نام و نام خانوادگی :

پایه تحصیلی :

نام دبیر :

عنوان آزمون : ترکیبیات

زمان آزمون :

تاریخ برگزاری ۱۴۰۲/۰۲/۱۴

گروه مشاوره و برنامه ریزی آکو

۱ با حروف کلمهٔ «بادبان» چند کلمهٔ شش حرفی می‌توان نوشت به گونه‌ای که هیچ دو حرف یکسانی کنار هم نباشند؟

۱) ۶۰ ۲) ۸۴ ۳) ۹۶ ۴) ۱۲۰

۲ می‌خواهیم از بین ۵ نوع گل رز، مریم، نرگس، اطلسی و میخک، دسته گلی شامل ۲۰ شاخه گل انتخاب کنیم. این کار به چند طریق امکان‌پذیر است در صورتی‌که از هر نوع گل حداقل ۲ شاخه انتخاب شود و مجموع شاخه‌های گل‌های رز و مریم برابر ۸ باشد؟

۱) ۱۰۵ ۲) ۱۴۰ ۳) ۲۱۰ ۴) ۳۸۵

۳ از بین جواب‌های صحیح و نامنفی معادله $x_۱ + x_۲ + x_۳ = ۸$ یک جواب انتخاب می‌کنیم. احتمال آنکه در این جواب $x_۱$ و $x_۲$ بزرگ‌تر از یک باشند، برابر کدام است؟

۱) $\frac{۲۸}{۴۵}$ ۲) $\frac{۲}{۹}$ ۳) $\frac{۷}{۱۵}$ ۴) $\frac{۱}{۳}$

۴ در یک جعبه ۹۰ گوی داریم. روی هر گوی یک عدد دو رقمی نوشته‌ایم. حداقل چند گوی خارج کنیم تا مطمئن شویم اقلاً دو گوی در میان آن‌ها وجود دارد که حاصل‌ضرب اعداد روی آن‌ها مضرب ۲۱ باشد؟ (اعداد روی گوی‌ها متمایز هستند.)

۱) ۷۶ ۲) ۷۷ ۳) ۷۸ ۴) ۷۹

۵ چند تابع مانند f از مجموعه $A = \{۱, ۲, ۳, ۴, ۵\}$ به مجموعهٔ $B = \{۱, ۲, ۳\}$ وجود دارد که $f(۱) = ۲$ و برد تابع B باشد؟

۱) ۵۰ ۲) ۴۰ ۳) ۲۰ ۴) ۶۰

۶ به چند طریق می‌توان ۵ دفتر نقاشی مشابه و ۴ مداد رنگی از ۴ رنگ مختلف را بین ۳ نفر توزیع کرد به طوری‌که به هر نفر حداقل یک دفتر نقاشی و حداقل یک مداد رنگی برسد؟

۱) ۱۸ ۲) ۴۲ ۳) ۱۸۶ ۴) ۲۱۶

۷ چند گراف با مجموعه رأس‌های $V = \{a, b, c, d, e\}$ وجود دارد که در آن‌ها هیچ‌کدام از رأس‌های a، b و c، تنها نباشند؟

۱) ۸۳۰ ۲) ۸۳۲ ۳) ۸۵۴ ۴) ۱۰۲۲

۸ دستگاه معادلات مقابل در مجموعهٔ اعداد طبیعی چند دسته جواب دارد؟

$$\begin{cases} x_۱ + x_۲ + ۳x_۳ = ۶ \\ y_۱ y_۲ y_۳ = ۵^۷ \times ۷^۵ \end{cases}$$

۱) ۷۵۲ ۲) ۷۵۶ ۳) ۱۵۱۲ ۴) ۱۵۳۰

۹) در پرتاب همزمان سه تاس سالم احتمال این‌که سه عدد متوالی رخ دهد، کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۶}$ ۲) $\frac{۴}{۶۳}$ ۳) $\frac{۱}{۹}$ ۴) $\frac{۱}{۳۶}$

۱۰) عددی طبیعی به طور تصادفی در بازه‌ی $(۱۰۰, ۴۰۰]$ انتخاب می‌شود. چه‌قدر احتمال دارد عدد طبیعی انتخاب شده فقط بر یکی از اعداد ۲ یا ۳ بخش‌پذیر باشد؟

۱) $\frac{۲}{۳}$ ۲) $\frac{۱}{۲}$ ۳) $\frac{۲}{۵}$ ۴) $\frac{۱}{۴}$

۱۱) عددی به‌طور تصادفی از بین اعداد طبیعی n، با شرط $۲۰۰ < n \leq ۴۰۰$ انتخاب می‌کنیم. چقدر احتمال دارد عدد انتخابی نه بر ۵ و نه بر ۷ بخش‌پذیر باشد؟

۱) ۰/۴۸۵ ۲) ۰/۵۶۵ ۳) ۰/۶۸۵ ۴) ۰/۷۲۵

۱۲) با حروف c, c, b, b, a, a, a چند کلمه‌ی سه حرفی ساخته می‌شود؟

۱) ۲۴ ۲) ۲۷ ۳) ۲۶ ۴) ۲۵

۱۳) با ارقام $۱, ۲, ۳, ۳, ۳, ۶, ۷$ چند عدد هفت‌رقمی می‌توان ساخت که بین ارقام زوج دقیقاً دو رقم وجود داشته باشد؟

۱) ۸۰ ۲) ۱۶۰ ۳) ۳۶۰ ۴) ۴۰۰

۱۴) معادله‌ی $x_۱ + x_۲ + x_۳ + x_۴ = ۸۰$ در اعداد طبیعی و فرد بزرگ‌تر از ۴ دارای چند جواب است؟

۱) $\binom{۳۳}{۳}$ ۲) $\binom{۳۴}{۳}$ ۳) $\binom{۳۵}{۳}$ ۴) $\binom{۳۰}{۲}$

۱۵) چند عدد پنج رقمی وجود دارد که مجموع ارقام آن کوچک‌تر از ۱۰ بوده و رقم صدگان بزرگ‌تر از ۴ باشد؟

۱) ۵۶ ۲) ۵۵ ۳) ۶۰ ۴) ۹۰

۱۶) معادله‌ی $x_۱ + \sqrt{x_۲} + x_۳ = \frac{۵}{x_۴}$، چند جواب صحیح و نامنفی دارد؟

۱) ۱۸ ۲) ۲۱ ۳) ۲۴ ۴) ۲۵

۱۷) در اعداد ۴ رقمی نوشته شده با ارقام طبیعی یک رقمی، چه‌قدر احتمال دارد که عددی چهار رقمی وجود داشته باشد که در آن فقط یک رقم، بیش‌تر از یک بار تکرار شود؟

۱) $\frac{۴۶}{۸۱}$ ۲) $\frac{۴۴}{۸۱}$ ۳) $\frac{۴۳}{۸۱}$ ۴) $\frac{۴۱}{۸۱}$

۱۸) تعداد جواب‌های صحیح و نامنفی معادله‌ی $x_۱^۳ + x_۲ + x_۳ + x_۴ = \frac{۱۰}{x_۵}$ کدام است؟

۱) ۱۷۲ ۲) ۱۷۵ ۳) ۱۷۹ ۴) ۱۷۶

۱۹ به چند روش می‌توان ۵ جایزه متمایز را بین ۳ نفر توزیع کرد به طوری که به حداقل یک نفر جایزه نرسد؟

۱) ۱۵۰ ۲) ۹۳ ۳) ۹۶ ۴) ۹۰

۲۰ از بین اعداد $۱, ۲, ۳, \dots, ۵۱$ حداقل چند عدد انتخاب کنیم تا مطمئن باشیم عددی در بین اعداد انتخاب شده وجود دارد که نه بر ۲ بخش‌پذیر است و نه بر ۳؟

۱) ۱۷ ۲) ۱۸ ۳) ۳۵ ۴) ۳۴

۲۱ چند عدد ۴ رقمی به صورت $\overline{\mathrm{aabc}}$ شامل ارقام ۱ و ۲ وجود دارد؟

۱) ۴۸ ۲) ۵۰ ۳) ۵۲ ۴) ۴۶

۲۲ چند عدد چهاررقمی با ارقام متمایز وجود دارد که ۱ رقم یکان نباشد، ۲ رقم دهگان نباشد و ۳ رقم صدگان نباشد؟

۱) ۶۵۶ ۲) ۳۱۹۲ ۳) ۳۰۲۴ ۴) ۳۳۳۳

۲۳ چند تابع f از مجموعه‌ی $A = \{a_۱, a_۲, \dots, a_۵\}$ به مجموعه‌ی $B = \{b_۱, b_۲, b_۳\}$ با شرط «$\forall b_i \in B \exists a_i \in A ; f(a_i) = b_i$» وجود دارد؟

۱) ۹۳ ۲) ۱۵۰ ۳) ۲۴۳ ۴) ۱۲۵

۲۴ ۴ دانش‌آموز به همراه پدر و مادرشان در یک مراسم شرکت کرده‌اند. به چند طریق ۳ دانش‌آموز و ۳ نفر از اولیا می‌توانند سخنرانی کنند به طوری‌که یک دانش‌آموز و پدر و مادر او بین سخنرانان باشند؟

۱) $۶^۵ \times ۵$ ۲) $۲^۸ \times ۳^۴ \times ۵$ ۳) $۲^۲ \times ۳^۲ \times ۵!$ ۴) $۲ \times ۳ \times ۷!$

۲۵ تعداد جواب طبیعی معادله‌ی $\left(x_۱^۲ + x_۲ + x_۳\right)\left(\frac{۶}{y_۱} + y_۲ + y_۳\right)^۲ = ۲۴۵$ کدام است؟

