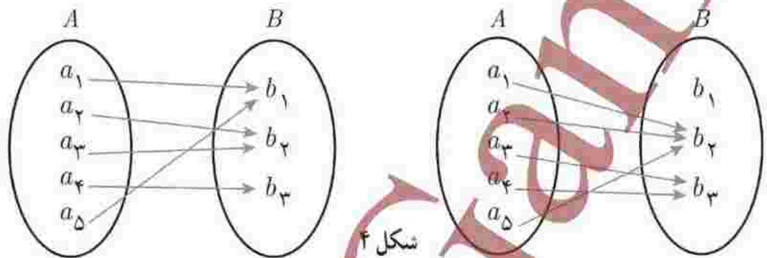
$A_1=\{f: A\to B \mid f(a_i) \ne b_1 ; 1\le i \le 5\}$

$A_2=\{f: A\to B \mid f(a_i) \ne b_2 ; 1\le i \le 5\}$

$A_3=\{f: A\to B \mid f(a_i) \ne b_3 ; 1\le i \le 5\}$

در این صورت $\overline{A_1}$ مجموعه‌ای شامل همه تابع‌هایی از A به B است که حداقل یک پیکان از اعضای A روی b_1 می‌آورند.

یکی از تابع‌های موجود در مجموعهٔ A_1



یکی از تابع‌های موجود در مجموعهٔ $\overline{A_1}$

شکل ۴

۲ مجموعهٔ $(\overline{A_1 \cup A_2 \cup A_3})=(\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \overline{A_3})$ را تعریف کنید و با استفاده از نتیجه اصل شمول، پاسخ را بیابید.

$|S| = 3^5 = 243 , |A_1| = |A_2| = |A_3| = 2^5 = 32$

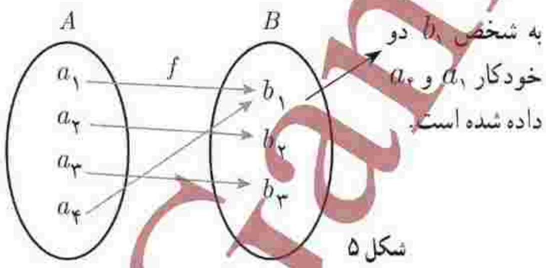
$|A_1 \cap A_2| = |A_1 \cap A_3| = |A_2 \cap A_3| = 1 \quad , |A_1 \cap A_2 \cap A_3| = 0$

$(\overline{A_1 \cup A_2 \cup A_3}) = |S| - |A_1 \cup A_2 \cup A_3|$

$= 243 - (32 + 32 + 32 - 1 - 1 - 1 + 0) = 150$

مثال : به چند طریق می‌توان ۴ خودکار متفاوت را بین سه نفر توزیع کرد به شرط آنکه به هر نفر حداقل ۱ خودکار داده باشیم؟

حل : تعداد حالت‌های ممکن برای انجام این عمل معادل است با پیدا کردن تعداد تابع‌های از یک مجموعهٔ ۴ عضوی مانند A به یک مجموعهٔ ۳ عضوی مانند B، به طوری که بُرد این توابع همهٔ اعضای B باشد. (به هر عضو B حداقل ۱ عضو از A نسبت داده شود.)



شکل ۵

$A_i = \{f : A \to B \mid f(a_i) \ne b_j , 1 \le i \le 4 , 1 \le j \le 3\}$

$|S| = |B|^{|A|} = 3^4 = 81$

$|A_1| = |A_2| = |A_3| = 2^4 = 16$

$|A_1 \cap A_2| = |A_1 \cap A_3| = |A_2 \cap A_3| = 1^4 = 1 , |A_1 \cap A_2 \cap A_3| = 0$

$$|\overline{A_1}\cap\overline{A_2}\cap\overline{A_3}|=|\overline{A_1\cup A_2\cup A_3}|=|S|-|A_1\cup A_2\cup A_3|$$
$$=81-(3\times 16-3\times 1+0)=36$$

تذکر : تعداد تابع‌هایی چون $f: A\to B$ با فرض $|A|=m\geq 3$ و $|B|=3$ به‌طوری که $R_f=B$، از رابطهٔ $3^m-(3\times 2^m-3)$ به‌دست می‌آید.

مثال : ۸ نفر را که برای یک برنامهٔ تلویزیونی پیامک ارسال کرده‌اند، انتخاب کرده‌ایم و می‌خواهیم در ۴ مرحله و در هر مرحله ۱ جایزه را به یکی از این ۸ نفر (با قرعه‌کشی) به دلخواه بدهیم. این عمل به چند طریق امکان‌پذیر است؟ (یک نفر می‌تواند ۴ جایزه را برنده شود.)

حل : حل این مثال معادل است با یافتن تعداد تابع‌های ممکن از یک مجموعهٔ ۴ عضوی به یک مجموعهٔ ۸ عضوی که برابر است با $8^4=4096$.

فعالیت

می‌خواهیم تعداد تابع‌های یک‌به‌یک از یک مجموعهٔ ۴ عضوی به یک مجموعهٔ ۶ عضوی را شمارش کنیم.

۱ اگر فرض کنیم $A=\{a_1,a_2,a_3,a_4\}$ و $B=\{b_1,b_2,\cdots,b_6\}$ برای تعریف f روی هر عضو A مثلاً $f(a_1)$، چند راه انتخاب داریم؟ ۶ راه وجود دارد . زیرا $f(a_1)$ می تواند b_1 یا b_2 یا b_3 یا b_4 یا b_5 یا b_6 انتخاب شود .

۲ با توجه به اینکه f باید یک‌به یک باشد و تعریف یک‌به‌یکی در توابع، پس از تعریف $f(a_1)$، برای تعریف f روی a_2 چند راه انتخاب داریم؟ ۵ راه وجود دارد زیرا با انتخاب یکی از b_iها برای $f(a_1)$ فقط ۵ انتخاب برای $f(a_2)$ می ماند .

۳ با توجه به اصل ضرب، در کل، چند تابع یک‌به‌یک از A به B می‌توان تعریف کرد؟ پاسخ خود را توسط تبدیل r شیء از n شیء بنویسید.

