

حسرت حال
حوصلت حال
محو اسحو اوللا
للمسرت ما
يا صبر ولا الصبر
يا مصعب

بسم الله الرحمن الرحيم

يا زدهم انسانی



نرم نرمک می رسد اینک بهار...

خوش به حال روزگار
خوش به حال چشمه ها و درخت ها
خوش به حال دانه ها و سبزه ها
خوش به حال غنچه های نیمباز
خوش به حال دختر میخک که می خندد به ناز
خوش به حال جام لبریز از شراب
خوش به حال آفتاب
ای دل من گرچه در این روزگار
جامه های رنگین نمی پوشی به کام
باده رنگین نمی بینی به جام
نقل و سبزه در میان سفره نیست
جامه از آن می که می باید تهنی است
ای دروغ از تو اگر چون گل نرقصی با نیم
ای دروغ از من اگر متم نازد آفتاب
ای دروغ از ما اگر کامی نگیریم از بهار
گر نلویی شیشه غم را به سنگ
هفته رنگش می شود هفتاد رنگ

رفیق

امیدوارم سالی که
پیش رو داری
آغاز روزهایی باشه که آرزو داری
دلت شادوبی غم...

روز مبارک ۱۴۰۲






گزاره: 

جمله‌ی فبری که ارزش آن ممکن است درست یا نادرست باشد.

نکته: جملات غیر خبری مانند جملات عاطفی، امری و پرسشی گزاره نیستند. 

مثال کدام یک از جملات زیر، یک گزاره است؟ در صورت گزاره بودن، ارزش آن را تعیین کنید. 

- (الف) عدد ۱۵ یک عدد اول است.
- (ب) لطفاً کتاب را بیاور.
- (پ) غذا خوردن از خوابیدن راحت تر است.
- (ت) شما چند سال دارید؟
- (ث) $۵^۲ + ۳^۲ = ۸^۲$

پاسخ:


- (الف) گزاره است با ارزشی نادرست.
- (ب) گزاره نیست زیرا یک جمله امری است.
- (پ) گزاره نیست زیرا جمله‌ای سلیقه‌ای و نسبی است.
- (ت) گزاره است با ارزشی نادرست.
- (ث) گزاره نیست زیرا یک جمله امری است.
- (ج) گزاره نیست زیرا جمله‌ای سوالی است.

نقیض گزاره: 

گزاره‌ای است که ارزش آن دقیقاً مخالف ارزش گزاره‌ی اولیه باشد. نماد نقیض گزاره (\sim) است. مثل p که نقیض آن را به شکل $\sim p$ نمایش می‌دهیم.

نکته: اگر جمله فارسی بود است را به نیست و نیست را به است تبدیل می‌کنیم: 

نماد ریاضی	$<$	$>$	\leq	\geq	$=$	\neq	\in	\notin	\subseteq	$\not\subseteq$
نقیض نماد	\geq	\leq	$>$	$<$	\neq	$=$	\notin	\in	$\not\subseteq$	\subseteq

مثال نقیض هر یک از گزاره‌های زیر را بنویسید. 

- (۱) $-۴ < ۲$
- (۲) X عددی زوج است.
- (۳) $۳۶ \in \mathbb{Z}$ مربع کامل است.
- (۴) $۳ \notin \mathbb{Z}$

پاسخ:

- (۱) $-۴ \geq ۲$
- (۲) X عددی زوج نیست.
- (۳) $۳۶ \notin \mathbb{Z}$ مربع کامل نیست.
- (۴) $۳ \in \mathbb{Z}$





نکته: اگر از یک گزاره دو بار نقیض گرفته شود، جواب آن، خود آن گزاره خواهد بود.

نکته: اگر n گزاره دلخواه داشته باشیم، جدول ارزش گذاری آنها دارای 2^n ردیف خواهد بود. مثلاً اگر ۴ گزاره داشته باشیم، جدول ارزش گذاری آنها دارای $2^4 = 16$ ردیف است.

ترکیب گزاره‌ها:

گزاره‌ای که از ترکیب دو یا چند گزاره بوجود می‌آید، گزاره‌ی مرکب می‌گوییم.

هم‌ارزی گزاره‌ها:

هم‌ارزش بودن دو گزاره‌ی p و q را با نماد $p \equiv q$ نشان می‌دهیم.

ترکیب عطفی دو گزاره:

ترکیب دو گزاره با حرف ربط «و» را ترکیب عطفی دو گزاره می‌گویند که با نماد « \wedge » نشان می‌دهند.

p	q	$p \wedge q$
د	د	د
د	ن	ن
ن	د	ن
ن	ن	ن

مثال تهران پایتخت ایران است و ۱۹ عددی اول است.



ترکیب فصلی دو گزاره:

ترکیب دو گزاره با حرف ربط «یا» را ترکیب فصلی دو گزاره می‌گویند که با نماد « \vee » نشان می‌دهند.

p	q	$p \vee q$
د	د	د
د	ن	د
ن	د	د
ن	ن	ن

مثال بغداد پایتخت فلسطین است یا ۰/۴ عددی طبیعی است.






$p \vee (q \vee r) \equiv (p \vee q) \vee r$	شرکت پذیری:	ترکیب فصلی	فرمول‌های اصلی
$p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$	پفشی:		
$\sim (p \vee q) \equiv \sim p \wedge \sim q$	دمورگان:		
$p \vee (p \wedge q) \equiv p$	جذب:		
$p \vee (\sim p \wedge q) \equiv p \vee q$	شبه جذب:		
$p \wedge (q \wedge r) \equiv (p \wedge q) \wedge r$	شرکت پذیری:	ترکیب عطفی	
$p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$	پفشی:		
$\sim (p \wedge q) \equiv \sim p \vee \sim q$	دمورگان:		
$p \wedge (p \vee q) \equiv p$	جذب:		
$p \wedge (\sim p \vee q) \equiv p \wedge q$	شبه جذب:		
$p \vee p \equiv p$, $p \vee q \equiv q \vee p$		ترکیب فصلی	فرمول‌های تکمیلی
$p \vee T \equiv T \vee p \equiv T$			
$p \vee F \equiv F \vee p \equiv p$			
$p \vee \sim p \equiv \sim p \vee p \equiv T$			
$p \wedge p \equiv p$, $p \wedge q \equiv q \wedge p$		ترکیب عطفی	
$p \wedge T \equiv T \wedge p \equiv p$			
$p \wedge F \equiv F \wedge p \equiv F$			
$p \wedge \sim p \equiv \sim p \wedge p \equiv F$			

ترکیب شرطی دو گزاره:

هر گاه بخواهیم از گزاره‌ی p گزاره‌ی q را نتیجه بگیریم از لفظ «اگر ... آنگاه ...» استفاده می‌کنیم و آن را به صورت « $p \Rightarrow q$ » نمایش می‌دهیم.

p	q	$p \Rightarrow q$
د	د	د
د	ن	ن
ن	د	د
ن	ن	د

مثال  اگر 4 زوج باشد آنگاه $\sqrt{5}$ گنگ نیست.
 $\underbrace{\quad \quad \quad}_{\text{د}} \quad \underbrace{\quad \quad \quad}_{\text{ن}}$
 $\underbrace{\quad \quad \quad}_{\text{ن}}$





نکته: در دو ردیفی که p نادرست است، ارزش کلی $p \Rightarrow q$ درست است و اصطلاحاً می‌گوییم گزاره شرطی به انتفای مقدم درست است.

