



آزمون ۱۳ از ۱۴



اگر دانشگاه اصلاح شود مملکت اصلاح می‌شود.
امام خمینی (ره)

شرکت تعاونی خدمات آموزشی کارکنان
سازمان سنجش آموزش کشور

**پاسخ تشریحی آزمون آزمایشی
سنجش دوازدهم - جامع نوبت سوم
(۱۴۰۲/۰۳/۰۵)**

علوم ریاضی و فنی (دوازدهم)

کارنامه آزمون، عصر روز برگزاری آن از طریق سایت اینترنتی زیر قابل مشاهده می‌باشد:

www.sanjeshserv.ir

مدیران، مشاوران و دبیران محترم دبیرستان‌ها و مراکز آموزشی

به منظور فراهم نمودن زمینه ارتباط مستقیم مدیران، مشاوران و دبیران محترم دبیرستان‌ها و مراکز آموزشی همکار در امر آزمون‌های آزمایشی سنجش و بهره‌مندی از نظرات ارزشمند شما عزیزان در خصوص این آزمون‌ها، آدرس پست الکترونیکی test@sanjeshserv.com معرفی می‌گردد. از شما عزیزان دعوت می‌شود، دیدگاه‌های ارزشمند خود را از طریق آدرس فوق با مدیر تولیدات علمی و آموزشی این مجموعه در میان بگذارید.



کانال تلگرام آزمون‌های آزمایشی سنجش @sanjesheducationgroup

ریاضیات

۱. گزینه ۱ درست است.

$$A = \sqrt[3]{2^2 \sqrt{2^5} \times 2^{\frac{3}{2}}} = \sqrt[3]{2^2 \times \sqrt{2^{\frac{13}{2}}} = \sqrt[3]{2^2 \times 2^{\frac{13}{4}}} = \sqrt[3]{2^{\frac{21}{4}}} = 2^{\frac{7}{4}}$$

$$B = (2 - \sqrt{3})^{-1}$$

$$\begin{aligned} \text{سؤال عبارت} &= (\sqrt{3} + 1)A^{\frac{2}{7}} \times B^{-\frac{1}{2}} = (\sqrt{3} + 1) \times 2^{\frac{2}{7}} \times (2 - \sqrt{3})^{\frac{1}{2}} \\ &= (\sqrt{3} + 1)\sqrt{2}\sqrt{2 - \sqrt{3}} = (\sqrt{3} + 1)\sqrt{4 - 2\sqrt{3}} = (\sqrt{3} + 1)\sqrt{(\sqrt{3} - 1)^2} \\ &= (\sqrt{3} + 1)(\sqrt{3} - 1) = 3 - 1 = 2 \end{aligned}$$

۲. گزینه ۴ درست است.

دنباله حسابی: $a_1, a_1 + d, a_1 + 2d, \dots, a_1 + (n-1)d$

$$\left. \begin{aligned} \text{مجموع ۳ جمله اول} &= 3a_1 + 3d = 3 \\ \text{مجموع ۳ جمله دوم} &= 3a_1 + 12d = 39 \end{aligned} \right\} \rightarrow a_1 = -3, d = 4 \Rightarrow a_n = 4n - 7$$

با کمی دقت در الگوی شکل، جمله عمومی آن $t_n = n^2 + 4n$ به دست می آید. (به صفحه ۱۷ و ۱۸ کتاب درسی ریاضی (۱) مراجعه کنید.) یازدهمین جمله $t_{11} = 11^2 + 4(11) = 165$ است. بنابراین:

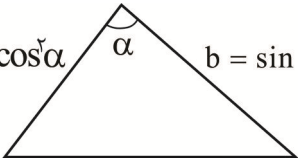
$$4n - 7 = 165 \Rightarrow n = 43$$

۳. گزینه ۲ درست است.

$$\text{شیب خط} = \tan \alpha \rightarrow \frac{3}{4} = \tan \alpha \rightarrow 1 + \tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$$

$$1 + \left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \rightarrow \cos^2 \alpha = \frac{16}{25} \quad (1)$$

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \rightarrow \sin^2 \alpha + \frac{16}{25} = 1 \rightarrow \sin^2 \alpha = \frac{9}{25} \quad (2)$$



$$S_{\Delta} = \frac{1}{2} a \times b \times \sin \alpha$$

$$S_{\Delta} = \frac{1}{2} \cos^2 \alpha \times \sin \alpha \times \sin \alpha$$

$$\text{مطابق (۱) و (۲)} \begin{cases} S_{\Delta} = \frac{1}{2} \cos^2 \alpha \cdot \sin^2 \alpha \\ S_{\Delta} = \frac{1}{2} \times \frac{16}{25} \times \frac{9}{25} = 0,1152 \end{cases}$$

۴. گزینه ۴ درست است.

$$m_{BC} = \frac{11-3}{7-3} = 2 \rightarrow BC \text{ معادله: } y - 3 = 2(x - 3) \rightarrow 2x - y - 3 = 0$$

$$BC \text{ تا } A \text{ فاصله} = AH = \frac{|2(1) - 9 - 3|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2}} = \frac{10}{\sqrt{5}} = 2\sqrt{5} \Rightarrow AH = 2\sqrt{5}$$

$$AC \text{ وسط } M\left(\frac{1+7}{2}, \frac{11+9}{2}\right) \rightarrow M(4, 10) \Rightarrow \text{میانۀ } BM = \sqrt{(4-3)^2 + (10-3)^2}$$

$$BM = 5\sqrt{2}$$

$$AH \times BM = 2\sqrt{5} \times 5\sqrt{2} = 10\sqrt{10}$$

۵. گزینه ۳ درست است.

$$\frac{27-8x^3}{3x+1} \geq 0 \rightarrow \frac{(3-2x)(9+6x+4x^2)}{3x+1} \geq 0$$

$$\frac{3-2x}{3x+1} \geq 0 \rightarrow \frac{-1}{3} < x \leq \frac{3}{2} \xrightarrow{\times(-5)} \frac{5}{3} > -5x \geq \frac{-15}{2}$$

$$\frac{-15}{2} \xrightarrow{+2} \frac{11}{3} > 2-5x \geq \frac{-11}{2} \rightarrow [2-5x] = -6, -5, \dots, -1, 0, 1, 2, 3 \rightarrow 10 \text{ عضو}$$

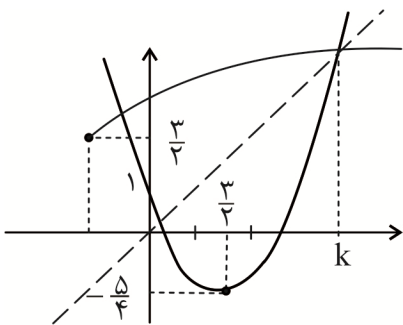
۶. گزینه ۱ درست است.

اگر ضابطه تابع $f(x) = x^2 - 3x + 1$ را در نظر بگیرید به ازاء $x > \frac{3}{2}$ ضابطه تابع وارون آن به صورت زیر به دست می آید.

$$y = x^2 - 3x + 1 \rightarrow y + \frac{5}{4} = x^2 - 3x + \frac{9}{4} \rightarrow y + \frac{5}{4} = \left(x - \frac{3}{2}\right)^2$$

$$\sqrt{y + \frac{5}{4}} = \left|x - \frac{3}{2}\right| \rightarrow x = \sqrt{y + \frac{5}{4}} + \frac{3}{2} \rightarrow f^{-1}(x) = \sqrt{x + \frac{5}{4}} + \frac{3}{2}$$

نمودار تابع $f(x) = x^2 - 3x + 1$ را روی دامنه R و تابع $f^{-1}(x) = \sqrt{x + \frac{5}{4}} + \frac{3}{2}$ را روی بزرگترین دامنه اش رسم می کنیم.



$x = k$ محل برخورد تابع $f(x)$ با شرط $x > \frac{3}{2}$ و تابع وارون آن است پس:

$$f(k) = k \rightarrow k^2 - 3k + 1 = k \rightarrow k^2 - 4k + 1 = 0 \xrightarrow{+3} k^2 - 4k + 4 = 3 \rightarrow$$

$$(k-2)^2 = 3 \rightarrow k-2 = \pm\sqrt{3} \rightarrow k = 2 \pm \sqrt{3}$$

جواب قابل قبول $k = 2 + \sqrt{3}$ است.

۷. گزینه ۱ درست است.

$$f \text{ پیوستگی راست دارد} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} f(x) = f\left(\frac{\pi}{2}\right) \rightarrow a \times (-2) = -12 \rightarrow a = 6$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi^-}{2}} f(x) = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi^-}{2}} \frac{6 \cos^2 x}{1 - \sin^3 x} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi^-}{2}} \frac{6(1 - \sin x)(1 + \sin x)}{(1 - \sin x)(1 + \sin x + \sin^2 x)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi^-}{2}} \frac{6(1 + \sin x)}{1 + \sin x + \sin^2 x} = \frac{6(2)}{1 + 1 + 1} = 4$$

۸. گزینه ۴ درست است.

مخرج ریشه مضاعف دارد پس دلتای آن صفر است.

$$\Delta = 0 \rightarrow a^2 - 4(2)(2) = 0 \rightarrow a^2 = 16 \rightarrow a = \pm 4$$

به ازاء $a = 4$ ریشه مضاعف مخرج $x = -1$ و به ازاء $a = -4$ ریشه مخرج $x = 1$ است.