۱) ۳۰ ۲) ۳۶ ۳) ۸۴ ۴) ۹۰

۲۶ در یک کلاس ۳۴ نفری، ۱۵ نفر فوتبال، ۱۱ نفر والیبال و ۹ نفر بسکتبال بازی می‌کنند. اگر بدانیم ۳ نفر هم فوتبال، هم والیبال و هم بسکتبال بازی می‌کنند و ۵ نفر فوتبال و والیبال، ۶ نفر والیبال و بسکتبال و ۳ نفر فوتبال و بسکتبال بازی می‌کنند. مشخص کنید چند نفر فقط در یک رشته بازی می‌کنند؟

۲۷ تعداد جواب‌های صحیح و نامنفی معادله $۲x_۱ + \sqrt{x_۲} + x_۳ + x_۴ + x_۵ = ۴$ کدام است؟

۱) ۴۰ ۲) ۴۲ ۳) ۴۵ ۴) ۴۶

۲۸ تعداد جواب‌های صحیح و نامنفی معادله‌ی $x_۱ + x_۲ + x_۳ = ۲۰$ با شرط $x_۱ > x_۲$ کدام است؟

۱) ۱۱۰ ۲) ۱۱۱ ۳) ۱۱۴ ۴) ۱۱۵

۲۹ حاصل عبارت $\sum\limits_{k=۱}^{n} k\binom{n}{k}$، کدام است؟

۱) $n۲^{n-۱}$ ۲) $n۲^{n}$ ۳) $(n-۱)۲^{n-۱}$ ۴) $(n-۱)۲^{n}$

۳۰ معادله‌ی $\frac{۱۴}{x_۳} = x_۱ + x_۲ + x_۳$ چند جواب در اعداد طبیعی دارد؟

۱) ۲ ۲) ۱۴ ۳) ۱۸ ۴) ۱۶

۳۱ تعداد جواب‌های صحیح و نامنفی معادله‌ی $x_۱ + x_۲ + x_۳ + x_۴ = ۱۰$ به شرطی که $x_۱ < ۴$ و $x_۲ < ۴$ باشد کدام است؟

۱) ۱۲۸ ۲) ۱۷۸ ۳) ۲۸۶ ۴) ۸۴

۳۲ می‌خواهیم ۴ پرچم چین، ۳ پرچم ترکیه و ۲ پرچم ایران را برای برگزاری یک کنفرانس کنار هم بچینیم به طوری که دو پرچم ایران کنار هم نباشند، این کار به چند طریق امکان‌پذیر است؟

۱) ۴۹۰ ۲) ۹۸۰ ۳) ۱۹۶۰ ۴) ۲۹۴۰

۳۳ نامعادلهٔ $\sqrt{x_۱} + x_۲ + x_۳ < ۶$ چند جواب طبیعی دارد؟

۱) ۹ ۲) ۱۰ ۳) ۱۲ ۴) ۱۶

۳۴ با ارقام $۱, ۱, ۲, ۲, ۳, ۳, ۴, ۵$ چند عدد ۸ رقمی می‌توان نوشت به طوری‌که هیچ دو رقم یکسانی کنار هم قرار نگیرند؟

۱) ۲۱۱۰ ۲) ۲۲۲۰ ۳) $۶! \times ۱۰$ ۴) $۶! \times ۱۲$

۳۵ در یک کلاس ۳۴ نفره، ۲ نفر از دانش‌آموزان به هیچ‌یک از رشته‌های فوتبال، والیبال و بسکتبال علاقه ندارند. ۱۵ نفر به فوتبال، ۱۸ نفر به والیبال، ۱۶ نفر به بسکتبال، ۷ نفر به فوتبال و والیبال، ۸ نفر به والیبال و بسکتبال و ۴ نفر به فوتبال و بسکتبال علاقه‌مند هستند، چه تعداد از دانش‌آموزان به حداقل دو رشته‌ی ورزشی علاقه دارند؟

۱) ۱۳ ۲) ۱۴ ۳) ۱۵ ۴) ۱۶

۳۶ اگر مجموعه‌ی A دارای ۶ عضو و مجموعه‌ی B دارای ۳ عضو باشد، تعداد توابع چون f از مجموعه‌ی A به مجموعه‌ی B به طوری که $R_f = B$ باشد، کدام است؟

۱) ۵۴۰ ۲) ۶۶۳ ۳) ۵۶۰ ۴) ۶۹۹

۳۷ با ارقام ۱، ۲ و۳ چند عدد شش رقمی ساخته می‌شود که در هریک از آن‌ها، هریک از ارقام مذکور حداقل یک بار ظاهر شوند؟

۱) ۵۲۰ ۲) ۵۲۵ ۳) ۵۳۰ ۴) ۵۴۰

۳۸ چند عدد سه رقمی وجود دارد که بر ۲ بخش‌پذیر بوده ولی بر ۳ و ۵ بخش‌پذیر نباشد؟

۱) ۴۱۰ ۲) ۴۲۰ ۳) ۴۳۰ ۴) ۴۴۰

۳۹ اگر داشته باشیم $A = \{۱, ۲, ۳\}$ و $B = \{۴, ۵, ۶, ۷\}$، در این صورت چند رمز یا کد چهاررقمی می‌توان نوشت که تعداد رقم‌های به کار رفته از مجموعه‌های A و B در آن یکسان نباشد؟

۱) ۳۲۰ ۲) ۳۲۸ ۳) ۳۸۰ ۴) ۴۰۸

۴۰ به چند حالت ۴ قاشق متفاوت و ۴ چنگال متفاوت را در یک ردیف می‌توان چید، به طوری که هیچ دو قاشقی کنار هم قرار نگیرد؟

۱) $۴!\times۴!$ ۲) $۲\times۴!\times۴!$ ۳) $۳\times۴!\times۴!$ ۴) $۵\times۴!\times۴!$

۴۱ با استفاده از اصل شمول و عدم شمول، تعداد توابع پوشا از یک مجموعه ۴ عضو به یک مجموعه ۳ عضوی را به دست آورید.

۴۲ به چند طریق می‌توان ۶ فیلم سینمایی را بین سه داور برای داوری تقسیم کرد، به طوری‌که هر داور حداقل یک فیلم را داوری کند؟

۴۳ تعداد اعداد طبیعی دو رقمی که نسبت به ۱۶۵ اول باشند، کدام است؟

۱) ۲۷ ۲) ۳۷ ۳) ۴۱ ۴) ۴۳

۴۴ چند عدد طبیعی کوچک‌تر یا مساوی ۱۰۰ وجود دارد به‌طوری که از بین اعداد ۲، ۳ و ۵، تنها بر ۲ بخش‌پذیر باشند؟

۱) ۳۴ ۲) ۲۴ ۳) ۲۷ ۴) ۳۶

۴۵ چند عدد طبیعی n به‌طوری که $۱ \leq n \leq ۱۰۰$ وجود دارد که تنها بر یکی از اعداد ۲، ۳ و ۵ بخش‌پذیر است؟

۱) ۳۹ ۲) ۴۲ ۳) ۴۵ ۴) ۴۸

۴۶ فرض کنید A زیرمجموعه‌ای از اعداد طبیعی باشد که اعضای آن به جز ۲، ۳ و ۵، بر هیچ عدد اول دیگری بخش‌پذیر نباشند. حداقل چند عضو از مجموعهٔ A انتخاب کنیم تا مطمئن باشیم حاصل‌ضرب حداقل دو عضو از میان آن‌ها، قطعاً مربع کامل است؟

۱) ۱۱ ۲) ۹ ۳) ۷ ۴) ۵

۴۷ مجموعه‌ی $A = \{۱, ۲, \cdots, ۸\}$، چند زیرمجموعه‌ی سه‌عضوی دارد که هیچ دو عضو آن اعداد متوالی نباشند؟

۱) ۵۶ ۲) ۲۰ ۳) ۶۰ ۴) ۱۳

۴۸ ۷ توپ یکسان را در ۳ ظرف A، B و C می‌ریزیم. در چند حالت تعدد توپ‌های ظرف A از تعداد توپ‌های ظرف B بیش‌تر است؟

۱) ۱۴ ۲) ۱۶ ۳) ۱۸ ۴) ۲۰

۴۹ تعداد جواب‌های صحیح نامنفی معادله‌ی $x_۱ + x_۲ + x_۳ = ۲۵$ با شرط $۵ \leqslant x_۲ < ۱۰$ و $۶ \leqslant x_۱ < ۹$ را محاسبه کنید.

۵۰ در منطقه‌ای چهار روستا وجود دارد. قرار است راه‌هایی دو طرفه بین بعضی از روستاها ساخته شود به‌طوری که نهایتاً هیچ روستایی منفرد (یعنی بدون ارتباط با هیچ روستای دیگر) نماند. این کار به چند طریق امکان دارد؟

پاسخنامه تشریحی

۱ گزینه ۲ پاسخ صحیح است. با توجه به قضیهٔ جایگشت با تکرار، تعداد کل کلمات شش حرفی که با حروف کلمهٔ «بادبان» می‌توان نوشت، برابر است با: $|S|=\frac{۶!}{۲!۲!}=۱۸۰$

اگر مجموعهٔ حالت‌هایی که دو حرف الف در کنار یکدیگر قرار دارند را با A و مجموعهٔ حالت‌هایی که دو حرف ب در کنار یکدیگر هستند را با B نمایش دهیم، آن‌گاه داریم: $|A|=|B|=\frac{۵!}{۲!}=۶۰$

$|A\cap B|=۴!=۲۴$

$|A\cup B|=|A|+|B|-|A\cap B|=۶۰+۶۰-۲۴=۹۶$

مجموعهٔ حالت‌هایی که هیچ دو حرف یکسانی کنار هم نباشند، معادل مجموعهٔ $\overline{A}\cap\overline{B}$ است، بنابراین داریم:

$|\overline{A}\cap\overline{B}|=|S|-|A\cup B|=۱۸۰-۹۶=۸۴$

۲ گزینه ۲ پاسخ صحیح است. فرض کنید تعداد شاخه‌های گل‌های رز، مریم، نرگس، اطلسی و میخک را به‌ترتیب با $x_۱$، $x_۲$، $x_۳$، $x_۴$ و $x_۵$ نمایش دهیم. در این صورت داریم:

$$\left.\begin{array}{r} x_۱+x_۲+x_۳+x_۴+x_۵=۲۰ \\ x_۱+x_۲=۸ \end{array}\right\}\Rightarrow x_۳+x_۴+x_۵=۱۲$$

پس کافی است دو معادلهٔ $x_۱+x_۲=۸$ و $x_۳+x_۴+x_۵=۱۲$ را به طور جداگانه و همراه با شرط $x_i\geq ۲(۱\leq i\leq ۵)$ حل کنیم.