ترکیب دو شرطی دو گزاره:

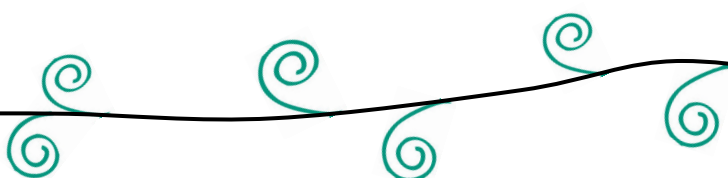
هر گاه بخواهیم از گزاره p گزاره q را نتیجه بگیریم و از گزاره q گزاره p را نتیجه بگیریم، آن را به صورت « $p \Leftrightarrow q$ » نمایش می‌دهیم و آن را به صورت «اگر p آنگاه q و برعکس» می‌فوانیم.

p	q	$p \Leftrightarrow q$
د	د	د
د	ن	ن
ن	د	ن
ن	ن	د

مثال $\left(\frac{1}{2} < \frac{1}{3}\right) \Leftrightarrow (96 \text{ مرکب است})$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{\text{د}}$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{\text{ن}}$






استدلال ریاضی:

نماد ریاضی:  

اولین گام در استدلال ریاضی، تبدیل گزاره‌های شفاهی به زبان ریاضی است.

 مثال) عددی به علاوه نصف خودش از مربع خمس آن چهار واحد بیشتر است.

$$x + \frac{x}{2} = \left(\frac{x}{5}\right)^2 + 4$$

استدلال استثنایی:  

یکی از انواع استدلال‌ها که روش به کار رفته در آن درست است و عبارت کلامی و نماد ریاضی آن بر یکی از دو شکل زیر است.

عبارت کلامی:

مقرمه ۱: اگر الف آنگاه ب

$$p \Rightarrow q$$


مقرمه ۲: الف

$$\frac{p}{\therefore q} \quad \text{یا} \quad ((p \Rightarrow q) \wedge p) \Rightarrow q$$

نتیجه: ب

 مثال)

مقدمه ۱: اگر فروش خودرو بیشتر باشد آنگاه ترافیک هم بیشتر می‌شود.
مقدمه ۲: امسال فروش خودرو بیشتر شد.
∴ امسال ترافیک بیشتر می‌شود.

 نکته: گفتیم استدلال استثنایی بر اساس روشی درست عمل می‌کند ولی نتیجه این استدلال وقتی قطعاً درست است که مقدمه ۱ درست باشد.





مغالطه:

روش به کار رفته در این استدلال نادرست است و عبارت کلامی و نماد ریاضی آن به یکی از دو شکل زیر است؛
عبارت کلامی: مقدمه ۱: اگر الف آنگاه ب

$$p \Rightarrow q$$

مقدمه ۲: ب

$$\frac{q}{\therefore p}$$

یا $[(p \Rightarrow q) \wedge q] \Rightarrow p$

نتیجه: الف

نتیجه: الف

مثال

مقدمه ۱: اگر فردا برف ببارد، آنگاه مدرسه تعطیل می‌شود.

مقدمه ۲: مدرسه تعطیل شده است.

∴ برف باریده است.

نکته: نتیجه مغالطه می‌تواند درست یا نادرست باشد.

عکس نقیض:

در بسیاری از مواقع اثبات گزاره شرطی $p \Rightarrow q$ دشوار است؛ برای راحتی کار بهتر است که درستی گزاره $\sim p \Rightarrow \sim q$ را نشان دهیم.

مثال: درستی گزاره « n زوج است $\Rightarrow n^2$ زوج است» را اثبات کنید.

پاسخ: به علت دشواری گزاره « n^2 زوج نیست $\Rightarrow n$ زوج نیست» را ثابت می‌کنیم. می‌دانیم در ریاضی، اعداد زوج را با $2k$ و اعداد فرد را با $2k+1$ نشان

می‌دهیم.
$$n = 2k + 1 \xrightarrow{\text{توان}} n^2 = (2k + 1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2(\underbrace{2k^2 + 2k}_m) + 1 = 2m + 1 \quad (m \in \mathbb{Z})$$

پس n^2 فرد است.

پیدا کردن خطا در استدلال:

۱) در یک معادله نمی‌توانیم دو طرف را در یک مجهول ضرب یا تقسیم کنیم مگر آنکه مخالف صفر بودن آن مشخص باشد.

۲) دو طرف یک نامساوی را نمی‌توان در عددی که علامت آن را نمی‌دانیم ضرب یا تقسیم کنیم.

۳) اگر در صورت یا مخرج یک کسر اعداد و متغیرها جمع و تفریق شده باشند نمی‌توانیم قسمتی از آنها را با هم ساده کنیم.

۴) اگر ابعاد یک شکل هندسی k برابر شود به این معنا نیست که مساحت آن شکل نیز k برابر شده است.





نمونه سوالات فصل ۱ یازدهم

۱

با استفاده از جدول ارزش گذاری درستی یا نادرستی هم‌ارزی زیر را بررسی کنید.

$$\sim (p \Rightarrow q) \wedge (\sim q \Leftrightarrow p) \equiv F$$

۲

ارزش گزاره‌های زیر را تعیین کنید.

الف) $(-6 \notin \mathbb{N}) \wedge (2^5 \times 2^{12} = 2^{17})$

ب) $(\mathbb{R} \subseteq \mathbb{Z}) \Rightarrow$ (۴۹ مربع کامل است)

پ) $([1 \text{ عدد اول است}] \vee [\frac{1}{2} > \frac{1}{3}]) \wedge$ (معادله $x^2 + 4 = 0$ ریشه ندارد)

ت) (حاصل $x+y$ فرد است) \Rightarrow (اعداد x و y فرد هستند)

۳

اگر ارزش $r \Rightarrow (p \wedge q)$ نادرست باشد، ارزش گزاره $\sim r \Leftrightarrow (\sim p \vee q)$ را بدون رسم جدول تعیین کنید.

۴

ارزش گزاره‌های زیر را تعیین کنید.

الف) رنگ چشم افراد، متغیر کیفی اسمی است و $\sqrt{9+100} = 3+10$

ب) عدد ۲۴ بر ۳ یا ۵ بخش پذیر است.

پ) اگر k فرد باشد آنگاه k^2 نیز فرد است.

ت) اگر تقریباً ۲۵ درصد داده‌ها قبل از چارک اول باشند، آنگاه واریانس، جذر انحراف معیار است و برعکس.

۵

کدام یک از جملات زیر یک گزاره است؟ در صورت گزاره بودن ارزش آن را تعیین کنید و سپس نقیض آن را بنویسید.

الف) عدد $\sqrt{12}$ یک عدد گویا است.

ب) ۲۳ از ۴۷ کوچکتر است.

پ) شما چند سال دارید؟

۶

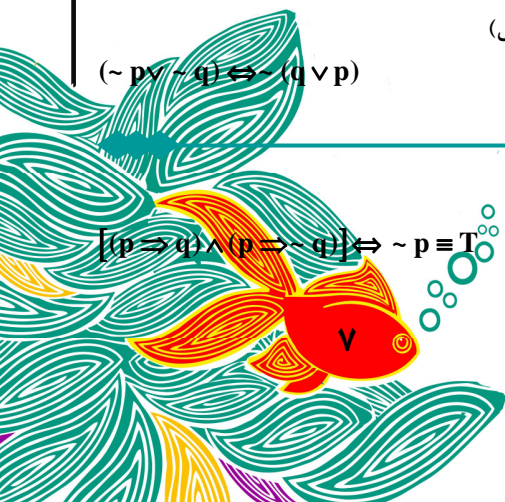
اگر p گزاره ای نادرست و q گزاره‌ای درست باشد، در این صورت ارزش گزاره مرکب زیر را بدست آورید. (جدول)

$$(\sim p \vee \sim q) \Leftrightarrow \sim (q \vee p)$$

۷

درستی هم‌ارزی زیر را با استفاده از جدول ارزش‌ها نشان دهید.

$$[(p \Rightarrow q) \wedge (p \Rightarrow \sim q)] \Leftrightarrow \sim p \equiv T$$





۸

کدام یک از جملات زیر بیانگر یک گزاره است؟ ارزش هر گزاره را تعیین کنید.