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{2x + b}{2x^2 + 4x + 2} = +\infty \rightarrow \frac{-2 + b}{0^+} = +\infty \rightarrow -2 + b > 0 \rightarrow b > 2$$

در این حالت $a + b + c = 4 + b + (-1) = 3 + b$ حداقل ۵ است.

۹. گزینه ۴ درست است.

دوره تناوب را می‌یابیم:

$$T = \frac{\pi}{\left| \frac{3\pi}{4} \right|} = \frac{4}{3}$$

به ازاء $x = -2$ تابع $f(x)$ تعریف نشده است. بنابراین تابع روی بازه $(-\frac{4}{3}, -2 + \frac{4}{3})$ یعنی $(-\frac{4}{3}, -\frac{2}{3})$ تعریف نشده و

اکیداً صعودی است. حداکثر b برابر $-\frac{2}{3}$ است.

۱۰. گزینه ۳ درست است.

در هر روز حجم محلول تغییر نمی‌کند، بلکه از غلظت ماده حل شده کم می‌گردد. بنابراین غلظت محلول، پس از هر روز $\frac{1}{25}$ معادل $0/04$ کم، یعنی $0/96$ برابر می‌شود:

$$C_n = C_1 \times (0/96)^n \rightarrow \frac{C_n}{C_1} = (0/96)^n \xrightarrow{\text{مطابق فرض سؤال}} (0/96)^n = \frac{1}{3}$$

$$\xrightarrow{\text{از طریق لگاریتم}} n \log(0/96) = \log\left(\frac{1}{3}\right) \Rightarrow n(\log 96 - \log 100) = -\log 3$$

$$n(\log 3 \times 2^5 - 2) = -\log 3 \rightarrow n = \frac{-\log 3}{\log 3 + 5 \log 2 - 2}$$

$$n = \frac{-0/48}{0/48 + 5(0/3) - 2} \Rightarrow \boxed{n = 24} \text{ روز}$$

۱۱. گزینه ۳ درست است.

آهنگ لحظه‌ای در $x = 2$:

$$f'(x) = x + \frac{1}{2x^2} \rightarrow f'(2) = 2 + \frac{1}{8} = \frac{17}{8}$$

$$[1, 4] \text{ آهنگ تغییر متوسط در } = \frac{f(4) - f(1)}{4 - 1} = \frac{(\frac{1}{8} - \frac{1}{1}) - (\frac{1}{2} - \frac{1}{2})}{3} = \frac{\frac{63}{8}}{3} = \frac{21}{8}$$

$$\text{اختلاف مورد نظر سؤال} = \frac{21}{8} - \frac{17}{8} = \frac{4}{8} = \frac{k}{8} \rightarrow k = 4$$

۱۲. گزینه ۱ درست است.

در نقطه تماس خط با نمودار f ، شیب خط مماس همان مشتق تابع f در نقطه تماس است و عرض خط و تابع f یکسان است:

$$x = -3 \begin{cases} \text{جا گذاری در خط} \rightarrow f(-3) = 5 \\ \text{شیب خط} \rightarrow f'(-3) = m = -2 \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow (-3)} \frac{25 - f^2(x)}{x^3 + 27} = \lim_{x \rightarrow (-3)} \frac{-(f(x) - 5)(f(x) + 5)}{(x + 3)(x^2 - 3x + 9)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow (-3)} \frac{f(x) - f(-3)}{x + 3} \times \lim_{x \rightarrow (-3)} \frac{-(f(x) + 5)}{x^2 - 3x + 9} = f'(-3) \times \frac{-10}{27} = -2 \times \frac{-10}{27} = \frac{20}{27}$$

۱۳. گزینه ۴ درست است.

$$f(x) = \frac{\sin x}{\cos x \cdot \sqrt{25 - x^2}}$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{دامنه تابع: } 25 - x^2 > 0 \rightarrow -5 < x < 5 \\ \cos x \neq 0 \rightarrow x \neq k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z} \end{array} \right\} \Rightarrow D_f = (-5, 5) - \left\{ \pm \frac{\pi}{2}, \pm \frac{3\pi}{2} \right\}$$

در این بازه، تابع ۶ خط مجانب قائم به صورت $x = -5$ و $x = 5$ و $x = -\frac{\pi}{2}$ و $x = \frac{\pi}{2}$ و $x = -\frac{3\pi}{2}$ و $x = \frac{3\pi}{2}$ دارد؛ چون در همسایگی معذوف یا چپ یا راست این نقاط مخرج صفر می شود، ولی صورت مخالف صفر است.

۱۴. گزینه ۳ درست است.

$$\tan 7x \cdot \tan 3x = -1 \rightarrow \tan 7x = \frac{-1}{\tan 3x} \rightarrow \tan 7x = -\cot 3x \rightarrow \tan 7x = \tan\left(\frac{\pi}{2} + 3x\right)$$

$$\rightarrow 7x = k\pi + \left(\frac{\pi}{2} + 3x\right) \rightarrow x = \frac{k\pi}{4} + \frac{\pi}{8}, k \in \mathbb{Z}$$

$$0 \leq x \leq 2\pi \rightarrow 0 \leq \frac{k\pi}{4} + \frac{\pi}{8} \leq 2\pi \xrightarrow{\times \frac{8}{\pi}} 0 \leq 2k + 1 \leq 16 \rightarrow \frac{-1}{2} \leq k \leq \frac{15}{2}$$

$$\xrightarrow{k \in \mathbb{Z}} 0 \leq k \leq 7 \rightarrow m = 8 \quad \text{تعداد جواب ها}$$

$$\cos 2x - 3 \sin x + 1 = 0 \rightarrow (1 - 2 \sin^2 x) - 3 \sin x + 1 = 0 \Rightarrow 2 \sin^2 x + 3 \sin x - 2 = 0$$

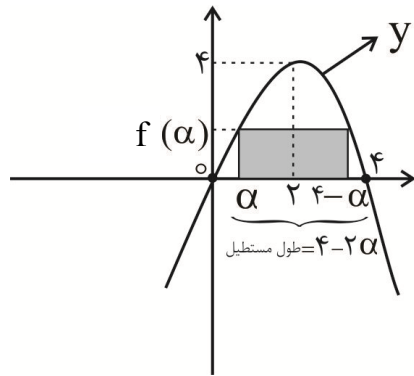
$$\xrightarrow{\Delta = 25} \sin x = \frac{-3 \pm 5}{4} \begin{cases} \sin x = -2 \text{ غ ق ق } (-1 \leq \sin x \leq 1) \\ \sin x = \frac{1}{2} \end{cases} \begin{cases} x = 2k\pi + \frac{\pi}{6}; k \in \mathbb{Z} \quad (1) \\ x = 2k\pi + \frac{5\pi}{6}; k \in \mathbb{Z} \quad (2) \end{cases}$$

$$\left. \begin{aligned} (1) \rightarrow -2\pi \leq 2k\pi + \frac{\pi}{6} \leq 2\pi \rightarrow -\frac{13}{12} \leq k \leq \frac{11}{12} \xrightarrow{k \in \mathbb{Z}} k = -1, 0 \rightarrow \text{جواب } 2 \\ (2) \rightarrow -2\pi \leq 2k\pi + \frac{5\pi}{6} \leq 2\pi \rightarrow \frac{-17}{12} \leq k \leq \frac{7}{12} \xrightarrow{k \in \mathbb{Z}} k = -1, 0 \rightarrow \text{جواب } 2 \end{aligned} \right\} \rightarrow n = 4$$

$$3m + 4\pi = 3(8) + 4(4) = 40$$

۱۵. گزینه ۳ درست است.

مساحت مستطیل هاشورخورده را بر حسب α به صورت زیر بیان می‌کنیم:



$$S(\alpha) = 2(2 - \alpha)(4\alpha - \alpha^2); \quad 0 < \alpha < 2$$

$$S'(\alpha) = 6\alpha^2 - 24\alpha + 16 = 0$$

$$3\alpha^2 - 12\alpha + 8 = 0$$

$$\alpha = \frac{12 \pm 4\sqrt{3}}{6} = 2 \pm \frac{2\sqrt{3}}{3} \xrightarrow{0 < \alpha < 2} \alpha = 2 - \frac{2\sqrt{3}}{3} \rightarrow S(\alpha) = 2 \times \frac{2\sqrt{3}}{3} \times \frac{8}{3} = \frac{32\sqrt{3}}{9}$$

بنابراین بیشترین مساحت مستطیل ۳۲ برابری $\frac{\sqrt{3}}{9}$ است.

۱۶. گزینه ۲ درست است.