$x_۱+x_۲=۸\Rightarrow y_۱+۲+y_۲+۲=۸\Rightarrow y_۱+y_۲=۴$

تعداد جواب‌های صحیح و نامنفی $=\binom{۴+۲-۱}{۲-۱}=\binom{۵}{۱}=۵$

$x_۳+x_۴+x_۵=۱۲\Rightarrow y_۳+۲+y_۴+۲+y_۵+۲=۱۲\Rightarrow y_۳+y_۴+y_۵=۶$

تعداد جواب‌های صحیح و نامنفی $=\binom{۶+۳-۱}{۳-۱}=\binom{۸}{۲}=۲۸$

بنابراین طبق اصل ضرب، تعداد جواب‌های معادله برابر است با: $۵\times۲۸=۱۴۰$

۳ گزینه ۴ پاسخ صحیح است. تعداد کل جواب‌های صحیح و نامنفی معادله برابر است با:

$$n(S)=\binom{۸+۳-۱}{۳-۱}=\binom{۱۰}{۲}=۴۵$$

با در نظر گرفتن شروط $x_۱\geq ۲$ و $x_۲\geq ۲$ داریم: $x_۱\geq ۲\Rightarrow x_۱=y_۱+۲$

$x_۲\geq ۲\Rightarrow x_۲=y_۲+۲$

$x_۱+x_۲+x_۳=۸\Rightarrow y_۱+y_۲+y_۳=۴$

$$n(A)=\binom{۴+۳-۱}{۳-۱}=\binom{۶}{۲}=۱۵$$

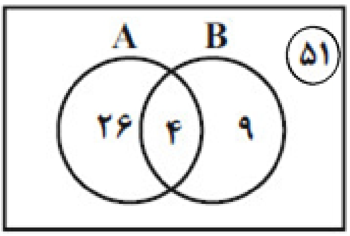
$$P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{۱۵}{۴۵}=\frac{۱}{۳}$$

۴ گزینه ۳ پاسخ صحیح است. می‌دانیم ضرب دو عدد زمانی مضرب ۲۱ است که حداقل یکی از اعداد عامل ۳ و حداقل یکی از اعداد عامل ۷ داشته باشد. ابتدا تعداد مضارب ۷ و مضارب ۳ را محاسبه می‌کنیم.

$$\text{تعداد مضارب ۳} = \left[\frac{۹۹}{۳}\right] - \left[\frac{۹}{۳}\right] = ۳۰$$

$$\text{تعداد مضارب ۷} = \left[\frac{۹۹}{۷}\right] - \left[\frac{۹}{۷}\right] = ۱۳$$

$$\text{تعداد مضارب ۲۱} = \left[\frac{۹۹}{۲۱}\right] - \left[\frac{۹}{۲۱}\right] = ۴$$



A : مضارب ۳

B : مضارب ۷

در بدترین حالت زمانی ۲ توپ خارج می‌شود که حاصل‌ضرب آن‌ها مضرب ۲۱ باشد که ابتدا ۵۱ عددی را خارج کنیم که هیچکدام عامل ۳ و ۷ ندارند. سپس ۲۶ عددی را خارج کنیم که فقط عامل ۳ دارند و بعد یکی از اعداد باقیمانده خارج کنیم پس حداقل $۵۱ + ۲۶ + ۱ = ۷۸$ گوی احتیاج داریم تا به هدف مطلوب برسیم.

۵ گزینه ۱ پاسخ صحیح است. فرض می‌کنیم $f(۱) = ۲$ باشد:

$$\begin{pmatrix} ۱ \\ ۲ \\ ۳ \\ ۴ \\ ۵ \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} ۲ \\ ۱ \\ ۳ \end{pmatrix}$$

الف) پس اعداد ۲، ۳، ۴ و ۵ باید ۳ و ۱ را بپوشانند. دو حالت هستند: (۴ عضوی به ۲ عضوی پوشا: ۱۴ تا)

ب) ۲، ۳، ۴ و ۵ علاوه بر ۳ و ۱، عدد ۲ را هم بپوشانند (۴ عضوی به ۳ عضوی پوشا: ۳۶ تا)

جواب می‌شود: $۲^{۴} - ۲ + ۳^{۴} - ۳\times ۲^{۴} + ۳ = ۵۰$

۶ گزینه ۴ پاسخ صحیح است. برای شمارش تعداد حالات توزیع دفترهای نقاشی چون مشابه هستند از معادله سیاله خطی با ضرائب واحد، استفاده می‌کنیم:

$$x_{۱} + x_{۲} + x_{۳} = ۵ \Rightarrow \text{تعداد جواب های طبیعی} = \binom{۵-۱}{۳-۱} = \binom{۴}{۲} = ۶$$

$۱ \leq x_{۱}$

$۱ \leq x_{۲}$

$۱ \leq x_{۳}$

برای شمارش تعداد حالات توزیع مدادرنگی‌ها نیز از تعداد توابع پوشا استفاده می‌کنیم، زیرا مدادرنگی‌ها متفاوت هستند:

$$\text{تعداد توابع پوشا از مجموعه ۴ عضوی} = ۳^{۴} - ۳\times ۲^{+۳} = ۸۱ - ۴۸ + ۳ = ۳۶$$

بنابراین: $\text{تعداد کل جواب‌ها} = ۶\times ۳۶ = ۲۱۶$

۷ گزینه ۳ پاسخ صحیح است. مجموعه گراف‌هایی که در آن‌ها a رأس تنها نباشد: 'A

مجموعه گراف‌هایی که در آن‌ها b رأس تنها نباشد: 'B

مجموع گراف‌هایی که در آن‌ها c رأس تنها نباشد: 'C

$$|A'\cap B'\cap C'|=|S|-|A\cup B\cup C|$$

$$=|S|-|A|-|B|-|C|+|A\cap B|+|A\cap C|+|B\cap C|-|A\cap B\cap C|$$

$$=۲^{\binom{۵}{۲}}-۳\times ۲^{\binom{۴}{۲}}+۳\times ۲^{\binom{۳}{۲}}-۲^{\binom{۲}{۲}}=۱۰۲۴-۱۹۲+۲۴-۲=۸۵۲$$

۸ گزینه ۳ پاسخ صحیح است. تعداد جواب‌های طبیعی معادلهٔ $x_۱+...+x_k=n$ برابر $\binom{n-۱}{k-۱}$ است.

$$x_۱+x_۲+۳x_۳=۶$$

$x_i\geq ۱$ است در نتیجه فقط $x_۳=۱$ قابل قبول است.

$$x_۳=۱\Rightarrow x_۱+x_۲=۳\Rightarrow |S_۱|=\binom{۳-۱}{۲-۱}=\binom{۲}{۱}=۲$$

$$y_۱y_۲y_۳=۵^۷\times ۷^۵\Rightarrow\begin{cases}y_۱=۵^{t_۱}\times ۷^{z_۱}\\ y_۲=۵^{t_۲}\times ۷^{z_۲}\\ y_۳=۵^{t_۳}\times ۷^{z_۳}\end{cases}\Rightarrow y_۱y_۲y_۳=۵^{t_۱+t_۲+t_۳}\times ۷^{z_۱+z_۲+z_۳}$$

t_i و z_i می‌توانند صفر هم باشند، در نتیجه:

$$\begin{cases}t_۱+t_۲+t_۳=۷\Rightarrow |S_۲|=\binom{۷+۳-۱}{۳-۱}=\binom{۹}{۲}=۳۶\\ z_۱+z_۲+z_۳=۵\Rightarrow |S_۳|=\binom{۵+۳-۱}{۳-۱}=\binom{۷}{۲}=۲۱\end{cases}\Rightarrow ۳۶\times ۲۱=۷۵۶$$

$$\Rightarrow |S|=۲\times ۷۵۶=۱۵۱۲$$

۹ گزینه ۳ پاسخ صحیح است. اگر سه تاس بخواهند به صورت متوالی باشند حالت‌های زیر را داریم:

$$(۱,۲,۳),(۲,۳,۴),(۳,۴,۵),(۴,۵,۶)$$

هر کدام از این حالت‌ها می‌توانند به !۳ حالت رخ دهند. بنابراین داریم:

$$\begin{matrix}n(A)=۳!\times ۴=۲۴\\ n(S)=۶^۳=۲۱۶\end{matrix}\Rightarrow P(A)=\frac{۲۴}{۲۱۶}=\frac{۱}{۹}$$

۱۰ گزینه ۲ پاسخ صحیح است. تعداد مضرب‌های عدد K در بین اعداد طبیعی $۱,۲,۳,...,n$ از رابطه‌ی جزء صحیح $\left[\frac{n}{K}\right]$ به دست می‌آید. عدد انتخابی اگر مضرب ۲ است نباید مضرب ۳ باشد و بالعکس، بنابراین:

A = بر ۲ بخش‌پذیر و B = بر ۳ بخش‌پذیر $n(S)=۴۰۰-۱۰۰=۳۰۰$

$$P(A-B)+P(B-A)=P(A)-P(A\cap B)+P(B)-P(A\cap B)$$

$$P(A-B)+P(B-A)=P(A)+P(B)-۲P(A\cap B)$$

$$P(A-B)+P(B-A)=\frac{\left[\frac{۴۰۰}{۲}\right]-\left[\frac{۱۰۰}{۲}\right]}{۳۰۰}+\frac{\left[\frac{۴۰۰}{۳}\right]-\left[\frac{۱۰۰}{۳}\right]}{۳۰۰}-۲\left(\frac{\frac{۴۰۰}{۲\times ۳}-\frac{۱۰۰}{۲\times ۳}}{۳۰۰}\right)$$

$$\Rightarrow P(A-B)+P(B-A)=\frac{۱۵۰}{۳۰۰}+\frac{۱۰۰}{۳۰۰}-\frac{۲\times ۵۰}{۳۰۰}=\frac{۱}{۲}$$

۱۱ گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$A =$ اعداد بخش‌پذیر ۵

$B =$ اعداد بخش‌پذیر ۷

عبارت جزء صحیح $\left[\frac{n}{K}\right]$ تعداد مضرب‌های K را در مجموع اعداد طبیعی کوچکتر یا مساوی n نمایش می‌دهد، بنابراین:

$$P(A'\cap B') \overset{\text{دمورگان}}{\equiv} P((A\cup B')) = ۱ - P(A\cup B) = ۱ - P(A) - P(B) + P(A\cap B)$$

$$P(A'\cap B') = ۱ - \frac{\left[\frac{۴۰۰}{۵}\right]-\left[\frac{۲۰۰}{۵}\right]}{۲۰۰} - \frac{\left[\frac{۴۰۰}{۷}\right]-\left[\frac{۲۰۰}{۷}\right]}{۲۰۰} + \frac{\left[\frac{۴۰۰}{۵\times ۷}\right]-\left[\frac{۲۰۰}{۵\times ۷}\right]}{۲۰۰}$$

$n(S) = ۴۰۰ - ۲۰۰ = ۲۰۰$ (توجه کنید عدد ۲۰۰ در فضای نمونه‌ای نیست)

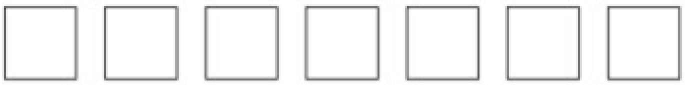
$$P(A'\cap B') = ۱ - \frac{۴۰}{۲۰۰} - \frac{۲۹}{۲۰۰} + \frac{۶}{۲۰۰} = \frac{۱۳۷}{۲۰۰} = ۰/۶۸۵$$

۱۲ گزینه ۴ پاسخ صحیح است. از بین همه‌ی کلمه‌هایی که با حروف a، b و c می‌توان ساخت فقط کلمه‌های ccc, bbb امکان‌پذیر نیست. پس داریم:

$$۳^۳ - ۲ = ۲۷ - ۲ = ۲۵$$

۱۳ گزینه ۲ پاسخ صحیح است. برای رسیدن به خواسته‌ی مسأله باید ارقام زوج ۲ و ۶ در یکی از موقعیت‌های $(۱,۴)$، $(۲,۵)$، $(۳,۶)$و یا $(۴,۷)$ قرار بگیرند، پس ۴ حالت وجود دارد و همچنین ارقام زوج ۲ و ۶ خود !۲ جایگشت دارند. حال باید جایگشت ارقام $۱,۳,۳,۳,۷$ را محاسبه کنیم. پس داریم:

$$۴\times ۲\times \frac{۵!}{۳!} = ۱۶۰$$



۱ ۲ ۳ ۴ ۵ ۶ ۷

۱۴ گزینه ۱ پاسخ صحیح است. اعداد فرد بزرگ‌تر از ۴ را به صورت زیر نمایش می‌دهیم:

$$\begin{cases} x_۱ = ۲k_۱ + ۱ \text{ و } x_۲ = ۲k_۲ + ۱ \text{ و } x_۳ = ۲k_۳ + ۱ \text{ و } x_۴ = ۲k_۴ + ۱ \\ k_۱ \text{ و } k_۲ \text{ و } k_۳ \text{ و } k_۴ \geq ۲ \end{cases}$$

حال این مقادیر را در معادله جایگذاری می‌کنیم:

$$\begin{cases} (۲k_۱+۱)+(۲k_۲+۱)+(۲k_۳+۱)+(۲k_۴+۱) = ۸۰ \\ k_۱ \text{ و } k_۲ \text{ و } k_۳ \text{ و } k_۴ \geq ۲ \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} k_۱ + k_۲ + k_۳ + k_۴ = ۳۸ \\ k_۱ \text{ و } k_۲ \text{ و } k_۳ \text{ و } k_۴ \geq ۲ \end{cases}$$

$$\Rightarrow k_۱ = k'_۱ + ۲, k_۲ = k'_۲ + ۲, k_۳ = k'_۳ + ۲, k_۴ = k'_۴ + ۲$$

$$\Rightarrow k'_۱ + k'_۲ + k'_۳ + k'_۴ = ۳۸ - ۴\times ۲ = ۳۰$$

$$\binom{۳۳}{۳} = \text{تعداد جواب‌های صحیح نامنفی}$$

۱۵ گزینه ۱ پاسخ صحیح است. عدد ۵ رقمی را به صورت $\overline{x_۱x_۲x_۳x_۴x_۵}$ درنظر می‌گیریم:

$$\begin{cases} x_۱ + x_۲ + x_۳ + x_۴ + x_۵ < ۱۰ \\ \quad x_۱ \geq ۱ \text{ و } x_۳ > ۴ \rightarrow x \geq ۵ \end{cases}$$

به هرکدام از متغیرهای $x_۱$ و $x_۳$ به ترتیب ۱ و ۵ واحد اضافه می‌کنیم تا شرط حداقل را داشته باشد:

$$x'_۱ + x_۲ + x'_۳ + x_۴ + x_۵ < ۴$$

متغیر $x_۶$ را وارد می‌کنیم تا به تساوی تبدیل شود.

$$\rightarrow x'_۱ + x_۲ + x'_۳ + x_۴ + x_۵ + x_۶ = ۳$$

$$\xrightarrow{\text{حسابی}} \binom{۸}{۵} = ۵۶$$

۱۶ گزینه ۳ پاسخ صحیح است. مقدار $x_۴$ باید یکی از مقسوم‌علیه‌های مثبت عدد ۵ یعنی ۱ و ۵ باشد و از طرفی $\sqrt{x_۲}$ را $y_۲$ در نظر می‌گیریم چون $\sqrt{x_۲}$ هر مقدار حسابی باشد، قابل قبول است.

$$\begin{cases} x_۴ = ۱ : x_۱ + y_۲ + x_۳ = ۵ \xrightarrow{\text{حسابی}} \binom{۷}{۲} = ۲۱ \\ x_۴ = ۵ : x_۱ + y_۲ + x_۳ = ۱ \xrightarrow{\text{حسابی}} \binom{۳}{۲} = ۳ \end{cases} \xrightarrow{\text{جواب}} ۲۱ + ۳ = ۲۴$$

۱۷ گزینه ۴ پاسخ صحیح است. با ارقام $۱, ۲, ۳, \dots, ۸, ۹$ می‌توان با مجاز بودن تکرار ارقام: $۹^۴ = ۶۵۶۱$ عدد چهار رقمی نوشت. در عدد ۴ رقمی با شرایط مسئله، رقم موردنظر می‌تواند ۲ یا ۳ یا ۴ بار تکرار شود:

الف) ۲ بار تکرار شود: $\binom{۹}{۱}\binom{۸}{۲}\frac{۴!}{۲!} = ۳۰۲۴$ $\boxed{x\,|\,x\,|\,y\,|\,z}$

ب) ۳ بار تکرار شود: $\binom{۹}{۱}\binom{۸}{۱}\frac{۴!}{۳!} = ۲۸۸$ $\boxed{x\,|\,x\,|\,x\,|\,y}$

ج) ۴ بار تکرار شود: $\binom{۹}{۱}\binom{۸}{۰}\frac{۴!}{۴!} = ۹$ $\boxed{x\,|\,x\,|\,x\,|\,x}$

تعداد اعداد ۴ رقمی با شرایط مسئله $= ۳۰۲۴ + ۲۸۸ + ۹ = ۳۳۲۱$

$$\underset{\substack{\downarrow \\ \text{پیشامد مطلوب سوال}}}{P(A)} = \frac{۳۳۲۱}{۶۵۶۱} = \frac{۴۱}{۸۱}$$