به ۶ طریق می‌توان $f(a_1)$ را تعریف کرد $\to$ $f(a_1)=b_1$ یا b_2 یا $\cdots$ یا b_6

به ۵ طریق می‌توان $f(a_2)$ را تعریف کرد $\to f(a_2)\neq f(a_1) \Leftarrow f$ یک‌به‌یک است

به ۴ طریق می توان $f(a_3)$ را تعریف کرد . $\Rightarrow f(a_3)\neq f(a_1)\ ,\ f(a_3)\neq f(a_2) \Leftarrow f$ یک‌به‌یک است

....

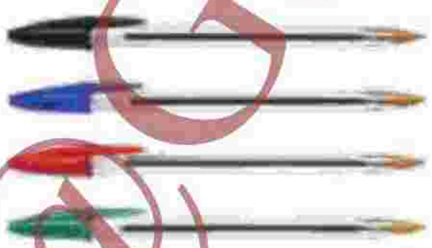
طبق اصل ضرب $\Leftarrow$ تعداد کل تابع‌های یک‌به‌یک $= 6\times5\times4\times3=\frac{6!}{2!}=(6)_4$

این نماد همان $P(6,4)$ می باشد

در حالت کلّی اگر $|A|=m$ و $|B|=k$ در این صورت با شرط $m\leq k$ تعداد توابع یک‌به‌یک از مجموعهٔ A به مجموعهٔ B برابر است با تعداد انتخاب‌های m شیء از بین k شیء یا $(k)_m=\frac{k!}{(k-m)!}$.

مثال : به چند طریق می‌توان ۴ خودکار متفاوت را بین ۸ نفر توزیع کرد به شرط آنکه هیچ‌کس بیشتر از یک خودکار نداشته باشد؟ (به هر نفر حداکثر یک خودکار داده باشیم)

حل : تعداد حالت‌های ممکن برای انجام این عمل معادل است با پیدا کردن



شکل ۶

تعداد تابع‌های یک‌به‌یک از مجموعه‌ای ۴عضوی به مجموعه‌ای ۸ عضوی یعنی، $۱۶۸۰ = \frac{۸!}{۴!} = (۸)_۴$.

اصل لانه کبوتری[1]

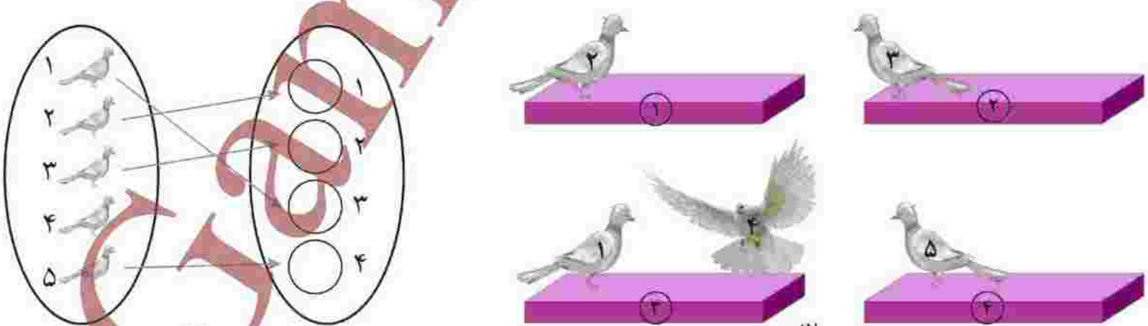
اگر از شما سؤال شود که حداقل چند نفر باید در یک کلاس حضور داشته باشند تا مطمئن شوید لااقل دو نفر از آنها ماه تولّدشان یکسان است، چه پاسخی می‌دهید؟ بدترین حالت ممکن این است که افراد داخل کلاس از نفر اول هر کدام در یک ماه متفاوت با نفر قبلی به‌دنیا آمده باشند، تا کجا می‌توان مقاومت کرد؟ واضح است که حداکثر تا ۱۲ نفر با فرض اینکه هر نفر در یک ماه متفاوت از بقیه متولد شده باشد، می‌توان به این روند ادامه داد و هنوز اطمینانی برای اینکه حداقل دونفر ماه تولدشان مثل هم باشد وجود ندارد، ولی اگر ۱۳ نفر در کلاس حضور داشته باشند این اطمینان حاصل می‌شود! (نفر سیزدهم در هر ماهی متولد شده باشد، ۱ نفر از آن ۱۲ نفر در آن ماه متولد شده است.)

حال با توجه به مطالب فوق به نظر شما حداقل چند دانش‌آموز در یک مدرسه باید حضور داشته باشند تا اطمینان داشته باشیم، حداقل ۲ نفر از آنها روز تولدشان یکی است؟

در این قسمت به بیان اصل لانه کبوتری پرداخته و سپس مسائلی را مطرح می‌کنیم و با استفاده از این اصل و تعمیم آن، مسائل را حل خواهیم کرد.

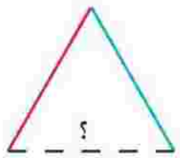
شکل ۷

اصل لانه کبوتری : اگر m کبوتر و n لانه داشته باشیم و $m > n$ و همهٔ کبوترها درون لانه‌ها قرار بگیرند، در این‌صورت لانه‌ای وجود دارد که حداقل ۲ کبوتر در آن قرار گرفته است.



شکل ۸

۱ــ اصل لانه‌کبوتری اصطلاحاً «اصل» نامیده می‌شود و در واقع قضیه‌ای است که با برهان خلف اثبات می‌شود، این اصل را اصل حجره‌ها نیز نامیده‌اند.



مثال : نشان دهید اگر بخواهیم ضلع های یک مثلث را با دو رنگ آبی یا قرمز رنگ کنیم، حداقل دو ضلع این مثلث همرنگ خواهند شد.

حل : اگر ضلع های مثلث را کبوترها و دو رنگ آبی و قرمز را لانه ها فرض کنیم، طبق اصل لانه کبوتری در یکی از لانه ها حداقل ۲ کبوتر قرار خواهد گرفت (دو کبوتر در یک لانه معادل است با دو ضلع با یک رنگ).