الف) عدد صفر از عدد یک بزرگتر است.

ب) عدد ۹ عددی گنگ است.

پ) لطفاً تخته را پاک کن.

ت) $2 + 3 - 5 + 4 - 3 \div 3 = 5$

۹

ترکیب عطفی دو گزاره را تعریف کنید و برای آن مثالی بزنید.

۱۰

اگر p گزاره‌ای درست و q گزاره‌ای نادرست و r گزاره‌ای دلخواه باشد، ارزش هر یک از گزاره‌های مرکب زیر را مشخص کنید.

الف) $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\sim q \Rightarrow \sim p)$

ب) $(q \vee r) \Rightarrow (r \Rightarrow p)$

پ) $(r \Rightarrow p) \wedge p$

ت) $(\sim p \Rightarrow r) \Rightarrow \sim q$

۱۱

از میان عبارتهای زیر گزاره‌ها را مشخص کرده و ارزش آنها را تعیین کنید.

الف) عدد n عدد طبیعی باشد، همیشه فرد است.

ب) اگر a عددی گنگ یا گویا باشد آنگاه مربع عدد فرد، عددی فرد است.

پ) 10^{-13} عددی کوچک است و تمام اعداد به این فرم نماد علمی مثبت هستند.

ت) $2 + 2^{2018}$ عددی اول است و ۹۱ عددی مرکب است.

۱۲

هنگامی که ۳ گزاره از تعدادی گزاره کم کنیم، تعداد حالت‌های ارزشی آن ۲۸ تا کمتر می‌شود. تعداد گزاره‌های اولیه چقدر است؟

۱۳

ارزش گزاره‌های زیر را با استفاده از جدول به دست آورید.

الف) $(p \wedge \sim q) \vee (p \Rightarrow q)$ (هم جدول هم قوانین دمرگان)

ب) $p \wedge (p \Leftrightarrow q) \Rightarrow q$

۱۴

نقیض گزاره‌های زیر را بنویسید.

الف) آن حیوان پرنده است یا مهره‌دار است.

ب) افلاطون شاگرد افلاطون است و عدد ۴ زوج است.

پ) اگر باران بیاید، من به سینما می‌روم.

ت) اگر واریانس داده‌ها برابر صفر باشد، آنگاه داده‌ها با هم برابرند و برعکس.





ث) هر ایرانی یک آسیایی است.
ج) حداقل یک عدد اول وجود دارد که زوج باشد.

۱۵

جاهای خالی را با عبارت مناسب پر کنید.
الف) به جمله خبری که دقیقاً یک ارزش درست یا نادرست دارد، می‌گویند.
ب) جدول ارزشی II گزاره دارای حالت است.
پ) ترکیب عطفی دو گزاره در حالتی درست است که
ت) ترکیب فصلی دو گزاره در حالتی نادرست است که

۱۶

جاهای خالی را با درست / نادرست پر کنید.
الف) گزاره مرکب $(\sqrt{2})$ عددی گویاست یا الان باران می‌بارد) دارای ارزش است.
ب) گزاره مرکب (تهران پایتخت ایران است و مهرداد در پاریس زندگی می‌کند) دارای ارزش درست است پس گزاره (مهرداد در پاریس زندگی می‌کند) دارای ارزشی است.
پ) گزاره مرکب (اگر علی پیراهن سفید بپوشد آنگاه رضا پیراهن سیاه می‌پوشد) دارای ارزش نادرست است. پس گزاره اول دارای ارزش و گزاره دوم دارای ارزش است.

۱۷

در کدام یک از موارد از قیاس استثناء به درستی استفاده شده است؟
الف) هر کسی ادب داشته باشد به دیگران ناسزا نمی‌گوید، پس هر کسی که به دیگران ناسزا نگویید با ادب است.
ب) اگر یک مشتری خرید بالای ۱۰۰ هزار تومان داشته باشد، ۵ هزار تومان تخفیف به او تعلق می‌گیرد.
خرید این مشتری، ۱۱۹ هزار تومان است.
∴ این مشتری باید ۱۱۴ هزار تومان بپردازد.

۱۸

برای هر یک از گزاره‌های زیر که یک عبارت به زبان طبیعی است یک عبارت به زبان ریاضی بنویسید و برعکس.
الف) معکوس مجموع دو عدد برابر تفاضل معکوس‌های آن دو عدد است.
ب) $(x+y)^2 \geq \sqrt{x+y}$
پ) $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$

۱۹

دانش آموزی ادعا می‌کند که معادله‌ی $x^2 - 2x = 0$ تنها دارای ریشه $x = 2$ است. ایراد استدلال او را بیابید.
۱) $x^2 - 2x = 0$
۲) $x(x-2) = 0$
۳) $\frac{x(x-2)}{x} = \frac{0}{x}$
۴) $x-2 = 0$
۵) $x = 2$





۲۰

با استفاده از جدول درستی قاعده قیاس استثنایی $(p \Rightarrow q) \wedge p \Rightarrow q$ را نشان دهید.

۲۱

گزاره‌های زیر را به صورت نماد ریاضی بازنویسی کنید.
الف) دو برابر جذر عددی برابر خودش است.
ب) مجموع مکعبات دو عدد بزرگتر یا مساوی مکعب مجموع آن دو عدد است.

۲۲

$$\frac{ax+۳}{a} = x+۳$$

تساوی مقابل درست است یا نادرست؟ (دلیل خود را توضیح دهید)

۲۲۳

استدلال زیر چه نوع استدلالی است؟ چرا؟
آرش معتقد است که «هر کسی از من متنفر است پشت سر من حرف می‌زند. از طرفی سعید پشت سر من حرف زده است، پس سعید از من متنفر است.»

۲۲۴

با استفاده از استدلال عکس نقیض ثابت کنید که «اگر $n^2 + n$ فرد باشد، آنگاه n هم فرد است.» ($n \in \mathbb{N}$)





پاسخنامه تشریحی سوالات فصل ۱

۱

p	q	$\sim q$	$p \Rightarrow q$	$\sim (p \Rightarrow q)$	$\sim q \Leftrightarrow p$	$\sim (p \Rightarrow q) \wedge (\sim q \Leftrightarrow p)$
>	>	ن	>	ن	ن	ن
>	ن	>	ن	>	>	>
ن	>	ن	>	ن	>	ن
ن	ن	>	>	ن	ن	ن

پس هم‌ارزی داده شده نادرست است.

۲

الف) $\underbrace{(-6 \notin \mathbb{N})}_{>} \wedge \underbrace{(2^5 \times 2^{12} = 2^{17})}_{>}$

ب) $\underbrace{(\mathbb{R} \subseteq \mathbb{Z})}_{>} \Rightarrow \underbrace{(49 \text{ مربع کامل است})}_{>}$

پ) $\underbrace{[(\frac{1}{2} > \frac{1}{3}) \vee \underbrace{(\text{اعداد اول است})}_{>}]}_{>} \vee \underbrace{(معادله } x^2 + 4 = 0 \text{ ریشه ندارد)}_{>}$

ت) $\underbrace{(\text{اعداد } x \text{ و } y \text{ فرد هستند})}_{>} \Rightarrow \underbrace{(x+y \text{ فرد است})}_{>}$
 (فرض می‌کنیم) >

می‌دانیم حاصل دو عدد فرد همواره زوج است.

