

فصل کار ریاضی دهام ← الان

آنالیز ترکیبی

فصل سوم نهم ← فرودین ۱۴۰۲

اصل ضرب: تعداد حالت های انجام کاری در هم ضرب می شود.
 Ex: چند منزله عددی با صروف الفبایی فارسی می توان نوشت:
 (۱) ننگه ارمباز باشد؟
 (۲) ننگه ارمباز نباشد؟

$$\frac{32}{\text{الف}} \times \frac{31}{\text{ب}} \times \frac{30}{\text{پ}}$$

$$\frac{32}{\text{الف}} \times \frac{32}{\text{ب}} \times \frac{32}{\text{پ}}$$

۴ ۴ ۶ ۳

Ex: با ارقام ۰, ۱, ۲, ۳, ۴, ۵, ۶, ۷, ۸, ۹ چند عدد ۴ رقمی می توان نوشت؟

۱۴ بدون ننگه ارمباز

$$\frac{7}{\text{الف}} \times \frac{8}{\text{ب}} \times \frac{8}{\text{پ}} \times \frac{8}{\text{ت}}$$

۱) ننگه ارمباز باشد

$$\left. \begin{array}{l} \frac{6 \times 6 \times 5 \times 3}{642} = 540 \\ \frac{7 \times 6 \times 5 \times 1}{0} \Rightarrow 210 \end{array} \right\} \rightarrow 750$$

$$\frac{7}{\text{الف}} \times \frac{7}{\text{ب}} \times \frac{6}{\text{پ}} \times \frac{5}{\text{ت}}$$

۲) بدون ننگه ارمباز

۵) بدون ننگه ارمباز و بخش پذیری ۵

$$\left. \begin{array}{l} \frac{7}{6} \times \frac{6}{6} \times \frac{5}{5} \times \frac{1}{0} = 210 \\ \frac{6}{6} \times \frac{6}{6} \times \frac{5}{5} \times \frac{1}{5} = 180 \end{array} \right\} \rightarrow 390$$

۳) بدون ننگه ارمباز و فرد

$$\frac{6}{\text{الف}} \times \frac{6}{\text{ب}} \times \frac{5}{\text{پ}} \times \frac{4}{\text{ت}}$$

بدون تکرار

چند عدد 5 رقمی می توان نوشت که ارقام آن یکی در میان زنجیر و خود باشند

$$\frac{5}{\text{فرد}} \times \frac{5}{\text{زوج}} \times \frac{4}{\text{فرد}} \times \frac{4}{\text{زوج}} \times \frac{3}{\text{فرد}} = 1200$$

$$\frac{4}{\text{زوج}} \times \frac{5}{\text{فرد}} \times \frac{4}{\text{زوج}} \times \frac{4}{\text{فرد}} \times \frac{3}{\text{زوج}} = 960$$

2160

$(4!)^2 \neq 16!$ $\sqrt{9!} \neq 3!$ $\frac{10!}{2!} \neq 5!$

جایگ:

به حالت های قراردادی n می بیند در آن ریگه جابجایی
 ما گویند که تعداد آن ها برابر است با $n!$

$7! = 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 5040$

$6! = 720$ و $5! = 120$ و $4! = 24$

$3! = 6$ و $2! = 2$ و $1! = 1$

$0! = 1$

$n! = n(n-1)!$

$\frac{(m+1)!}{(m-1)!} = 42 \Rightarrow \frac{(m+1)m \cancel{(m-1)!}}{\cancel{(m-1)!}} = 42$