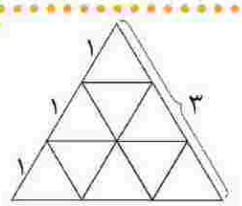
مثال : ثابت کنید در بین هر ۵ عدد طبیعی دلخواه حداقل دو عدد یافت می‌شود به طوری که به پیمانهٔ ۴ هم‌نهشت می‌باشند.

حل : می‌دانیم باقی ماندهٔ تقسیم هر عدد بر ۴ یکی از اعضای مجموعهٔ $R=\{۰,۱,۲,۳\}$ است، حال اگر ۵ عدد طبیعی را کبوترها و باقی‌مانده‌های تقسیم اعداد بر ۴ را لانه‌ها فرض کنیم، طبق اصل لانه کبوتری حداقل ۲ کبوتر در یک لانه قرار خواهند گرفت، یعنی حداقل دو عدد از این ۵ عدد باقی‌مانده‌های تقسیمشان بر ۴ با هم برابر است. حال اگر آن دو عدد را a و b فرض کنیم، a و b بر ۴ هم باقی‌مانده بوده و بنابر تعریف هم‌نهشتی باید $a \overset{۴}{\equiv} b$ و حکم به‌دست می‌آید.

تمرین : در حالت کلّی ثابت کنید در بین هر $(n+۱)$ عدد طبیعی دلخواه و بیشتر، همواره حداقل ۲ عدد مانند a و b یافت می‌شوند به قسمی که تفاضل آنها بر n بخش‌پذیر است. (به پیمانهٔ n هم‌نهشت‌اند).

باقی مانده تقسیم هر عدد بر n یکی از اعضای مجموعه $R=\{۰,۱,۲,...,n-۱\}$ است ، حال اگر $n+۱$ عدد طبیعی را کبوترها و باقی مانده های تقسیم اعداد بر n را لانه ها فرض کنیم ، طبق اصل لانه کبوتری حداقل ۲ کبوتر در یک لانه قرار خواهند گرفت ،یعنی حداقل دو عدد از این $n+۱$ عدد باقی مانده های تقسیمشان بر n با هم برابر است .اگر آن دو عدد را a و b فرض کنیم ، آن دو در تقسیم بر n هم باقی مانده بوده و در نتیجه تفاضل آنها بر n بخش پذیر است . به عبارت دیگر $a \overset{n}{\equiv} b$.

کار در کلاس

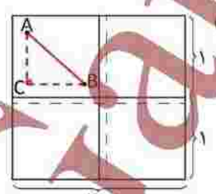


شکل ۹

۱ یک مثلث متساوی‌الاضلاع به طول ضلع ۳ واحد را تقسیم‌بندی کرده‌ایم. نشان دهید اگر ۱۰ نقطه دلخواه از داخل این مثلث اختیار کنیم حداقل ۲ نقطه بین این نقاط وجود خواهد داشت به قسمی که فاصلهٔ آنها از یکدیگر کمتر از ۱ باشد.

مطابق شکل ، مثلث را به ۹ مثلث متساوی الاضلاع تقسیم می کنیم . حال ۱۰ نقطه را کبوتر و هر مثلث کوچک را یک لانه فرض می کنیم (۹ لانه داریم) ، طبق اصل لانه کبوتری حداقل دو کبوتر در یک لانه جای می گیرند یعنی حداقل دو نقطه درون یک مثلث کوچک قرار خواهند گرفت .

از طرفی با توجه به این که طول اضلاع مثلث کوچک ۱ واحد می باشد ، فاصله بین دو نقطه ی درون یک مثلث از ۱ واحد کمتر است .



شکل ۱۰

۲ با توجه به ۱ برای شکل مقابل یک مسئله طرح کنید و با استفاده از اصل لانه کبوتری به آن پاسخ دهید.

سوال : ۵ نقطه درون مربعی به ضلع ۲ واحد مفروض است . ثابت کنید ، حداقل ۲ نقطه بین این نقاط وجود دارد به طوری که فاصله ی آنها از یکدیگر کمتر از $\sqrt{۲}$ است .

پاسخ : مطابق شکل روبرو مربع را به چهار مربع یکسان (به ضلع ۱ واحد) تقسیم می کنیم .

حال ۵ نقطه را کبوتر و مربعات کوچک را به عنوان ۴ لانه در نظر می گیریم .طبق اصل لانه کبوتری حداقل دو کبوتر در یک لانه واقع می شوند ، یعنی حداقل دونقطه مثل A و B یافت می شوند که در یک مربع کوچک قرار می گیرند .

حال با توجه به شکل ، طبق قضیه فیثاغورث می توان نوشت :

$$AB^۲ = AC^۲ + BC^۲ \xrightarrow[BC<۱]{AC<۱} AB^۲ < ۱^۲ + ۱^۲ \Rightarrow AB^۲ < ۲ \Rightarrow AB < \sqrt{۲}$$

۳ نشان دهید در یک خانوادهٔ حداقل ۵ نفری، دست‌کم دو نفر فصل تولدشان یکی است.

هر سال دارای ۴ فصل است که آنها را به عنوان ۴ لانه و هر یک از افراد خانواده را به عنوان یک کبوتر در نظر می گیریم . بنابراین می خواهیم حداقل ۵ کبوتر را در ۴ لانه جای دهیم ، که طبق اصل لانه کبوتری حداقل دو کبوتر یافت می شوند که در یک لانه جای گیرند ، یعنی حداقل دو نفر از افراد خانواده وجود دارند که در یک فصل از سال متولد شده اند .

۴ نشان دهید در هر گراف سادهٔ از مرتبهٔ $P \geq 2$ حداقل دو رأس هم‌درجه وجود دارد. (**راهنمایی**: مسئله را در دو حالت بررسی کنید. (۱) حالتی که رأس ایزوله یا تنها نداشته باشیم که در این‌صورت درجات رئوس از ۱ تا $P-1$ تغییر می‌کند. (۲) حالتی که یک رأس تنها داشته باشیم که در این صورت درجات بقیهٔ رئوس از ۱ تا $P-2$ تغییر می‌کند)

با توجه به راهنمایی داده شده مسئله را حل می کنیم :

حالت اول (اگر گراف فاقد راس تنها باشد) : هر کدام از رئوس گراف را یک کبوتر و هر کدام از درجات ۱ تا $P-1$ را یک لانه فرض می کنیم . بنابراین P کبوتر و $P-1$ تا لانه کبوتر داریم ، که طبق اصل لانه کبوتری حداقل دو کبوتر وجود دارند که در یک لانه جای می گیرند ، یعنی حداقل دو تا از رئوس دارای درجه یکسان می باشند .