۳

$$[(\sim p \vee q) \Leftrightarrow \sim r] \equiv [(\sim T \vee T) \Leftrightarrow \sim F] \equiv [(F \vee T) \Leftrightarrow T] \equiv T$$

۴

$\begin{matrix} p \Leftrightarrow q \equiv F & \text{ت} \\ T & F \end{matrix}$

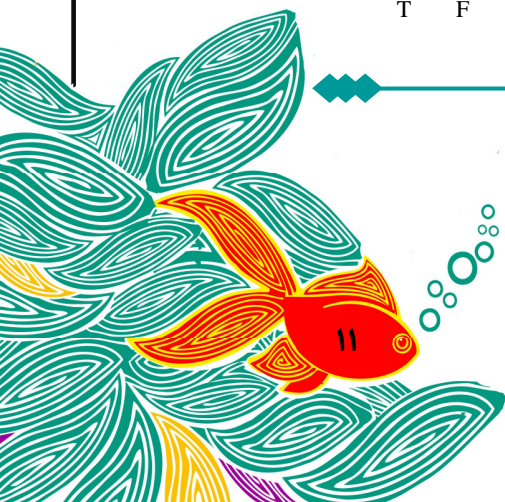
$\begin{matrix} p \Rightarrow q \equiv T & \text{پ} \\ T & T \end{matrix}$
 (فرض می‌کنیم)

$\begin{matrix} p \vee q \equiv T & \text{ب} \\ T & F \end{matrix}$

$\begin{matrix} p \wedge q \equiv F & \text{الف} \\ T & F \end{matrix}$

۵

الف) گزاره است؛ نادرست ب) گزاره است؛ درست پ) گزاره نمی‌باشد





۶

گزاره نادرست می‌باشد.

p	q	~ p	~ q	p ∨ q	~ p ∨ ~ q	~ (p ∨ q)	(~ p ∨ ~ q) ⇔ ~ (q ∨ p)
⊗	>	>	⊗	>	>	⊗	⊗

۷

p	q	~ p	~ q	p ⇒ q	p ⇒ ~ q	(p ⇒ q) ∧ (p ⇒ ~ q)	(p ⇒ q) ∧ (p ⇒ ~ q) ⇔ ~ p
>	>	⊗	⊗	>	⊗	⊗	>
>	⊗	⊗	>	⊗	>	⊗	>
⊗	>	>	⊗	>	>	>	>
⊗	⊗	>	>	>	>	>	>

۸

الف) گزاره است؛ نادرست (ب) گزاره است؛ نادرست (پ) گزاره نیست؛ (امری) ت) گزاره است؛ نادرست

۹

هر گاه بخواهیم دو گزاره مانند p و q را با لفظ «و» ترکیب کنیم، از نماد «∧» بین دو گزاره استفاده می‌کنیم و آن را ترکیب عطفی می‌نامیم. مثال: ۷ عددی اول است و ۴ عددی مرکب است.

۱۰

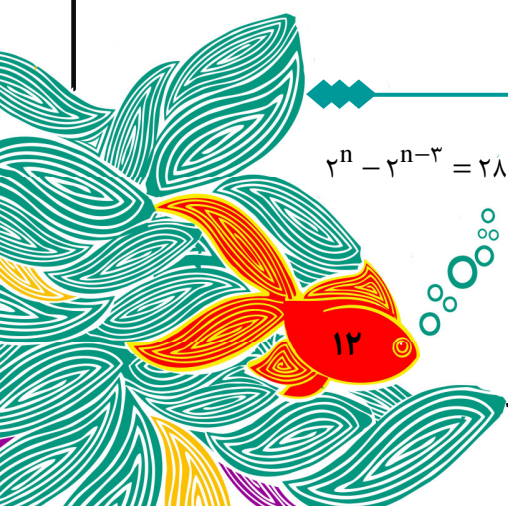
الف) نادرست ⇔ نادرست
 ب) درست ⇒ درست (یا نادرست)
 ت) درست ⇒ درست
 پ) (r ⇒ p) ∧ p

۱۱

T (الف) T (ب) F (پ) F (ت)

۱۲

$$2^n - 2^{n-3} = 28 \Rightarrow 2^n \left(1 - \frac{1}{8}\right) = 28 \Rightarrow 2^n \left(\frac{7}{8}\right) = 28 \Rightarrow 2^n = 28 \times \frac{8}{7} \Rightarrow n = 5$$





۱۳

p	q	~ q	$p \wedge \sim q$	$p \Rightarrow q$	$(p \wedge \sim q) \vee (p \Rightarrow q)$
>	>	ن	ن	>	>
>	ن	>	>	ن	>
ن	>	ن	ن	>	>
ن	ن	>	ن	>	>

الف) با استفاده از نکات ذکر شده داریم: $(p \wedge \sim q) \vee (p \Rightarrow q) \equiv (p \wedge \sim q) \vee (\sim p \vee q)$
 با استفاده از قوانین دمرگان: $(p \wedge \sim q) \vee (\sim p \vee q) \equiv (p \wedge \sim q) \vee (p \wedge \sim q)$
 که ترکیب فصلی یک گزاره با نقیض آن همواره T است.
 ب)

p	q	$(p \wedge (p \Leftrightarrow q) \Rightarrow q)$
>	>	>
>	ن	>
ن	>	>
ن	ن	>

۱۴

الف) آن میوان پرنه نیست و مهره دار نیست.
 ب) افلاطون شاگرد ارسطو نیست یا عدد ۴ زوج نیست.
 پ) باران می آید و من به سینما نمی روم.
 ت) اگر واریانس داده‌ها مخالف صفر باشد آنگاه داده‌ها برابر نیستند و برعکس.
 ث) وجود دارد که ایرانی‌ای که آسیایی نباشد.
 ج) همه‌ی اعداد اول فرد هستند.

۱۵

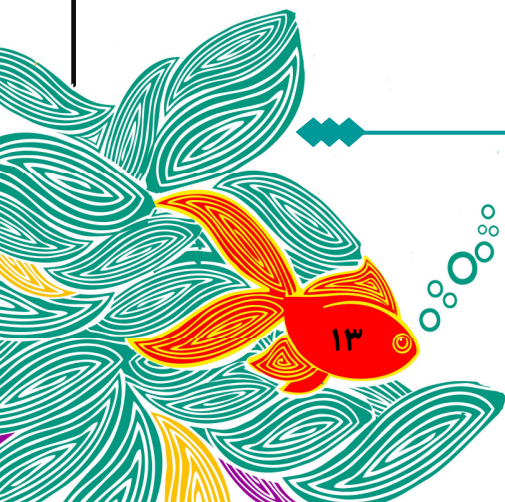
الف) گزاره (ب) 2^n (پ) هر دو درست باشد. (ت) هر دو نادرست باشد.

۱۶

الف) نادرست (ب) درست (پ) درست - نادرست

۱۷

الف) مغالطه (ب) قیاس





۱۸

$$\frac{1}{x+y} = \frac{1}{x} - \frac{1}{y} \quad (\text{الف})$$

ب) مربع مجموع دو عدد از جذر مجموع آنها بزرگتر یا مساوی است.
پ) حاصل ضرب مجموع و تفاضل دو عدد برابر تفاضل مربعات آنهاست.

۱۹

ایراد: مرحله ۳: تقسیم بر متغیری که صفر است.

۲۰

p	q	$p \Rightarrow q$	$(p \Rightarrow q) \wedge p$	$((p \Rightarrow q) \wedge p) \Rightarrow q$
>	>	>	>	>
>	⊂	⊂	⊂	>
⊂	>	>	⊂	>
⊂	⊂	>	⊂	>

۲۱

الف) $2\sqrt{x} = x$

ب) $x^3 + y^3 \geq (x+y)^3$

۲۲

نادرست است. زیرا در حالت جمع یا تفریق نمی‌توانیم صورت و مخرج کسر را ساده نماییم.

