

مؤلف کتاب ریاضیات **ریٹیج**

طراح ریاضے قلمچے ، گاج و...

مدرس **پروازی** گاما ، یادلاین و فرادرس

عضو انجمن ریاضے ایران

عضو انجمن بیوانفورماتیک ایران

مدرس برنامہ نویسے کامپیوتر

مؤلف جمع بندی

konkur.in



کتاب	مبحث	سال ۹۸	سال ۹۹	سال ۱۴۰۰	صفحه یا ریز مبحث پرتکرار
ریاضی ۱	مجموعه، الگو و دنباله	۱	۱	۱	۱۷ و ۱۸، ۲۷ تا ۳۰
ریاضی ۱	مثلثات	۴	۴	۴	۴۳
ریاضی ۳	مثلثات				۳۲، ۳۵، ۳۶ تا ۴۶
ریاضی ۲	مثلثات				۸۱ و ۸۸ تا ۹۴
ریاضی ۱	توان های گویا و عبارت های جبری	۰	۰	۰	۵۹ تا ۶۸
ریاضی ۱	معادله ها و نامعادله ها	۳	۳	۳	۷۵، ۸۰، ۸۶ تا ۹۰ و ۹۱ تا ۹۳
ریاضی ۱	تابع	۲	۲	۲	
ریاضی ۲	تابع				۵۲، ۵۴، ۶۱ و ۶۲
ریاضی ۳	تابع				۷، ۱۲ و ۱۳، ۱۵ تا ۲۱
ریاضی ۱	شمارش، بدون شمردن	۱	۱	۱	۱۲۲، ۱۲۹ و ۱۳۴
ریاضی ۱	آمار و احتمال	۳	۳	۳	۱۴۶ تا ۱۵۱
ریاضی ۲	آمار و احتمال				۱۴۵ تا ۱۴۷، ۱۶۰
ریاضی ۳	آمار و احتمال				۱۴۵ و ۱۴۶
ریاضی ۲	هندسه تحلیلی و جبر	۴	۴	۴	۵، ۸، ۱۲، ۱۳، ۲۰، ۲۲ تا ۲۴
ریاضی ۲	توابع نمایی و لگاریتمی	۲	۲	۲	۹۹ تا ۱۰۳، ۱۰۷ و ۱۱۱ تا ۱۱۴
ریاضی ۳	حد و پیوستگی	۴	۴	۴	۱۲۴، ۱۳۱ تا ۱۳۶ و ۱۳۸
ریاضی ۳	حد و پیوستگی				۵۱، ۵۲، ۵۵، ۵۶ و ۶۰
ریاضی ۳	مشتق	۴	۴	۲	۸۱، ۸۵ تا ۸۹، ۹۳ تا ۹۷
ریاضی ۳	کاربردهای مشتق	۴	۲	۲	۹ تا ۱۰ تا ۱۲۰

۱۰۱. حاصل $(1 + \frac{8}{x-4}) \div (2 + \frac{x^2}{x-4})$ کدام است؟

- ۱) $2x - 2$ ۲) $x - 2$ ۳) $x + 1$ ۴) $x + 2$

۱۰۲. اگر $\alpha = \sqrt{\sqrt{7+4\sqrt{3}}}$ و $\beta = \sqrt{\sqrt{7-4\sqrt{3}}}$ باشد، حاصل عبارت $(\alpha^x + \beta^x - \alpha\beta)(\alpha^x + \beta^x + \alpha\beta)$ کدام است؟

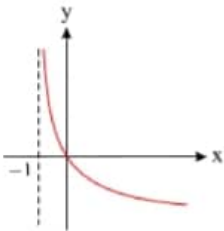
- ۱) ۱۷ ۲) ۱۶ ۳) ۱۵ ۴) ۱۸

۱۰۳. جواب کلی معادله‌ی مثلثاتی $2\cos^2 x + 2\sin x \cos x = 1$ به کدام صورت است؟

- ۱) $x = \frac{k\pi}{2} - \frac{\pi}{8}$ ۲) $x = \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{8}$ ۳) $x = k\pi - \frac{\pi}{8}$ ۴) $x = k\pi + \frac{\pi}{8}$

۱۰۴. شکل روبه‌رو، نمودار تابع $y = \log_p^{U(x)}$ است. $U(x)$ کدام است؟

- ۱) $x + 1$ ۲) $(x + 1)^{-1}$ ۳) $x - 1$ ۴) $1 - x$



۱۰۵. نمودار تابع $y = 2[\frac{x}{2}] + 1$; $x \in [-2, 6]$ از چند پاره خط مساوی هم، تشکیل شده است؟ ([]، نماد جزء صحیح است.)

- ۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۵ ۴) ۶

۱۰۶. در یک دنباله‌ی هندسی، مجموع لگاریتم‌های سه جمله‌ی اول آن برابر ۳ می‌باشد. لگاریتم جمله‌ی دوم کدام است؟

- ۱) $\log \frac{3}{2}$ ۲) ۱ ۳) $\log 3$ ۴) $\sqrt{3}$

۱۰۷. اگر α و β ریشه‌های معادله $(\log_9^x)^2 - 21 \log_{27}^x = -12$ باشند، حاصل $(\log_9^\alpha)^2 + (\log_9^\beta)^2$ کدام است؟

- ۱) ۳۰ ۲) ۲۰ ۳) ۲۵ ۴) ۳۵

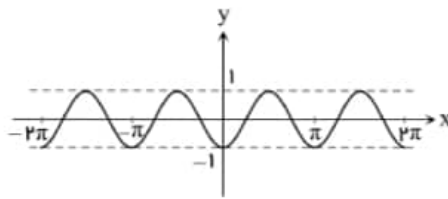
۱۰۸. اگر تابع $f(x) = \begin{cases} 2[x] + ax & x < 2 \\ 3ax + 1 & x > 2 \end{cases}$ در $x = 2$ حد داشته باشد، مقدار $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ کدام است؟ ([]، نماد جزء صحیح است.)

- ۱) $\frac{1}{4}$ ۲) $\frac{1}{16}$ ۳) $-\frac{1}{4}$ ۴) $-\frac{1}{16}$

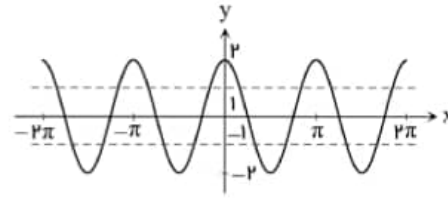
۱۰۹. نقطه $A(3, -6)$ متعلق به تابع $y = f(x)$ است، نقطه‌ی متناظر آن در تابع $g(x) = -2f(2x - 4) + 3$ کدام است؟

- ۱) $A'(2, 15)$ ۲) $A'(\frac{5}{2}, 15)$ ۳) $A'(\frac{5}{2}, -9)$ ۴) $A'(2, -9)$

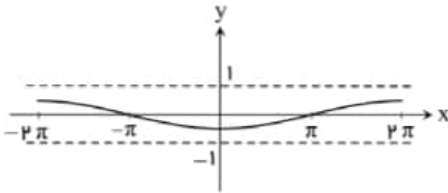
۱۱۰. نمودار مربوط به ضابطه‌های $y = -\frac{1}{2}\cos(-\frac{1}{2}x)$ و $y = 2\cos 2x$ و $y = \cos(\frac{1}{2}x)$ و $y = -\cos 2x$ به ترتیب از راست به چپ کدام است؟



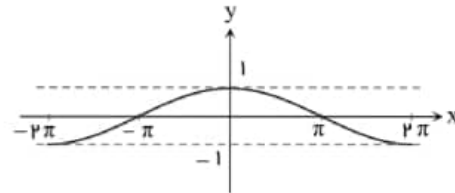
ب



الف



د



ج

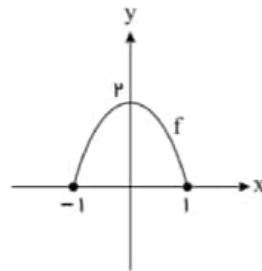
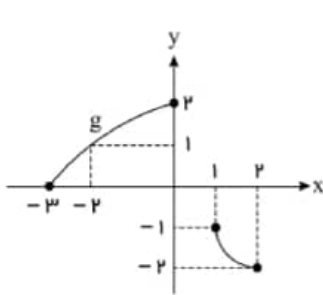
د-الف-ج-ب (۴)

ب-الف-ج-د (۳)

ب-ج-الف-د (۲)

د-ج-الف-ب (۱)

۱۱۱. نمودار تابع‌های f و g در شکل مقابل رسم شده است. مجموع اعداد صحیح متعلق به دامنه تابع $f \circ g$ کدام است؟



-۱ (۱)

-۲ (۲)

-۳ (۳)

-۴ (۴)

۱۱۲. اگر x_1 و x_2 جواب‌های معادله $x^2 - 3x + 1 = 0$ حاصل $\sqrt{x_1^2(3x_2 - 1)}$ کدام است؟

۲ (۴)

۱ (۳)

 $\sqrt{3}$ (۲) $\sqrt{2}$ (۱)

۱۱۳. اگر α و β ریشه‌های معادله‌ی درجه‌ی دوم $x^2 + 5x - 1 = 0$ باشند، حاصل عبارت $\frac{\alpha^2\beta + \alpha\beta^2}{(\alpha^2 + 5\alpha + 4)(\beta^2 + 5\beta + 4)}$ کدام است؟

 $\frac{9}{40}$ (۴) $\frac{27}{40}$ (۳) $-\frac{9}{40}$ (۲) $-\frac{27}{40}$ (۱)

۱۱۴. نقاط $A(4, 2)$ و $B(6, -2)$ مفروض‌اند. اگر مجموع فواصل $p(m, 0)$ از A و B مینیمم باشد، فاصله‌ی p تا مبدأ مختصات کدام است؟

۶ (۴)

۵ (۳)

۴ (۲)

۳ (۱)

۱۱۵. نقاط $A|\frac{m}{m-1}$ و $B|_{-4}^5$ و $C|_{-2}^1$ رئوس مثلث ABC هستند که در رأس C قائمه است. اندازه‌ی وتر این مثلث کدام است؟

 $2\sqrt{20}$ (۴) $\sqrt{20}$ (۳) $\sqrt{10}$ (۲) $2\sqrt{10}$ (۱)

۱۱۶. پاره‌خطی که وسط ساق‌های دوزنقه $ABCD$ را به هم وصل می‌کند، اقطار دوزنقه را در نقاط M و N قطع می‌کند. اگر قاعده‌های بزرگ و کوچک

دوزنقه به ترتیب ۹ و ۴ واحد باشند، طول MN کدام است؟

۳٫۵ (۴)

۳ (۳)

۲٫۵ (۲)

۲ (۱)

۱۱۷. اگر $\sin x + \cos x = \frac{4}{3}$ باشد حاصل $\sqrt{\tan x} + \sqrt{\cot x}$ چقدر است؟

$$\frac{18}{7} \quad \text{④}$$

$$\sqrt{\frac{32}{7}} \quad \text{③}$$

$$\sqrt{\frac{18}{7}} \quad \text{②}$$

$$\sqrt{\frac{50}{7}} \quad \text{①}$$

۱۱۸. حاصل عبارت زیر کدام است؟

$$A = \frac{\sin 15^\circ + \sin 30^\circ}{1 + \cos 15^\circ + \cos 30^\circ} + \frac{1 + \cos 15^\circ + \cos 30^\circ}{\sin 15^\circ + \sin 30^\circ}$$

$$4 \quad \text{④}$$

$$2 \quad \text{③}$$

$$1 \quad \text{②}$$

$$\text{صفر} \quad \text{①}$$

۱۱۹. اگر $\sin \frac{x}{2} - \cos \frac{x}{2} = \frac{2}{3}$ حاصل $\sin(2x - \frac{5\pi}{2})$ کدام است؟

$$-\frac{31}{81} \quad \text{④}$$

$$-\frac{4}{9} \quad \text{③}$$

$$\frac{4}{9} \quad \text{②}$$

$$\frac{31}{81} \quad \text{①}$$

۱۲۰. اگر $f(x) = 32 \cos^2(x) \cos^2(2x) \cos^2(4x) \cos^2(8x) \cos^2(16x)$ باشد، مقدار $f(\frac{\pi}{12})$ کدام است؟

$$\frac{6 - \sqrt{27}}{32} \quad \text{④}$$

$$\frac{6 - \sqrt{27}}{16} \quad \text{③}$$

$$\frac{6 + \sqrt{27}}{16} \quad \text{②}$$

$$\frac{6 + \sqrt{27}}{32} \quad \text{①}$$

۱۲۱. در تابع با ضابطه $f(x) = \frac{ax + \sqrt{4x^2 + 5}}{2x + 2}$ اگر $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \frac{5}{2}$ باشد، آنگاه حد $f(x)$ وقتی $x \rightarrow -1$ کدام است؟

$$\frac{5}{4} \quad \text{④}$$

$$\frac{3}{2} \quad \text{③}$$

$$\frac{5}{6} \quad \text{②}$$

$$\frac{2}{3} \quad \text{①}$$

۱۲۲. تابع $f(x) = \sin(\pi \cos x)$ در بازه $(0, \pi)$ چگونه است؟

② ابتدا مینیمم و سپس ماکسیمم نسبی دارد.