نمودار تابع در $X = 0$ بر محور X مماس است، یعنی $X = 0$ ریشه مضاعف صورت است؛ پس $a = 0$

نمودار تابع فقط یک مجانب قائم دارد، پس مخرج در $X = 1$ باید ریشه مضاعف داشته باشد:

$$x^2 + bx + c = x^2 - 2x + 1 = (x - 1)^2$$

$$b = -2 \quad c = 1$$

$$\rightarrow a^2 + b^2 + c^2 = 0^2 + (-2)^2 + 1^2 = 5$$

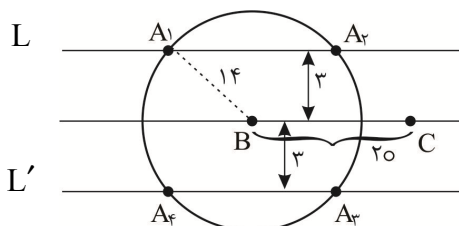
$$f(x) = \frac{x^2}{(x-1)^2} = \left(\frac{x}{x-1}\right)^2 \rightarrow f'(x) = 2\left(\frac{x}{x-1}\right) \times \frac{-1}{(x-1)^2} = \frac{-2x}{(x-1)^3}$$

$$f''(x) = \frac{-2(x-1)^3 - 3(x-1)^2(-2x)}{(x-1)^6} = \frac{4x+2}{(x-1)^4} \Rightarrow f''(0) = 2$$

۱۷. گزینه ۱ درست است.

با فرض آنکه AH ارتفاع وارد بر ضلع $BC = 20$ در مثلث ABC باشد، آنگاه:

$$S = \frac{1}{2} BC \times AH \rightarrow 30 = \frac{1}{2} \times 20 \times AH \rightarrow \boxed{AH = 3}$$



بنابراین: نقطه A به فاصله ۳ واحد از خط گذرنده از BC قرار دارد. مکان

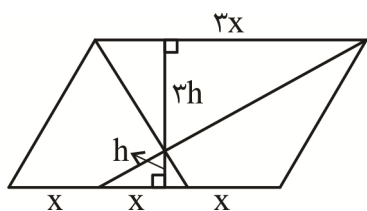
هندسی نقطه A دو خط موازی L و L' مطابق شکل است که در آن

باید $AB = 14$ باشد. برای رعایت این شرایط کافی است دایره‌ای به

مرکز B و شعاع ۱۴ رسم کنیم. نقاط برخورد این دایره با دو خط L و

L' جواب مسئله است. (۴ نقطه A_۱ و A_۲ و A_۳ و A_۴)

۱۸. گزینه ۳ درست است.



$$\text{مساحت کل} = 3x \times 3h = 12xh$$

$$\text{مساحت ناحیه رنگی} = 12xh - \left(\frac{1}{2} \times xh + \frac{1}{2} \times 3x \times 3h\right) = 12xh - 5xh = 7xh$$

$$\text{مساحت مثلث MNP} = \frac{1}{2} xh$$

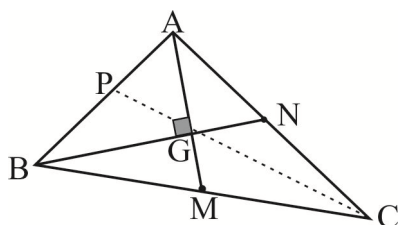
$$\frac{\text{مساحت ناحیه سایه زده}}{\text{مساحت مثلث MNP}} = \frac{7xh}{\frac{1}{2} xh} = 14$$

۱۹. گزینه ۴ درست است.

میانهای هر مثلث، یکدیگر را به نسبت ۲ و ۱ قطع می کنند، بنابراین:

$$AG = \frac{2}{3} \times 6 = 4$$

$$BG = \frac{2}{3} \times 9 = 6$$

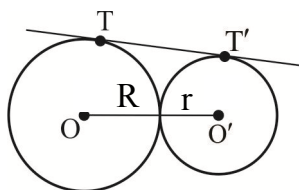


$$\Delta ABG : AB^2 = AG^2 + BG^2 = 4^2 + 6^2 = 52 \Rightarrow AB = \sqrt{52} = 2\sqrt{13}$$

مطابق شکل پاره خط GP میانه وارد بر وتر در مثلث قائم الزاویه ABG و اندازه آن نصف وتر است:

$$GP = \frac{1}{2} AB = \sqrt{13} \Rightarrow CP = 3GP = 3\sqrt{13} \text{ طول میانه سوم}$$

۲۰. گزینه ۴ درست است.



$$OO' = d = R + r \text{ خط المרכזین}$$

$$\begin{cases} R + r = 10 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \pi R^2 - \pi r^2 = 80\pi \rightarrow \pi(R - r)(R + r) = 80\pi \rightarrow \pi(R - r) \times 10 = 80\pi \rightarrow R - r = 8 \end{cases}$$

$$\begin{cases} R + r = 10 = d \\ R - r = 8 \end{cases} \rightarrow TT' = \sqrt{d^2 - (R - r)^2}$$

طول مماس مشترک خارجی

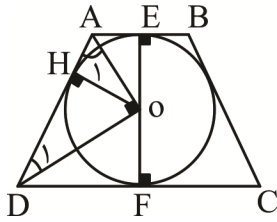
$$TT' = \sqrt{10^2 - 8^2} = 6$$

۲۱. گزینه ۱ درست است.

نقطه O مرکز دایره محاطی این دوزنقه و در نتیجه نقطه همرسی نیمسازهای زوایای داخلی دوزنقه است. بنابراین:

$$\hat{A} + \hat{D} = 180^\circ \Rightarrow \hat{A}_1 + \hat{D}_1 = 90^\circ \Rightarrow \hat{AOD} = 90^\circ$$

مثلث OAD در رأس O قائم الزاویه است. بنابراین:



$$OA \times OD = OH \times AD \quad EF^2 = AB \times CD \Rightarrow EF^2 = 4 \times 9 = 36$$

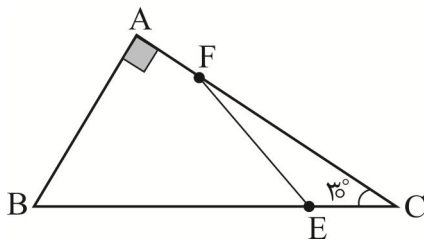
$$\Rightarrow EF = 6 \Rightarrow OH = OE = OF = \frac{6}{2} = 3$$

از طرفی دیگر این دوزنقه، یک چهار ضلعی محیطی است. بنابراین:

$$AD + BC = AB + CD \Rightarrow AD + BC = 4 + 9 = 13$$

$$\Rightarrow AD = BC = \frac{13}{2} \Rightarrow OA \times OD = OH \times AD = 3 \times \frac{13}{2} = 19.5$$

۲۲. گزینه ۱ درست است.



$$\Rightarrow BC = 2AB = 4\sqrt{3} \rightarrow BC = 4CE \rightarrow 4\sqrt{3} = 4CE \rightarrow CE = \sqrt{3}$$

$$\Rightarrow AC = \frac{\sqrt{3}}{2} BC = \frac{\sqrt{3}}{2} \times 4\sqrt{3} = 6$$

$$CF = AC - AF = 6 - 1 = 5$$

مطابق قضیه کسینوسها در مثلث CEF:

$$EF^2 = CE^2 + CF^2 - 2CE \times CF \times \cos 30^\circ$$

$$EF^2 = 3 + 25 - 2 \times \sqrt{3} \times 5 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 13 \rightarrow EF = \sqrt{13}$$

۲۳. گزینه ۱ درست است.

$$\Delta A - \Delta B = -\lambda AB \xrightarrow{\text{از چپ} \times A^{-1}} \Delta \underbrace{A^{-1} \times A}_I - \Delta A^{-1} B = -\lambda \underbrace{A^{-1} \times A}_I \times B$$

$$\Delta I - \Delta A^{-1} B = -\lambda B \xrightarrow{\text{از راست} \times B^{-1}} \Delta B^{-1} - \Delta A^{-1} = -\lambda I \xrightarrow{\times \left(\frac{-1}{\lambda}\right)}$$

$$A^{-1} - B^{-1} = \frac{\lambda}{\lambda} I \Rightarrow |A^{-1} - B^{-1}| = \left| \frac{\lambda}{\lambda} I \right| = \left(\frac{\lambda}{\lambda} \right)^3 \times |I| = \frac{512}{125} \times 1 = 4,096$$

۲۴. گزینه ۲ درست است.

$$|\sqrt{3}A| = (|A|+2)(|A|+3) - |A|(|A|-2)$$

↓
ماتریس ۲×۲
↓

$$(\sqrt{3})^2 |A| = |A| + 5|A| + 6 - |A| + 2|A|$$

$$3|A| = 7|A| + 6 \rightarrow |A| = -\frac{3}{2}$$

$$\sqrt{3}A = \begin{bmatrix} \frac{-3}{2} + 2 & \frac{-3}{2} \\ \frac{-3}{2} - 2 & \frac{-3}{2} + 3 \end{bmatrix} \rightarrow A = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{-3}{2} \\ \frac{-7}{2} & \frac{3}{2} \end{bmatrix}$$

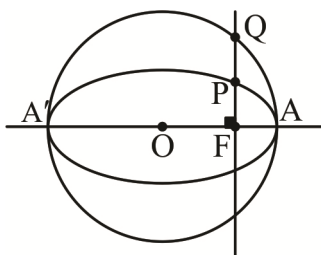
$$A = \begin{bmatrix} \frac{1}{2\sqrt{3}} & \frac{-3}{2\sqrt{3}} \\ \frac{-7}{2\sqrt{3}} & \frac{3}{2\sqrt{3}} \end{bmatrix} \rightarrow A \text{ حاصل ضرب تمام درایه‌های } A = \frac{1(-3)(3)(-7)}{(2\sqrt{3})^4} = \frac{7}{16}$$

۲۵. گزینه ۴ درست است.