حالت دوم (اگر گراف دارای یک راس تنها باشد) : درجه آن راس تنها صفر می باشد ، که با کنار گذاشتن آن ، $P-1$ راس داریم و آنها را به عنوان کبوتر در نظر می گیریم .

از طرفی هر کدام از این رئوس می توانند درجات ۱ تا $P-2$ داشته باشند . که اگر به عنوان لانه در نظر گرفته شوند ، طبق اصل لانه کبوتری با وجود $P-1$ کبوتر و $P-2$ لانه ، حداقل دو کبوتر یافت می شوند که در یک لانه جای گیرند . یعنی حداقل دو راس وجود دارد که دارای درجه یکسانند .

آیا نیازی هست حالتی را درنظر بگیریم که دو رأس یا بیشتر تنها باشند؟

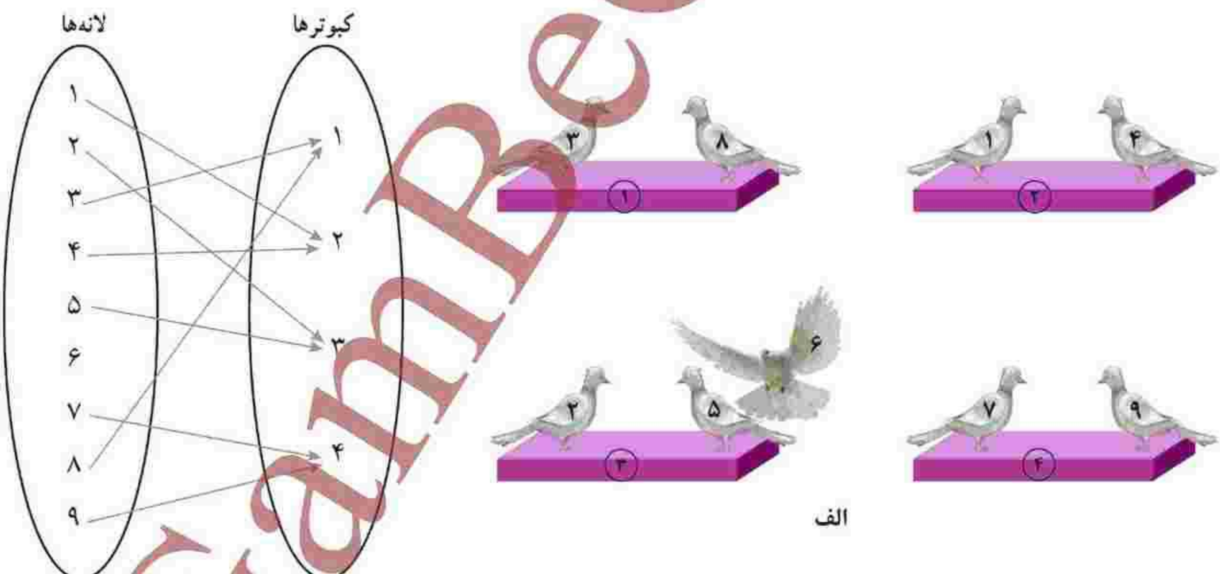
خیر ، زیرا هر چه راس تنها داشته باشیم ، آنها را کنار گذاشته و از تعداد رئوس و تعداد اعدادی که می توانند درجه ی آنها محسوب شوند ، به یک میزان کاسته می شود و همواره تعداد رئوس بیشتر از تعداد درجات است .

فعالیت

جدول زیر را (با توجه به قراردادن n کبوتر در n لانه در هر مرحله) کامل کنید و نتیجه‌گیری خود را با نتیجه داخل کادر (تعمیم اصل لانه کبوتری) مقایسه کنید.

اطمینان از وجود لانه‌ای با حداقل $(k+1)$ کبوتر	تعداد کبوترها $(kn+1)$	تعداد لانه‌ها (n)
اطمینان از وجود لانه‌ای با حداقل ۲ کبوتر	$1\times n+1$	n
اطمینان از وجود لانه‌ای با حداقل ۳ کبوتر	$2\times n+1$	n
اطمینان از وجود لانه‌ای با حداقل ۴ کبوتر	$3\times n+1$	n
⋮	⋮	⋮
اطمینان از وجود لانه‌ای با حداقل $k+1$ کبوتر	$kn+1$	n

همان‌طور که مشاهده می‌کنید در سطر دوم به‌ازای $n=4$ و $k=2$ تعداد کبوترها $9=1+4\times2$ می‌باشد که طبق جدول می‌بایست لانه‌ای با حداقل ۳ کبوتر یافت شود و شکل زیر گویای این روش است که اگر در هر لانه یک کبوتر قرار بگیرد و از هر ۵ کبوتر باقی‌مانده مجدّد در هر لانه ۱ کبوتر قرار بگیرد در نهایت نهمین کبوتر در هر لانه‌ای قرار بگیرد همان لانه دارای ۳ کبوتر است. توجه دارید که در حالت‌های زیادی از نشستن کبوترها در لانه‌ها حداقل ۱ لانه با حداقل ۳ کبوتر می‌تواند وجود داشته باشد (همهٔ کبوترها در ۱ لانه قرار بگیرند یا ۵ کبوتر در ۱ لانه و ۴ کبوتر در لانه‌ای دیگر یا ...).



شکل ۱۱

تعمیم اصل لانه کبوتری : هرگاه $(kn+1)$ کبوتر یا بیشتر در n لانه قرار بگیرند در این‌صورت لانه‌ای وجود دارد که حداقل $(k+1)$ کبوتر در آن قرار گرفته است.