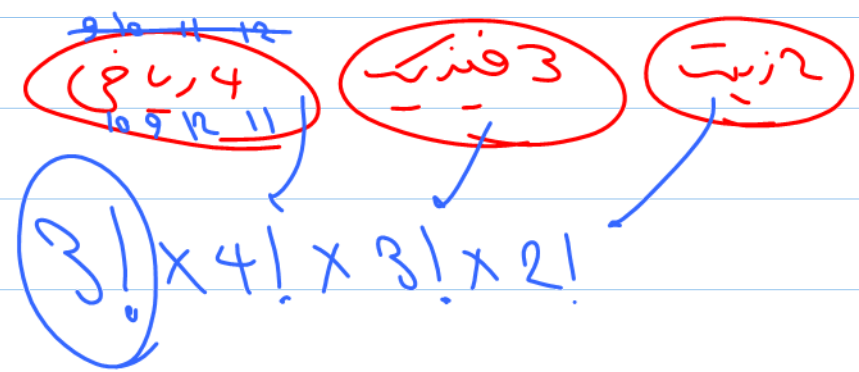
$m(m+1) = 42 \Rightarrow m = 6$

Ex: 4 کتاب هم‌نیزبانی و 3 کتاب هم‌نیزضدبانی و 2 کتاب هم‌نیززینت

ما خواهیم در یک قفسه بچینیم به شرط آنکه (1) کتاب‌های هم‌موضوع کنار یکدیگر نروند

(2) کتاب‌ها به ترتیب فنیک، ریاضی، زیست باشند
 (3 فنیک) (4 ریاضی) (2 زیست)

(1) کتاب‌های هم‌موضوع کنار یکدیگر نروند



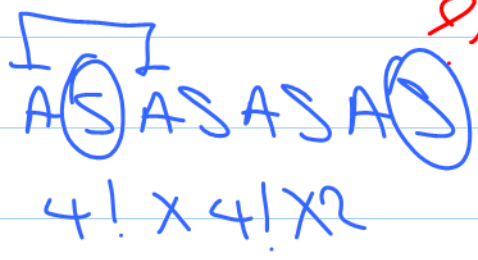
$2! \times 4! \times 3!$

(3) کتاب‌های هم‌نیزبانی و ریاضی کنار هم باشند
 (3 فنیک) (4 ریاضی) (2 زیست) $\Rightarrow 7! \times 2!$

Ex: 7 نفره دو نفر به اردن می‌روند
 در یک صف باید بنشینند به شرط آنکه دو برادر در کنار هم قرار ندارند

کتاب‌ها به ترتیب اول = قرار ندارند
 $7 \times 6! - 2 \times 6! = 5 \times 720 = 3600$

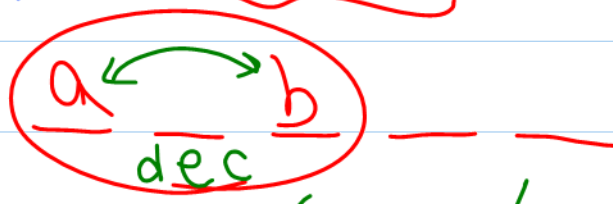
Ex: 4 افسر و 4 کرباز می‌روند در یک صف باید بنشینند به شرط آنکه یکی در میان قرار می‌گیرند



$4! \times 4! \times 2$

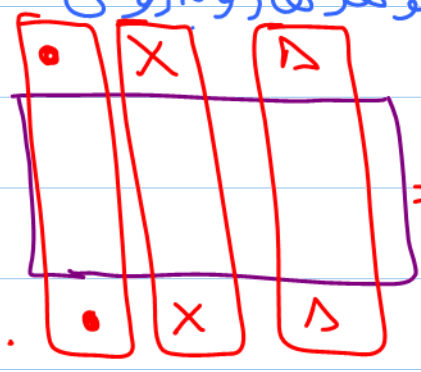
a b c d e

5 نفره خواهند در یک سفرانی شرکت کنند به میزهاست بین دو نفر a, b فقط یک نفر طرفه زنده



$$2 \times 3 \times 6 = 36 \checkmark$$

6 نفره دو به دو زن و گوهرند می خواهند دور میز مستطیل شکل بنشینند به میزهاست زن و گوهرها رو بروی

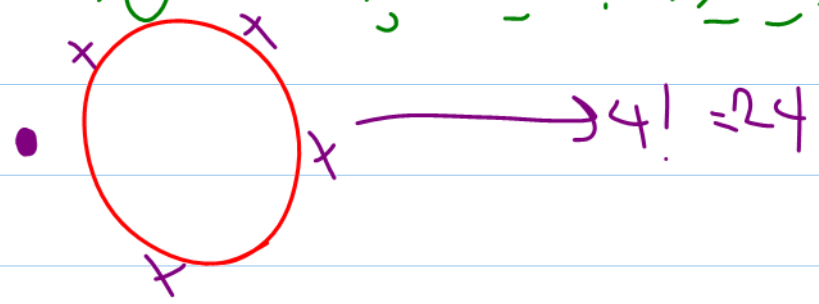


بدست زن
 $6 \Rightarrow 2! \times 2! \times 2!$
 $= 48 \checkmark$

جایگ های دایره ای :