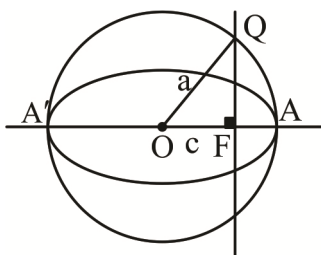
$$AA' = 10 \Rightarrow 2a = 10 \Rightarrow a = 5$$

$$BB' = 8 \Rightarrow 2b = 8 \Rightarrow b = 4$$

$$\Rightarrow c^2 = 25 - 16 = 9 \Rightarrow c = 3$$



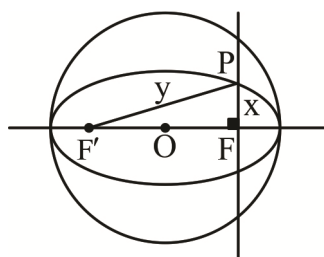
دایره به مرکز نقطه O و به شعاع ۵ در نقاط A و A' بر بیضی مماس است. برای یافتن اندازه پاره خط PQ باید اندازه پاره‌خط‌های FQ و FP را پیدا کنیم.



با توجه به شکل مقابل خواهیم داشت:

$$OQ = OA = a = 5$$

$$\Delta OFQ : FQ^2 = a^2 - c^2 = b^2 \Rightarrow FQ = b = 4$$



در شکل مقابل، مثلث PFF' قائم‌الزاویه است. بنابراین:

$$x^2 + FF'^2 = y^2 \Rightarrow y^2 - x^2 = (2c)^2 = 4c^2 = 4 \times 9 = 36$$

$$\begin{cases} y^2 - x^2 = (y-x)(y+x) = 36 \\ x+y = 2a = 10 \end{cases}$$

$$\Rightarrow (y-x)(10) = 36 \Rightarrow y-x = \frac{36}{10}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y - x = \frac{36}{10} \\ y + x = 10 \end{cases} \Rightarrow 2x = 10 - \frac{36}{10} = \frac{64}{10} \Rightarrow x = \frac{32}{10} = 3,2 \Rightarrow FP = 3,2$$

$$\Rightarrow PQ = FQ - FP = 4 - 3,2 = 0,8$$

۲۶. گزینه ۳ درست است.

بر اساس نتیجه تمرین ۱۳ صفحه ۵۹ کتاب درسی هندسه (۳) اگر قطر دهانه، فاصله کانونی و گودی (عمق) یک دیش را

به ترتیب با h, a, d نمایش دهیم؛ آنگاه $a = \frac{d^2}{16h}$ خواهد بود و بنابراین:

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{\frac{d_1^2}{16h_1}}{\frac{d_2^2}{16h_2}} = \left(\frac{d_1}{d_2}\right)^2 \times \frac{h_2}{h_1} = \left(\frac{d_1}{\frac{1}{3}d_1}\right)^2 \times \frac{h_2}{\frac{1}{2}h_2} = 9 \times 2 = 18$$

۲۷. گزینه ۲ درست است.

مطابق شکل، رابطه $\vec{AC} = \vec{AB} + \vec{BC}$ برقرار است. بنابراین:

$$\vec{BA} \cdot \vec{AC} = \vec{BA} \cdot (\vec{AB} + \vec{BC}) = -|\vec{BA}|^2 + |\vec{BA}| \cdot |\vec{BC}| \cdot \cos \hat{B}$$

$$= -25 + 5 \times 10 \times \left(-\frac{1}{2}\right) = -25 - 25 = -50$$

۲۸. گزینه ۴ درست است.

$$\text{حجم خواسته شده } V = \left| \vec{b} \cdot ((\vec{a} + \vec{c}) \times (\vec{a} - \vec{c})) \right| = \left| \vec{b} \cdot (\underbrace{\vec{a} \times \vec{a}}_{\vec{0}} - \underbrace{\vec{a} \times \vec{c}}_{+\vec{c} \times \vec{a}} + \underbrace{\vec{c} \times \vec{a}}_{-\vec{c} \times \vec{a}} - \underbrace{\vec{c} \times \vec{c}}_{\vec{0}}) \right|$$

$$\Rightarrow V = \left| \vec{b} \cdot (2\vec{c} \times \vec{a}) \right| = 2 \left| \vec{b} \cdot (\vec{c} \times \vec{a}) \right| \quad (1)$$

از طرف دیگر مطابق فرض سؤال:

$$V' = \left| 2\vec{b} \cdot (3\vec{c} \times \vec{a}) \right| = 42 \rightarrow 6 \left| \vec{b} \cdot (\vec{c} \times \vec{a}) \right| = 42 \Rightarrow \left| \vec{b} \cdot (\vec{c} \times \vec{a}) \right| = 7$$

بنابراین با جاگذاری در (۱) حجم متوازی‌السطوح مورد نظر، $V = 2 \times 7 = 14$ خواهد بود.

۲۹. گزینه ۳ درست است.

$$[\sim p \wedge (p \Rightarrow q)] \Leftrightarrow p \equiv \underbrace{[\sim p \wedge (\sim p \vee q)]}_{\text{قانون جذب}} \Leftrightarrow p \equiv \sim p \Leftrightarrow p \equiv F$$

قانون جذب

پس نقیض این گزاره، گزاره‌ای همواره درست است.

۳۰. گزینه ۳ درست است.

$$P = 1 - P(\text{هر ۳ باهم رخ دهند}) = 1 - P(A \cap B \cap C)$$

$$= 1 - P(A)P(B)P(C) = 1 - \frac{2}{5} \times \frac{1}{4} \times \frac{4}{7} = 1 - \frac{2}{35} = \frac{33}{35}$$

۳۱. گزینه ۳ درست است.

این عدد مضرب ۵ است: B رقم ۵ در سمت راست رقم ۲ است: A

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{4!}{5!} = \frac{2 \times 4!}{5!} = \frac{2}{5} = 0,4$$

۳۲. گزینه ۲ درست است.

$$P(\text{سفید} | \text{جعبه سوم}) = \frac{P(\text{جعبه سوم و سفید})}{P(\text{سفید})} = \frac{3}{7}$$

$$\Rightarrow \frac{\frac{1}{3} \times \frac{n}{20}}{\left(\frac{1}{3} \times \frac{7}{20}\right) + \left(\frac{1}{3} \times \frac{5}{20}\right) + \left(\frac{1}{3} \times \frac{n}{20}\right)} = \frac{\frac{n}{20}}{\frac{7+5+n}{20}} = \frac{n}{12+n} = \frac{3}{7}$$

$$\Rightarrow 7n = 36 + 3n \Rightarrow 4n = 36 \Rightarrow n = 9$$

بنابراین تعداد مهره‌های سیاه برابر با $20 - 9 = 11$ است.

۳۳. گزینه ۳ درست است.

بازه اطمینان ۹۵٪ برای میانگین جامعه به صورت $\left[\bar{X} - \frac{2\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{X} + \frac{2\sigma}{\sqrt{n}}\right]$ است، یعنی طول بازه اطمینان $\frac{4\sigma}{\sqrt{n}}$ است:

$$\frac{4\sigma}{\sqrt{n}} = 13/2 - 12/6 \xrightarrow{n=25} \frac{4\sigma}{5} = 0/6 \rightarrow \sigma = 0/75$$

$$\bar{X} = \frac{13/2 + 12/6}{2} = 12/9$$

$$\bar{X} + \sigma = 12/9 + 0/75 = 13/65$$

۳۴. گزینه ۲ درست است.

$$\begin{cases} d | \Delta n^2 - 3n + 2 \\ d | 2n + 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d | 10n^2 - 6n + 4 \\ d | 10n^2 + \Delta n \end{cases} \Rightarrow d | 11n - 4$$

$$\Rightarrow \begin{cases} d | 11n - 4 \\ d | 2n + 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d | 22n - 8 \\ d | 22n + 11 \end{cases} \Rightarrow d | 19 \Rightarrow d = 1 \text{ یا } 19$$

۳۵. گزینه ۱ درست است.

قضیه: اگر n عددی طبیعی باشد آن‌گاه:

$$(a+b)^n \equiv a^n + b^n \pmod{ab} \Rightarrow (a+b)^n - a^n - b^n \equiv 0$$

به عبارت دیگر عدد $(a+b)^n - a^n - b^n$ به ازای هر عدد طبیعی مانند n همواره بر ab بخش پذیر است.

$$28^n - 11^n - 17^n \equiv 0 \pmod{11 \times 17} \Rightarrow m = 11 \times 17 = 187$$

$$195 - 187 = 8 \Rightarrow 8! \equiv 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6 \times 7 \times 8 \equiv 1 \times (2 \times 6) \times (3 \times 4) \times (7 \times 8) \times 5$$

$$\equiv 1 \times 12 \times 12 \times 56 \times 5 \equiv 1 \times 1 \times 1 \times 1 \times 5 \equiv 5$$

۳۶. گزینه ۴ درست است.