مثال : در یک اردوی دانش‌آموزی حداقل چند دانش‌آموز وجود داشته باشند تا اطمینان داشته باشیم که حداقل ۷ نفر از آنها ماه تولد یکسانی دارند؟

حل : در این مسئله ۷=۱+k یعنی ۶=k است و n یا تعداد لانه‌ها همان تعداد ماه‌های سال یعنی ۱۲=n است، پس تعداد کبوترها یا معادل با آن تعداد دانش‌آموزان حداقل می‌بایست ۷۳=۱+۱۲×۶=۱+kn باشد.

کار در کلاس

۱ در یک دبیرستان حداقل چند دانش‌آموز وجود داشته باشند تا مطمئن باشیم حداقل ۱۰ نفر از آنها ماه و روز هفتهٔ تولدشان یکی است؟ هر سال ۱۲ ماه و هر هفته ۷ روز است ، لذا طبق اصل ضرب $n=۱۲\times۷=۸۴$.

$$\left.\begin{matrix} n=۸۴ \\ k+۱=۱۰\Rightarrow k=۹ \end{matrix}\right) \Rightarrow \text{حداقل تعداد دانش آموزان} = kn+۱=۸۴\times۹+۱=۷۵۷$$

۲ ۵۴ شاخه گل را حداکثر در چند گلدان قرار دهیم تا اطمینان داشته باشیم گلدانی هست که در آن حداقل ۵ شاخه گل قرار گرفته است؟

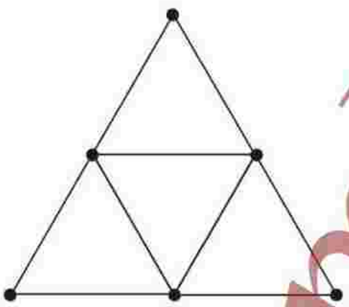
$k+۱=۵\Rightarrow k=۴$

$kn+۱=۵۴\Rightarrow ۴n=۵۳\Rightarrow n=[\frac{۵۳}{۴}]=۱۳$

۳ حداقل چند نفر در یک سالن همایش حضور داشته باشند تا مطمئن باشیم حداقل ۳ نفر از آنها دو حرف اول و دوم فامیلشان غیرتکراری و مثل هم است؟ (فامیلی‌هایی مثل اشتری و اشراقی موردنظر است).

تعداد حروف الفبای فارسی ۳۲ می باشد ، پس برای حرف اول ۳۲ و برای حرف دوم ۳۱ حالت داریم ، که طبق اصل ضرب : $n=۳۲\times۳۱=۹۹۲$

$$\left.\begin{matrix} n=۹۹۲ \\ k+۱=۳\Rightarrow k=۲ \end{matrix}\right) \Rightarrow \text{حداقل تعداد افراد حاضر در سالن همایش} : kn+۱=۲\times۹۹۲+۱=۱۹۸۵$$


شکل ۱۲

مثال : حداقل چند نقطه از داخل مثلثی متساوی‌الاضلاع به طول ضلع ۲، انتخاب کنیم تا مطمئن باشیم حداقل ۲ نقطه از آنها فاصله‌شان کمتر از ۱ است.

حل : کافی است مطابق شکل، مثلث مفروض را به ۴ مثلث متساوی‌الاضلاع به طول ضلع ۱ تقسیم‌بندی کنید که در این صورت اگر ۵ نقطه از داخل این مثلث انتخاب کنید طبق اصل لانه کبوتری اطمینان دارید حداقل یکی از مثلث‌ها شامل دست‌کم ۲ نقطه از این ۵ نقطه خواهد بود و فاصلهٔ این دو نقطه از طول ضلع مثلث‌های کوچک‌تر کمتر می‌باشد.

مثال : نشان دهید در هر کلاس با n دانش‌آموز ($n\geq۲$) حداقل ۲ دانش‌آموز یافت می‌شوند که تعداد دوستان آنها در آن کلاس با هم برابر است.

حل : قبلاً ثابت کردیم که در هر گراف ساده حداقل ۲ رأس هم درجه وجود دارد، لذا کافی است گرافی تعریف کنید که رأس‌های آن دانش‌آموزان و رابطهٔ دوستی بین هر دو دانش‌آموز را با یالی بین رأس‌های متناظرشان تعریف کنید.

طبق آنچه راهنمایی شده ، گرافی را تعریف می کنیم که راس های آن دانش آموزان و رابطه ی دوستی بین هر دو دانش آموز ، یالی بین راس های متناظرشان باشد . بنابراین درجه ی هر راس تعیین کننده تعداد دوستان شخص متناظر با آن راس است .

از طرفی در هر گراف ساده حداقل دو راس هم درجه وجود دارد ، یعنی حداقل دو دانش آموز وجود دارد که تعداد دوستان آنها با هم برابر است .

تمرین

۱ در بین اعداد طبیعی ۱ تا ۹۰ $(۱ \leq n \leq ۹۰)$ چند عدد وجود دارد که بر ۲ یا ۳ بخش‌پذیر باشند؟

مجموعه اعدادی که بر ۲ بخش پذیرند را با A و مجموعه اعدادی که بر ۳ بخش پذیرند را با B نمایش می دهیم . بنابراین :

$$|A| = \left[\frac{۹۰}{۲}\right] = ۴۵ \qquad |B| = \left[\frac{۹۰}{۳}\right] = ۳۰ \qquad |A \cap B| = \left[\frac{۹۰}{۶}\right] = ۱۵$$

$$\Rightarrow |A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B| = ۴۵ + ۳۰ - ۱۵ = ۶۰$$

۲ در بین اعداد طبیعی ۱ تا ۲۰۰ $(۱ \leq n \leq ۲۰۰)$ چند عدد وجود دارد که بر ۴ بخش‌پذیر باشند ولی بر ۷ بخش‌پذیر نباشند؟

مجموعه اعدادی که بر ۴ بخش پذیرند را با A و مجموعه اعدادی که بر ۷ بخش پذیرند را با B نمایش می دهیم . بنابراین :

$$|A| = \left[\frac{۲۰۰}{۴}\right] = ۵۰ \quad \text{و} \quad |A \cap B| = \left[\frac{۲۰۰}{۲۸}\right] = ۷ \Rightarrow |A \cap B'| = |A - B| = |A| - |A \cap B| = ۵۰ - ۷ = ۴۳$$