جایگ های دایره ای n تایی برابر با $(n-1)!$ است

Ex: 5 نفره خواهند دور میز مستطیل بنشینند میزهاست هکتان است



1) DAMI AR, AN ✓ جابلیت باکدر:

$$\Rightarrow \frac{8!}{2! \times 3! \times 3!}$$

$$\Rightarrow \frac{4!}{2! \times 2!} = \frac{24}{2 \times 2} = 6$$

ایمان

انفال بعون

$$\frac{8!}{2! \times 2! \times 3! \times 1!}$$

$$\frac{9!}{2! \times 2! \times 5!}$$

~~تاریخ~~

Ex: با عروف کبھی SSsysteme منگھی 8 حرفی مانوان
نوٹ کہ در آن و و ف ت ا ر ی ک ت ر م بنیاد؟

$$\frac{8!}{6!} = 3360$$

ک ر م بنیاد - ک ت ر م بنیاد =

$$8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3$$

$$120$$

$$\frac{8!}{2! \times 2! \times 3! \times 1!}$$

$$\frac{8!}{2! \times 2!} = 3240$$

SSsystem
5!

انتخاب: r تایی از n تایی:

$$\Rightarrow \binom{n}{r} = \frac{n!}{(n-r)! \cdot r!}$$

$$\binom{10}{3} = \frac{10!}{(\cancel{10} \cdot \cancel{9})! \cdot 3!} = \frac{\cancel{10!}}{\cancel{7!} \cdot \cancel{3!}} = 120$$

$\begin{matrix} 3 & 4 \\ 10 \times 9 \times 8 \times 7 \end{matrix}$
 $\begin{matrix} 3 & 2 & 1 \\ 7! & \cdot & 3! \\ 8 \times 7 & & 1 \end{matrix}$

① $\binom{n}{1} = n$

④ $\binom{n}{r} = \binom{n}{n-r}$ | $\binom{13}{10} = \binom{13}{3} = \frac{13 \times 12 \times 11}{3 \times 2 \times 1} = 286$

② $\binom{n}{n} = 1$

$\binom{13}{11} = \binom{13}{2}$

$\binom{8}{5} = \binom{8}{3} = 56$

③ $\binom{n}{n-1} = n$

$\binom{8}{3} = \frac{8 \times 7 \times 6}{3 \times 2 \times 1} = 56 \checkmark$

$\binom{20}{18} = \binom{20}{2} = 190$

* $\binom{5}{4} = 5$

$\binom{8}{4} = \frac{8 \times 7 \times 6 \times 5}{4 \times 3 \times 2 \times 1} = 70$

$\frac{20 \times 19}{2} = 190 \checkmark$

$$\binom{5}{2} = \frac{5 \times 4}{2 \times 1} = 10$$

Ex: در کلمه ای 5 مهره آبی و 4 مهره قرمز و 3 مهره سبز وجود دارد.

5) هر سه مهره متفاوت

می خواهم سه مهره را انتخاب کنم به ترتیب

یکی آبی و یکی قرمز و یکی سبز

3) دو مهره سبز

$$\binom{3}{2} \times \binom{9}{1} = 27$$

1) دو مهره آبی و یکی قرمز

$$\binom{5}{2} \times \binom{4}{1} = 40$$

$$\binom{5}{1} \times \binom{4}{1} \times \binom{3}{1} = 60$$

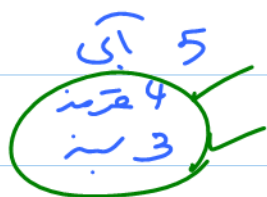
4) هر سه مهره همجنس یا سه آبی یا سه قرمز یا سه سبز