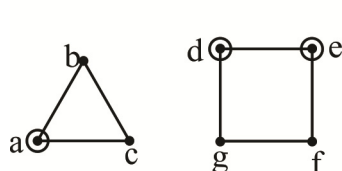
$$7^2 \equiv 49 \equiv -3 \pmod{13} \Rightarrow 7^8 \equiv 81 \equiv 3 \pmod{13} \Rightarrow 7^2 \times 7^8 \equiv (-3) \times 3$$

$$\Rightarrow 7^{10} \equiv -9 \equiv 4 \pmod{13} \Rightarrow 7^{11} \equiv 28 \equiv 2 \pmod{13}$$

$$7^{11} + a \equiv 0 \pmod{13} \Rightarrow 2 + a \equiv 0 \pmod{13} \Rightarrow a \equiv -2$$

$$\Rightarrow a^{11} + 7 \equiv (-2)^{11} + 7 \equiv -2048 + 7 \equiv -2041 \equiv -13 \times 157 \equiv 0 \pmod{13}$$

۳۷. گزینه ۴ درست است.



گراف ۲- منتظم ناهمبند با ۷ رأس مطابق شکل مقابل است. اگر رأس های این گراف را به صورت مقابل نام گذاری کنیم آن گاه مطابق شکل، یکی از مجموعه های احاطه گر مینیمم، مجموعه $\{a, d, e\}$ و $\gamma(G) = 3$ خواهد بود.

بنابراین با انتخاب هر رأس از مجموعه رأس های $\{a, d, e\}$ و هر ۲ رأس از مجموعه

رأس های $\{d, e, f, g\}$ ، یک مجموعه احاطه گر مینیمم خواهیم داشت. پس تعداد $-\gamma$ مجموعه های متمایز برابر است با:

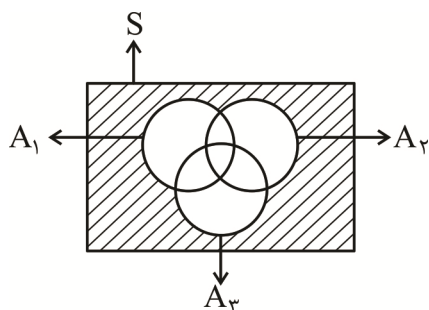
$$\binom{3}{1} \binom{4}{2} = 3 \times 6 = 18$$

۳۸. گزینه ۴ درست است.

برای این کار باید برای برنامه ایف، مربع های لاتین 3×3 بنویسیم که با مربع لاتین داده شده متعامد باشند. این کار به ۶ روش زیر امکان پذیر است:

	A	B	C			
شنبه	۱	۲	۳	۱	۳	۲
یکشنبه	۳	۱	۲	۲	۱	۳
دوشنبه	۲	۳	۱	۳	۲	۱
	۲	۳	۱	۳	۱	۲
	۱	۲	۳	۲	۳	۱
	۳	۱	۲	۱	۲	۳

۳۹. گزینه ۳ درست است.



تعداد حالت ها برابر با تعداد جواب های معادله $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 6 \\ x_i \geq 0, x_i \neq 1 \end{cases}$ است.

$$A_i = \{(x_1, x_2, x_3) : x_1 + x_2 + x_3 = 6, x_i = 1\}$$

$$|A'_1 \cap A'_2 \cap A'_3| = |S| - |A_1 \cup A_2 \cup A_3| = \binom{8}{2} - \left[\binom{6}{1} + \binom{6}{1} + \binom{6}{1} - 1 - 1 - 1 + 0 \right]$$

$$= 28 - (6 + 6 + 6 - 3) = 28 - 15 = 13$$

۴۰. گزینه ۱ درست است.

با انتخاب ۴ کارت مختلف از میان ۷ کارت، هر بار فقط یک عدد می توان ساخت که ارقامش از چپ به راست نزولی باشند. به عنوان مثال اگر اعداد ۱، ۲، ۳ و ۴ انتخاب شده باشند تنها عدد مطلوب، عدد ۴۳۲۱ است. بنابراین تعداد اعداد مختلفی که با

این شرایط می توانیم بسازیم برابر با $\binom{7}{4} \times 1 = 35$ است. پس بنابر اصل لانه کبوتر باید این آزمایش را حداقل

$35 + 1 = 36$ بار تکرار کنیم تا یقین داشته باشیم که دست کم دوبار عددی تکراری ساخته شده است.

فیزیک

۴۱. گزینه ۱ درست است.

۴۲. گزینه ۴ درست است.

۴۳. گزینه ۱ درست است.

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= V_1 t_1 \Rightarrow x_1 = 4t_1 \\ x_2 &= V_2 t_2 \Rightarrow x_2 = 6t_2 \\ x_1 + x_2 &= 38 \end{aligned} \right\} \begin{aligned} 4t_1 + 6t_2 &= 38 \\ t_1 + t_2 &= 8 \end{aligned} \Rightarrow \begin{aligned} t_1 &= 5s \\ t_2 &= 3s \end{aligned}$$

$$x_2 = 6 \times 3 = 18m$$

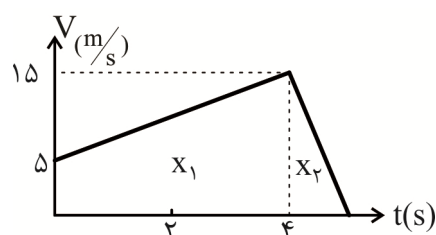
۴۴. گزینه ۳ درست است.

$$a_1 = \frac{V_2 - V_1}{t} \Rightarrow 2/5 = \frac{V - 5}{4} \Rightarrow V = 15 \frac{m}{s}$$

$$a_2 = \frac{V_2 - V_1}{t} \Rightarrow -7/5 = \frac{0 - 15}{t} \Rightarrow t = 2s$$

سطح زیر نمودار $(V-t)$

$$x = \frac{20}{2} \times 4 + \frac{15 \times 2}{2} = 55$$



۴۵. گزینه ۲ درست است.

در لحظه $t = 0$ گلوله A رها می‌شود، فاصله دو گلوله در شرایطی خواسته شده که $5/5$ ثانیه از سقوط A و $3/5$ ثانیه از سقوط B سپری شده است:

$$h = \frac{1}{2}gt^2$$

$$\text{فاصله دو گلوله} = h_A - h_B = \frac{1}{2}gt_A^2 - \frac{1}{2}gt_B^2 = \frac{1}{2}g(t_A^2 - t_B^2)$$

$$h_A - h_B = \frac{1}{2}(10)(5/5^2 - 3/5^2) = 5(5/5 - 3/5)(5/5 + 3/5)$$

$$h_A - h_B = 5 \times 2 \times 9 = 90m$$

فاصله از محل پرتاب h \downarrow (+)

۴۶. گزینه ۲ درست است.

$$a_1 = \frac{\Delta V}{\Delta t} = \frac{V - 0}{2 - 0} = \frac{V}{2}$$

$$a_2 = \frac{\Delta V}{\Delta t} = \frac{0 - V}{15 - 12} = \frac{-V}{3}$$

با توجه به نمودار شتاب تندشونده آسانسور:

و شتاب کندشونده آسانسور:

در هنگام بالا رفتن با حرکت تندشونده در ۲ ثانیه نخست:

$$+ \quad F_N - mg = ma_1$$

$$\uparrow \quad F_N = mg + \frac{mv}{2}$$

در هنگام حرکت کندشونده تا توقف آسانسور (۱۲ تا ۱۵ ثانیه)

$$F_{rN} - mg = ma_r$$

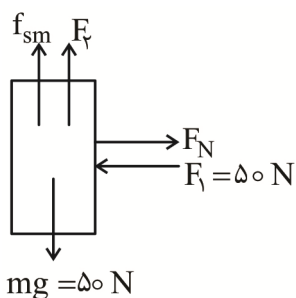
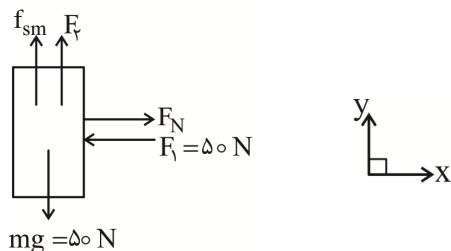
$$F_{rN} = mg + m\left(-\frac{V}{r}\right) = mg - \frac{mV}{r}$$

$$F_{1N} - F_{rN} = 375 \Rightarrow \frac{mv}{r} + \frac{mv}{r} = 375$$

$$\frac{\Delta mv}{\epsilon} = 375 \Rightarrow \frac{\Delta \times 75 V}{\epsilon} = 375 \quad \boxed{V = 6 \frac{m}{s}}$$

۴۷. گزینه ۴ درست است.

F_r می‌تواند آنچنان کوچک باشد که جسم در آستانه لغزش رو به پایین باشد:



$$\sum F_x = 0 \Rightarrow F_N = F_1 = 50 \text{ N}$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow f_{sm} + F_r = mg$$

$$\mu_s F_N + F_r = 50 \Rightarrow 0.4 \times 50 + F_r = 50$$

$$F_r = 30 \text{ N}$$

F_r می‌تواند آنچنان بزرگ باشد که جسم در آستانه لغزش رو به بالا باشد:

$$F_r = mg + f_{sm} = 50 + 0.4 \times 50 = 70 \text{ N}$$

در نتیجه $30 \text{ N} \leq F_r \leq 70 \text{ N}$ جسم ساکن می‌ماند.

۴۸. گزینه ۲ درست است.