① ابتدا ماکسیمم و سپس مینیمم نسبی دارد.

④ اکسترمم نسبی ندارد.

③ تنها یک اکسترمم نسبی دارد.

۱۲۳. اگر f تابعی مشتق پذیر باشد و $f(3x + \sqrt{x^2 + 1}) = 2x + \sin x$ حاصل $f'(1)$ کدام است؟

$$-1 \quad \text{④}$$

$$-2 \quad \text{③}$$

$$2 \quad \text{②}$$

$$1 \quad \text{①}$$

۱۲۴. اگر $f(x) = |x^2 - 2| - [-3x^2]x^2$ باشد، حاصل $f'_+(-\sqrt{2})$ و $f'_-(-\sqrt{2})$ به ترتیب برابر کدام است؟ (، []، نماد جزء صحیح است.)

$$f'_-(-\sqrt{2}) = \text{وجود ندارد}, \quad f'_+(-\sqrt{2}) = -46\sqrt{2} \quad \text{②}$$

$$f'_-(-\sqrt{2}) = 50\sqrt{2}, \quad f'_+(-\sqrt{2}) = \text{وجود ندارد} \quad \text{①}$$

$$f'_-(-\sqrt{2}) = -46\sqrt{2}, \quad f'_+(-\sqrt{2}) = \text{وجود ندارد} \quad \text{④}$$

$$f'_-(-\sqrt{2}) = \text{وجود ندارد}, \quad f'_+(-\sqrt{2}) = 50\sqrt{2} \quad \text{③}$$

۱۲۵. کمترین حجم مخروط محیط بر کره‌ای به شعاع ۱ سانتی‌متر کدام است؟

$$\frac{8\pi}{3} \quad \text{④}$$

$$\frac{4\pi}{3} \quad \text{③}$$

$$\frac{16\pi}{3} \quad \text{②}$$

$$\frac{32\pi}{3} \quad \text{①}$$

۱۲۶. می‌خواهیم یک قوطی فلزی استوانه‌ای شکل و در باز بسازیم که گنجایش آن دقیقاً یک لیتر باشد. شعاع قاعده قوطی چند سانتی‌متر باشد تا مقدار فلز به کار رفته در تولید آن مینیمم شود؟

$$10\sqrt{\pi} \quad \text{④}$$

$$\frac{10}{\sqrt{\pi}} \quad \text{③}$$

$$10\sqrt{\pi} \quad \text{②}$$

$$\frac{10}{\sqrt{16}} \quad \text{①}$$

۱۲۷. حروف کلمه‌ی LAGRANGE را با جایگشت‌های مختلف کنار هم قرار می‌دهیم در چند حالت حروف یکسان کنار هم قرار می‌گیرند؟

$$1440 \quad \text{④}$$

$$720 \quad \text{③}$$

$$540 \quad \text{②}$$

$$360 \quad \text{①}$$

۱۲۸. سه شخص A و B و C به هدفی تیراندازی می‌کنند. احتمال به هدف زدن این سه شخص به ترتیب $\frac{1}{6}$ و $\frac{1}{4}$ و $\frac{1}{3}$ است. اگر بدانیم فقط یک تیر به هدف خورده است، احتمال آن که تیر شخص A به هدف خورده باشد، کدام است؟

- (۱) $\frac{31}{72}$ (۲) $\frac{6}{31}$ (۳) $\frac{10}{31}$ (۴) $\frac{15}{31}$

۱۲۹. در کیسه‌ای ۵ مهره با شماره‌های ۱ تا ۵ وجود دارد. این مهره‌ها را به طور تصادفی پی در پی بدون جای‌گذاری خارج می‌کنیم. با کدام احتمال دو مهره با شماره‌ی فرد متوالیاً خارج نمی‌شوند؟

- (۱) $\frac{1}{6}$ (۲) $\frac{15}{6}$ (۳) $\frac{2}{6}$ (۴) $\frac{25}{6}$

۱۳۰. طول نقطه‌ی M واقع بر محور طول‌ها که از دو نقطه‌ی $B(-2, 3)$ و $C(4, -1)$ به یک فاصله باشد کدام است؟

- (۱) $\frac{-1}{3}$ (۲) $\frac{2}{3}$ (۳) $\frac{1}{3}$ (۴) $\frac{-2}{3}$

محل انجام محاسبه

۱۰۱. گزینه ۲ در هر پروانه مخرج مشترک می‌گیریم:

روش اول:

$$\begin{aligned} \left(2 + \frac{x^2}{x-4} \right) + \left(1 + \frac{1}{x-4} \right) &= \frac{2(x-4) + x^2}{x-4} \div \frac{x-4+1}{x-4} = \frac{x^2 + 2x - 8}{x-4} \times \frac{x-4}{x+4} \\ &= \frac{(x+4)(x-2)}{x-4} \times \frac{x-4}{x+4} = x-2 \end{aligned}$$

روش دوم: یک عدد دلخواه مثلا $x = 1$ را در عبارت جایگزین می‌کنیم.

$$x = 1 \rightarrow \left(2 - \frac{1}{3} \right) \div \left(1 - \frac{1}{3} \right) = \frac{5}{3} \div \left(-\frac{5}{3} \right) = -1$$

تنها گزینه‌ی دوم است که اگر به جای x آن یک قرار دهید حاصل برابر (-1) می‌شود.

$$\begin{aligned}
 (\alpha^r + \beta^r - \alpha\beta)(\alpha^r + \beta^r + \alpha\beta) &= (\alpha^r + \beta^r)^2 - (\alpha\beta)^r = \alpha^{2r} + \beta^{2r} + 2\alpha^r\beta^r - \alpha^r\beta^r \\
 &= \alpha^{2r} + \beta^{2r} + \alpha^r\beta^r = 1 + 1 + 1 = 3
 \end{aligned}$$

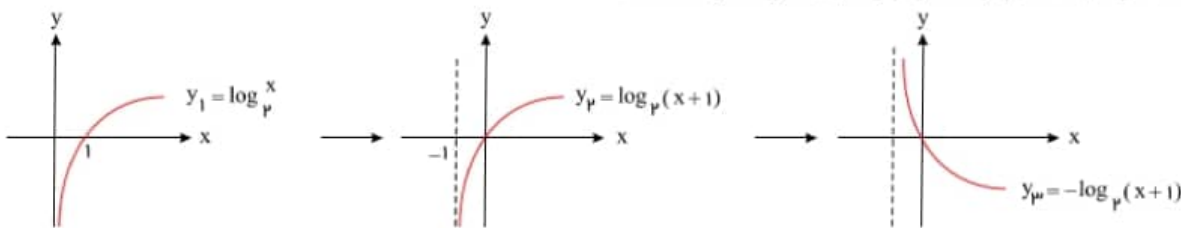
می‌دانیم: $\boxed{2 \sin a \cos a = \sin 2a, \cos 2a = 2 \cos^2 a - 1}$

$$\begin{aligned}
 2 \cos^2 x + 2 \sin x \cos x &= 1 \rightarrow 2 \sin x \cos x = 1 - 2 \cos^2 x \\
 \rightarrow 2 \sin x \cos x &= -(2 \cos^2 x - 1) \rightarrow \sin 2x = -\cos 2x
 \end{aligned}$$

طرفین را بر $\cos 2x$ تقسیم می‌کنیم:

$$\rightarrow \tan 2x = -1 = \tan\left(-\frac{\pi}{4}\right) \rightarrow 2x = k\pi - \frac{\pi}{4} \rightarrow x = \frac{k\pi}{2} - \frac{\pi}{8}$$

نمودار تابع داده شده $y = \log_p^x$ است که یک واحد به سمت چپ برده شده و سپس نسبت به محور x قرینه شده است.



پس: $y = -\log_p^{(x+1)} \rightarrow y = \log_p^{(x+1)^{-1}} \rightarrow U(x) = (x+1)^{-1}$

روش دوم:

با توجه به شکل، دامنه تابع داده شده $x > -1$ است بنابراین گزینه‌های سوم و چهارم حذف می‌شوند. با توجه به شکل وقتی $x \rightarrow (-1)^+$ نمودار تابع به سمت $+\infty$ می‌رود.

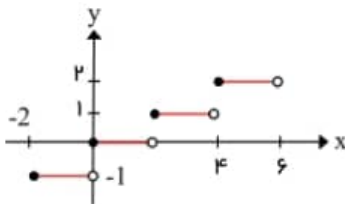
گزینه اول: $\lim_{x \rightarrow (-1)^+} \log_p(x+1) = \log_p 0^+ = -\infty$ نادرست

گزینه دوم: $\lim_{x \rightarrow (-1)^+} \log_p \frac{1}{x+1} = \log_p \frac{1}{0^+} = \log_p(+\infty) = +\infty$ درست

توجه کنید اگر $a > 1$ باشد $\log_a^+ = -\infty$ و $\log_a^{+\infty} = +\infty$ است.

$$y = 2\left[\frac{x}{2}\right] + 1 \quad x \in [-2, 6)$$

کافی است تعداد پاره خط‌های تابع $y = \left[\frac{x}{2}\right]$ در بازه $[-2, 6)$ به دست آوریم زیرا ضرب پشت جزء صحیح و عدد ۱ تأثیری روی تعداد پاره خط‌ها ندارند برای این که ضرب، عرض‌ها را دو برابر کرده و عدد یک، شکل را یک واحد بالا می‌برد.



توجه کنید در تابع $y = [nx]$ اگر $n > 0$ باشد پلکان صعودی و طول هر پله $\frac{1}{n}$ و ارتفاع پله‌ها یک واحد است.