۳ در یک کلاس ۳۴ نفری، ۱۵ نفر فوتبال بازی می‌کنند، ۱۱ نفر والیبال و ۹ نفر بسکتبال بازی می‌کنند. اگر بدانیم ۱۰ نفر عضو هیچ‌یک از این سه تیم نبوده و ۵ نفر فوتبال و والیبال، ۶ نفر والیبال و بسکتبال و ۳ نفر فوتبال و بسکتبال بازی می‌کنند مشخص کنید :

الف) چند نفر هر سه رشتهٔ ورزشی را بازی می‌کنند؟

$$|F| = ۱۵ \text{ و } |V| = ۱۱ \text{ و } |B| = ۹ \text{ و } |F \cap V| = ۵ \text{ و } |V \cap B| = ۶ \text{ و } |F \cap B| = ۳ \text{ و } |F \cup V \cup B| = ۳۴ - ۱۰ = ۲۴$$

$$\xrightarrow{|F \cup V \cup B| = |F| + |V| + |B| - |F \cap V| - |V \cap B| - |B \cap F| + |F \cap V \cap B|} ۲۴ = ۱۵ + ۱۱ + ۹ - ۵ - ۶ - ۳ + |F \cap V \cap B| \Rightarrow |F \cap V \cap B| = ۳$$

ب) چند نفر فقط فوتبال بازی می‌کنند؟

$$|F| - |F \cap V| - |F \cap B| + |F \cap V \cap B| = ۱۵ - ۵ - ۳ + ۳ = ۱۰$$

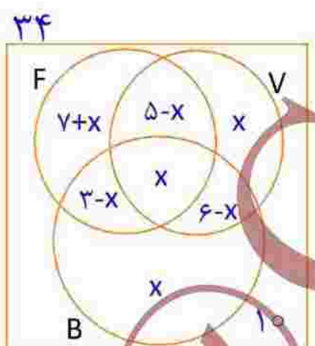
پ) چند نفر والیبال بازی می‌کنند ولی بسکتبال بازی نمی‌کنند؟

$$|V - B| = |V| - |V \cap B| = ۱۱ - ۶ = ۵$$

ت) چند نفر فقط در یک رشته بازی می‌کنند؟

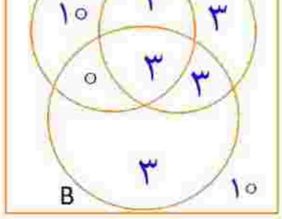
$$\left.\begin{array}{l} \text{فقط فوتبال} = |F| - |F \cap V| - |F \cap B| + |F \cap V \cap B| = ۱۵ - ۵ - ۳ + ۳ = ۱۰ \\ \text{فقط والیبال} = |V| - |F \cap V| - |V \cap B| + |F \cap V \cap B| = ۱۱ - ۵ - ۶ + ۳ = ۳ \\ \text{فقط بسکتبال} = |B| - |B \cap F| - |V \cap B| + |F \cap V \cap B| = ۹ - ۳ - ۶ + ۳ = ۳ \end{array}\right\} \xrightarrow{+} ۱۶$$

روش ساده تر : پیشنهاد می شود برای حل این نوع سوالات از نمودار ون به شکل زیر استفاده شود :



$$۷ + x + ۵ - x + x + ۳ - x + x + ۶ - x + x + ۱۰ = ۳۴ \Rightarrow x = ۳$$

بنابراین می توان نمودار ون را به شکل زیر باز نویسی کرد :



الف) ۳

ب) ۱۰

پ) ۳+۲=۵

ت) ۱۰+۳+۳=۱۶

۴ اگر بخواهیم یک قفل دارای رمز ۵ رقمی و فاقد صفر را که سه رقم آن ۷ و ۲ و ۳ هستند باز کنیم و تمام اعداد ۵ رقمی را که شامل حداقل یک رقم ۷ و یک رقم ۲ و یک رقم ۳ هستند در اختیار داریم و بستن و امتحان کردن هریک از این اعداد ۵ رقمی، ۶ ثانیه طول بکشد، برای باز کردن این قفل حداکثر چقدر زمان نیاز داریم؟

می خواهیم با ارقام ۹و۸و۷و۶و۵و۴و۳و۲و۱ رمز های ۵ رقمی بسازیم که شامل حداقل یک رقم ۲ و یک رقم ۳ و یک رقم ۷ باشند.

بدون در نظر گرفتن شرط وجود حداقل یک رقم اعداد گفته شده یعنی در حالت کلی $۹^۵$ رمز می توان ساخت. به عبارت دیگر: $|S|=۹^۵$.

مجموعه ی رمز های فاقد رقم ۲ را با A و مجموعه ی رمز های فاقد رقم ۳ را با B و مجموعه ی رمز های فاقد رقم ۷ را با C نمایش می دهیم. بنابراین:

$$|A|=|B|=|C|=۸^۵ \quad \text{و} \quad |A\cap B|=|B\cap C|=|C\cap A|=۷^۵ \quad \text{و} \quad |A\cap B\cap C|=۶^۵$$

$$\xrightarrow{|A\cup B\cup C|=|A|+|B|+|C|-|A\cap B|-|B\cap C|-|C\cap A|+|A\cap B\cap C|}|A\cup B\cup C|=۳\times ۸^۵-۳\times ۷^۵+۶^۵$$

$$\Rightarrow|\overline{A}\cap\overline{B}\cap\overline{C}|=|\overline{A\cup B\cup C}|=|S|-|A\cup B\cup C|=۹^۵-(۳\times ۸^۵-۳\times ۷^۵+۶^۵)=۳۳۹۰$$

حال در صورتی که امتحان کردن هر ۵ رقمی ۶ ثانیه طول بکشد، حداکثر $۲۰۳۴۰ = ۶\times ۳۳۹۰$ ثانیه معادل ۵ ساعت ۳۹ دقیقه وقت لازم است.

۵ چه تعداد تابع چون $f: A\to B$ می‌توان تعریف کرد اگر بدانیم $|A|=۵$ و $|B|=۴$ است؟ چه تعداد از این توابع یک‌به‌یک هستند؟

تعداد توابع مورد نظر برابر است با $۴^۵$ که هیچکدام از آنها یک به یک نیست، زیرا تعداد اعضای دامنه ی تابع (A) بیشتر از تعداد اعضای هم دامنه ی تابع (B) است.