۱۸ گزینه ۴ پاسخ صحیح است. $x_۵$ باید یکی از مقسوم‌علیه‌های مثبت عدد ۱۰ یعنی ۱, ۲, ۵, ۱۰ باشد و در هر معادله باید محدودیت $x_۱^۳$ را هم درنظر بگیریم:

$$x_۵=۱ \Rightarrow x_۱^۳+x_۲+x_۳+x_۴=۱۰ \begin{cases} x_۱=۰ \Rightarrow x_۲+x_۳+x_۴=۱۰ \Rightarrow \binom{۱۰+۳-۱}{۳-۱}=۶۶ \\ x_۱=۱ \Rightarrow x_۲+x_۳+x_۴=۹ \Rightarrow \binom{۹+۳-۱}{۳-۱}=۵۵ \\ x_۱=۲ \Rightarrow x_۲+x_۳+x_۴=۲ \Rightarrow \binom{۲+۳-۱}{۳-۱}=۶ \end{cases}$$

$$x_۲=۲ \Rightarrow x_۱^۳+x_۲+x_۳+x_۴=۵ \begin{cases} x_۱=۰ \Rightarrow x_۲+x_۳+x_۴=۵ \Rightarrow \binom{۵+۳-۱}{۳-۱}=۲۱ \\ x_۱=۱ \Rightarrow x_۲+x_۳+x_۴=۴ \Rightarrow \binom{۴+۳-۱}{۳-۱}=۱۵ \end{cases}$$

$$x_۵=۵ \Rightarrow x_۱^۳+x_۲+x_۳+x_۴=۲ \begin{cases} x_۱=۰ \Rightarrow x_۲+x_۳+x_۴=۲ \Rightarrow \binom{۲+۳-۱}{۳-۱}=۶ \\ x_۱=۱ \Rightarrow x_۲+x_۳+x_۴=۱ \Rightarrow \binom{۱+۳-۱}{۳-۱}=۳ \end{cases}$$

$$x_۵=۱۰ \Rightarrow x_۱^۳+x_۲+x_۳+x_۴=۱ \begin{cases} x_۱=۰ \Rightarrow x_۲+x_۳+x_۴=۱ \Rightarrow \binom{۱+۳-۱}{۳-۱}=۳ \\ x_۱=۱ \Rightarrow x_۲+x_۳+x_۴=۰ \Rightarrow \text{یک جواب} \end{cases}$$

$$\text{تعداد کل جواب‌ها}=۶۶+۵۵+۶+۲۱+۱۵+۶+۳+۳+۱=۱۷۶$$

۱۹ گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$$n(\bar{۱}\cup\bar{۲}\cup\bar{۳})=n(\bar{۱})+n(\bar{۲})+n(\bar{۳})-n(\bar{۱}\cap\bar{۲})-n(\bar{۱}\cap\bar{۳})-n(\bar{۲}\cap\bar{۳})+n(\bar{۱}\cap\bar{۲}\cap\bar{۳})$$

$$\text{اولی نگیرد یا دومی نگیرد یا سومی نگیرد}=۲^۵+۲^۵+۲^۵-۱^۵-۱^۵-۱^۵+۰=۹۳$$

۲۰ گزینه ۳ پاسخ صحیح است. ابتدا تعداد اعدادی که بر ۲ یا بر ۳ بخش‌پذیر باشند را به دست می‌آوریم:

$$\mathrm{A}: \text{بخش پذیر بر ۲} \Rightarrow |A|=\left[\frac{۵۱}{۲}\right]=۳۵$$

$$\mathrm{B}: \text{بخش پذیر بر ۳} \Rightarrow |B|=\left[\frac{۵۱}{۳}\right]=۱۷$$

$$\mathrm{A}\cap\mathrm{B}: \text{بخش پذیر بر ۶} \Rightarrow |A\cap B|=\left[\frac{۵۱}{۶}\right]=۸$$

$$|A\cup B|=|A|+|B|-|A\cap B|=۲۵+۱۷-۸=۳۴$$

پس اگر حداقل ۳۵ عدد انتخاب کنیم، طبق اصل لانه کبوتری مطمئن هستیم، عددی وجود دارد که نه بر ۲ و نه بر ۳ بخش‌پذیر است.

۲۱ گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

$$\text{حالت بندی}\begin{cases} a=۱ \text{ و } b \text{ یا } c=۲ \text{ و } \binom{۸}{۱} \Rightarrow ۱\times ۲\times ۸=۱۶\\ a=۲ \text{ و } b \text{ یا } c=۱ \text{ و } \binom{۸}{۱} \Rightarrow ۱\times ۲\times ۸=۱۶ \\ \underset{\substack{\uparrow \\ \text{برای a غیرصفر} \\ \text{از ۳ تا ۹ برداریم}}}{\binom{۷}{۱}} \text{ و } \underbrace{b=۱ \text{ و } c=۲}_{\text{۲ حالت}} \Rightarrow ۷\times ۲=۱۴\end{cases} \Rightarrow ۱۶+۱۶+۱۴=۴۶$$

۲۲ گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

$$|A'\cap B'\cap C'|=|S|-|A\cup B\cup C|$$
$$=|S|-(|A|+|B|+|C|-|A\cap B|-|A\cap C|-|B\cap C|+|A\cap B\cap C|)$$
$$|A'\cap B'\cap C'|=۹\times۹\times۸\times۷-۳\times۸\times۸\times۷\times۱+۳\times۷\times۷\times۱\times۱-۶\times۱\times۱\times۱$$
$$|A'\cap B'\cap C'|=۴۵۳۶-۱۳۴۴+۱۴۷-۶=۳۳۳۳$$

۲۳ گزینه ۲ پاسخ صحیح است. شرط گفته شده بیان می‌کند، هر عضو از مجموعه‌ی B، نظیر عضوی از A باشد، به زبان دیگر تابع پوشا باشد. تعداد تابع‌های پوشا ازمجموعه‌ی n عضوی به ۳ عضوی از رابطه‌ی $۳^n-۳\times۲^n+۳$ به دست می‌آید، پس داریم:

$$n=۵\Rightarrow ۳^۵-۳\times۲^۵+۳=۲۴۳-۹۶+۳=۱۵۰$$

۲۴ گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$$\underset{\substack{\uparrow \\ \text{یکی از دانش آموزان را انتخاب می کنیم}}}{\binom{۴}{۱}}\times \underset{\substack{\uparrow \\ \text{اولیای او را برمی داریم}}}{۱}\times \underset{\substack{\uparrow \\ \text{انتخاب سه دانش آموز دیگر}}}{\binom{۳}{۲}}\times \overset{\substack{\text{انتخاب زوج} \\ \downarrow}}{\binom{۳}{۲}}\times \underbrace{\binom{۲}{۱}\times\binom{۲}{۱}}_{\text{از دو زوج یکی}}\times \underset{\substack{\uparrow \\ \text{جایگشت ۶ نفر}}}{۶!}$$

$$۴\times۳\times۳\times۲^۲\times۷۲۰=۲^۸\times۳^۴\times۵$$

۲۵ گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$$\mathrm{A}\times \overset{\overset{\text{مربع کامل}}{\uparrow}}{\mathrm{B}} = ۲۴۵ = ۵\times ۴۹$$

$$A=۵ \rightarrow x_{۱}^{۲}+x_{۲}+x_{۳}=۵ \xrightarrow{x_{۱}=۱} x_{۲}+x_{۳}=۴ \Rightarrow \text{۳ جواب}$$

$$B=۴۹ \rightarrow \frac{۶}{y_{۱}}+y_{۲}+y_{۳}=۷ \rightarrow y_{۱}=۶ \xrightarrow{y_{۱}=\text{۲ یا ۳ یا ۶}} \begin{cases} y_{۲}+y_{۳}=۶ \Rightarrow \text{۵ جواب} \\ y_{۲}+y_{۳}=۴ \Rightarrow \text{۳ جواب} \\ y_{۲}+y_{۳}=۵ \Rightarrow \text{۴ جواب} \end{cases}$$

$$۳\times(۵+۳+۴)=۳۶$$

۲۶

$$|F|=۱۵, |V|=۱۱, |B|=۹, |F\cap V|=۵, |B\cap V|=۶, |F\cap B|=۳$$

$$\Rightarrow |F\cap B\cap V|=۳$$

$$\text{فقط فوتبال بازی کنند.} = |F|-|F\cap V|-|F\cap B|+|F\cap B\cap V| = ۱۵-۵-۳+۳=۱۰$$

$$\text{فقط والیبال بازی کنند.} = |V|-|F\cap V|-|V\cap B|+|F\cap B\cap V| = ۱۱-۵-۶+۳=۳$$

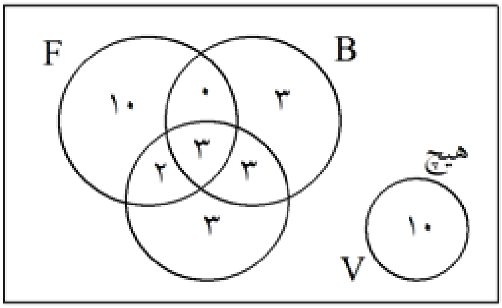
$$\text{فقط بسکتبال بازی کنند.} = |B|-|F\cap B|-|V\cap B|+|F\cap B\cap V| = ۹-۳-۶+۳=۳$$

$$\Rightarrow \text{ج} = ۱۰+۳+۳=۱۶ \ (\text{ص ۸۳})$$

روش دوم:

از نمودار ون کمک می‌گیریم. کافی است از اشتراک ۳ تایی شروع کنیم و به سمت اشتراک ۲ تایی و اعضای کلی مجموعه‌ها برسیم.

$\mathrm{M}=۳۴$



$$\xrightarrow{\text{فقط یکی}} ۱۰+۳+۳=۱۶$$

۲۷ گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

$$x_۱ = ۰ \Rightarrow \begin{cases} x_۲ = ۰ \Rightarrow x_۳ + x_۴ + x_۵ = ۴ \rightarrow \binom{۶}{۲} = ۱۵ \\ x_۲ = ۱ \Rightarrow x_۳ + x_۴ + x_۵ = ۳ \rightarrow \binom{۵}{۲} = ۱۰ \\ x_۲ = ۴ \Rightarrow x_۳ + x_۴ + x_۵ = ۲ \rightarrow \binom{۴}{۲} = ۶ \\ x_۲ = ۹ \Rightarrow x_۳ + x_۴ + x_۵ = ۱ \rightarrow \binom{۳}{۲} = ۳ \\ x_۲ = ۱۶ \Rightarrow x_۳ + x_۴ + x_۵ = ۰ \rightarrow \binom{۲}{۲} = ۱ \end{cases}$$

$$x_۱ = ۱ \Rightarrow \begin{cases} x_۲ = ۰ \Rightarrow x_۳ + x_۴ + x_۵ = ۲ \rightarrow ۶ \\ x_۲ = ۱ \Rightarrow x_۳ + x_۴ + x_۵ = ۱ \rightarrow ۳ \\ x_۲ = ۴ \Rightarrow x_۳ + x_۴ + x_۵ = ۰ \rightarrow ۱ \end{cases}$$

$$x_۱ = ۲ \Rightarrow \sqrt{x_۲} + x_۳ + x_۴ + x_۵ = ۰ \rightarrow ۱$$

پس ۴۶ جواب دارد.