می‌دانیم: $\boxed{\log_k^a + \log_k^b = \log_k^{ab}, \log_k^a = c \rightarrow a = b^c}$

طبق قاعده‌ی اندیس‌ها در دنباله‌ی هندسی اگر $m + n = p + q$ باشد آن‌گاه $a_m \cdot a_n = a_p \cdot a_q$ است.

$$\begin{aligned}
 \log a_1 + \log a_7 + \log a_9 &= 3 \rightarrow \log a_1 a_7 a_9 = 3 \rightarrow a_1 a_7 a_9 = 10^3 \\
 \xrightarrow[\text{قاعده‌ی انبساطی}]{a_1 a_7 a_9 = a_7^3} & a_7^3 = 10^3 \\
 \rightarrow a_7 &= 10 \rightarrow \log a_7 = \log 10 = 1
 \end{aligned}$$

$$\log_{b^m}^a = \frac{n}{m} \log_b^a, \log_b^a = k \rightarrow a = b^k$$

$$(\log_{25}^x)^r - 21 \log_{25}^x = -12 \rightarrow (\log_{25}^x)^r - 21 \log_{25}^x + 12 = 0$$

$$\left(\frac{r}{2} \log_{25}^x\right)^r - \frac{21}{2} \log_{25}^x + 12 = 0 \rightarrow (\log_{25}^x)^r - 21 \log_{25}^x + 12 = 0$$

$$\log_{25}^x = A \rightarrow A^r - 21A + 12 = 0 \rightarrow (A-3)(A-4) = 0$$

$$A=3, A=4 \rightarrow \log_{25}^x = 3 \rightarrow x = 25^3 = 25^3, \log_{25}^x = 4 \rightarrow x = 25^4 = 25^4$$

$$(\log_{25}^2)^r + (\log_{25}^3)^r = (\log_{25}^{2 \cdot 3})^r + (\log_{25}^{3 \cdot 2})^r = (\log_{25}^6)^r + (\log_{25}^6)^r = 2 \cdot 25^r = 25^r$$

روش دوم:

$$A^r - 21A + 12 = 0$$

$$\begin{array}{ccc} S & = & 21 \\ \downarrow & & \downarrow \\ \text{مجموع ریشه‌ها} & & \text{حاصل ضرب ریشه‌ها} \end{array} \quad P = 12$$

$$A_1 = \log_{25}^2 \rightarrow A_1^r + A_2^r = S^r - 2P = 21^r - 24 = 25^r$$

$$A_2 = \log_{25}^3$$

۱۰۸. گزینه ۲ ابتدا توجه کنید که:

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} (2[x] + ax) = \lim_{x \rightarrow 2^-} (2 + ax) = 2 + 2a$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} (2ax + 1) = 6a + 1$$

بنابراین:

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) \Rightarrow 2 + 2a = 6a + 1 \Rightarrow a = \frac{1}{4}$$

در نتیجه:

$$\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} f(x) = \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} (2[x] + \frac{1}{4}x) = \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} (0 + \frac{1}{4}x) = \frac{1}{8}$$

۱۰۹. گزینه ۲

تابع $f(x)$ چهار واحد به راست برده شده، سپس طول تقاطش نصف شده است و سپس عرض‌ها -2 برابر شده است و در نهایت شکل سه واحد به بالا برده شده است.

$$A \begin{array}{|c|} \hline 2 \\ \hline -6 \\ \hline \end{array} \xrightarrow{\text{چهار واحد راست}} \begin{array}{|c|} \hline 2 \\ \hline -6 \\ \hline \end{array} \xrightarrow{\text{طول نصف}} \begin{array}{|c|} \hline 1 \\ \hline -6 \\ \hline \end{array} \xrightarrow{\text{عرض } -2 \text{ برابر}} \begin{array}{|c|} \hline 1 \\ \hline 12 \\ \hline \end{array} \xrightarrow{\text{سه واحد بالا}} \begin{array}{|c|} \hline 4 \\ \hline 15 \\ \hline \end{array}$$

۱۱۰. گزینه ۲

$$y = -\cos 2x \Rightarrow f(0) = -1, T = \frac{2\pi}{2} = \pi, R_f = [-1, 1]$$

$$y = \cos\left(\frac{1}{2}x\right) \Rightarrow f(0) = 1, T = \frac{2\pi}{\frac{1}{2}} = 4\pi, R_f = [-1, 1]$$

$$y = 2 \cos 2x \Rightarrow f(0) = 2, T = \frac{2\pi}{2} = \pi, R_f = [-2, 2]$$

$$y = -\frac{1}{2} \cos\left(-\frac{1}{2}x\right) \Rightarrow f(0) = -\frac{1}{2}, T = \frac{2\pi}{\frac{1}{2}} = 4\pi, R_f = \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$$

با توجه به محدوده برد توابع و مقدار تابع در نقطه $x=0$ و همچنین تناوب تابع، می‌توان تشخیص داد که گزینه ۲، صحیح است.

۱۱۱. گزینه ۴ ابتدا توجه کنید که $D_f = [-1, 1]$ و $D_g = [-3, 0] \cup [1, 2]$ بنابراین:

$$D_{f \circ g} = \{x | x \in D_g, g(x) \in D_f\} = \{x | x \in [-3, 0] \cup [1, 2], -1 \leq g(x) \leq 1\}$$

از طرف دیگر جواب نامعادله $-1 \leq g(x) \leq 1$ به صورت $[-3, -2] \cup \{1\}$ است.

پس:

$$D_{f \circ g} = ([-3, 0] \cup [1, 2]) \cap ([-3, -2] \cup \{1\}) = [-3, -2] \cup \{1\}$$

پس اعداد صحیح $-2, -3, 0, 1$ در دامنه تابع $f \circ g$ هستند که مجموع آن‌ها برابر -4 است.

۱۱۲. گزینه ۲

اگر x_1 و x_2 جواب‌های معادله درجه دوم $ax^2 + bx + c = 0$ باشند، در خود معادله صدق می‌کنند و $\frac{c}{a} = x_1 \cdot x_2$ است.

$$x^r - 3x + 1 = 0 \Rightarrow x_r^r - 3x_r + 1 = 0 \Rightarrow 3x_r - 1 = x_r^r$$

$$\Rightarrow \sqrt{x_1^r(3x_r - 1)} = \sqrt{x_1^r x_r^r} = |x_1 x_r| = \frac{c}{a} = 1$$

۱۱۳. گزینه ۱ از عبارتهای $\alpha^r + 5\alpha$ و $\beta^r + 5\beta$ و $x^r + 5x$ متوجه می‌شویم که باید ریشه‌های معادله را در معادله صدق دهیم.

$$\alpha \xrightarrow{\text{صدق در معادله}} \alpha^r + 5\alpha - 1 = 0 \rightarrow \alpha^r + 5\alpha = 1$$

$$\beta \xrightarrow{\text{صدق در معادله}} \beta^r + 5\beta - 1 = 0 \rightarrow \beta^r + 5\beta = 1$$

در ضمن $\alpha\beta = \frac{c}{a} = -1$ و $\alpha + \beta = -\frac{b}{a} = -5$ می‌باشد.

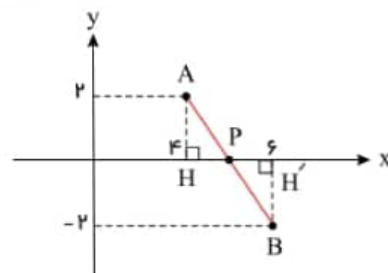
$$\frac{\alpha^r\beta + \alpha\beta^r}{(\alpha^r + 5\alpha + 4)(\beta^r + 5\beta + 4)} = \frac{\alpha\beta(\alpha^r + \beta^r)}{(1+4)(1+4)}$$

$$= \frac{\alpha\beta((\alpha + \beta)^r - 2\alpha\beta)}{(5)(5)} = \frac{-1(25 + 2)}{25} = \frac{-27}{25}$$

۱۱۴. گزینه ۲ با توجه به شکل مسئله، چون نقطه‌ی P روی محور OX قرار دارد، زمانی $PA + PB$ مینیمم است که نقطه‌ی P محل برخورد AB با محور Ox باشد. پس:

$$\triangle APH \cong \triangle BPH' \Rightarrow PH = PH'$$

$$P \text{ وسط } P \Rightarrow P = (5, 0) \Rightarrow m = 5 \rightarrow OP = 5$$



۱۱۵. گزینه ۱

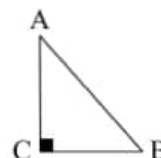
ابتدا شیب خط واصل میان نقطه A و B ، C و B را تعیین می‌کنیم:

$$m_{AC} = \frac{y_A - y_C}{x_A - x_C} = \frac{m - 1 + 2}{m - 1} = \frac{m + 1}{m - 1}$$

$$m_{BC} = \frac{y_B - y_C}{x_B - x_C} = \frac{-4 + 2}{5 - 1} = \frac{-1}{2}$$

$$\xrightarrow{BC \perp AC} m_{AC} \cdot m_{BC} = -1$$

عود است



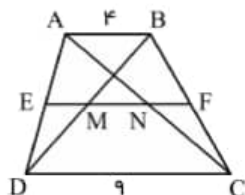
چون ضلع AC بر ضلع BC عمود است بنابراین حاصل ضرب شیب‌هایشان -1 می‌باشد.

$$\Rightarrow \frac{-m - 1}{2m - 2} = -1 \rightarrow -m - 1 = -2m + 2 \rightarrow m = 3$$

$$\begin{aligned} \text{وتر } AB &= \sqrt{(x_A - x_B)^r + (y_A - y_B)^r} = \sqrt{(m - 5)^r + (m - 1 + 4)^r} \\ &= \sqrt{(m - 5)^r + (m + 3)^r} \stackrel{m=3}{=} \sqrt{4 + 36} = 2\sqrt{10} \end{aligned}$$

۱۱۶. گزینه ۲

پاره‌خطی که وسط دو ساق را به هم وصل می‌کند موازی قاعده‌هاست و طول آن میانه طول قاعده‌هاست:



$$EF = \frac{4 + 9}{2} = 6,5$$

$$\frac{EM}{AB} = \frac{1}{2} \Rightarrow EM = 2$$

$$\frac{NF}{AB} = \frac{1}{2} \Rightarrow FN = 2 \Rightarrow MN = 6,5 - 2 - 2 = 2,5$$

طبق قضیه تالس در ABD داریم:

طبق قضیه تالس در ABC داریم:

۱۱۷. گزینه ۳

$$(\sin a + \cos a)^r = 1 + \sin 2a, \quad \tan a + \cot a = \frac{2}{\sin 2a} \quad \text{می‌دانیم:}$$

$$\sin x + \cos x = \frac{2}{3} \xrightarrow{\text{توان ۲}} 1 + \sin 2x = \frac{16}{9} \Rightarrow \sin 2x = \frac{5}{9}$$

$$\sqrt{\tan x} + \sqrt{\cot x} = A \xrightarrow{\text{توان ۲}} \tan x + \cot x + \underbrace{\sqrt{\tan x \cot x}}_1 = A^2$$

$$\rightarrow \frac{2}{\sin 2x} + 2 = A^2 \rightarrow \frac{2}{\frac{5}{9}} + 2 = A^2 \rightarrow \frac{18}{5} + 2 = A^2 \rightarrow A^2 = \frac{32}{5} \rightarrow A = \sqrt{\frac{32}{5}}$$

۱۱۸. گزینه ۴ می‌دانیم $\sin 2a = 2 \sin a \cos a$ و $1 + \cos 2a = 2 \cos^2 a$ و $\tan a + \cot a = \frac{2}{\sin 2a}$ است.

$$\frac{\sin 15^\circ + \sin 30^\circ}{1 + \cos 30^\circ + \cos 15^\circ} + \frac{1 + \cos 30^\circ + \cos 15^\circ}{\sin 15^\circ + \sin 30^\circ} = \frac{\sin 15^\circ + 2 \sin 15^\circ \cos 15^\circ}{2 \cos^2 15^\circ + \cos 15^\circ} + \frac{2 \cos^2 15^\circ + \cos 15^\circ}{\sin 15^\circ + 2 \sin 15^\circ \cos 15^\circ} = \frac{\sin 15^\circ (1 + 2 \cos 15^\circ)}{\cos 15^\circ (2 \cos 15^\circ + 1)}$$

$$+ \frac{\cos 15^\circ (2 \cos 15^\circ + 1)}{\sin 15^\circ (1 + 2 \cos 15^\circ)} = \tan 15^\circ + \cot 15^\circ = \frac{2}{\sin 30^\circ} = \frac{2}{\frac{1}{2}} = 4$$

۱۱۹. گزینه ۱

$$(\sin x - \cos x)^2 = 1 - \sin 2x$$

$$\cos 2x = 1 - 2 \sin^2 x$$

$$\sin \frac{x}{2} - \cos \frac{x}{2} = \frac{2}{3} \rightarrow (\sin \frac{x}{2} - \cos \frac{x}{2})^2 = \frac{4}{9}$$

$$1 - \sin x = \frac{4}{9} \rightarrow 1 - \frac{4}{9} = \sin x \rightarrow \sin x = \frac{5}{9}$$

$$\sin(2x - \frac{5\pi}{2}) = -\cos 2x = -(1 - 2 \sin^2 x) = -(1 - 2 \times \frac{25}{81}) = -\frac{31}{81}$$