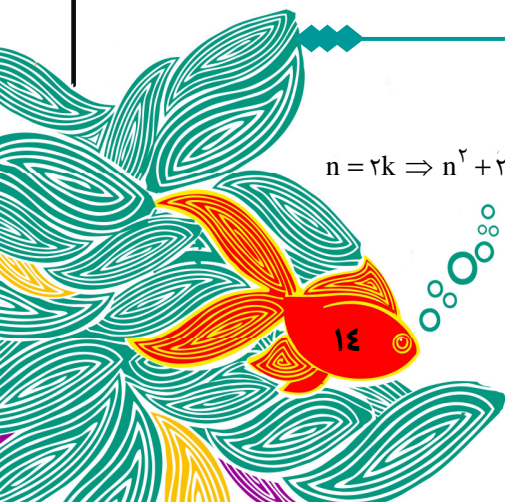
۲۳

مقدمه ۱: اگر کسی از من منتفر باشد، آنگاه پشت سر من حرف می‌زند. $p \Rightarrow q$
مقدمه ۲: سعید پشت سر من حرف زده است. q (در حالیکه p باید باشد)
∴ سعید از من منتفر است. p
استدلال آرش غلط است زیرا در مقدمه دوم باید p باشد نه q.

۲۴

کس نقیض داده شده عبارت است از «اگر n زوج باشد، آنگاه $n^2 + 2n$ هم زوج است.»

$$n = 2k \Rightarrow n^2 + 2n = (2k)^2 + 2(2k) = 4k^2 + 4k = 2(\underbrace{2k^2 + 2k}_m) = 2m$$





تابع:

در ریاضیات تابع دستگاهی است که به ازای هر ورودی دقیقاً یک خروجی تولید می‌کند که با ضابطه $y = f(x)$ نمایش می‌دهیم.



روش‌های نمایش تابع:

۱) زوج مرتب:

زمانی تابع است که مولفه‌های اول (x) تکراری نداشته باشد.

(مثال)

مولفه اول

تابع است $\rightarrow \{(2, 5), (6, -3), (-1, 0)\}$

مولفه دوم

تابع نیست $\rightarrow \{(-2, 4), (0, 4), (-2, 3)\}$

مولفه‌های اول تکراری



نکته: زمانی با وجود تکراری بودن x ها تابع است که y ها هم تکراری باشند.

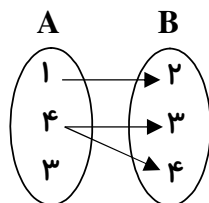
(مثال)

تابع است $\rightarrow \{(-1, 2), (3, 4), (-1, 2)\}$

۲) تابع پیکانی:

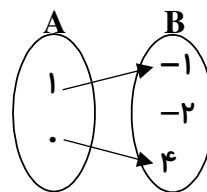
در صورتی تابع است که از هر عضو A دقیقاً یک پیکان خارج شود و هیچ مولفه بدون استفاده‌ای در A باقی نماند.

(مثال)

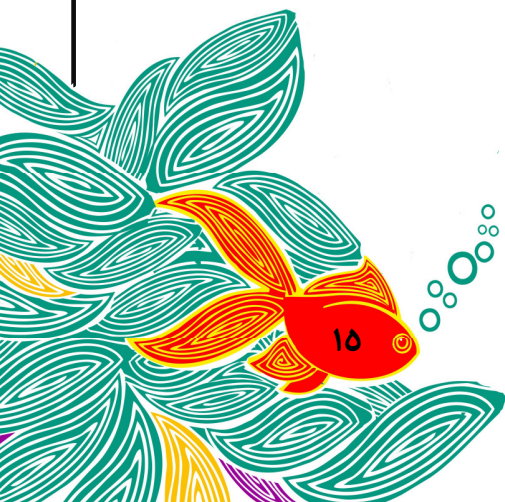


تابع نیست زیرا:

- از یک عضو دو مولفه خارج شده است.
- یک مولفه در A بدون استفاده باقی مانده است.



تابع است

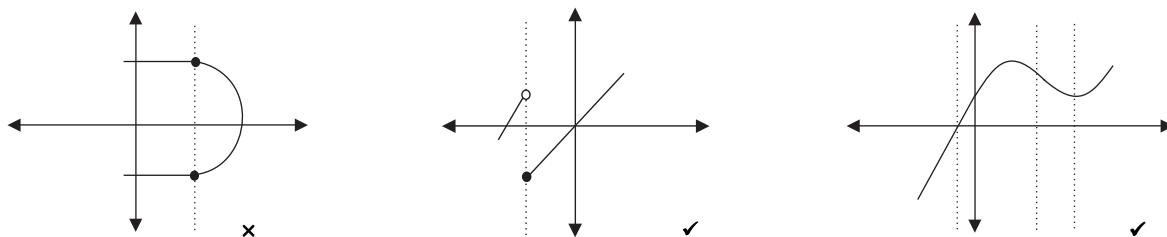




۳) تابع نموداری (مفتضاتی):

زمانی تابع است که هر خط موازی محور y ها بیشتر از یک نقطه را در نمودار تابع قطع نکند.

(مثال)



۴) نمایش جدولی:

زمانی تابع است که مولفه‌های اول تکراری نباشد؛ اگر مولفه‌های اول (x) تکراری بود، مولفه دوم نیز باید تکراری باشد.

(مثال)

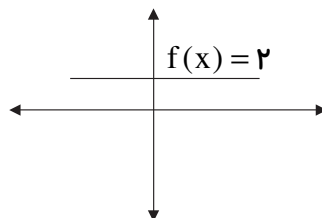
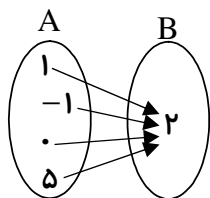
x	۴	-۱	۲	۸	✓
y	۳	۳	۰	۵	

x	۳	۵	-۲	$\sqrt{9}$	x
y	۲	۰	-۱	۱	

$\sqrt{9} = 3$

تابع ثابت:

به تابعی که ضابطه‌اش $f(x) = C$ باشد، تابع ثابت می‌گوییم. در تابع ثابت $\mathbb{R} = \{C\}$ می‌باشد؛ یعنی برد آن تنها شامل یک عضو می‌باشد.
 $f = \{(1, 2), (-1, 2), (0, 2), (5, 2)\}$



x	۱	-۱	۰	۵
y	۲	۲	۲	۲

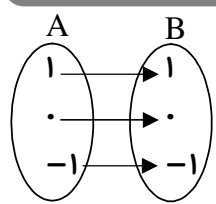




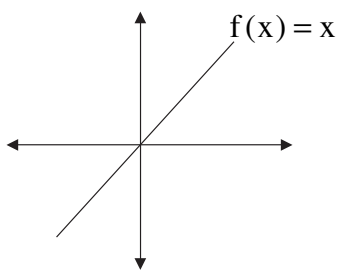
تابع همانی:

به تابعی که ضابطه اش $f(x) = x$ باشد تابع همانی می‌گوییم. در تابع همانی هر x که وارد شود دقیقاً همان مقدار را به عنوان y فروبی می‌دهد.

$$f = \{(1,1), (0,0), (-1,-1)\}$$



x	1	0	-1
y	1	0	-1



توابع چند ضابطه‌ای:

توابعی هستند که بیش از یک ضابطه دارند و برای یافتن مقادیر تابع باید ابتدا تشخیص دهید که از کدام ضابطه استفاده کنیم.