۶ به چند طریق می‌توان ۵ کتاب مختلف را بین ۸ نفر توزیع کرد، اگر بخواهیم به هر نفر حداکثر یک کتاب بدهیم؟

روش اول: $\xrightarrow{\times}\dfrac{۸!}{۳!}$ ۴ (کتاب۵) ۵ (کتاب۴) ۶ (کتاب۳) ۷ (کتاب۲) ۸ (کتاب۱) : حالات انتخاب نفرات برای هر کتاب

روش دوم: تعداد حالت ها ی ممکن برابر است با تعداد توابع یک به یک از مجموعه ای ۵ عضوی به یک مجموعه ی ۸ عضوی: $(۸)_۵=\dfrac{۸!}{۳!}$

۷ به چند طریق می‌توان ۶ فیلم سینمایی را بین سه داور برای داوری تقسیم کرد، به‌طوری‌که هر داور حداقل یک فیلم را داوری کند؟

تعداد این حالت ها برابر است با تعداد توابع پوشا از یک مجموعه ی ۶ عضوی به یک مجموعه ی ۳ عضوی.

با فرض $X=\{x_۱,x_۲,x_۳,x_۴,x_۵,x_۶\}$ و $Y=\{y_۱,y_۲,y_۳\}$، تعداد توابع پوشا از X به Y را محاسبه می کنیم:

$S=$ مجموعه ی تمام توابع قابل ساخت از X به Y $\Rightarrow|S|=۳^۶$

$A=$ مجموعه ی تمام توابعی که برد آنها $\{y_۲,y_۳\}$ می باشد (بُرد فاقد عضو $y_۱$ است). $\Rightarrow|A|=۲^۶$

$B=$ مجموعه ی تمام توابعی که برد آنها $\{y_۱,y_۳\}$ می باشد (بُرد فاقد عضو $y_۲$ است). $\Rightarrow|B|=۲^۶$

$C=$ مجموعه ی تمام توابعی که برد آنها $\{y_۱,y_۲\}$ می باشد (بُرد فاقد عضو $y_۳$ است). $\Rightarrow|C|=۲^۶$

$$\Rightarrow|A\cap B|=|B\cap C|=|C\cap A|=۱ \quad \text{و} \quad |A\cap B\cap C|=۰$$

$$\xrightarrow{|A\cup B\cup C|=|A|+|B|+|C|-|A\cap B|-|B\cap C|-|C\cap A|+|A\cap B\cap C|}|A\cup B\cup C|=۳\times ۲^۶-۳\times ۱+۰$$

$$\Rightarrow|\overline{A}\cap\overline{B}\cap\overline{C}|=|\overline{A\cup B\cup C}|=|S|-|A\cup B\cup C|=۳^۶-(۳\times ۲^۶-۳\times ۱+۰)=۵۴۰$$

۸ ثابت کنید، در بین هر ۳۶۸ نفر حداقل دو نفر هستند که در یک روز متولد شده‌اند.

در صورتی که هر نفر را به عنوان یک کبوتر و هر روز را یک لانه در نظر بگیریم ، می خواهیم ۳۶۸ کبوتر را در ۳۶۵ یا ۳۶۶ لانه (هر سال ۳۶۵ روز است به استثناء سالهای کبیسه که ۳۶۶ روز می باشند) جای دهیم .

لذا طبق اصل لانه کبوتری حداقل دو لانه وجود دارد که حداقل دو کبوتر درون آن قرار خواهد گرفت ، به عبارت دیگر حداقل ۲ نفر هستند که در یک روز سال متولد شده اند .

۹ ثابت کنید، اگر در یک دبیرستان حداقل ۵۰۵ دانش‌آموز مشغول تحصیل باشند لااقل ۷ نفر از آنها روزِ هفته و ماه تولدشان یکسان است.

منظور از یکسان بودن روز هفته و ماه تولد آن است که ایام طبق اعضای مجموعه ی زیر در نظر گرفته شده اند :

{(اسفندوجمعه) و . . . و (اردیبهشت و شنبه) و (فروردین و جمعه) و (فروردین و پنجشنبه) و (فروردین و چهارشنبه) و (فروردین و سه شنبه) و (فروردین و دوشنبه) و (فروردین و یکشنبه) و (فروردین و شنبه)}

که هر عضو به عنوان یک لانه محسوب شده و درنتیجه $۸۴ = ۱۲ \times ۷$ لانه داریم .

حال در صورتی که هر دانش آموز را به عنوان یک کبوتر ، در نظر بگیریم ، ۵۰۵ کبوتر داریم . بنابراین :

$۵۰۵ = k \times ۸۴ + ۱ \Rightarrow k = ۶ \Rightarrow k + ۱ = ۷ \Rightarrow$ حداقل ۷ نفر از آنها روز هفته و ماه تولدشان یکسان است .

۱۰ حداقل چند نفر در یک سالن ورزشی مشغول تماشای مسابقه کشتی باشند تا مطمئن باشیم لااقل ۲۰ نفر از آنها روز تولدشان یکسان است؟ (برای سهولت در حل مسئله ، سال را غیر کبیسه در نظر می گیریم .)

$$\left.\begin{array}{r} k + ۱ = ۲۰ \Rightarrow k = ۱۹ \\ \text{تعداد لانه ها همان تعداد ایام سال است .} : n = ۳۶۵ \end{array}\right\} \xrightarrow{n.k+۱}$$ حداقل $۶۹۳۶ = ۱ + ۱۹ \times ۳۶۵$ نفر تماشا گر مسابقه کشتی هستند .

۱۱ ثابت کنید در بین هر سه عدد طبیعی حداقل دو عدد طبیعی وجود دارد که مجموعشان عددی زوج باشد.

می دانیم باقیمانده تقسیم هر عدد طبیعی بر ۲ ، برابر ۰ یا ۱ می باشد .

اگر سه عدد طبیعی را به عنوان کبوتر ها و باقی مانده تقسیم اعداد طبیعی بر ۲ (یعنی ۰ و ۱) را به عنوان ۲ لانه در نظر بگیریم ، طبق اصل لانه کبوتری ، حداقل دو کبوتر در یک لانه جای خواهند گرفت ، یعنی حداقل دو عدد طبیعی از بین اعداد انتخابی، باقیمانده یکسان در تقسیم بر ۲ دارند .