۱۲۰. گزینه ۱

$$f(\frac{\pi}{12}) = 2^2 \cos^2 \frac{\pi}{12} \cdot \cos^2 \frac{\pi}{6} \cdot \cos^2 \frac{\pi}{3} \cdot \cos^2 \frac{2\pi}{3} \cdot \cos^2 \frac{5\pi}{3}$$

توجه کنید که $\frac{\pi}{12}$ رادیان معادل 15° است و $\cos \frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}$ و $\cos \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ و $\cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$ و $\cos \frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2}$ و $\cos \frac{5\pi}{3} = \frac{1}{2}$ است. پس داریم:

$$f(\frac{\pi}{12}) = 2^2 (\frac{2+\sqrt{3}}{4}) (\frac{3}{4}) (\frac{1}{4}) (\frac{1}{4}) (\frac{1}{4}) = \frac{2(2+\sqrt{3})}{32} = \frac{6+2\sqrt{3}}{32} = \frac{6+\sqrt{27}}{32}$$

۱۲۱. گزینه ۲

می‌دانیم در ∞ عبارت $\sqrt{4x^2+5}$ هم‌ارز با $|2x|$ است:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{ax + \sqrt{4x^2+5}}{2x+2} \xrightarrow{\text{توان ۲}} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{ax + \sqrt{4x^2}}{2x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{ax + 2|x|}{2x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{ax + 2x}{2x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(a+2)x}{2x} = \frac{a+2}{2} = \frac{5}{2} \rightarrow a = 3$$

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{3x + \sqrt{4x^2+5}}{2x+2} \stackrel{HOP}{=} \lim_{x \rightarrow -1} \frac{3 + \frac{1}{2\sqrt{4x^2+5}}}{2} = \frac{3 - \frac{1}{2}}{2} = \frac{10}{4} = \frac{5}{2}$$

۱۲۲. گزینه ۱ نقاط بحرانی تابع f را تعیین می‌کنیم و f' را تعیین علامت می‌کنیم:

$$f'(x) = -\pi \sin x \cos(\pi \cos x)$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \sin x = 0 \xrightarrow{x \in (\pi, \pi)} \text{جواب ندارد} \\ \cos(\pi \cos x) = 0 \rightarrow \pm \frac{\pi}{2} = \pi \cdot \cos x \rightarrow \cos x = \pm \frac{1}{2} \xrightarrow{x \in (\pi, \pi)} x = \frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3} \end{cases}$$

x	0	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{2\pi}{3}$	π
f'	$+$	0	$-$	0
f	\nearrow	max	\searrow	min

مشق تابع را در بازه $(0, \pi)$ تعیین علامت می‌کنیم:

$$f(3x + \sqrt{x^r + 1}) = 2x + \sin x \xrightarrow{\text{از دو طرف مشتق می‌گیریم}} f'(3x + \sqrt{x^r + 1}) \cdot \left(3 + \frac{x}{\sqrt{x^r + 1}}\right) = 2 + \cos x$$

$$3x + \sqrt{x^r + 1} = 1 \Rightarrow \sqrt{x^r + 1} = 1 - 3x \xrightarrow{1-3x \geq 0} x^r + 1 = 9x^r + 1 - 6x \Rightarrow 8x^r - 6x = 0$$

$$\Rightarrow 8x^r - 6x = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \frac{3}{4} \end{cases} \text{ غ ق ق}$$

البته با کمی دقت مشخص بود به‌ازای $x = 0$ ، عبارت داخل پرانتز ۱ می‌شود.

$$x = 0 \Rightarrow f'(1) \times (3 + 0) = 2 + 1 \Rightarrow f'(1) = 1$$

۱۳۴ . گزینه ۲ بدیهی است که تابع $y = |x^r - 2|$ همواره پیوسته است و تابع $y = [-3x^r]x^r$ در نقطه $x = -\sqrt{2}$ فقط پیوستگی راست دارد. زیرا:

$$x < -\sqrt{2} \Rightarrow x^r > 2 \Rightarrow -3x^r < -6 \Rightarrow [-3x^r] = [(-6)^-] = -7$$

$$x \geq -\sqrt{2} \Rightarrow x^r \leq 2 \Rightarrow -3x^r \geq -6 \Rightarrow [-3x^r] = [(-6)^+] = -6$$

بنابراین $f'_+(-\sqrt{2})$ و $f'_-(-\sqrt{2})$ وجود ندارد، زیرا تابع f در نقطه $x = -\sqrt{2}$ پیوستگی چپ ندارد. برای محاسبه $f'_+(-\sqrt{2})$ هم باید قدرمطلق را تعیین علامت کنیم و هم به جای $[-3x^r]$ مقدار عددی آن را قرار دهیم. یعنی خواهیم داشت:

$$f(x) = -x^r + 2 - (-6)x^r \Rightarrow f(x) = -x^r + 2 + 6x^r = -2x + 24x^r$$

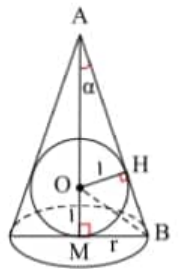
$$\Rightarrow f'_+(-\sqrt{2}) = -2(-\sqrt{2}) + 24(-\sqrt{2})^r = 2\sqrt{2} - 48\sqrt{2} = -46\sqrt{2}$$

۱۳۵ . گزینه ۴ شکلی از سوال رسم می‌کنیم و ارتباط بین متغیرها را می‌نویسیم:

$$AM = h, \quad AO = h - 1$$

$$\triangle AOH: \sin \alpha = \frac{OH}{OA} = \frac{1}{h-1}$$

$$\triangle AMB: \tan \alpha = \frac{BM}{AM} = \frac{r}{h} \Rightarrow \cot \alpha = \frac{h}{r}$$



از اتحادهای مثلثاتی داریم:

$$1 + \cot^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha} \Rightarrow 1 + \frac{h^r}{r^r} = \frac{1}{\left(\frac{1}{h-1}\right)^r} \Rightarrow 1 + \frac{h^r}{r^r} = (h-1)^r$$

$$\Rightarrow 1 + \frac{h^r}{r^r} = h^r - 2h + 1 \Rightarrow \frac{h^r}{r^r} = h^r - 2h \Rightarrow r^r = \frac{h^r}{h^r - 2h} = \frac{h}{h-2}$$

$$V = \frac{1}{3}\pi r^r h = \frac{\pi}{3}h\left(\frac{h}{h-2}\right) = \frac{\pi}{3}\left(\frac{h^r}{h-2}\right) \Rightarrow V'(h) = \frac{\pi}{3}\left(\frac{2h(h-2) - h^r}{(h-2)^2}\right)$$

$$V'(h) = \frac{\pi}{3}\left(\frac{h^r - 4h}{(h-2)^2}\right) = 0 \Rightarrow h = 0, \quad h = 4$$

$$\begin{cases} h = 0 \Rightarrow V = 0 \text{ (غ ق ق)} \\ h = 4 \Rightarrow V_{\min} = \frac{\pi}{3} \times \frac{16}{2} = \frac{8\pi}{3} \end{cases}$$

۱۳۶ . گزینه ۲ باید مساحت کل استوانه کمترین مقدار ممکن گردد.

$$V = 1L = 1000 \text{ cm}^r$$

$$\pi r^r h = 1000 \text{ cm}^r \Rightarrow h = \frac{1000}{\pi r^r}$$

$$S = \text{مساحت کل استوانه} = \text{مساحت قاعده} + \text{سطح جانبی} = \pi r^2 + 2\pi r h \Rightarrow S(r) = \pi r^2 + 2\pi r \left(\frac{1000}{\pi r^2}\right) \Rightarrow S(r) = \pi r^2 + \frac{2000}{r}$$

$$S'(r) = 2\pi r - \frac{2000}{r^2} = 0 \Rightarrow 2\pi r = \frac{2000}{r^2} \Rightarrow r^3 = \frac{1000}{\pi} \Rightarrow r = \frac{10}{\sqrt[3]{\pi}}$$

۱۲۷. گزینه ۳

AA را یک حرف و GG را نیز یک حرف در نظر می‌گیریم.

$$\boxed{AA} \boxed{GG} LRNE \Rightarrow 6! = 720$$

جابه‌جایی A با A و جابه‌جایی G با G چون یکسان هستند اهمیت ندارد.

۱۲۸. گزینه ۲ چون می‌دانیم فقط یک تیر به هدف خورده است، حالات کل این مسأله به صورت زیر است.

A, B', C' یا A', B, C' یا A', B', C

$$\left(\frac{1}{6} \times \frac{3}{4} \times \frac{2}{3}\right) + \left(\frac{5}{6} \times \frac{1}{4} \times \frac{2}{3}\right) + \left(\frac{5}{6} \times \frac{3}{4} \times \frac{1}{3}\right) = \frac{1}{12} + \frac{5}{36} + \frac{5}{24} = \frac{31}{72}$$

حالت مطلوب حالتی است که A به هدف زده باشد یعنی A, B', C' : $n(A) = \frac{1}{6} \times \frac{3}{4} \times \frac{2}{3} = \frac{1}{12}$ می‌باشد.

$$\text{پس } P(A) = \frac{\frac{1}{12}}{\frac{31}{72}} = \frac{6}{31} \text{ است.}$$

۱۲۹. گزینه ۱

روش اول:

$$P(\text{اولی فرد}) \times P(\text{دومی زوج}) \times P(\text{سومی فرد}) \times P(\text{چهارمی زوج}) \times P(\text{پنجمی فرد}) = \frac{3}{5} \times \frac{2}{4} \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{2} \times 1 = \frac{12}{120} = \frac{1}{10} \text{ اره}$$

روش دوم:

$$n(S) = 5!$$

$$n(A) = \underbrace{3!}_{\text{جابه‌جایی مهره‌های فرد}} \times \underbrace{2!}_{\text{جابه‌جایی مهره‌های زوج}} \rightarrow \text{ف ز ف ز ف}$$

$$\text{پس } P(A) = \frac{3!2!}{5!} = \frac{1}{10} \text{ است.}$$

۱۳۰. گزینه ۳

$$A(\alpha, 0) \rightarrow AB = AC \Rightarrow \sqrt{(\alpha+2)^2 + (0-3)^2} = \sqrt{(\alpha-4)^2 + (-1-0)^2}$$

$$\Rightarrow \alpha^2 + 4\alpha + 4 + 9 = \alpha^2 - 8\alpha + 16 + 1 \Rightarrow 12\alpha = 4 \rightarrow \alpha = \frac{1}{3}$$

۱۰۱. مقدار عبارت $\frac{4}{1+\sqrt{3}} + \frac{4}{\sqrt{3}+\sqrt{5}} + \dots + \frac{4}{\sqrt{n}+\sqrt{n+2}}$ کدام است؟

- ۱) $2\sqrt{n+2}-1$ (۱) ۲) $2\sqrt{n+2}-2$ (۲) ۳) $\sqrt{n+2}-1$ (۳) ۴) $4\sqrt{n+2}-4$ (۴)

۱۰۲. فرض کنید $a = \sqrt[4]{7-4\sqrt{3}}$ مقدار $(a + \frac{1}{a} + \sqrt{2})^2 (a + \frac{1}{a} - \sqrt{2})^2$ کدام است؟

- ۱) ۹ (۱) ۲) ۱۶ (۲) ۳) ۲۵ (۳) ۴) ۴۹ (۴)

۱۰۳. معادله $\sin^2 x + \sin x = 2$ در فاصله $[0, 4\pi]$ چند ریشه ی متمایز دارد؟

- ۱) ۰ (۱) ۲) ۲ (۲) ۳) ۳ (۳) ۴) ۴ (۴)

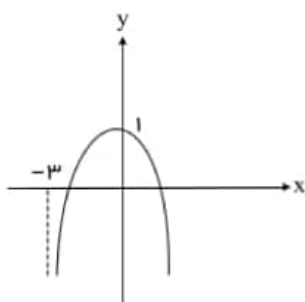
۱۰۴. نمودار تابع $f(x) = \log_p^{(b-ax-x^2)}$ به صورت روبه رو است. مقدار $f(-1)$ کدام است؟

۱) \log_p^2 (۱)

۲) $2\log_p^2$ (۲)

۳) ۱ (۳)

۴) \log_p^0 (۴)



۱۰۵. نمودار تابع $y = 2\left[\frac{x}{2}\right] + 1$; $x \in [-2, 6)$ از چند پاره خط مساوی هم، تشکیل شده است؟ ([]، نماد جزء صحیح است).