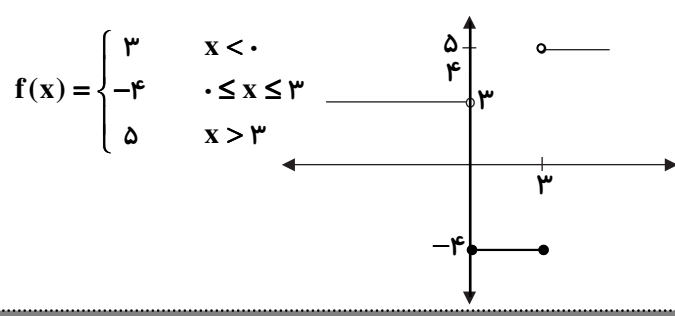
$$f = \begin{cases} x-1 & x < -2 & f(-3) = -3-1 = -4 \\ 2 & x > 3 & f(-2) = (-2)^2 = 4 \\ x^2 & -2 \leq x \leq 3 & f(1) = (1)^2 = 1 \\ & & f(4) = 2 \end{cases}$$

بر دامنه

تابع پلکانی:

تابع پلکانی ضابطه‌ای است که همه ضابطه‌هایش عدد ثابتی است.

نکته: چون تمام ضابطه‌های آن عدد ثابتی است پس نمودار آن فقط شامل خط‌های افقی است.



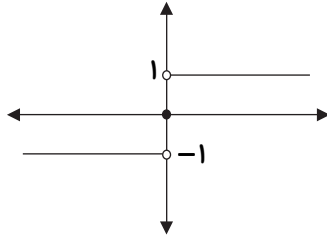


تابع علامت (sign):

به تابع پلکانی با ضابطه روبه‌رو تابع علامت می‌گویند.

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ 0 & x = 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases}$$

$\text{sign}(3) = 1$ $\text{sign}(-4) = -1$
 $\text{sign}(0) = 0$ $\text{sign}(1) = 1$



تابع جزء صحیح []:

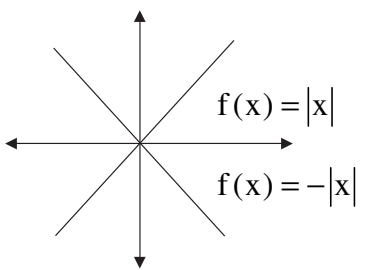
تابعی است که به هر عدد یک عدد صحیح نسبت می‌دهند که کوچکتر یا برابر عدد داده شده است. در ریاضیات به آن تابع برکت نیز می‌گویند.

$[2/1] = 2$ $[-1/8] = -2$ $[-0/7] = -1$
 $[0/2] = 0$ $[-2] = -2$ $[0] = 0$ $[3/9] = 3$

تابع قدرمطلق:

تابعی است که هر عدد مثبتی وارد آن شود خود آن عدد بیرون می‌آید ولی اگر هر عدد منفی وارد آن شود قرینه آن بیرون می‌آید.

$$f(x) = |x| \begin{cases} x & x > 0 \\ -x & x < 0 \end{cases}$$

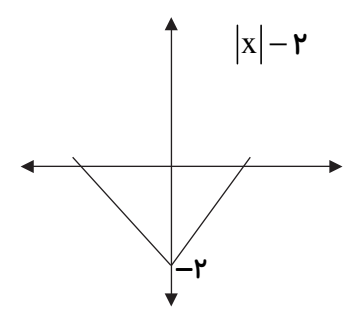
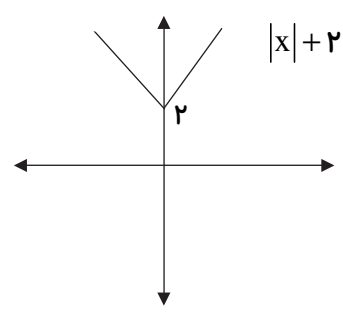
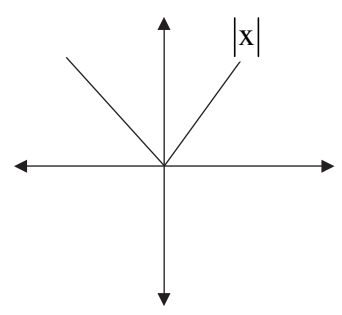




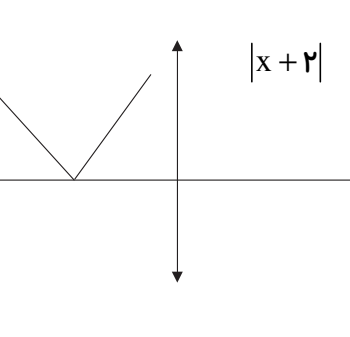
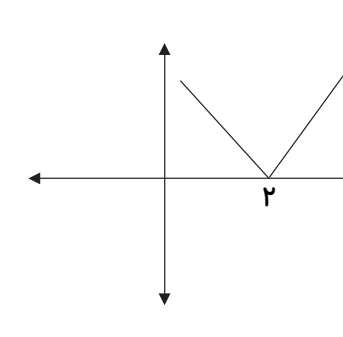
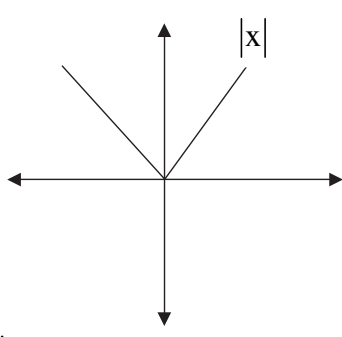
رسم نمودار به کمک انتقال:  

الف) ابتدا نمودار $f(x) = |x|$ را رسم می‌کنیم.

ب) $f(x) = |x| + k$: کافی است نمودار $|x|$ را k واحد به سمت بالا انتقال دهیم و برای رسم $f(x) = |x| - k$ به همین ترتیب نمودار $|x|$ را k واحد به سمت پایین انتقال می‌دهیم.



ب) $f(x) = |x - k|$: کافی است نمودار $|x|$ را k واحد به سمت راست انتقال دهیم و برای رسم $f(x) = |x + k|$ نمودار $|x|$ را k واحد به سمت چپ انتقال می‌دهیم.





ترکیب توابع:

زمانی که یک تابع روی تابعی دیگر عمل کند، دو تابع با یکدیگر ترکیب شده اند.

$$f(x) + g(x) = (f + g)(x)$$

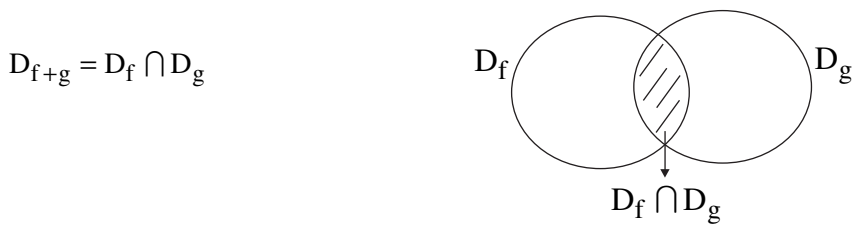
جمع دو تابع $f(x)$ و $g(x)$ را با $(f + g)(x)$ نمایش می دهیم:

به عنوان مثال $f(x) = -2x$ و $g(x) = 3x$ باشد، داریم:

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x) = -2x + 3x = x$$

$$(f + g)(x) = x$$

در صورتی این دو تابع جمع می شوند که x هم در دامنه f باشد، هم در دامنه g . دامنه تابع $f + g$ برابر است با:



$$\frac{f}{g}(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$$

تقسیم دو تابع نیز همانند جمع و تفریق و ضرب آن است:

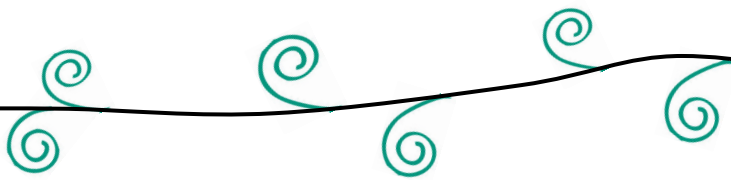
اما با این تفاوت که تمام فروبی هایی که مخرج را صفر می کنند دامنه های آن غیر قابل قبول است زیرا مخرج کسر را صفر می کنند:

$$D_{\frac{f}{g}} = D_f \cap D_g - \{x | g(x) = 0\}$$



بوی باران، بوی سبزه، بوی خاک
 شاخه های شسته، باران خورده، پاک
 آسمان آبی و ابر سپید
 برگ های سبزید
 عطر نرگس، رقص باد
 نغمه شوق پرستوهای شار
 خلوت گرم کبوترهای مت

نوروزتان مبارک





نمونه سوالات فصل ۲ یازدهم

۱

نمودار تابع چند ضابطه‌ای $f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & x < 0 \\ 3x + 2 & x \geq 0 \end{cases}$ را رسم کرده، سپس حاصل عبارات $f(0)$ ، $f(5)$ و $f(-\sqrt{5})$ را بدست آورید.