۲۸ گزینه ۱ پاسخ صحیح است. $x_۱ + x_۲ + x_۳ = ۲۰$

$$\text{تعداد جواب‌های صحیح و نامنفی} = \binom{۲۰+۳-۱}{۳-۱} = \binom{۲۲}{۲} = \frac{۲۲\times ۲۱}{۲} = ۱۱\times ۲۱ = ۲۳۱$$

$$x_۱ = x_۲ = ۰, x_۳ = ۲۰$$

$$x_۱ = x_۲ = ۱\,, \; x_۳ = ۱۸$$

$$\vdots$$

$$x_۱ = x_۲ = ۱۰\,, \; x_۳ = ۰$$

در ۱۱ حالت فوق $x_۱ = x_۲$ است پس در $۲۳۱ - ۱۱ = ۲۲۰$ حالت $x_۱ \neq x_۲$ است.

در نصف حالات $x_۲ > x_۱$ و در نصف دیگر $x_۱ > x_۲$ است، پس تعداد جواب‌ها برابر است با:

$$\frac{۲۲۰}{۲} = ۱۱۰$$

۲۹ گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$k\binom{n}{k} = k\times\frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{k\times n!}{k(k-۱)!(n-k)!} = \frac{n!}{(k-۱)!(n-k)!}$$

$$= n\times\frac{(n-۱)!}{(k-۱)!(n-k)!} = n\binom{n-۱}{k-۱} \Rightarrow \sum_{\kappa=۰}^{n} k\binom{n}{k} = \sum_{\kappa=۱}^{n} n\binom{n-۱}{k-۱} = n\sum_{\kappa=۱}^{n}\binom{n-۱}{k-۱}$$

$$= n\times\left[\binom{n-۱}{۰} + \binom{n-۱}{۱} + \cdots + \binom{n-۱}{n-۱}\right] = n\times ۲^{n-۱}$$

۳۰ گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

$$x_۱ + x_۲ + x_۳ \in \mathrm{N} \Rightarrow \frac{۱۴}{x_۳} \in \mathrm{N} \Rightarrow x_۳ = ۱ \text{ یا } ۲ \text{ یا } ۷ \text{ یا } ۱۴$$

$$x_۳ = ۱ \Rightarrow x_۱ + x_۲ + ۱ = ۱۴ \Rightarrow x_۱ + x_۲ = ۱۳ \Rightarrow \text{تعداد جواب ها} = \binom{۱۲}{۱} = ۱۲$$

$$x_۳ = ۲ \Rightarrow x_۱ + x_۲ + ۲ = ۷ \Rightarrow x_۱ + x_۲ = ۵ \Rightarrow \text{تعداد جواب ها} = \binom{۴}{۱} = ۴$$

$$x_۳ = ۷ \Rightarrow x_۱ + x_۲ + ۷ = ۲ \Rightarrow x_۱ + x_۲ = -۵ \text{ جواب ندارد}$$

$$x_۳ = ۱۴ \Rightarrow x_۱ + x_۲ + ۱۴ = ۱ \Rightarrow x_۱ + x_۲ = -۱۳ \text{ جواب ندارد}$$

$$\Rightarrow \text{تعداد کل حالات} = ۱۲ + ۴ = ۱۶$$

۳۱ گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$|A' \cap B'| = \overbrace{|M|}^{\text{مجموعه مادر}} - |A \cup B| = |M| - |A| - |B| + |A \cap B|$$

$$A : \boxed{x_۱ \geq ۴}\ ,\ B : \boxed{x_۲ \geq ۴}$$

$$\boxed{x_۱ < ۴} \cap \boxed{x_۲ < ۴} = \boxed{x_i \geq ۰} - \boxed{x_۱ \geq ۴} - \boxed{x_۲ \geq ۴} + \boxed{\begin{matrix} x_۱ \geq ۴ \\ x_۲ \geq ۴ \end{matrix}}$$

$$= \binom{۱۳}{۳} - \binom{۹}{۳} - \binom{۹}{۳} + \binom{۵}{۳} = ۲۸۶ - ۸۴ - ۸۴ + ۱۰ = ۱۲۸$$

نکته: تعداد جواب‌های صحیح و نامنفی معادله‌ی $x_۱ + x_۲ + ... + x_m = n$ برابر است با $\binom{n+m-۱}{m-۱}$.

۳۲ گزینه ۲ پاسخ صحیح است. پرچم‌های چین را C، C، C و C، پرچم‌های ترکیه را T، T و T می‌گیریم. تعداد جایگشت‌های این اشیا برابر $\frac{۷!}{۳!۴!}$ می‌شود.

$$-C-C-C-C-T-T-T$$

حالا پرچم‌های ایران بین این پرچم‌ها و در دوتا از ۸ جای خالی قرار می‌دهیم به $\binom{۸}{۲}$ روش دو جای خالی را انتخاب و پرچم‌های ایران را در آن‌جا نصب می‌کنیم، پس تعداد کل حالت‌های قرار دادن پرچم‌ها می‌شود:

$$\frac{۷!}{۳!۴!} \times \binom{۸}{۲} = ۳۵ \times ۲۸ = ۹۸۰$$

۳۳ گزینه ۲ پاسخ صحیح است. باید $x_۱$ را حالت‌بندی کنیم، چون متغیرها طبیعی هستند، $x_۱$ مربع کامل بوده و حالت‌های زیر به‌وجود می‌آید:

$$۱)\ x_۱ = ۱ \Rightarrow x_۲ + x_۳ < ۵ \xrightarrow[\text{را اضافه کنیم.}]{\text{متغیر طبیعی } x_۴} x_۲ + x_۳ + x_۴ = ۵$$

تعداد جواب‌های طبیعی این معادله برابر $۶ = \binom{۴}{۲} = \binom{n-۱}{k-۱}$ تا می‌شود.

$$۲)\ x_۱ = ۴ \Rightarrow x_۲ + x_۳ < ۴ \xrightarrow[\text{را اضافه کنیم.}]{\text{متغیر طبیعی } x_۴} x_۲ + x_۳ + x_۴ = ۴ \xrightarrow{\text{طبیعی}} \binom{۳}{۲} = ۳$$

$$۳)\ x_۱ = ۹ \Rightarrow x_۲ + x_۳ < ۳ \Rightarrow x_۲ + x_۳ + x_۴ = ۳ \xrightarrow{\text{طبیعی}} \binom{۳-۱}{۳-۱} = ۱$$

تعداد جواب‌های طبیعی این معادله نیز برابر $۱ = \binom{۲}{۲}$ می‌شود.

پس در کل $۱۰ = ۱ + ۳ + ۶$ جواب طبیعی به‌وجود می‌آید.

۳۴ گزینه ۲ پاسخ صحیح است. با توجه به اصول شمول و عدم شمول داریم:

$$|S| = \frac{۸!}{۲!\times ۲!\times ۲!}$$

$$|A| = \frac{۷!}{۲!\times ۲!} \qquad ۵,۴,۳,۳,۲,۲\ \boxed{۱۱}$$

$$|B| = \frac{۷!}{۲!\times ۲!} \qquad ۵,۴,۳,۳,۱,۱\ \boxed{۲۲}$$

$$|C| = \frac{۷!}{۲!\times ۲!} \qquad ۵,۴,۲,۲,۱,۱\ \boxed{۳۳}$$

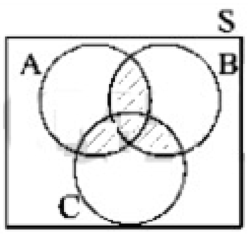
$$|A\cap B| = \frac{۶!}{۲!} \qquad ۵,۴,۳,۳\ \boxed{۲۲}\ \boxed{۱۱}$$

$$|A\cap C| = |B\cap C| = \frac{۶!}{۲!}$$

$$|A\cap B\cap C| = ۵! \qquad ۵,۴\ \boxed{۳۳}\ \boxed{۲۲}\ \boxed{۱۱}$$

$$|\overline{A}\cap\overline{B}\cap\overline{C}| = \frac{۸!}{(۲!)^۳} - ۳\times\frac{۷!}{(۲!)^۲} + ۳\times\frac{۶!}{۲!} - ۵! = ۲۲۲۰$$

۳۵ گزینه ۳ پاسخ صحیح است. توجه: نمایش حداقل دو رشته‌ی ورزشی، قسمت هاشور خورده نمودار زیر است:



$$|\overline{A}\cap\overline{B}\cap\overline{C}| = |S| - |A| - |B| - |C| + |A\cap B| + |B\cap C| + |A\cap C| - |A\cap B\cap C|$$

$$\Rightarrow ۲ = ۳۴ - ۱۵ - ۱۸ - ۱۶ + ۷ + ۴ + ۸ - |A\cap B\cap C|$$

$$\Rightarrow |A\cap B\cap C| = ۲$$

حداقل ۲ رشته‌ی ورزشی $= |A\cap B| + |A\cap C| + |B\cap C| - ۲\,|A\cap B\cap C|$

$$= ۷ + ۸ + ۴ - ۲\times ۲ = ۱۵$$

۳۶ گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$B=\{۱,۲,۳\}$ $\qquad$ $f=\{(۱,-),(۲,-),\cdots,(۶,-)\}$