- ۱) ۳ (۱) ۲) ۴ (۲) ۳) ۵ (۳) ۴) ۶ (۴)

۱۰۶. اگر حاصل ضرب پانزده جمله ی اول از یک دنباله ی هندسی ۱۰۰ باشد، جمله ی هشتم این دنباله کدام است؟

- ۱) $\sqrt[15]{100}$ (۱) ۲) $\frac{100}{15}$ (۲) ۳) 100^{15} (۳) ۴) 15×100 (۴)

۱۰۷. اگر ریشه معادله $\log_p^{x^2-4x+4} + \log_p^{x-5} = \log_p^{x^2-4x+4} + \log_p^{x+5}$ باشد، حاصل $\frac{2}{\log_{\frac{1}{2}k+3}^k}$ کدام است؟

- ۱) $\frac{3}{4}$ (۱) ۲) $\frac{3}{2}$ (۲) ۳) $\frac{2}{3}$ (۳) ۴) $\frac{4}{3}$ (۴)

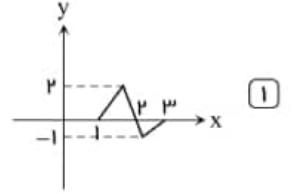
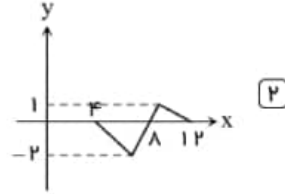
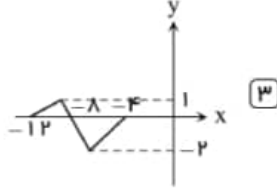
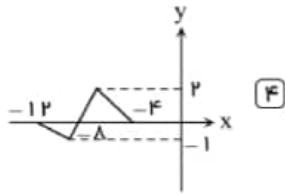
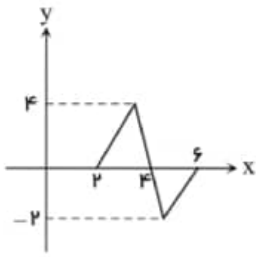
۱۰۸. حد چپ تابع $f(x) = \frac{3}{2}[2x]$ از حد راست آن در نقطه ی $x = -2$ چقدر کمتر است؟ ([]، نماد جزء صحیح است)

- ۱) $\frac{3}{2}$ (۱) ۲) $\frac{5}{2}$ (۲) ۳) $\frac{27}{2}$ (۳) ۴) $\frac{7}{2}$ (۴)

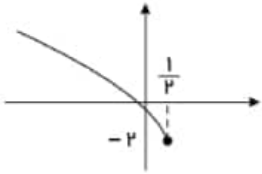
۱۰۹. حاصل $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{7}{x} + \frac{4}{x^2} + \frac{1}{x^3}}{\frac{2}{x} - \frac{1}{x^2} - \frac{6}{x^3}}$ کدام است؟

- ۱) $\frac{7}{2}$ (۱) ۲) صفر (۲) ۳) -۴ (۳) ۴) $-\frac{1}{6}$ (۴)

۱۱۰. اگر نمودار تابع $f(x)$ به شکل مقابل باشد، نمودار تابع $y = -\frac{1}{2}f(-\frac{1}{2}x)$ به کدام شکل است؟



۱۱۱. اگر نمودار تابع $f(x) = \sqrt{a-2x} + b$ به صورت زیر باشد، مقدار $f(-4)$ کدام است؟



۴ (۲)

۳ (۱)

۲ (۴)

۱ (۳)

۱۱۲. دو تابع $f(x) = \begin{cases} 2x+1 & x \geq 1 \\ ax+2 & x < 1 \end{cases}$ و $g = \{(1, -2), (5, 4), (0, 1), (2, 6)\}$ مفروض اند. اگر $g(f(-1)) = 4$ و $g(f(b)) = a+1$ باشند، حاصل $a+b$ کدام است؟

$\frac{10}{3}$ (۴)

$-\frac{8}{3}$ (۳)

$\frac{8}{3}$ (۲)

$-\frac{10}{3}$ (۱)

۱۱۳. در معادله درجه دوم $x^2 + 2x - 4 = 0$ ، حاصل $x_1^2 - 2x_1 + 4x_2$ کدام است؟ (x_1 و x_2 ریشه‌های معادله درجه دوم هستند)

-۳۲ (۴)

۱۶ (۳)

۰ (۲)

-۱۶ (۱)

۱۱۴. فرض کنید $a, b, c \in \{1, 2, \dots, 9\}$ چند معادله درجه دوم به صورت $ax^2 + bx - c = 0$ می‌توان نوشت که فاصله حاصل ضرب ریشه‌های هر معادله با جمع ریشه‌های آن معادله، دو واحد باشد؟

۳۶ (۴)

۳۲ (۳)

۲۸ (۲)

۲۴ (۱)

۱۱۵. نقاط $A(4, 2)$ و $B(6, -2)$ مفروض اند. اگر مجموع فواصل $p(m, 0)$ از A و B مینیمم باشد، فاصله p تا مبدأ مختصات کدام است؟

۶ (۴)

۵ (۳)

۴ (۲)

۳ (۱)

۱۱۶. معادله سه ضلع یک مثلث $x + y = 1$ ، $y = 2x$ و $x = 1$ است. معادله خطی که کوچک‌ترین ارتفاع این مثلث بر آن قرار دارد، کدام است؟

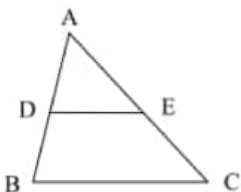
$y + x = \frac{1}{3}$ (۴)

$y + x = \frac{2}{3}$ (۳)

$x = \frac{2}{3}$ (۲)

$y = \frac{2}{3}$ (۱)

۱۱۷. در شکل زیر نقاط D و E روی اضلاع AB و AC طوری قرار دارند که: $\frac{BD}{AB} = \frac{CE}{AC} = \frac{1}{3}$. اگر طول BC برابر با ۱۵ باشد، طول DE کدام است؟



۸ (۲)

۵ (۱)

۱۲ (۴)

۱۰ (۳)

۱۱۸. اگر $3 \sin x - 4 \cos x = 5$ باشد، حاصل $\cos 2x$ کدام است؟

۰٫۲۸ (۴)

۰٫۸ (۳)

۰٫۶ (۲)

$-\frac{\sqrt{3}}{10}$ (۱)

۱۱۹. حاصل عبارت زیر کدام است؟

$$A = \frac{\sin 15^\circ + \sin 30^\circ}{1 + \cos 15^\circ + \cos 30^\circ} + \frac{1 + \cos 15^\circ + \cos 30^\circ}{\sin 15^\circ + \sin 30^\circ}$$

۴ (۴)

۲ (۳)

۱ (۲)

صفر (۱)

۱۲۰. اگر $\sin^x x + \cos^x x = \frac{3}{4}$ آنگاه حاصل $\tan^x x + \cot^x x$ کدام است؟

۸ (۴)

۶ (۳)

۴ (۲)

۲ (۱)

۱۲۱. تابع با ضابطه $f(x) = \frac{4x^n - 6x^2 + 1}{ax^3 + 7x^2 - 2}$ را در نظر بگیرید. اگر $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 2$ باشد، آنگاه $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} f(x)$ کدام است؟ $-\frac{6}{11}$ (۴) $-\frac{5}{12}$ (۳) $-\frac{6}{17}$ (۲) $-\frac{4}{17}$ (۱)۱۲۲. نقطه $A(1, \frac{3}{2})$ اکسترمم نسبی $f(x) = x^3 - \frac{9}{2}x^2 + ax + b$ است. Min نسبی تابع f کدام است؟ $(-1, -2)$ (۴) $(1, 2)$ (۳) $(2, 1)$ (۲) $(1, \frac{3}{2})$ (۱)۱۲۳. اگر $y = f(x) = \frac{3}{2} - \sqrt{x+2}$ ، مشتق تابع $f(xf(x))$ در نقطه $x = 2$ کدام است؟

۱ (۴)

 $-\frac{1}{2}$ (۳) $\frac{1}{2}$ (۲)

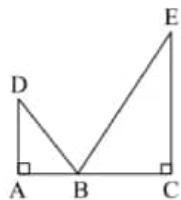
-۱ (۱)

۱۲۴. فرض کنید $g(x) = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$)، $f(x) = \begin{cases} g(x) & x \geq k \\ g'(x) & x < k \end{cases}$ باشد اگر f یک تابع مشتق پذیر باشد حداکثر مقدار k با شرط $b + c = a$ کدام است؟

۴ (۴)

۳ (۳)

۱ (۲)

 $\frac{3}{4}$ (۱)۱۲۵. اختلاف کمترین مقدار و بیشترین مقدار تابع $f(x) = \frac{\cos x}{2 + \sin x}$ چقدر است؟ $\frac{4}{3}$ (۴) $\frac{2}{3}$ (۳) $\frac{4\sqrt{3}}{3}$ (۲) $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ (۱)۱۲۶. در شکل مقابل، $AD = 18$ ، $EC = 36$ و $AC = 27$ است. اگر طول $DB + BE$ کمترین مقدر ممکن باشد، در این صورت اندازه AB چقدر است؟

۹ (۲)

۶ (۱)

۱۵ (۴)

۱۲ (۳)

۱۲۷. در یک همایش ۵ نفر جهت سخنرانی ثبت نام کرده اند. چند طریق ترتیب سخنرانی برای آنها وجود دارد، به طوری که بین سخنرانی دو فرد مورد نظر a و b از آنان فقط یک نفر سخنرانی کند؟

۴۰ (۴)

۳۶ (۳)

۲۴ (۲)

۲۰ (۱)

۱۲۸. احتمال این که یک دانش آموز در یک امتحان نمره قبولی بگیرد ۹/۵ و در دو امتحان متوالی نمره قبولی بگیرد ۸۵/۵ است. اگر دانش آموز در امتحان دوم موفق باشد احتمال این که در امتحان قبلی نیز موفق شده باشد کدام است؟

 $\frac{45}{47}$ (۴) $\frac{17}{18}$ (۳) $\frac{85}{94}$ (۲) $\frac{8}{9}$ (۱)

۱۲۹. با ارقام ۱ و ۲ و ۳ و ۴ و ۵ زیرمجموعه‌ای از اعداد طبیعی می‌سازیم که در آن رقم تکراری به کار نرفته باشد یک عضو از مجموعه فوق انتخاب می‌کنیم. احتمال این که عضو انتخاب شده بر ۴ بخش پذیر باشد کدام است؟ (با کمی تغییر)

$$\frac{1}{5} \quad \text{۴}$$

$$\frac{3}{7} \quad \text{۳}$$

$$\frac{4}{7} \quad \text{۲}$$

$$\frac{13}{21} \quad \text{۱}$$

۱۳۰. مختصات قرینه‌ی نقطه‌ی $A(2, -1)$ نسبت به نقطه‌ی $B(-1, 3)$ کدام است؟

$$(-4, 7) \quad \text{۴}$$

$$(4, 7) \quad \text{۳}$$

$$(0, 7) \quad \text{۲}$$

$$(4, -7) \quad \text{۱}$$

محل انجام محاسبه

ابتدا تک تک عبارات صورت سوال را ساده می‌کنیم:

$$\frac{1}{\sqrt{3}+1} \times \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}-1} = \frac{\sqrt{3}-1}{2} \rightarrow \frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{\sqrt{5}-\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{5-3} = \frac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{2}$$

$$\frac{1}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n}} \times \frac{\sqrt{n+2}-\sqrt{n}}{\sqrt{n+2}-\sqrt{n}} = \frac{\sqrt{n+2}-\sqrt{n}}{n+2-n} = \frac{\sqrt{n+2}-\sqrt{n}}{2}$$