۲

اگر f تابع همانی باشد، مقادیر a ، b ، c و d را بدست آورید و سپس میانه آنها را تعیین کنید.

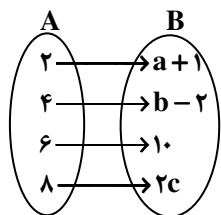
$$f = \left\{ (3a-1, 5), \left(\frac{b}{8}, 2\right), (-3, 3c), (d, 20) \right\}$$

۳

با فرض آنکه $f: A \rightarrow B$ و $f = \left\{ -\sqrt{3}, 0, \frac{1}{3} \right\}$ باشد، برد f را بدست آورید.

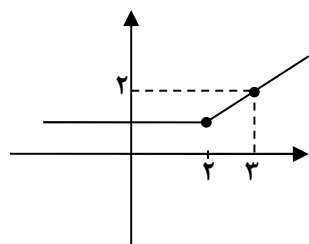
۴

اگر تابع f ثابت باشد، میانگین a ، b و c را بدست آورید.



۵

ضابطه، دامنه و برد تابع مقابل را تعیین کنید.



۶

برد تابع زیر را بیابید.

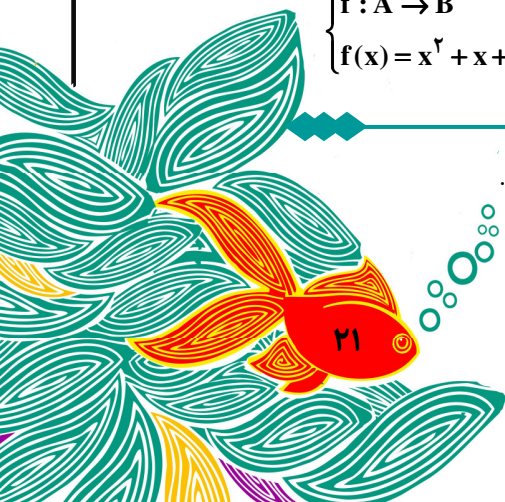
$$\begin{cases} f: A \rightarrow B \\ f(x) = x^2 + x + 1 \end{cases}$$

$$D_f = A = \{0, 1, -1\}$$

$$R_f = B = ?$$

۷

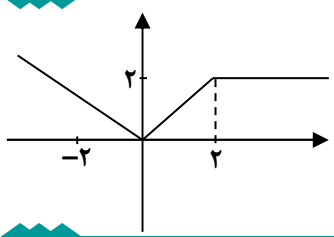
اگر رابطه $f = \{(a+1, b+1), (a+1, 2), (b, b), (2, a+2)\}$ بیانگر یک تابع باشد، مقادیر a و b را بیابید.





۸

ضابطه تابع زیر را مشخص کنید.



۹

نمودار تابع $y = |2x + 3|$ را رسم کنید.

۱۰

اگر $f(x) = [x] + [-x]$ باشد، حاصل $f(\pi) - f(-4)$ را بدست آورید.

۱۱

نمودار تابع $f(x) = \text{sign}(x)$ را رسم کرده، دامنه و برد آن را تعیین کنید. همچنین حاصل $3f(\sqrt{2}) - f(0) \times f(-6)$ را بدست آورید.

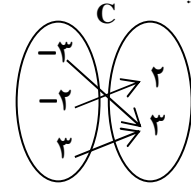
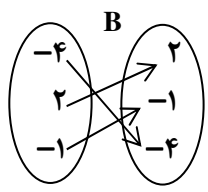
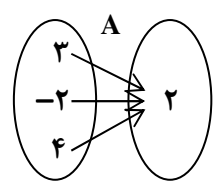
۱۲

حاصل عبارت مقابل را بدست آورید.

$$A = [0/58] + [-0/76] + [5/69] - [-4/7]$$

۱۳

نوع هر تابع را مشخص کنید.



۱۴

اگر f تابع همانی باشد، مقادیر a, b, c, d را بدست آورید.

$$f = \{(2a-1, 5), (b, 1), (\frac{c}{4}, 2), (1-d, 7)\}$$

۱۵

نمودار تابع $y = |x-3| + 2$ را با استفاده از انتقال تابع $f(x) = |x|$ رسم کنید.

۱۶

چنانچه توابع $f(x)$ و $g(x)$ به صورت زیر باشد، مقادیر خواسته شده را بدست آورید.

$$f(x) = x^2 - x + 1 \quad g(x) = \text{sign}(x)$$

الف) $(f+g)_{(0)}$ ب) $(f-g)_{(2)}$ پ) $(\frac{f}{g})_{(-2)}$
 ت) $(g-f)_{(1)}$ ث) $(f.f)_{(3)}$ ج) $(g+g)_{(-5)}$





پاسخنامه تشریحی سوالات فصل ۲

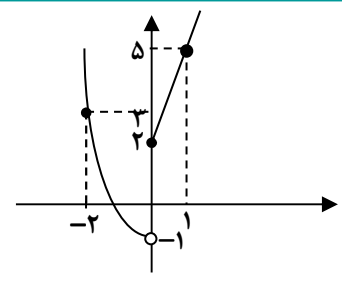
۱

$$y = \begin{cases} x^2 - 1 & x < 0 \\ 3x + 2 & x \geq 0 \end{cases}$$

x	0	-1	-2
y	-1	0	3

x	0	1
y	2	5

$$\Rightarrow \begin{cases} f(0) = 3(0) + 2 = 2 \\ f(5) = 3(5) + 2 = 17 \\ f(-\sqrt{5}) = (-\sqrt{5})^2 - 1 = 5 - 1 = 4 \end{cases}$$



۲

f همانی است پس در هر یک زوج مرتبها، عضو اول باید با عضو دوم برابر باشد، بنابراین چنین می نویسیم:

$$\begin{cases} 3a - 1 = 5 \Rightarrow 3a = 6 \Rightarrow a = 2 \\ \frac{b}{8} = 2 \Rightarrow b = 8 \times 2 = 16 \\ 3c = -3 \Rightarrow c = \frac{-3}{3} = -1 \\ d = 20 \end{cases}$$

نوشتن داده‌ها به صورت مرتب $\rightarrow -1, 2, 16, 20$

میانگین $= \frac{2+16}{2} = \frac{18}{2} = 9$

۳

$$y = 3x^2 - 1 \begin{cases} x = -\sqrt{3} \rightarrow y = 3(-\sqrt{3})^2 - 1 = 3(3) - 1 = 8 \\ x = 0 \rightarrow y = 3(0)^2 - 1 = -1 \\ x = \frac{1}{3} \rightarrow y = 3\left(\frac{1}{3}\right)^2 - 1 = 3\left(\frac{1}{9}\right) - 1 = \frac{1}{3} - 1 = -\frac{2}{3} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \text{بر } = \left\{ -1, -\frac{2}{3}, 8 \right\}$$