کل توابع : ۳لا ۳لا ۳لا ۳لا ۳لا ۳لا $=۳^۶=۷۲۹$

غیر پوشا : $n(\bar{۱}\cup\bar{۲}\cup\bar{۳})=۲^۶+۲^۶+۲^۶-۱^۶-۱^۶-۱^۶+۰=۱۸۹$

$\Rightarrow$ پوشا : $۷۲۹-۱۸۹=۵۴۰$

۳۷ گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

تعداد اعداد شش رقمی که با ارقام ۱ و ۲ و ۳ می‌توان ساخت : S

$|S|=۳\times۳\times۳\times۳\times۳\times۳=۳^۶$

$A=\{\text{شش رقمی فاقد رقم ۱}\}$

$B=\{\text{شش رقمی فاقد رقم ۲}\}$

$C=\{\text{شش رقمی فاقد رقم ۳}\}$

$|A|=|B|=|C|=۲^۶$

$|A\cap B|=|A\cap C|=|B\cap C|=۱$ و $|A\cap B\cap C|=۰$

$|\overline{A}\cap\overline{B}\cap\overline{C}|=|S|-(\,|A|+|B|+|C|-|A\cap B|-|A\cap C|-|B\cap C|+|A\cap B\cap C|\,)$

$=۳^۶-(۳\times۲^۶-۳)=۷۲۹-۱۸۹=۵۴۰$

۳۸ گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$$n(۲\cap(۳\cap ۵)')=n(۲-(۳\cap ۵))=n(۲)-n\underbrace{(۲\cap(۳\cap ۵))}_{\text{ضرب ۲ و ۳ و ۵ که مضرب ک م م آنهاست}}$$

بر ۲ بخشپذیر

بر ۳ و ۵ بخشپذیر نباشد

$$=\left(\left[\frac{۹۹۹}{۲}\right]-\left[\frac{۹۹}{۲}\right]\right)-\left(\left[\frac{۹۹۹}{۳۰}\right]-\left[\frac{۹۹}{۳۰}\right]\right)=۴۵۰-۳۰=۴۲۰$$

۳۹ گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

روش اول: بهتر است مسئله را با روش متمم حل کنیم به این صورت که:

تعداد رقم‌های به کاررفته یکسان نباشد = تعداد رقم‌های به کاررفته یکسان باشد - کل کدهای چهاررقمی

$=P(۷,۴)-\binom{۳}{۲}\times\binom{۴}{۲}\times۴!=\frac{۷!}{۳!}-۳\times۶\times۲۴=۷\times۶\times۵\times۴-۳\times۶\times۲۴$

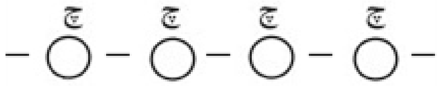
$=۲۴(۳۵-۱۸)=۲۴\times۱۷=۴۰۸$

روش دوم:

(۳ رقم از A و ۱ رقم از B) یا (۱ رقم از A و ۳ رقم از B) یا (۰ رقم از A و ۴ رقم از B)

$\Rightarrow$ کل حالات $=\left(\binom{۳}{۰}\binom{۴}{۴}+\binom{۳}{۱}\binom{۴}{۳}+\binom{۳}{۳}\binom{۴}{۱}\right)\times۴!=(۱+۱۲+۴)\times۲۴=۴۰۸$

۴۰ گزینه ۴ پاسخ صحیح است. چنگال‌ها را می‌چینیم تا نقش دیوار داشته باشند. سپس در ۵ مکان ایجاد شده قاشق‌ها را می‌چینیم.



$$\Rightarrow \binom{۵}{۴}\times ۴!\times ۴! = ۵\times ۴!\times ۴!$$

۴۱ $۱\leq j\leq ۳ \quad A_j=\{f:A\to B | f(a_i)\neq b_j \quad ۱\leq i\leq ۴\}$

$A=\{a_۱,a_۲,a_۳,a_۴\}, B=\{b_۱,b_۲,b_۳\}$

$|S|=۳^۴, |A_i|=۲^۴, |A_i\cap A_j|=۱^۴, |A_۱\cap A_۲\cap A_۳|=۰$

$|\overline{A_۱\cup A_۲\cup A_۳}|=|S|-|A_۱\cup A_۲\cup A_۳|=۸۱-(۳\times ۱۶-۳\times ۱+۰)=۳۶$ (ص ۷۷)

۴۲ تعداد این حالت‌ها برابر است با تعداد توابع پوشا از یک مجموعه‌ی ۶ عضوی به یک مجموعه‌ی ۳ عضوی.

با فرض $X=\{x_۱,x_۲,x_۳,x_۴,x_۵,x_۶\}$ و $Y=\{y_۱,y_۲,y_۳\}$، تعداد توابع پوشا از X به Y را محاسبه می‌کنیم:

$S=$ مجموعه‌ی تمام توابع قابل ساخت از X به Y $\Rightarrow |S|=۳^۶$

$A=$ مجموعه‌ی تمام توابعی که برد آن‌ها $\{y_۲,y_۳\}$ می‌باشد (بُرد فاقد عضو $y_۱$ است). $\Rightarrow |A|=۲^۶$

$B=$ مجموعه‌ی تمام توابعی که برد آن‌ها $\{y_۱,y_۳\}$ می‌باشد. (بُرد فاقد عضو $y_۲$ است). $\Rightarrow |B|=۲^۶$

$C=$ مجموعه‌ی تمام توابعی که برد آن‌ها $\{y_۱,y_۲\}$ می‌باشد (بُرد فاقد عضو $y_۳$ است). $\Rightarrow |C|=۲^۶$

$\Rightarrow |A\cap B|=|B\cap C|=|C\cap A|=۱, |A\cap B\cap C|=۰$

$$\xrightarrow{|A\cup B\cup C|=|A|+|B|+|C|-|A\cap B|-|B\cap C|-|C\cap A|+|A\cap B\cap C|}$$

$|A\cup B\cup C|=۳\times ۲^۶-۳\times ۱+۰ \Rightarrow |\overline{A}\cap\overline{B}\cap\overline{C}|=|\overline{A\cup B\cup C}|$

$=|S|-|A\cup B\cup C|=۳^۶-(۳\times ۲^۶-۳\times ۱+۰)=۵۴۰$

۴۳ گزینه ۴ پاسخ صحیح است. عددی نسبت به ۱۶۵ اول است که هیچ‌یک از عامل‌های ۳، ۵ و ۱۱ را نداشته باشد.

$۱۶۵=۳\times ۵\times ۱۱$

$A=$ مجموعه‌ی اعداد دورقمی مضرب ۳ $\Rightarrow |A|=\left[\frac{۹۹}{۳}\right]-\left[\frac{۹}{۳}\right]=۳۳-۳=۳۰$

$B=$ مجموعه‌ی اعداد دورقمی مضرب ۵ $\Rightarrow |B|=\left[\frac{۹۹}{۵}\right]-\left[\frac{۹}{۵}\right]=۱۹-۱=۱۸$

$C=$ مجموعه‌ی اعداد دورقمی مضرب ۱۱ $\Rightarrow |C|=\left[\frac{۹۹}{۱۱}\right]-\left[\frac{۹}{۱۱}\right]=۹$

$|A\cap B|=\left[\frac{۹۹}{۱۵}\right]=۶, |A\cap C|=\left[\frac{۹۹}{۳۳}\right]=۳, |B\cap C|=\left[\frac{۹۹}{۵۵}\right]=۱$

$|A\cap B\cap C|=۰, |S|=۹۰$

$|\overline{A}\cap\overline{B}\cap\overline{C}|=|S|-|A|-|B|-|C|+|A\cap B|+|B\cap C|+|A\cap C|-|A\cap B\cap C|$

$=۹۰-۳۰-۱۸-۹+۶+۳+۱-۰=۴۳$

۴۴ گزینه ۳ پاسخ صحیح است. اگر A ، B و C زیرمجموعه‌هایی از مجموعهٔ اعداد طبیعی ۱ تا ۱۰۰ باشند که به‌ترتیب بر ۲، ۳ و ۵ بخش‌پذیر هستند، آنگاه داریم:

$$\left|A\cap\overline{B}\cap\overline{C}\right|=|A-(B\cup C)|=|\mathrm{A}|-|A\cap(B\cup C)|$$
$$=|\mathrm{A}|-|(A\cap B)\cup(A\cap C)|$$
$$=|\mathrm{A}|-|A\cap B|-|A\cap C|$$
$$=\left[\frac{۱۰۰}{۲}\right]-\left[\frac{۱۰۰}{۶}\right]-\left[\frac{۱۰۰}{۱۰}\right]+\left[\frac{۱۰۰}{۳۰}\right]=۵۰-۱۶-۱۰+۳=۲۷$$

۴۵ گزینه ۴ پاسخ صحیح است. اگر A، B و C زیرمجموعه هایی از مجموعه اعداد طبیعی ۱ تا ۱۰۰ باشند که اعضای آن‌ها به‌ترتیب بر ۲، ۳ و ۵ بخش‌پذیر هستند، تعداد اعداد طبیعی از ۱ تا ۱۰۰ که بر ۲ بخش‌پذیر بوده ولی بر ۳ و ۵ بخش‌پذیر نباشند، برابر است با:

$$|A-(B\cup C)|=|\mathrm{A}|-|A\cap(B\cup C)|$$
$$=|\mathrm{A}|-(\,|A\cap B|+|A\cap C|-|A\cap B\cap C|\,)=|\mathrm{A}|-|A\cap B|-|A\cap C|+|A\cap B\cap C|$$

به طریق مشابه می توان تعداد اعدادی که فقط بر ۳ یا فقط بر ۵ بخش‌پذیر هستند را به دست آورید، بنابراین تعداد اعداد طبیعی از ۱ تا ۱۰۰ که تنها بر یکی از اعداد ۲، ۳ یا ۵ بخش‌پذیرند برابر است با:

$$|\mathrm{A}|+|\mathrm{B}|+|\mathrm{C}|-۲(\,|A\cap B|+|A\cap C|+|B\cap C|\,)+۳\,|A\cap B\cap C|$$