الف، ب و ث) حرکت‌های تناوبی دوره‌ای هستند اما چون برگشت‌پذیر نیستند، نوسانی نیستند.

ب و ت) حرکت نوسانی دوره‌ای است. در تاب‌سواری گر چه دامنه حرکت نوسانی ثابت نمی‌ماند و به مرور کاهش پیدا می‌کند

اما دوره حرکت با تقریب بسیار خوبی ثابت می‌ماند.

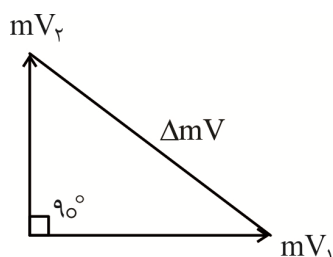
۴۹. گزینه ۲ درست است.

$$\Delta P = F \cdot \Delta t$$

$$m \Delta V = F \cdot \Delta t$$

$$\left. \begin{aligned} mV &= F \cdot t \\ 2m \times 2V &= F' \cdot t \end{aligned} \right\} \frac{mV}{2mV} = \frac{F \cdot t}{F' \cdot t} \Rightarrow F' = 4F$$

۵۰. گزینه ۳ درست است.



$$\Delta mV = mV_2 - mV_1$$

$$\Delta mV = \sqrt{2} mV$$

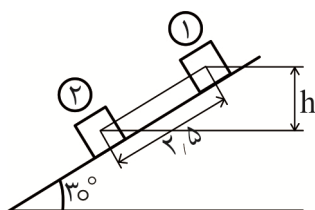
۵۱. گزینه ۱ درست است.

$$T = mL\omega^2$$

$$T' = m\left(\frac{l}{r}\right)\left(\frac{\omega}{r}\right)^2$$

$$T' = \frac{1}{8} mL\omega^2 = \frac{1}{8} T$$

۵۲. گزینه ۲ درست است.



$$h = x \sin \alpha = \frac{2}{5} x \times \frac{1}{2} = \frac{1}{5} x$$

$$W_{f\mu} = E_2 - E_1$$

$$W_{f\mu} = \frac{1}{2} mV^2 - mgh$$

$$W_{f\mu} = \frac{1}{2} \times 4 \times 16 - 4 \times 10 \times \frac{1}{5} x = 32 - 8x$$

$$Q = 18 \text{ J}$$

۵۳. گزینه ۳ درست است.

$$x = A \cos\left(\frac{2\pi}{T} t\right) \Rightarrow \frac{1}{2} = 10 \cos\left(\frac{2\pi}{T} \times \frac{9}{8}\right)$$

$$\frac{1}{2} = \cos\left(\frac{\pi}{T}\right) \Rightarrow \frac{\pi}{T} = \frac{\pi}{3} \Rightarrow T = 3 \text{ s}$$

$$\left(\frac{T}{6} = \frac{9}{8} \Rightarrow T = 3 \text{ s}\right) \quad \begin{array}{c} \frac{T}{12} \quad \frac{T}{6} \\ \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \\ -A \quad O \quad +\frac{A}{2} \quad +A \end{array} \quad \text{(نکته)}$$

$$x = 10 \cos\left(\frac{2\pi}{3} t\right) \rightarrow x = 10 \cos\left(\frac{2\pi}{3} \times \frac{9}{8}\right) = 10 \cos\left(\frac{3\pi}{4}\right)$$

$$x = 10 \times \left(\frac{-\sqrt{2}}{2}\right) = -5\sqrt{2} \text{ cm}$$

۵۴. گزینه ۴ درست است.

$$\text{توان مفید} = \frac{P'}{P} \Rightarrow \frac{75}{100} = \frac{P'}{400} \Rightarrow P' = 300 \text{ W}$$

$$\Delta P' = P - P' = 400 - 300 = 100 \text{ W} \quad \text{توان غیرمفید}$$

$$W = P.t = 100 \times 60 = 6000 \text{ J} = 6 \text{ kJ}$$

۵۵. گزینه ۴ درست است.

در حرکت هماهنگ ساده در هر دوره، مکان - سرعت، شتاب و نیروی وارد بر نوسانگر ۲ بار صفر می‌شود.

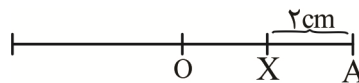
$$\text{تعداد نوسان} \quad N = \frac{30}{2} = 15$$

$$T = \frac{t}{N} = \frac{60}{15} = 4s \quad A = \frac{10}{2} = 5cm$$

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2} \text{ rad/s}$$

$$a_m = A\omega^2 = \frac{5}{100} \times \frac{\pi^2}{4} = \frac{5 \times 10}{100 \times 4} = \frac{1}{8} \frac{m}{s^2}$$

$$x = A - 2 = 5 - 2 = 3cm$$



شتاب نوسانگر، متناسب با مکان آن است:

$$\frac{a_2}{a_1} = \frac{x_2}{x_1} \Rightarrow \frac{a}{a_m} = \frac{x}{A} \Rightarrow \frac{a}{\frac{1}{8}} = \frac{3}{5} \Rightarrow a = \frac{1}{8} \times \frac{3}{5}$$

$$a = \frac{3}{40} \frac{m}{s^2} = \frac{300}{400} = 7/5 \frac{cm}{s^2}$$

۵۶. گزینه ۴ درست است.

$$\begin{cases} m_2 C(26 - 20) = m_1 C(20 - 18) \\ m_2 + m_1 = 200 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3m_2 = m_1 & \Rightarrow m_1 = 150 \\ m_1 + m_2 = 200 & \Rightarrow m_2 = 50 \end{cases}$$

۵۷. گزینه ۳ درست است.

V : تندی انتشار صوت در هوا

$L = 36m$ طول تیر فولادی

$$\Delta t = \frac{L}{V} - \frac{L}{15V} = \frac{14L}{15V}$$

$$0.1 = \frac{14 \times 36}{15V} \Rightarrow 1.5V = 14 \times 36$$

$$\frac{3}{2}V = 14 \times 36 \Rightarrow \frac{1}{2}V = 14 \times 12 = 168 \quad V = 336 \frac{m}{s}$$

۵۸. گزینه ۴ درست است.

$$\Delta A = A_1 \times 2\alpha \times \Delta\theta \Rightarrow \frac{\Delta A}{A_1} = 2 \times 2 \times 10^{-5} \times 1000 = 4 \times 10^{-3}$$

۵۹. گزینه ۴ درست است.

الکل آب

$$P = P$$

$$P_0 + \rho gh = P_0 + \rho gh$$

$$1000 \times 8 = 800 \times h$$

$$h = 10 \Rightarrow \frac{h_{\text{الکل}}}{h_{\text{آب}}} = \frac{10}{12.5}$$

۶۰. گزینه ۱ درست است.

$$I = \frac{P}{4\pi r^2} = \frac{1.5}{4\pi \times 50^2} = \frac{1.5}{4 \times 3 \times 2500} = 5 \times 10^{-5} \frac{W}{m^2}$$

$$\beta = 10 \log \frac{I}{I_0} = 10 \log \frac{5 \times 10^{-5}}{10^{-12}} = 10 \log 5 \times 10^7 = 10 \log \left(\frac{10}{2} \times 10^7 \right)$$

$$\beta = 10 \log \frac{10^8}{2} = 10 \log 10^8 - 10 \log 2 = 80 - 10 (0,3) = 77 \text{ dB}$$

۶۱. گزینه ۴ درست است.

با استفاده از قاعده دست راست. اگر ۴ انگشت در جهت \vec{E} رو به بالا انگشت شست به شکل برون سو در جهت انتشار باشد. خم شدن ۴ انگشت دست راست به اندازه 90° در جهت میدان مغناطیسی خواهد بود در ضمن این دو میدان به صورت همگام بیشینه و صفر می شوند پس در لحظه ای که میدان الکتریکی بیشینه است، میدان مغناطیسی نیز بیشینه خواهد بود.

۶۲. گزینه ۴ درست است.

$$\text{هم‌دما: } bc \Rightarrow P_b V_b = P_c V_c \Rightarrow 6 \times 4 = 3 \times V_c$$

$$V_c = 8L$$

$$W_{Ca} = -P_a \Delta V = -3(4 - 8) \times 10^2 = 1200 \text{ J}$$

$$(L \times \text{atm} = 10^{-3} \text{ m}^3 \times 10^5 \text{ Pa} = 10^2 \text{ J})$$

در فرآیندهای **ab** و **bc**، گاز رقیق گرما می گیرد و در فرآیند تراکم هم فشار گاز به محیط گرما می دهد.

$$\Delta U = 0 \Rightarrow \Delta U_{ab} + \overset{-}{\Delta U}_{Ca} + \Delta U_{Ca} = 0$$

چرخه هم‌حجم هم‌دما هم‌فشار

$$(0 + Q_{ab}) + 0 + Q_{Ca} + W_{Ca} = 0 \Rightarrow 1800 + Q_{Ca} + 1200 = 0$$

$$Q_{Ca} = -3000 \text{ J}$$

۶۳. گزینه ۳ درست است.

$$\frac{P_1 V_1}{T_1} = \frac{P_2 V_2}{T_2}$$

$$\frac{(P_0 + \rho gh)V_1}{273 + 7} = \frac{P_0 \times 6V_1}{273 + 27} \rightarrow \frac{10^5 + 10^3 \times 10 \cdot h}{280} = \frac{10^5 \times 6}{300}$$

$$\frac{10^4 (10 + h)}{280} = \frac{10}{5} \rightarrow \frac{10 + h}{280} = \frac{1}{5}$$

$$10 + h = \frac{280}{5} = 56 \rightarrow h = 46 \text{ m}$$

۶۴. گزینه ۳ درست است.

$$V = \frac{w}{q} = \frac{\lambda}{2} = 4V$$

۶۵. گزینه ۲ درست است.