حال این دو عدد که باقیمانده یکسان دارند ، هر دو فرد یا هر دو زوج خواهند بود ، که در هر صورت مجموعشان عددی زوج است .

۱۲ مجموعهٔ اعداد $A=\{۱, ۲, \dots, ۸۴\}$ را در نظر می‌گیریم. نشان دهید هر زیرمجموعهٔ ۴۳ عضوی از A دارای حداقل ۲ عضو است که مجموعشان برابر با ۸۵ باشد.

اعداد مجموعه ی A در ۴۲ قفس به شکل زیر افراز می کنیم :

$$\{۱, ۸۴\} \text{ و } \{۲, ۸۳\} \text{ و } \{۳, ۸۲\} \text{ و } \cdots \text{ و } \{۴۲, ۴۳\}$$

قفس ها را به عنوان لانه ها و اعداد درون آنها را کبوتر در نظر می گیریم ، به طوری که می خواهیم از این لانه ها ۴۳ کبوتر به عنوان یک زیر مجموعه ی ۴۳ عضوی انتخاب کنیم .

طبق اصل لانه کبوتری ، حداقل دو کبوتر از یک لانه برداشته خواهند شد ، یعنی حداقل دو عدد در زیر مجموعه وجود دارند که مجموع آن ها ۸۵ است .

۱۳ مجموعهٔ اعداد $A=\{۱, ۵, ۹, ۱۳, \ldots, ۷۷, ۸۱, ۸۵\}$ را که به‌صورت یک تصاعد عددی مرتب شده‌اند، در نظر می‌گیریم. اگر از این مجموعه ۱۳ عضو انتخاب کنیم، نشان دهید که حداقل ۲ عدد در این ۱۳ عدد وجود دارد که مجموعشان برابر با ۹۰ باشد.

مجموعه A را به ۱۲ زیر مجموعه به شکل زیر افراز می کنیم :

$A_۱=\{۵,۸۵\}$ $\quad A_۲=\{۹,۸۱\}$ $\quad A_۳=\{۱۳,۷۷\}$ $\quad A_۴=\{۱۷,۷۳\}$ $\quad A_۵=\{۲۱,۶۹\}$ $\quad A_۶=\{۲۵,۶۵\}$

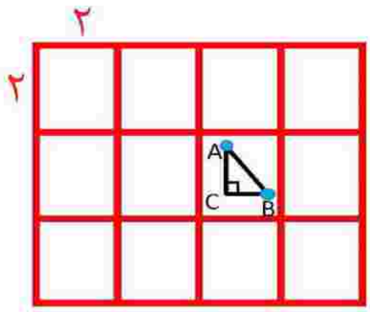
$A_۷=\{۲۹,۶۱\}$ $\quad A_۸=\{۳۳,۵۷\}$ $\quad A_۹=\{۳۷,۵۳\}$ $\quad A_{۱۰}=\{۴۱,۴۹\}$ $\quad A_{۱۱}=\{۴۵\}$ $\quad A_{۱۲}=\{۱\}$

همانطور که مشاهده می شود ، مجموع اعداد درون زیر مجموعه های دو عضوی برابر ۹۰ است .

زیر مجموعه های فوق را به عنوان ۱۲ لانه در نظر می گیریم که می خواهیم ۱۳ کبوتر از درون آنها انتخاب کنیم ، طبق اصل لانه کبوتری حداقل از یکی از لانه ۲ کبوتر انتخاب خواهد شد ، یعنی حداقل دو عدد انتخاب شده از یک زیر مجموعه هستند .

واضح است که مجموع آن دو برابر ۹۰ است .

۱۴ ۱۳ نقطه درون یک مستطیل ۸×۶ قرار دارند. نشان دهید حداقل ۲ نقطه از این ۱۳ نقطه وجود دارد که فاصلهٔ آنها از هم، کمتر از $\sqrt{۸}$ باشد.



مطابق شکل ، مستطیل را به ۱۲ مربع به ضلع ۲ تقسیم می کنیم و هر کدام از آنها را به عنوان یک لانه در نظر می گیریم.

در صورتی که هر نقطه را به عنوان یک کبوتر فرض کنیم ، می خواهیم ۱۳ کبوتر را در ۱۲ لانه جای دهیم . طبق اصل لانه کبوتری ، حداقل دو کبوتر در یک لانه جای می گیرند ،

یعنی حداقل دو نقطه مانند A و B در یک مربع واقع خواهند شد .

حال طبق قضیه فیثاغورث :

$$AB^۲=AC^۲+BC^۲ \xrightarrow[BC<۲]{AC<۲} AB^۲<۲^۲+۲^۲ \Rightarrow AB^۲<۸ \Rightarrow AB<\sqrt{۸}$$

۱۵ ۵ نقطه در صفحه با مختصات صحیح در نظر می‌گیریم. ثابت کنید حداقل دو نقطه از این ۵ نقطه وجود دارد، طوری‌که مختصات نقطهٔ وسط این دو نقطه نیز صحیح می‌باشد.

پنج نقطه با مختصات های صحیح را به عنوان ۵ کبوتر معرفی می کنیم .

برای هر نقطه با مختصات صحیح یکی از چهار حالت $\begin{bmatrix}\text{زوج}\\\text{زوج}\end{bmatrix}$ و $\begin{bmatrix}\text{زوج}\\\text{فرد}\end{bmatrix}$ و $\begin{bmatrix}\text{فرد}\\\text{زوج}\end{bmatrix}$ و $\begin{bmatrix}\text{فرد}\\\text{فرد}\end{bmatrix}$ وجود دارد ، که اگر به عنوان چهار لانه در نظر گرفته شوند ،

طبق اصل لانه کبوتری حداقل دو کبوتر در یک لانه جای می گیرند یعنی ، حداقل دو نقطه از آن نقاط از نظر زوج یا فرد بودن مختصات شبیه هم خواهند بود .

پس مجموع طول های آنها زوج و مجموع عرض های آنها نیز زوج است ، در نتیجه مختصات نقطه ی وسط صحیح خواهد شد .