حال مقدار هر یک از عبارت‌ها را به دست می‌آوریم:

$$|\mathrm{A}|=\left[\frac{۱۰۰}{۲}\right]=۵۰ \text{ و } |\mathrm{B}|=\left[\frac{۱۰۰}{۳}\right]=۳۳ \text{ و } |\mathrm{C}|=\left[\frac{۱۰۰}{۵}\right]=۲۰$$
$$|A\cap B|=\left[\frac{۱۰۰}{۶}\right]=۱۶ \text{ و } |A\cap C|=\left[\frac{۱۰۰}{۱۰}\right]=۱۰$$
$$|B\cap C|=\left[\frac{۱۰۰}{۱۵}\right]=۶ \text{ و } |A\cap B\cap C|=\left[\frac{۱۰۰}{۳۰}\right]=۳$$

در نتیجه تعداد اعضای مجموعهٔ مورد نظر برابر است با:

$$(۵۰+۳۳+۲۰)-۲(۱۶+۱۰+۶)+۳\times۳=۱۰۳-۶۴+۹=۴۸$$

۴۶ گزینه ۲ پاسخ صحیح است. اگر a و b دو عضو از اعضای مجموعهٔ A باشند، آنگاه می‌توان آنها را به صورت $a=۲^{\alpha_۱}\times۳^{\beta_۱}\times۵^{\gamma_۱}$ و $b=۲^{\alpha_۲}\times۳^{\beta_۲}\times۵^{\gamma_۲}$ نمایش داد. در این‌صورت حاصل ضرب آنها به‌صورت $\mathrm{ab}=۲^{\alpha_۱+\alpha_۲}\times۳^{\beta_۱+\beta_۲}\times۵^{\gamma_۱+\gamma_۲}$ بوده و زمانی مربع کامل است که تمامی توان‌های آن زوج باشد و این موضوع در حالتی ممکن است که توان‌های پایه‌های مشابه در a و b، همزمان هر دو زوج یا فرد باشند. چون سه پایهٔ مختلف وجود دارد پس در مجموع $۲\times۲\times۲=۸$ حالت مختلف برای زوج یا فرد بودن توان‌ها در هر کدام از اعداد a یا b وجود دارد. در نتیجه با انتخاب ۹ عضو از مجموعهٔ A، قطعاً حداقل دو عضو وجود دارند که توان‌های هر سه پایه از نظر زوج یا فرد بودن، دقیقاً مانند یکدیگر بوده و در نتیجه حاصل ضرب آنها مربع کامل است.

۴۷ گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

روش اول: برای هر زیرمجموعه از مجموعه‌ی داده‌شده می‌توان یک کد هشت‌رقمی نظیر کرد که شامل ارقام صفر و یک است. رقم ۱ بیانگر وجود عضو و رقم صفر بیانگر عدم وجود عضو است، بنابراین زیرمجموعه‌های سه‌عضوی مجموعه‌ی A، کدهای هشت‌رقمی می‌باشند که شامل ۵ رقم صفر و ۳ رقم یک می‌باشند. در این مسئله شرط متوالی نبودن اعضا به این معناست که هیچ دو رقم ۱، کنار هم نباشند، بنابراین ۵ رقم صفر را به صورت زیر کنار هم قرار می‌دهیم:

×⊙×⊙×⊙×⊙×⊙×

سپس از بین جاهایی که با $\times$ مشخص شده است، باید ۳ جایگاه را انتخاب و ۱ در آن‌ها قرار داد که حاصل $۲۰ = \binom{۶}{۳}$ می‌شود.

روش دوم: تعداد زیرمجموعه‌های k عضوی مجموعه‌ی $\{۱, ۲, \cdots, n\}$ که هیچ دو عضو آن متوالی نباشند، برابر با $\binom{n-k+۱}{k}$ است. در این سؤال $n = ۸$ و $k = ۳$ می‌باشد که حاصل $\binom{۶}{۳}$ می‌شود، که همان ۲۰ است.

۴۸ گزینه ۲ پاسخ صحیح است. کافی است ابتدا جواب‌های معادلهٔ $x_۱ + x_۲ + x_۳ = ۷$ با شرط $x_۱ = x_۲$ را پیدا کنیم، تا از طریق آن جواب‌های معادله با $x_۱ \neq x_۲$ را پیدا کرده و بر ۲ تقسیم کنیم.

$$x_۱ = x_۲ \Rightarrow ۲x_۱ + x_۳ = ۷ \Rightarrow x_۱ = ۰, ۱, ۲, ۳$$

به ازای هر مقدار $x_۱$، یک و تنها یک مقدار برای $x_۳$ پیدا می شود، پس تعداد جواب‌های معادله با این شرایط برابر ۴ است. حال تعداد کل جواب‌ها را می‌یابیم.

$$x_۱ + x_۲ + x_۳ = ۷$$

$$\Rightarrow \text{تعداد کل جواب‌های صحیح و نامنفی} = \binom{۷+۳-۱}{۳-۱} = \binom{۹}{۲} = ۳۶$$

پس در $۳۶ - ۴ = ۳۲$ حالت مقدار $x_۱$ با $x_۲$ فرق می‌کند. بنا به تقارن مسئله در نصف این حالات $x_۱ < x_۲$ و در نصف دیگر حالات $x_۲ < x_۱$ است، بنابراین داریم:

$$\text{تعداد کل جواب‌های مطلوب} = \frac{۳۶-۴}{۲} = \frac{۳۲}{۲} = ۱۶$$

$$۰ \leqslant x_۱ - ۶ < ۳ \ ; \ y_۱ = x_۱ - ۶ \Rightarrow x_۱ = y_۱ + ۶ \ , ۰ \leqslant y_۱ < ۳$$

$$۰ \leqslant x_۲ - ۵ < ۵ \ ; \ y_۲ = x_۲ - ۵ \Rightarrow x_۲ = y_۲ + ۵ \ , ۰ \leqslant y_۲ < ۵$$

$$\Rightarrow y_۱ + ۶ + y_۲ + ۵ + x_۳ = ۲۵ \Rightarrow y_۱ + y_۲ + x_۳ = ۱۴ \ (*)$$

$|A_۱|$: با شرط $(*)$ تعداد جواب های صحیح نامنفی : $\binom{۱۳}{۲}$

$y_۱ \geqslant ۳$

$|A_۲|$: با شرط $(*)$ تعداد جواب های صحیح نامنفی : $\binom{۱۱}{۲}$

$y_۲ \geqslant ۵$

$|S|$: با شرط $(*)$ تعداد جواب های صحیح نامنفی : $\binom{۱۶}{۲}$

معادله $*$

$|A_۱ \cap A_۲|$: با شرط $(*)$ تعداد جواب های صحیح نامنفی : $\binom{۸}{۲}$

شرط $y_۱ \geqslant ۳ \, , y_۲ \geqslant ۵$

$$|A'_۱ \cap A'_۲| = |(A_۱ \cup A_۲)'| = |S| - |(A_۱ \cup A_۲)'| = \binom{۱۶}{۲} - \binom{۱۳}{۲} - \binom{۱۱}{۲} + \binom{۸}{۲} =$$

$$۱۲۰ - ۷۸ - ۵۵ + ۲۸ = ۱۵$$

۵۰ می‌خواهیم بین ۴ راس متمایز گراف مشخص کنیم به طوری که هیچ راس درجه‌ی صفر وجود نداشته باشد.

$$\text{کل گراف} = ۲^{\binom{۴}{۲}} = ۶۴$$

گراف‌های غیرقابل قبول، راس A منفرد باشد یا راس B منفرد باشد یا راس C یا راس D منفرد باشد:

$$n(A \cup B \cup C \cup D) = ۴ \times ۲^{\binom{۳}{۲}} - ۶ \times ۲^{\binom{۲}{۲}} + ۴ \times ۱ - ۱ = ۲۳$$

$$\text{جواب نهایی} = ۶۴ - ۲۳ = ۴۱$$

پاسخنامه کلیدی

۱	۱	**۲**	۳	۴
۲	۱	**۲**	۳	۴
۳	۱	۲	۳	**۴**
۴	۱	۲	**۳**	۴
۵	**۱**	۲	۳	۴
۶	۱	۲	۳	**۴**
۷	۱	۲	**۳**	۴
۸	۱	۲	**۳**	۴
۹	۱	۲	**۳**	۴
۱۰	۱	**۲**	۳	۴
۱۱	۱	۲	**۳**	۴
۱۲	۱	۲	۳	**۴**
۱۳	۱	**۲**	۳	۴
۱۴	**۱**	۲	۳	۴
۱۵	**۱**	۲	۳	۴
۱۶	۱	۲	**۳**	۴
۱۷	۱	۲	۳	**۴**
۱۸	۱	۲	۳	**۴**
۱۹	۱	**۲**	۳	۴
۲۰	۱	۲	**۳**	۴
۲۱	۱	۲	۳	**۴**
۲۲	۱	۲	۳	**۴**
۲۳	۱	**۲**	۳	۴
۲۴	۱	**۲**	۳	۴
۲۵	۱	**۲**	۳	۴
۲۷	۱	۲	۳	**۴**
۲۸	**۱**	۲	۳	۴
۲۹	**۱**	۲	۳	۴
۳۰	۱	۲	۳	**۴**
۳۱	**۱**	۲	۳	۴
۳۲	۱	**۲**	۳	۴
۳۳	۱	**۲**	۳	۴
۳۴	۱	**۲**	۳	۴
۳۵	۱	۲	**۳**	۴
۳۶	**۱**	۲	۳	۴
۳۷	۱	۲	۳	**۴**
۳۸	۱	**۲**	۳	۴
۳۹	۱	۲	۳	**۴**
۴۰	۱	۲	۳	**۴**
۴۳	۱	۲	۳	**۴**
۴۴	۱	۲	**۳**	۴
۴۵	۱	۲	۳	**۴**
۴۶	۱	**۲**	۳	۴
۴۷	۱	**۲**	۳	۴
۴۸	۱	**۲**	۳	۴