ظرفیت ثابت است و چون q نصف شده انرژی $\frac{1}{4}$ برابر می شود.

$$W = \frac{q^2}{2C}$$

$$q' = \frac{1}{2}q$$

$$W' = \frac{1}{4} \frac{q^2}{2C} = \frac{1}{4} \left(\frac{q^2}{2C} \right)$$

$$\frac{W'}{W} = \frac{1}{4}$$

۶۶. گزینه ۴ درست است.

چون اتصال به‌طور موازی است با وجود اتصال کوتاه شدن یکی از مقاومت‌ها، کل مدار اتصال کوتاه می‌شود و مقاومت معادل صفر است.

۶۷. گزینه ۳ درست است.

چون بازده 80% است، پس 80 درصد الکتریسته پس می‌دهد.

الکتریسیته شارژ شده $q = It = 5 \times 4 = 20 \text{ Ah}$

$$\frac{80}{100} q = It \Rightarrow \frac{80}{100} \times 20 = I \times 10 \Rightarrow I = 1.6 \text{ A}$$

۶۸. گزینه ۱ درست است.

$$\textcircled{1} \text{ مقاومت } 3 \text{ و } 6 \text{ اهمی با هم موازی } = 2 \quad \frac{3 \times 6}{3 + 6} = \frac{18}{9} = 2$$

$$\textcircled{2} \text{ معادل } \textcircled{1} \text{ با مقاومت } 4 \text{ اهمی متوالی } = 6 \quad 2 + 4 = 6$$

$$\textcircled{3} \text{ معادل } \textcircled{2} \text{ با مقاومت } 12 \text{ اهمی موازی } = 4 \quad \frac{6 \times 12}{6 + 12} = \frac{72}{18} = 4$$

$$\textcircled{4} \text{ معادل } \textcircled{3} \text{ با مقاومت } 2 \text{ اهمی متوالی که برابر } 6 \text{ اهم است. } \quad 4 + 2 = 6$$

$$I = \frac{E}{R + r} = \frac{12}{6 + 0} = 2 \text{ A}$$

۶۹. گزینه ۳ درست است.

$$B = \mu_0 \frac{N}{L} I$$

$$6\pi \times 10^{-5} = 4\pi \times 10^{-7} \times \frac{N}{0.4} \times 0.2$$

$$\frac{L}{\text{تعداد دور}} = \text{محیط یک حلقه}$$

$$L = N \times 2\pi R = 300 \times 2 \times 3.14 \times 5 \times 10^{-2} = 94.2 \text{ m}$$

۷۰. گزینه ۴ درست است.

در هر مداری که نیروی محرکه القایی را داشته باشیم، علت ایجاد نیروی محرکه القایی تغییر شار مغناطیسی است.

۷۱. گزینه ۲ درست است.

چون همواره نیروی میدان مغناطیسی عمود بر راستای حرکت بار است پس حرکت دایره‌ای است. نیروی مغناطیسی در هر لحظه بر سرعت ذره عمود است و تندی را تغییر نمی‌دهد چرا که نیرو، مؤلفه‌ای در راستای سرعت ندارد.

۷۲. گزینه ۲ درست است.

از دو مقاومت متوالی R_2 و R_3 شدت جریان یکسانی عبور می‌کند و چون توان مصرفی یکسانی دارند $R_2 = R_3 = 15\Omega$ است. اگر اختلاف پتانسیل دو سر R_2 را V بنامیم، ولتاژ دو سر R_3 هم V بوده و ولتاژ دو سر R_1 برابر $2V$ می‌شود.

$$P_{R_1} = P_{R_2} \Rightarrow \frac{(2V)^2}{R_1} = \frac{V^2}{R_2} \Rightarrow \frac{4}{R_1} = \frac{1}{15}$$

$$R_1 = 60\Omega \quad R_{eq} = R_1 \parallel (R_2 + R_3) \Rightarrow R_{eq} = 60 \parallel 30 = 20\Omega$$

$$I = \frac{\varepsilon}{R_{eq} + r} = \frac{30}{20 + 0} = 1.5A$$

۷۳. گزینه ۱ درست است.

خط سوم مرئی یعنی گذار $2 \rightarrow 5$ و طول موج آن λ_{52} است. کوتاه‌ترین طول موج فرسرخ مربوط به گذار $3 \rightarrow \infty$ است، و طول موج آن را λ_3 فرض می‌کنیم.

$$\frac{\lambda_{52}}{\lambda_3} = \frac{\frac{1}{\lambda_3}}{\frac{1}{\lambda_{52}}} = \frac{R(\frac{1}{3^2} - 0)}{R(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{5^2})} = \frac{1}{\frac{1}{4} - \frac{1}{25}}$$

$$\frac{\lambda_{52}}{\lambda_3} \cdot \frac{1}{9} = \frac{100}{189}$$

۷۴. گزینه ۱ درست است.

مقدار انرژی بستگی هسته $B = \Delta mc^2$ است.

Δm تفاوت جرم هسته و جرم نوکلئون‌های تشکیل‌دهنده آن است.

$$\Delta m = 0.002u = 0.002 \times 1.66 \times 10^{-27} \text{ kg} = 3.32 \times 10^{-30} \text{ kg}$$

$$B = \Delta mc^2 = 3.32 \times 10^{-30} \times (3 \times 10^8)^2 = 2.988 \times 10^{-13} \text{ J}$$

۷۵. گزینه ۴ درست است.

$$I_1 = 100 \frac{\mu W}{\text{cm}^2} = 100 \times \frac{(10^{-6} W)}{(10^{-4} \text{ m}^2)} = 1 \frac{W}{\text{m}^2}$$

$$I_2 = 500 \frac{\mu W}{\text{cm}^2} = 5 \frac{W}{\text{m}^2}$$

$$\beta_2 - \beta_1 = 10 \log\left(\frac{I_2}{I_1}\right) = 10 \log 5 = 7$$

$$\log 5 = \log\left(\frac{10}{2}\right) = \log 10 - \log 2 = 1 - 0.3 = 0.7$$

شیمی

۷۶. گزینه ۳ درست است.

$$\text{جرم اتمی میانگین} = \frac{1 \times 18 + 4 \times 20 + 10 \times 23}{15} = 21.86$$

و نیز این عنصر در گروه ۱۷ با عنصر Br ۳۵ هم گروه است.

۷۷. گزینه ۲ درست است.

۷۸. گزینه ۴ درست است.

۷۹. گزینه ۱ درست است.

۸۰. گزینه ۳ درست است.



آمینواسید ۱۵۱g	۱۴g N _۲
x	۲,۸×۱۰ ^{-۳} gN _۲

$$x = 3/02 \times 10^{-2} \text{ g آمینواسید}$$

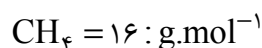
$$\text{درصد جرمی} = \frac{3/02 \times 10^{-2}}{0/5g} \times 100 = \%6/04$$

۸۱. گزینه ۲ درست است.

نام درست SCO: کربونیل سولفید، C_۲F_۴: تترا فلئورواتن، CBr_۴: کربن تترا برمید و C_۲H_۴Br_۲: ۱,۱ یا ۱,۲ دی برمواتان است.

۸۲. گزینه ۱ درست است.

در یک مخلوط ۱۰۰ لیتری:

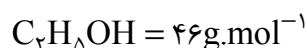


$$\text{جرم متان} = 93L \times \frac{16g CH_4}{22,4L CH_4} = 66,4g CH_4$$

$$\text{جرم He} = 7L \times \frac{4g He}{22,4L He} = 1,25g He$$

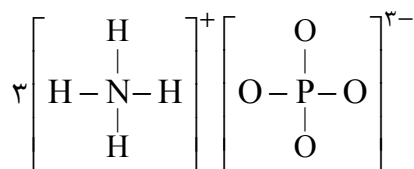
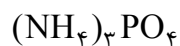
$$\text{درصد جرمی He} = \frac{1,25g}{(66,4 + 1,25)g} \times 100 = \%1,85$$

۸۳. گزینه ۳ درست است.



$$d = \frac{m}{V} = \frac{46g}{30L} = 1,53g.L^{-1}$$

۸۴. گزینه ۴ درست است.



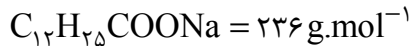
۸۵. گزینه ۲ درست است.

$$M = \frac{10ad}{m} \text{ (غلظت مولار)}$$

$$M = \frac{10 \times 37 \times 1/6}{36/5} = 16,2 mol.L^{-1}$$

$$\text{حجم HCl لازم} = 16,2 \times 22,4 = 363L$$

۸۶. گزینه ۳ درست است.