در نتیجه عبارت سوال برابر است با:

$$\Rightarrow f\left(\frac{\sqrt{n+2}-1}{2}\right) = 2\sqrt{n+2} - 2$$

$$a = \sqrt[4]{4 - 4\sqrt{3}} = \sqrt[4]{(2 - \sqrt{3})^2} = \sqrt{2 - \sqrt{3}}$$

اکنون با استفاده از اتحادهای $(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$ و $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$ به حل مسئله می‌پردازیم:

$$\begin{aligned} (a + \frac{1}{a} + \sqrt{2})^r (a + \frac{1}{a} - \sqrt{2})^r &= [(a + \frac{1}{a})^r - (\sqrt{2})^r]^r = (a^r + \frac{1}{a^r} + 2 - 2)^r = (2 - \sqrt{3} + \underbrace{\frac{1}{2 - \sqrt{3}}}_{\text{گویا می‌کنیم}})^r = (2 - \sqrt{3} + \underbrace{\frac{1}{2 - \sqrt{3}} \times \frac{2 + \sqrt{3}}{2 + \sqrt{3}}}_{2-3})^r \\ &= (2 - \sqrt{3} + 2 + \sqrt{3})^r = 4^r = 16 \end{aligned}$$

$$\sin^r x + \sin x - 2 = 0 \Rightarrow (\sin x - 1)(\sin x + 2) = 0$$

$$\rightarrow \begin{cases} \sin x = 1 \xrightarrow{\text{حالت خاص}} x = 2k\pi + \frac{\pi}{2} \rightarrow \begin{array}{c|ccc} k & 0 & 1 & 2 \\ \hline x & \frac{\pi}{2} & \frac{5\pi}{2} & \frac{9\pi}{2} \end{array} \\ \sin x = -2 \Rightarrow \text{غ ق ق} \quad (-1 \leq \sin x \leq 1) \end{cases}$$

۱.۴. گزینه ۲ از شکل صورت سوال می‌فهمیم که در $x = -3$ عبارت جلوی \log صفر شده و در $x = 0$ مقدار تابع ۱ است. یعنی جلوی \log برابر ۳ شده:

$$\left. \begin{aligned} x=-3 &\rightarrow b + 3a - 9 = 0 \\ x=0 &\rightarrow b = 3 \end{aligned} \right\} \Rightarrow a = -2$$

پس ضابطه تابع $f(x) = \log_p^{(3-2x-x^2)}$ است.

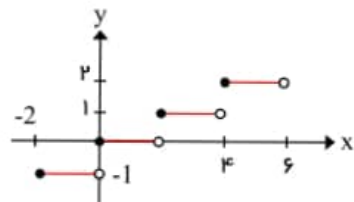
و داریم:

$$f(-1) = \log_p^{3-2(-1)-(-1)^2} = \log_p^2 = 2 \log_p^2$$

۱.۵. گزینه ۲

$$y = 2\left|\frac{x}{4}\right| + 1 \quad x \in [-2, 6]$$

کافی است تعداد پاره‌خط‌های تابع $y = \left|\frac{x}{4}\right|$ را در بازه $[-2, 6]$ به دست آوریم زیرا ضریب پشت جزء صحیح و عدد ۱ تأثیری روی تعداد پاره‌خط‌ها ندارند برای این که ضریب، عرض‌ها را دو برابر کرده و عدد یک، شکل را یک واحد بالا می‌برد.



توجه کنید در تابع $y = [nx]$ اگر $n > 0$ باشد پلکان صعودی و طول هر پله $\frac{1}{|n|}$ و ارتفاع پله‌ها یک واحد است.

۱.۶. گزینه ۱ چون صحبت از حاصل ضرب جملات متوالی به میان آمده جملات را به صورت زیر در نظر می‌گیریم:

$$\begin{array}{c} \text{جمله‌ی وسط} \\ \frac{x}{r^y}, \frac{x}{r^6}, \frac{x}{r^5}, \frac{x}{r^4}, \frac{x}{r^3}, \frac{x}{r^2}, \frac{x}{r^1}, \frac{x}{r}, x, xr, xr^2, xr^3, xr^4, xr^5, xr^6, xr^y \\ \text{جمله‌ی هشتم} \end{array}$$

$$\text{حاصل ضرب ۱۵ جمله} = \frac{x}{r^y} \times \dots \times x \times \dots \times xr^y = x^{15} = 100 \Rightarrow x = \sqrt[15]{100}$$

۱.۷. گزینه ۲ می‌دانیم:

$$\log_c^a + \log_c^b = \log_c^{ab}, \quad \log_{c^m}^n = \frac{n}{m} \log_c^a$$

$$\log_{\sqrt{r}}^{\sqrt{rx+2}} + \log_r^{x-5} = \log_r^{x^2 - rx + 2} + \log_r^{x+5}$$

$$\log_{\frac{1}{r^2}}^{(rx+2)^{\frac{1}{2}}} + \log_r^{x-5} = \log_{\frac{1}{r}}^{(x-2)^2} + \log_r^{x+5}$$

$$\frac{1}{2} \log_r^{rx+2} + \log_r^{x-5} = \log_r^{x-2} + \log_r^{x+5}$$

$$\log_r^{(rx+2)(x-5)} = \log_r^{(x-2)(x+5)} \Rightarrow (3x+2)(x-5) = (x-2)(x+5)$$

$$3x^2 - 13x - 10 = x^2 + 3x - 10 \rightarrow 2x^2 - 16x = 0 \rightarrow \begin{aligned} x &= 0 \times \\ x &= 8 \checkmark \end{aligned}$$

$x = 0$ جزء دامنه نیست، پس قابل قبول نیست، $x = 8$ قابل قبول است.

$$k = 8$$

$$\frac{2}{\log_{\sqrt{8k+3}}^{81}} = \frac{2}{\log_{8\sqrt{3}}^{81}} = \frac{2}{\log_{\sqrt{24}}^{81}} = \frac{2}{\frac{4}{\sqrt{6}} \log_{\sqrt{6}}^{81}} = \frac{2}{\frac{4}{\sqrt{6}} \cdot \frac{2}{\sqrt{6}}} = \frac{3}{2}$$

۱.۸. گزینه ۱

$$\lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{2}{2} [2x] = \frac{2}{2} [2(-2^+)] = \frac{2}{2} [-4^+] = \frac{2}{2} (-4) = -6 \Rightarrow -6 - (-7,5) = 1,5$$

$$\lim_{x \rightarrow -2^-} \frac{2}{2} [2x] = \frac{2}{2} [2(-2^-)] = \frac{2}{2} [-4^-] = \frac{2}{2} (-5) = -7,5$$

۱.۹. گزینه ۴ راجحل اول: مخرج مشترک می‌گیریم:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{2x^2+4x+1}{x^2}}{\frac{2x^2-x-6}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2x^2+4x+1}{2x^2-x-6} = \frac{1}{-6}$$

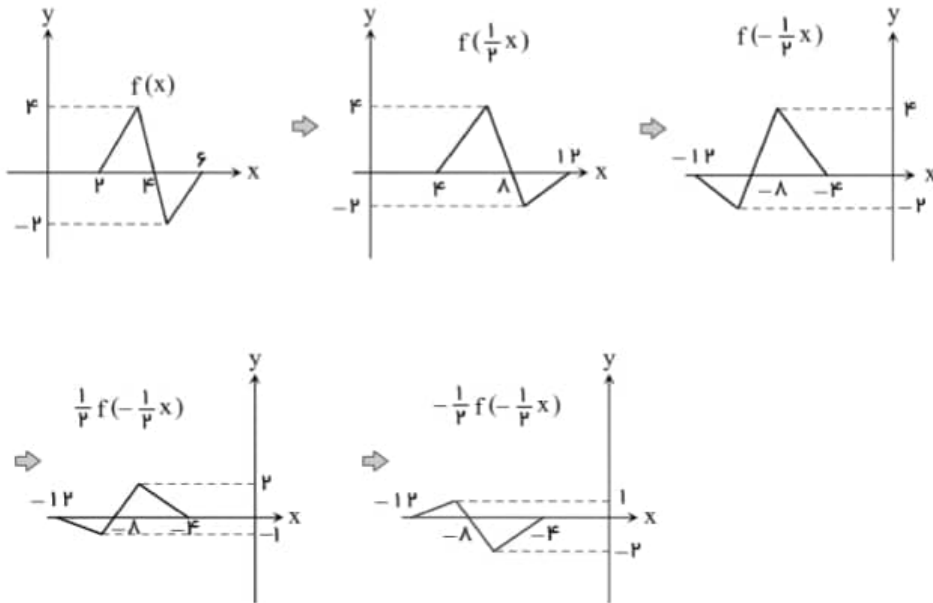
راجحل دوم: اگر از تغییر متغیر $\frac{1}{x} = t$ استفاده کنیم در این صورت خواهیم داشت:

$$x \rightarrow 0^+ \Rightarrow t \rightarrow +\infty$$

و بنابراین می‌توان حد داده شده را به صورت زیر نوشت و از قاعدهٔ پرتوان استفاده کرد:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{y}{x} + \frac{r}{x^2} + \frac{1}{x^3}}{\frac{r}{x} - \frac{1}{x^2} - \frac{r}{x^3}} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{yt + rt^2 + t^3}{rt - t^2 - rt^3} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{t^3}{-rt^3} = -\frac{1}{r}$$

۱۱۰. گزینه ۳



۱۱۱. گزینه ۳ دامنهٔ تابع $y = f(x)$ به صورت $(-\infty, \frac{1}{2}]$ است.

با توجه به ضابطهٔ تابع $f(x) = \sqrt{a - 2x} + b$ پیدا کرده دامنهٔ تابع باید داشته باشیم.

$$a - 2x \geq 0 \Rightarrow x \leq \frac{a}{2} \rightarrow D_f = (-\infty, \frac{a}{2}]$$

$$(-\infty, \frac{a}{2}] = (-\infty, \frac{1}{2}] \Rightarrow a = 1$$

$$f(\frac{1}{2}) = -2 \xrightarrow{a=1} -2 = \sqrt{1 - 2 \times \frac{1}{2}} + b \Rightarrow b = -2$$

$$\Rightarrow f(x) = \sqrt{1 - 2x} - 2 \Rightarrow f(-3) = \sqrt{1 + 6} - 2 = 1$$

۱۱۲. گزینه ۳

$$f(-1) = a(-1) + 2 = -a + 2 \Rightarrow g(f(-1)) = 4 \Rightarrow g(-a + 2) = 4$$

باید مشخص کنیم در تابع g به ازای کدام مقدار x حاصل برابر ۴ می‌شود.

$$g(5) = 4 \Rightarrow -a + 2 = 5 \rightarrow a = -3$$

$$g(f(b)) = a + 1 \xrightarrow{a=-3} g(f(b)) = -3 + 1 = -2$$

باید مشخص کنیم در تابع g به ازای کدام مقدار x حاصل برابر -۲ می‌شود.

$$g(+1) = -2 \Rightarrow f(b) = 1$$

$$b \geq 1 \Rightarrow f(b) = 2b + 1 \rightarrow 2b + 1 = 1 \Rightarrow b = 0 \text{ غیرممکن}$$

$$b < 1 \Rightarrow f(b) = -3b + 2 \rightarrow -3b + 2 = 1 \Rightarrow b = \frac{1}{3} \checkmark$$

$$a + b = -3 + \frac{1}{3} = -\frac{8}{3}$$

۱۱۳. گزینه ۴

اگر x_1 و x_2 ریشه‌های معادله $x^2 + 2x - 4 = 0$ باشند، آنگاه در خود معادله صدق می‌کنند و داریم:

$$S = x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} = -2, \quad P = x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} = -4$$

$$x^2 + 2x - 4 = 0 \Rightarrow x_1^2 + 2x_1 - 4 = 0 \Rightarrow x_1^2 = -2x_1 + 4 \xrightarrow{\text{طرفین معادله را در } x_1} x_1^2 = -2x_1^2 + 4x_1$$

$$x_1^2 - 2x_1^2 + 4x_2 = -2x_1^2 + 4x_1 - 2x_1^2 + 4x_2 = -2(x_1^2 + x_2^2) + 4(x_1 + x_2) \\ = -2(S^2 - 2P) + 4S = -2(4 + 8) + 4(-2) = -32$$

۱۱۴. گزینه ۳ چون a و c مختلف‌العلامت هستند حتماً $\Delta > 0$ است. مجموع ریشه‌ها برابر $-\frac{b}{a}$ و حاصل ضرب ریشه‌ها برابر $-\frac{c}{a}$ است.

$$\text{فاصله} = \left| \frac{-c}{a} - \left(-\frac{b}{a}\right) \right| = \left| \frac{b-c}{a} \right| = 2 \rightarrow |b-c| = 2a$$

بنابراین b و c باید طوری انتخاب شوند که تفاضلشان زوج باشد یعنی یا هر دو باید زوج باشند (دو فرد از بین ۱، ۳، ۵، ۷ و ۹) یا هر دو باید فرد باشند (دو زوج از بین ۲، ۴، ۶ و ۸)

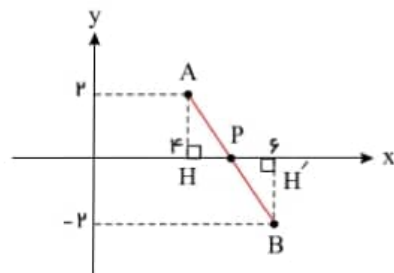
$$\binom{4}{2} + \binom{5}{2} = 6 + 10 = 16$$

چون $b - c$ داخل قدرمطلق است پس b و c می‌توانند با هم جابه‌جا شوند یعنی ۳۲ حالت.