۴

تابع f ثابت است پس بردش فقط باید یک عضو داشته باشد، در برد عدد ۱۰ دیده می‌شود. پس بقیه اعضای برد هم باید ۱۰ باشند.

$$a + 1 = 10 \Rightarrow a = 9, \quad b - 2 = 10 \Rightarrow b = 12, \quad 2c = 10 \Rightarrow c = 5$$

$$\text{میانگین } \bar{x} = \frac{a+b+c}{3} = \frac{9+12+5}{3} = \frac{26}{3}$$

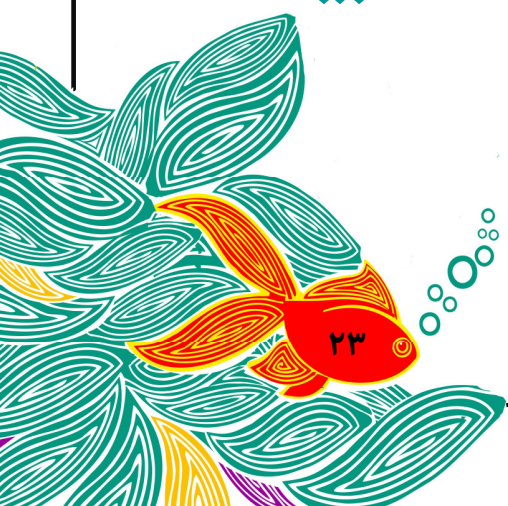
۵

خط سمت چپ: $y = 1, x < 2$

خط سمت راست: $A(2, 1), B(3, 2) \quad m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{2 - 1}{3 - 2} = 1$

$y - y_1 = m(x - x_1) \Rightarrow y - 1 = 1(x - 2) \Rightarrow y = x - 1, x > 2$

تابع ضابطه: $f(x) = \begin{cases} 1 & x < 2 \\ x - 1 & x > 2 \end{cases}$





۶

$$f: A \rightarrow B$$

$$f(x) = x^2 + x + 1 \begin{cases} f(0) = 0 + 0 + 1 = 1 \\ f(1) = 1 + 1 + 1 = 3 \\ f(-1) = 1 + (-1) + 1 = 1 \end{cases} \Rightarrow R_f = \{1, 3\}$$

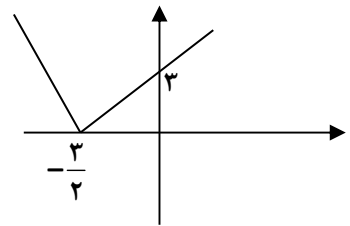
۷

$$b + 1 = 3 \Rightarrow b = 2 \Rightarrow a + 3 = 2 \Rightarrow a = -1$$

۸

$$f(x) = \begin{cases} -x & x \leq 0 \\ x & 0 < x < 2 \\ 2 & x \geq 2 \end{cases}$$

۹



۱۰

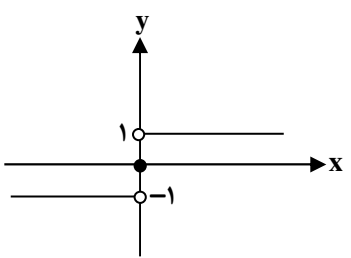
$$f(x) = [x] + [-x] \begin{cases} x = \pi \rightarrow f(\pi) = [\pi] + [-\pi] = [3/14] + [-3/14] = 3 + (-4) = -1 \\ x = -4 \rightarrow f(-4) = [-4] + [4] = -4 + 4 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow f(\pi) - f(-4) = -1 - 0 = -1$$

۱۱

$$f(x) = \text{sign}(x) = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ 0 & x = 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases}$$

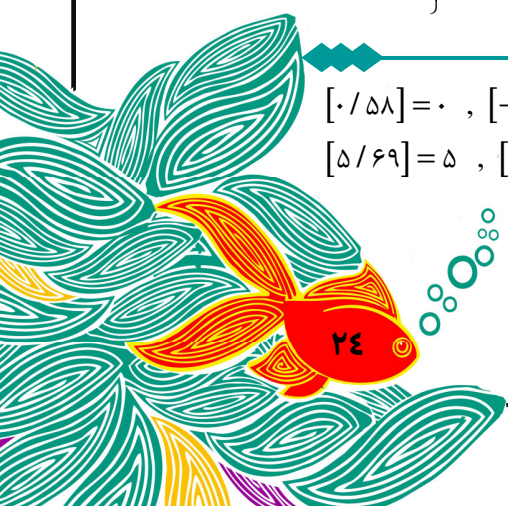
$$\left. \begin{array}{l} \sqrt{2} > 0 \xrightarrow{\text{ضابطه اول}} f(\sqrt{2}) = 1 \\ 0 = 0 \xrightarrow{\text{ضابطه دوم}} f(0) = 0 \\ -6 < 0 \xrightarrow{\text{ضابطه سوم}} f(-6) = -1 \end{array} \right\} \Rightarrow \text{عبارت مذکور} = 3(1) - 0 \times (-1) = 3$$



۱۲

$$[0/58] = 0, [-0/76] = -1$$

$$[5/69] = 5, [-4/7] = -5 \Rightarrow A = 0 + (-1) + (5) - (-5) = -1 + 5 + 5 = 9$$





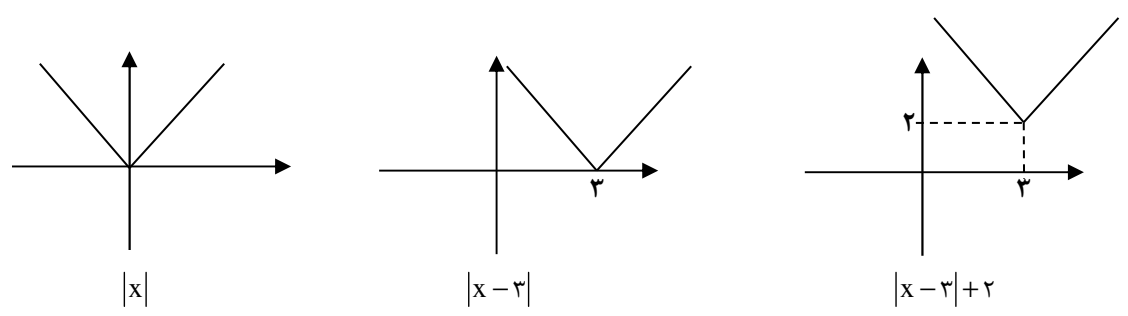
۱۳

(A) ثابت (B) همان (C) قدرمطلق

۱۴

$2a - 1 = 5$	$2a = 6$	$a = 3$
$b = 1$	$\frac{c}{2} = 2$	$c = 4$
$1 - d = 7$	$\frac{2}{-6} = d$	

۱۵



۱۶

الف) $(f+g)_{(1)} = f_{(1)} + g_{(1)} = 1 + 0 = 1$
 ب) $(f-g)_{(2)} = f_{(2)} - g_{(2)} = 3 - 1 = 2$
 پ) $\left(\frac{f}{g}\right)_{(-2)} = \frac{f_{(-2)}}{g_{(-2)}} = \frac{7}{-1} = -7$
 ت) $(g-f)_{(1)} = g_{(1)} - f_{(1)} = 1 - 1 = 0$
 ث) $(f.f)_{(7)} = f_{(7)} \times f_{(7)} = 7 \times 7 = 49$
 ج) $(g+g)_{(-5)} = (g)_{(-5)} + (g)_{(-5)} = (-1) + (-1) = -2$