در محلول ۱٪ جرمی صابون در هر لیتر، ۱۰ g صابون وجود دارد، پس داریم:

۲۳۶g صابون	۱mol Na
۱۰g صابون	x

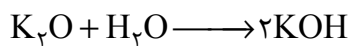
$$x = 0,042 = 4,2 \times 10^{-2} \text{ mol.L}^{-1}$$

۸۷. گزینه ۲ درست است.

$$\text{pH} = 12$$

$$[\text{OH}^-][\text{H}^+] = 10^{-14}$$

$$[\text{OH}^-] = \frac{10^{-14}}{10^{-12}} = 10^{-2} \text{ mol.L}^{-1}$$



۱۰۰۰ mL محلول	$10^{-2} \times 56 \text{ gKOH}$
۲۰۰ mL	x

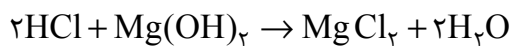
$$x = 0,112 \text{ gKOH}$$

۹۴gK ₂ O	۲×۵۶gKOH
x	۰,۱۱۲gKOH

$$x = 0,094 \text{ gKOH}$$

$$\text{درصد خلوص} = \frac{0,094}{0,5} \times 100 = 18,8\%$$

۸۸. گزینه ۴ درست است.



$$\text{gHCl} = 0,5 \text{ L} \times \frac{0,2 \text{ g}}{1 \text{ L}} = 0,1 \text{ gHCl}$$

۲×۳۶,۵gHCl	۵۸gMg(OH) ₂
۰,۱gHCl	x

$$x \approx 0,08$$

۸۹. گزینه ۱ درست است.

۲۰۷gPb	۲mole ⁻
۲۰۰۰gPb	x

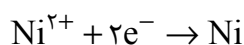
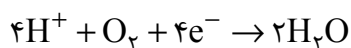
$$x = 19,3 \text{ mole}^-$$

۷g Li	۱mole ⁻
y	۱۹,۳ mole ⁻

$$y = 135,1$$

۹۰. گزینه ۲ درست است.

به طور خلاصه:

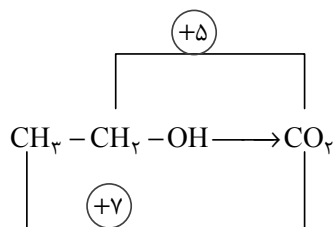


22.4 L O_2	$2 \times 59 \times \frac{70}{100} \text{ g Ni}$	$x = 54.2 \text{ L}$
x	200 g Ni	

۹۱. گزینه ۳ درست است.

حجم گاز O_2 تولید شده نصف گاز H_2 است. همچنین O_2 در برقکافت آب در آند تولید و در کاتد سلول سوختی مصرف می‌شود.

۹۲. گزینه ۳ درست است.



۹۳. گزینه ۱ درست است.

کربونیل سولفید برخلاف کربن دی‌سولفید قطبی است.

۹۴. گزینه ۳ درست است.

$2\text{V}^{5+} + 3\text{Zn} \longrightarrow 3\text{Zn}^{2+} + 2\text{V}^{2+}$	$x = 7.8 \times 10^{-3} \text{ g Zn}$			
<table border="1" style="border-collapse: collapse; width: 100%;"> <tr> <td style="padding: 5px;">2 mol V^{5+}</td> <td style="padding: 5px;">$3 \times 65 \times \frac{100}{75} \text{ g Zn}$</td> </tr> <tr> <td style="padding: 5px;">$200 \text{ mL} \times \frac{3 \times 10^{-4} \text{ mol V}^{5+}}{1000 \text{ mL}}$</td> <td style="padding: 5px; text-align: center;">x</td> </tr> </table>		2 mol V^{5+}	$3 \times 65 \times \frac{100}{75} \text{ g Zn}$	$200 \text{ mL} \times \frac{3 \times 10^{-4} \text{ mol V}^{5+}}{1000 \text{ mL}}$
2 mol V^{5+}	$3 \times 65 \times \frac{100}{75} \text{ g Zn}$			
$200 \text{ mL} \times \frac{3 \times 10^{-4} \text{ mol V}^{5+}}{1000 \text{ mL}}$	x			

و چون بازده درصدی فرآیند ۸۵٪ است، داریم:

$$\text{جرم Zn ناخالص لازم} = 7.8 \times 10^{-3} \times \frac{100}{85} = 9.2 \times 10^{-3} \text{ g Zn}$$

۹۵. گزینه ۱ درست است.

انرژی فعال‌سازی این واکنش ۵ واحد و ΔH آن ۳ واحد است.

۹۶. گزینه ۱ درست است.

$$K_a = \frac{[\text{H}^+][\text{A}^-]}{[\text{HA}]}$$

$$\text{pH} = 6 \Rightarrow [\text{H}^+] = [\text{A}^-] = 10^{-6}$$

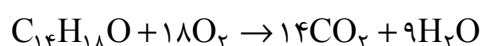
$$[\text{HA}] = 0.15 - 10^{-6} \approx 0.15$$

$$K_a \approx \frac{10^{-6} \times 10^{-6}}{0.15} = 6.6 \times 10^{-11}$$

۹۷. گزینه ۳ درست است.

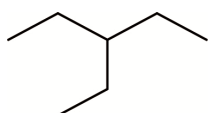
عبارات دوم و پنجم درست است.

معادله موازنه شده سوختن ترکیب:

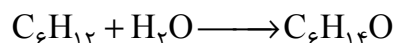


۹۸. گزینه ۱ درست است.

فرمول مولکولی آن C_7H_{16} و ساختار آن به صورت زیر است:



۹۹. گزینه ۴ درست است.

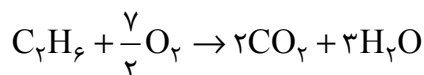


$$C_6H_{12}O = 100 \text{ g.mol}^{-1}$$

۲۲/۴L هگزن	۱۰۲g الکل
۱L هگزن	x

$$x = 4/5 \text{ g} \times \frac{90}{100} \approx 4/1 \text{ g}$$

۱۰۰. گزینه ۳ درست است.



$$\Delta H = [6\Delta H(C-H) + 1\Delta H(C-C) + 3/5\Delta H(O=O)] - [4\Delta H(C=O) + 6\Delta H(O-H)]$$

$$= [(6 \times 413) + (1 \times 347) + (3/5 \times 495)] - [(4 \times 745) + (6 \times 467)] = -1224/5 \text{ kJ}$$

$$Q = mc \Delta \theta$$

$$-1224/5 \text{ kJ} = 20 \text{ kg} \times 4/2 \times \Delta \theta$$

$$\Delta \theta = -14/6$$

۱۰۱. گزینه ۳ درست است.



$$R = \frac{45 \text{ g}}{80 \times 60} = \frac{88 \text{ g.mol}^{-1}}{80 \times 60} \approx 1/1 \times 10^{-4} \text{ mol.s}^{-1}$$

۱۰۲. گزینه ۲ درست است.

به‌ازای مصرف ۳ مول A طبق نسبت استوکیومتری، ۲ مول X و ۴ مول Z تولید می‌شود و با توجه به حجم ظرف (۲L)، پس از رسیدن به تعادل داریم:

$$\text{mol A} = 1 \text{ mol} \Rightarrow [A] = 0/5 \text{ mol.L}^{-1}$$

$$\text{mol X} = 2 \text{ mol} \Rightarrow [X] = 1 \text{ mol.L}^{-1}$$

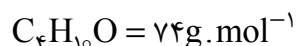
$$\text{mol Z} = 4 \text{ mol} \Rightarrow [Z] = 2 \text{ mol.L}^{-1}$$

$$K = \frac{[X]^2 [Z]^4}{[A]^2} = \frac{1^2 \times 2^4}{(0/5)^2} = 128$$

۱۰۳. گزینه ۲ درست است.

تنها عبارتهای دوم و چهارم درست است. کاربرد آن با پلی لاکتیک اسید متفاوت است.

۱۰۴. گزینه ۱ درست است.



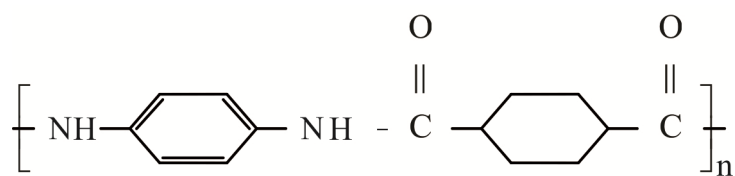
$$\text{جرم الکل حل شده} = 1/1 \text{ mol} \times 74 \text{ g.mol}^{-1} = 81/4 \text{ g}$$

پس در ۹۱۸/۶g آب، ۸۱/۴g از این ماده حل شده است:

۹۱۸/۶g H ₂ O	۸۱/۴	x = ۸/۸۶
۱۰۰g آب	x	

۱۰۵. گزینه ۴ درست است.

زیرا هر واحد X به صورت زیر است:



$$m = 14 \times 12 + 2 \times 14 + 16 \times 1 + 2 \times 16 = 244 \text{g} \cdot \text{mol}^{-1}$$

شرکت تعاونی خدمات آموزشی کارکنان
سازمان سنجش آموزش کشور



با سنجش آموز درست پیاموز



صدای داوطلب ۹۶۶ ۴۲-۰۲۱ | sanjeshserv.ir

[sanjesheducationgroup](https://www.facebook.com/sanjesheducationgroup) | [sanjeshserv](https://www.instagram.com/sanjeshserv)