2) یکی آبی است

یک آبی و دو سبز

$$\frac{7 \times 6^3}{2} + \binom{5}{1} \times \binom{7}{2} = 5 \times 21 = 105$$

$$\binom{5}{3} + \binom{3}{3} + \binom{4}{3} = 15$$



6) حداقل دو مهره آبی باشد

یا فردش یا بیست و یکش

دو تا آبی و یکی از بقیه (یا سه تا آبی)

$$\binom{5}{2} \times \binom{7}{1} + \binom{5}{3} = 80$$

$$\binom{5}{3} \xrightarrow{C} \binom{4}{2}$$

Ex: مجموعه‌ی $A = \{a, b, c, d, e, f\}$ در نظر بگیرید
تعداد زیرمجموعه‌ی چهارعضوی صاف آن را مشخص کنید:

$$\binom{5}{3} \xrightarrow{\text{فاقد}} \binom{5}{3}$$

(2) شامل a به اولی فاقد a به اولی

$$\binom{6}{4} \xrightarrow{C} \binom{5}{3} \xrightarrow{\text{فاقد}} \binom{4}{3} = 4 \checkmark$$

(1) شامل a به اولی

$$\binom{6}{4} \xrightarrow{a} \binom{5}{3} = 10$$

شامل \leftarrow یکی از بالا و یکی از پایین کم کن / فاقد \leftarrow فقط از بالا کم کن

① هیچ‌کدام

$$\binom{6}{5} = 6$$

Ex: از بین 8 نفر خواهی 5 نفره برای شرکت در یک مهمانی دعوت کنیم، اما دو نفر از آن‌ها با هم قهر هستند و نباید در مهمانی

② یکی با هم قهر هستند
 یکی با هم قهر هستند

$$\binom{8}{5} \xrightarrow{15} \binom{7}{4} \xrightarrow{15} \binom{6}{4}$$

با هم باشند این 2 نفر به صورت $\binom{6}{4}$ پذیرد

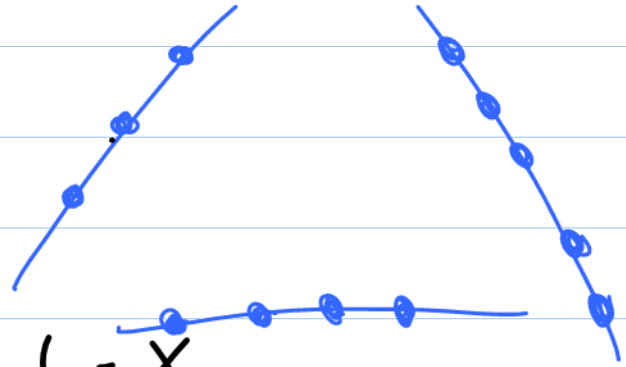
است با هم باشند - کل = با هم باشند

③ من با هم قهر هستند او نهایی با هم قهر هستند
 $\Rightarrow 15$

$$= \binom{8}{5} - \binom{6}{3} = 36 \checkmark$$

Ex:

چند مثلث می‌توان با نقاط زیر پیدا کرد؟



مستقیم‌ترین - کل = تعداد مثلث‌ها

$$\frac{12 \times 11 \times 10}{3 \times 2 \times 1}$$

$$\binom{12}{3} - \binom{3}{3} - \binom{4}{3} - \binom{5}{3} = 220 - 1 - 4 - 10 = 205$$

Ex:

در هر دوره 6 نفر (1 تا 6)

چند عدد پنج رقمی می‌توان ساخت که دورقم آن زوج باشد؟

$$\Rightarrow \binom{6}{2} \times \binom{10}{3} = 60$$

تعداد حالت

2 4 5 3 7
 5 3 2 4 7
 (3) (7) (5) (4) (4)

$$60 \times 120 = 7200$$

انتخاب دورقم زوج و 3 رقم فرد

سؤالات ده سال اخیر
منطبقه

~~$\binom{90}{3} - \binom{15}{3} - \binom{15}{3} - \binom{15}{3}$~~

Ex: از هر 6 منطقه 15 نفر برای شرکت در یک مسابقه دعوت شده اند
ما خواهم به نفراتی که انتخاب کنیم به غیر از آن 2 نفر دو

- 1 2 3 4 5 6
15 15 15 15 15 15

عدهم منطقه ای اند

$20 \times \binom{6}{3} - \binom{15}{3} - \binom{15}{3} - \binom{15}{3} = 675001$