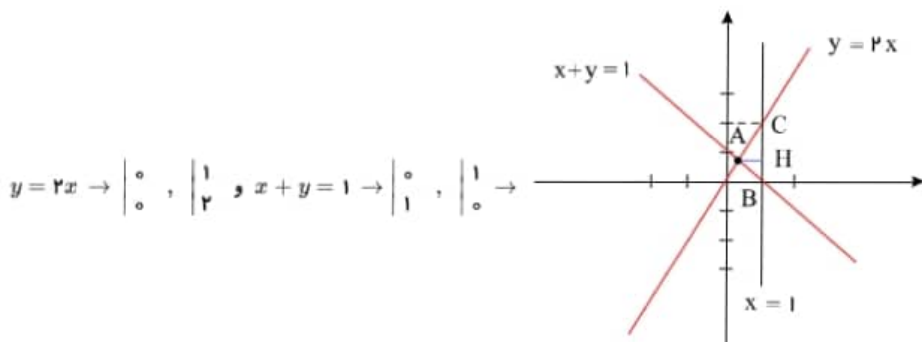
۱۱۵. گزینه ۳ با توجه به شکل مسئله، چون نقطه‌ی P روی محور x ها قرار دارد، زمانی $PA + PB$ مینیمم است که نقطه‌ی P محل برخورد AB با محور x ها باشد. پس:

$$\triangle APH \cong \triangle PBH' \Rightarrow PH = PH'$$

$$P \text{ وسط } AB \Rightarrow P = (5, 0) \Rightarrow m = 5 \rightarrow OP = 5$$



۱۱۶. گزینه ۱ سه خط داده‌شده را رسم می‌کنیم.



کوچک‌ترین ارتفاع مثلث ABC پاره‌خط AH می‌باشد که معادله‌اش $y = \frac{2}{3}$ است، زیرا اگر با دو خط $y = 2x$ و $x + y = 1$ تشکیل دهیم، داریم:

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ y = 2x \end{cases} \Rightarrow x = \frac{1}{3}, y = \frac{2}{3}$$

یعنی مختصات نقطه A به صورت $A\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$ است، پس معادله ارتفاع AH به صورت $y = \frac{2}{3}$ است.

۱۱۷. گزینه ۲ با توجه به فرض مسأله داریم:

$$\frac{BD}{AB} = \frac{CE}{AC} = \frac{1}{3} \xrightarrow{\text{تفضیل در مخرج}} \frac{BD}{AD} = \frac{CE}{AE} = \frac{1}{2}$$

با توجه به رابطه‌ی اخیر، طبق عکس قضیه‌ی تالس می‌توان نتیجه گرفت: $DE \parallel BC$

بنابراین طبق قضیه‌ی تالس خواهیم داشت:

$$\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC} = \frac{DE}{BC} \Rightarrow \frac{2}{3} = \frac{DE}{15} \Rightarrow DE = 10$$

$$\cos 2a = \frac{1 - \tan^2 a}{1 + \tan^2 a} \quad \text{و} \quad \sin 2a = \frac{2 \tan a}{1 + \tan^2 a} \quad \text{می‌دانیم:} \quad \text{گزینه ۴}$$

$$3 \sin x - 4 \cos x = 5 \Rightarrow 3 \left(\frac{2 \tan \frac{x}{2}}{1 + \tan^2 \frac{x}{2}} \right) - 4 \left(\frac{1 - \tan^2 \frac{x}{2}}{1 + \tan^2 \frac{x}{2}} \right) = 5$$

$$\times (1 + \tan^2 \frac{x}{2})$$

$$\frac{\quad}{\quad} \rightarrow 6 \tan \frac{x}{2} - 2(1 - \tan^2 \frac{x}{2}) = 5(1 + \tan^2 \frac{x}{2})$$

$$\rightarrow \tan^2 \frac{x}{2} - 6 \tan \frac{x}{2} + 9 = 0 \rightarrow (\tan \frac{x}{2} - 3)^2 = 0 \rightarrow \tan \frac{x}{2} - 3 = 0 \rightarrow \tan \frac{x}{2} = 3$$

$$\text{می دانیم: } \tan x = \frac{2 \tan \frac{x}{2}}{1 - \tan^2 \frac{x}{2}} = \frac{2(3)}{1 - 9} = -\frac{3}{4}$$

$$\cos 2x = \frac{1 - \tan^2 x}{1 + \tan^2 x} = \frac{1 - \frac{9}{16}}{1 + \frac{9}{16}} = \frac{\frac{7}{16}}{\frac{25}{16}} = \frac{7}{25} = 0,28$$

۱۱۹. گزینه ۳ می‌دانیم $\sin 2a = 2 \sin a \cos a$, $1 + \cos 2a = 2 \cos^2 a$, $\tan a + \cot a = \frac{2}{\sin 2a}$ است.

$$\frac{\sin 15^\circ + \sin 30^\circ}{1 + \cos 30^\circ + \cos 15^\circ} + \frac{1 + \cos 30^\circ + \cos 15^\circ}{\sin 15^\circ + \sin 30^\circ} = \frac{\sin 15^\circ + 2 \sin 15^\circ \cos 15^\circ}{2 \cos^2 15^\circ + \cos 15^\circ} + \frac{2 \cos^2 15^\circ + \cos 15^\circ}{\sin 15^\circ + 2 \sin 15^\circ \cos 15^\circ} = \frac{\sin 15^\circ (1 + 2 \cos 15^\circ)}{\cos 15^\circ (2 \cos 15^\circ + 1)}$$

$$+ \frac{\cos 15^\circ (2 \cos 15^\circ + 1)}{\sin 15^\circ (1 + 2 \cos 15^\circ)} = \tan 15^\circ + \cot 15^\circ = \frac{2}{\sin 30^\circ} = \frac{2}{\frac{1}{2}} = 4$$

۱۲۰. گزینه ۳ می‌دانیم که $\sin^2 a + \cos^2 a = 1 - \frac{1}{2} \sin^2 2a$, $\sin^2 a + \cos^2 a = \frac{2}{\sin 2a}$ است.

$$\sin^2 x + \cos^2 x = \frac{2}{2} \rightarrow 1 - \frac{1}{2} \sin^2 2x = \frac{2}{2} \rightarrow \frac{1}{2} \sin^2 2x = \frac{1}{2} \rightarrow \sin^2 2x = 1$$

$$\tan^2 x + \cot^2 x = (\tan x + \cot x)^2 - 2 \tan x \cdot \cot x = \left(\frac{2}{\sin 2x}\right)^2 - 2 = \frac{4}{\sin^2 2x} - 2 = \frac{4}{1} - 2 = 2$$

۱۲۱. گزینه ۲

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^n - 6x^r + 1}{ax^r + 7x^r - 2} \xrightarrow{\text{توان بیشتر}} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^n}{ax^r} \stackrel{n=r}{=} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^r}{ax^r} = \frac{2}{a} = 2 \rightarrow a = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{2x^r - 6x^r + 1}{\frac{1}{2} 2x^r + 7x^r - 2} \stackrel{HOP}{=} \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{12x^r - 12x}{2x^r + 14x} = \frac{3 - 6}{\frac{3}{2} + 7} = \frac{-3}{\frac{17}{2}} = -\frac{6}{17}$$

۱۲۲. گزینه ۲

$$A \left| \frac{1}{r} \rightarrow \frac{3}{2} = 1 - \frac{9}{2} + a + b \Rightarrow a + b = 5 \right.$$

$$f'(x) = 2x^r - 9x + a \xrightarrow{f'(1)=0} 2 - 9 + a = 0 \Rightarrow a = 7, b = -1$$

$$f'(x) = 2x^r - 9x + 7 = 0 \xrightarrow{a+b+c=0} x = 1, x = \frac{c}{a} = \frac{1}{2}$$

x	$-\infty$	1	$\frac{1}{2}$	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0
$f(x)$	\nearrow	$\frac{7}{2}$	\searrow	\nearrow

Min

۱۲۳. گزینه ۲

$$y = f(g(x)) \rightarrow y' = g'(x) \cdot f'(g(x))$$

می‌دانیم:

$$y = f(xf(x)) \Rightarrow y' = (f(x) + xf'(x))f'(xf(x)) \Rightarrow y'(2) = (f(2) + 2f'(2))f'(2f(2)) \quad (*)$$

$$f(2) = -\frac{1}{2}, f'(x) = -\frac{1}{2\sqrt{x+2}} \Rightarrow f'(2) = -\frac{1}{4}, f'(-1) = -\frac{1}{2}$$

$$\xrightarrow{(*)} y'(2) = \underbrace{\left(-\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\right)}_{-1} (f'(-1)) = (-1)\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$$

۱۲۴. گزینه ۳

$$f(x) = \begin{cases} ax^r + bx + c & x \geq k \\ 2ax + b & x < k \end{cases} \Rightarrow f'(x) = \begin{cases} 2ax + b & x \geq k \\ 2a & x < k \end{cases}$$

$$\left. \begin{array}{l} (1) \text{ شرط پیوستگی: } ak^r + bk + c = rak + b \\ (2) \text{ شرط مشتق پذیری: } rak + b = ra \end{array} \right\} \Rightarrow ak^r + bk + c = ra$$

$$\xrightarrow{b=ra-rak} ak^r + (ra - rak)k + a - (ra - rak) = ra$$

$$\Rightarrow ak^r + rak - rak^r + a - ra + rak = ra \Rightarrow -ak^r + rak - ra = 0 \xrightarrow{:(-a)} k^r - rk + r = 0 \xrightarrow{\text{مجموع ضرایب صفر}} \begin{cases} k = 1 \\ k = r(\text{max}) \end{cases}$$

۱۲۵. گزینه ۱ تابع با $T = 2\pi$ متناوب است. رفتار تابع را روی بازه‌ای به طول 2π مانند $[0, 2\pi]$ بررسی می‌کنیم. تابع در این بازه پیوسته است. اکسترم‌های مطلق تابع در نقاط بحرانی دامنه رخ می‌دهد. پس ابتدا نقاط بحرانی تابع را یافته، مقدار تابع را در نقاط مذکور محاسبه و با هم مقایسه می‌کنیم:

$$f(x) = \frac{\cos x}{r + \sin x} \Rightarrow f'(x) = \frac{-\sin x(r + \sin x) - \cos x(\cos x)}{(r + \sin x)^2} = \frac{-r \sin x - \sin^2 x - \cos^2 x}{(r + \sin x)^2} = \frac{-r \sin x - 1}{(r + \sin x)^2} = 0$$

$$\Rightarrow \sin x = -\frac{1}{r} \Rightarrow x = \frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}$$

$$f\left(\frac{7\pi}{6}\right) = \frac{-\frac{\sqrt{r}}{r}}{r - \frac{1}{r}} = -\frac{\sqrt{r}}{r}, \quad f\left(\frac{11\pi}{6}\right) = \frac{\frac{\sqrt{r}}{r}}{r - \frac{1}{r}} = \frac{\sqrt{r}}{r}$$

$$f(0) = f(2\pi) = \frac{1}{r}$$

پس بیشترین و کمترین مقدار تابع برابر $\frac{\sqrt{r}}{r}$ و $-\frac{\sqrt{r}}{r}$ است و اختلاف این دو $\frac{2\sqrt{r}}{r}$ است.

۱۲۶. گزینه ۲ راه حل اول: اگر فرض کن $AB = x$ در این صورت $BC = 27 - x$ خواهد بود و بنابراین طبق قضیه فیثاغورس در مثلث‌های ADB و BCE خواهیم داشت:

$$BD = \sqrt{18^2 + x^2}, BE = \sqrt{36^2 + (27 - x)^2}$$

$$DB + BE = \sqrt{18^2 + x^2} + \sqrt{36^2 + (27 - x)^2}$$

پس باید تابع $y = \sqrt{18^2 + x^2} + \sqrt{36^2 + (27 - x)^2}$ را به حداقل می‌رسانیم.

بنابراین داریم:

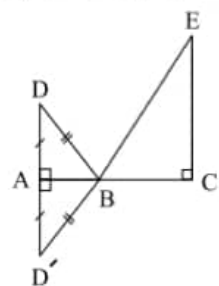
$$y' = \frac{2x}{2\sqrt{18^2 + x^2}} + \frac{2(-1)(27 - x)}{2\sqrt{36^2 + (27 - x)^2}} = 0 \Rightarrow \frac{x}{\sqrt{18^2 + x^2}} = \frac{27 - x}{\sqrt{36^2 + (27 - x)^2}} \xrightarrow{\text{طرفین به توان ۲}} \frac{x^2}{18^2 + x^2} = \frac{(27 - x)^2}{36^2 + (27 - x)^2}$$

$$\frac{18^2 + x^2}{x^2} = \frac{36^2 + (27 - x)^2}{(27 - x)^2} \Rightarrow \frac{18^2}{x^2} + 1 = \frac{36^2}{(27 - x)^2} + 1 \Rightarrow \frac{18^2}{x^2} = \frac{36^2}{(27 - x)^2} \xrightarrow{\text{جزر}} \frac{18}{x} = \pm \frac{36}{27 - x}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{18}{x} = \frac{36}{27 - x} \Rightarrow 2x = 27 - x \Rightarrow x = 9 \\ \frac{18}{x} = \frac{-36}{27 - x} \Rightarrow -2x = 27 - x \Rightarrow x = -27 \text{ غیق} \end{cases}$$

بنابراین در صورتی که $AB = 9$ باشد، در این صورت طول $DB + BE$ مینیمم خواهد شد.

$$y(0) = 63, y(27) = 9\sqrt{13} + 36$$



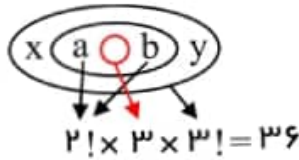
راه حل دوم: کافی است فریفته نقطه D نسبت به خط AC را نقطه D' بنامیم. بدیهی است که با توجه به همپوشانی مثلث‌های ADB و $AD'B$ می‌توان نتیجه گرفت که $BD = BD'$ حال اگر بخواهیم $BD + BE$ مینیمم شود، باید $BD' + BE$ مینیمم شود در صورتی این اتفاق خواهد افتاد که D' و B و E در یک راستا باشند یعنی روی یک خط راست قرار داشته باشند. چون $AD = 18$ است پس $AD' = 18$ است و بنا به تشابه مثلث‌های $AD'B$ و BEC خواهیم داشت:

$$\frac{AD'}{EC} = \frac{AB}{BC} \Rightarrow \frac{18}{36} = \frac{AB}{BC} \Rightarrow \frac{AB}{BC} = \frac{1}{2} \xrightarrow{AB+BC=27} AB = 9, BC = 18$$

پس به ازای $AB = 9$ طول $DB + BE$ مینیمم خواهد بود.

۱۲۷. گزینه ۲

a, b به ۲ حالت جایجا می شوند، نفر وسط ۳ حالت دارد a, b و نفر وسط را یک حالت در نظر می گیریم با ۲ نفر باقی مانده گروهی ۳ نفره می شوند که ۳! حالت جایجا می شوند.



۱۲۸. گزینه ۳

قبولی در آزمون اول: A

قبولی در آزمون دوم: B

$$P(A) = 0.9, \quad P(B) = 0.9, \quad P(A \cap B) = 0.85$$

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{0.85}{0.9} = \frac{85}{90} = \frac{5 \times 17}{5 \times 18} = \frac{17}{18}$$

۱۲۹. گزینه ۴ اعداد حاصل می توانند یک رقمی تا پنج رقمی باشند البته بدون تکرار.

حالت ۵: اعداد یک رقمی

$$\left. \begin{aligned} & \text{حالت ۲: دو رقمی} \\ & \left(\begin{matrix} 5 \\ 2 \end{matrix} \right) \times 2! = 20 \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} & \text{حالت ۳: سه رقمی} \\ & \left(\begin{matrix} 5 \\ 3 \end{matrix} \right) \times 3! = 60 \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} & \text{حالت ۴: چهار رقمی} \\ & \left(\begin{matrix} 5 \\ 4 \end{matrix} \right) \times 4! = 120 \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} & \text{حالت ۵: پنج رقمی} \\ & \left(\begin{matrix} 5 \\ 5 \end{matrix} \right) \times 5! = 120 \end{aligned} \right\} \rightarrow n(S) = \text{حالت } 325$$

می دانیم عددی به ۴ بخش پذیر است که دو رقم سمت راست آن مضرب ۴ باشد با ارقام داده شده و بدون تکرار ارقام اعدادی قابل قبول هستند که دو رقم سمت راست آن‌ها به ۵۲ و ۳۲ و ۲۴ و ۱۲ ختم می شود. در اعداد تک رقمی نیز فقط عدد چهار قابل قبول است.

به ازای هر کدام از ۴ رقم قابل قبول صدگان ۳ حالت خواهد داشت.

حالت ۱ → تک رقمی

حالت ۴ → دو رقمی (۱۲, ۳۴, ۳۲, ۵۲)

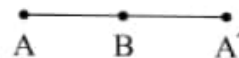
$$\left. \begin{aligned} & \text{حالت ۳} \\ & \text{سه رقمی} \rightarrow \underline{\quad} \times \underline{\quad} \times \underline{\quad} = 12 \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} & \text{حالت ۴} \\ & \text{چهار رقمی} \rightarrow \underline{\quad} \times \underline{\quad} \times \underline{\quad} \times \underline{\quad} = 24 \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} & \text{حالت ۵} \\ & \text{پنج رقمی} \rightarrow \underline{\quad} \times \underline{\quad} \times \underline{\quad} \times \underline{\quad} \times \underline{\quad} = 24 \end{aligned} \right\} \rightarrow n(A) = \text{حالت } 65 \Rightarrow P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{65}{325} = \frac{1}{5}$$

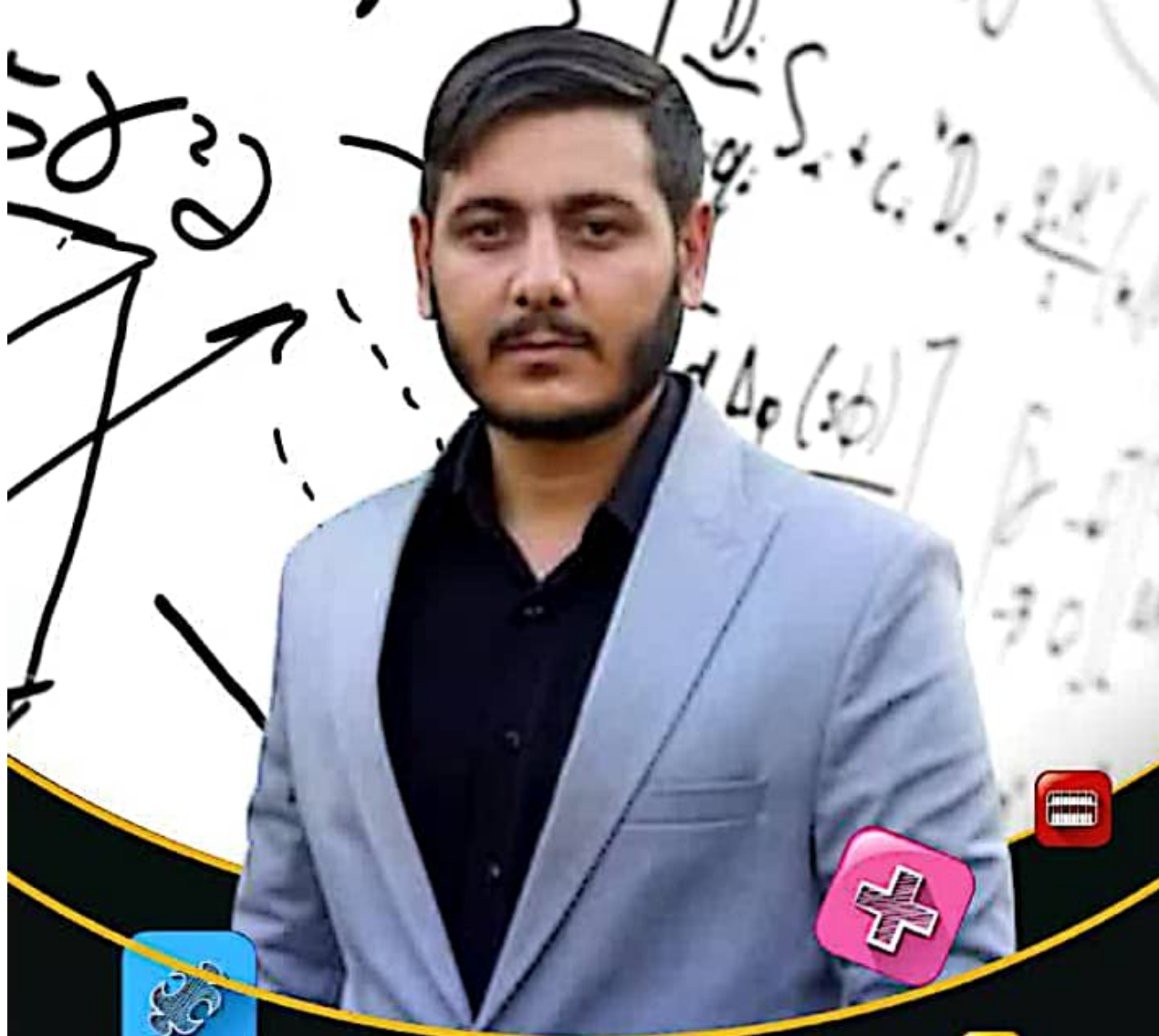
۱۳۰. گزینه ۴

B وسط AA' است پس:



$$x_B = \frac{x_A + x_{A'}}{2} \rightarrow x_{A'} = 2x_B - x_A = 2(-1) - 2 = -4$$

$$y_B = \frac{y_A + y_{A'}}{2} \rightarrow y_{A'} = 2y_B - y_A = 2 \times 3 + 1 = 7 \rightarrow A'(-4, 7)$$



مؤلف کتاب ریاضیات ریپتیج

طراح ریاضی قلمچی، گاج و ...

مدرس پروازی گاما، یادلاین و فرادرس

عضو انجمن ریاضی ایران

عضو انجمن بیوانفورماتیک ایران

مدرس برنامه نویسی کامپیوتر

مؤلف جمع بندی



مهندس محمد حمیدی

 konkur.in