# فصل اول : ماتریس‌ها و کاربردها

## حل و بحث دستگاه دو معادله و دو مجهول

متوسط- ۱۳۹۸

۱ - در دستگاه $\begin{cases} ax+by=۲ \\ cx+dy=-۱ \end{cases}$ معکوس ماتریس ضرایب مجهولات به‌صورت $\begin{bmatrix} -۱ & ۰ \\ ۱ & ۲ \end{bmatrix}$ است. $x+y$ را به‌دست آورید.

## وارون یک ماتریس

سخت- ۱۳۹۸

۲ - اگر ماتریس $A$ وارون‌پذیر باشد، ثابت کنید.

$$(A^{-۱}BA)^n = A^{-۱}B^nA$$

## حل و بحث دستگاه دو معادله و دو مجهول

۳ - دستگاه معادلات $\begin{cases} ۲x-y=۴ \\ -۴x+۲y=۲ \end{cases}$ را در نظر بگیرید. آیا می‌توان از ماتریس وارون برای حل این دستگاه استفاده کرد؟ توضیح دهید.

متوسط- ۱۳۹۸

## دترمینان و کاربردها

متوسط- ۱۳۹۸

۴ - اگر $A=\begin{bmatrix} ۳ & \lvert A\rvert \\ ۴\lvert A\rvert & ۱ \end{bmatrix}$ مقدار $\lvert A\rvert$ را به دست آورید.

## وارون یک ماتریس

۵- اگر $A$ وارون‌پذیر و $A^{۲} = A$ باشد، وارون $(I - ۳A)$ را بیابید.

متوسط- ۱۳۹۸

۶- اگر $A^{۳} = \begin{bmatrix} ۳ & ۲ \\ ۹ & -۳ \end{bmatrix}$ حاصل دترمینان $(۲A)^{-۱}$ را به دست آورید.

متوسط- ۱۳۹۸

۷- اگر ماتریس $A = \begin{bmatrix} ۲\,|A| & |A| \\ ۵\,|A| & -۳ \end{bmatrix}$ وارون‌پذیر باشد، معکوس $A$ را بیابید.

متوسط- ۱۳۹۸

۸- اگر $A$ و $B$ دو ماتریس مربعی وارون‌پذیر از مرتبهٔ $n$ باشند. ثابت کنید:

$$\left|A^{-۱} + B^{-۱}\right| = \frac{|A+B|}{|AB|}$$

سخت- ۱۳۹۸

## ماتریس‌ها و اعمال روی آن | ضرب ماتریس‌ها

۹- اگر $A = \begin{bmatrix} ۳ & ۵ \\ ۱ & ۲ \end{bmatrix}$ اعداد $m$ و $n$ و $r$ را طوری پیدا کنید به طوری که داشته باشیم $mA^{۲} + nA + rI = \overline{O}$.

متوسط- ۱۳۹۸

## وارون یک ماتریس

۱۰- اگر $A$ و $B$ وارون‌پذیر باشد و $AB = A + B$ ثابت کنید:

$$A^{-۱} + B^{-۱} = I$$

متوسط- ۱۳۹۸

متوسط- ۱۳۹۸

۱۱ - اگر $A$ و $B$ ماتریس‌های وارون‌پذیر و $A^{۲} = A$ و $B^{۲} = B$ باشد؛ آنگاه حاصل $(A+B)^{-۱}$ را به دست آورید.

## ماتریس‌ها و اعمال روی آن | ضرب ماتریس‌ها

سخت- ۱۳۹۸

۱۲ - اگر $A = \begin{bmatrix} ۱ & ۱ \\ ۱ & ۱ \end{bmatrix}$ و $(A+I)^{۶} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ حاصل $a-b$ را به دست آورید.

## دترمینان و کاربردها

متوسط- ۱۴۰۲

۱۳ - اگر $A$ ماتریسی $۳ \times ۳$ باشد و $|A| = ۵$، در این صورت حاصل $||A|A|$ را بیابید.

متوسط- ۳۰

۱۴ - اگر $A = \begin{bmatrix} ۱ & ۲ & ۳ \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} -۲ \\ -۱ \\ ۳ \end{bmatrix}$ در این‌صورت $|AB|$ و $|BA|$ را به دست آورید.

سخت- ۱۳۹۸

۱۵ - نشان دهید $\begin{vmatrix} x & y & ۱ \\ a & b & ۱ \\ c & d & ۱ \end{vmatrix} = ۰$ معادلهٔ خطی است که از نقاط $(a,b)$ و $(c,d)$ می‌گذرد.

## وارون یک ماتریس

متوسط- ۱۳۹۸

۱۶- اگر $A$ و $B$ ماتریس‌های وارون‌پذیر باشند و $B = {(A^{2})}^{-1}$ ثابت کنید.

$A^{-1} = AB$

۱۷- ماتریس مربعی $A$ در تساوی $2A^{2} - A + I = \bar{O}$ صدق می‌کند. ابتدا نشان دهید $A$ وارون‌پذیر است، سپس وارون $A$ را حساب کنید.

سخت- ۱۳۹۸

## دترمینان و کاربردها

سخت- ۱۳۹۸

۱۸- اگر $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ در این‌صورت اعداد حقیقی $a$ و $b$ و $c$ و $d$ را چنان بیابید که تساوی $|A|^{2} - 5|A| + 6 = 0$ برقرار باشد.

## وارون یک ماتریس

متوسط- ۱۳۹۸

۱۹- اگر $A$ و $B$ مربعی و وارون‌پذیر باشند، ثابت کنید:

$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

۲۰- اگر $A^{۲} = A$ و $m$ یک عدد حقیقی باشد، ثابت کنید: سخت- ۱۳۹۸

$$(I - mA)^{-۱} = I + \frac{m}{۱ - m} A$$

## دترمینان و کاربردها

۲۱- دترمینان ماتریس زیر را بیابید. متوسط- ۱۳۹۸

$$A = \begin{bmatrix} \begin{vmatrix} ۲ & ۳ \\ ۱ & ۲ \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} ۴ & ۲ \\ -۱ & ۱ \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} ۱ & ۵ \\ ۲ & ۱۱ \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} ۲ & -۳ \\ ۱ & ۵ \end{vmatrix} \end{bmatrix}$$

## ماتریس‌ها و اعمال روی آن | ضرب ماتریس‌ها

۲۲- اگر $A = \begin{bmatrix} ۲ & -۱ \\ ۱ & ۰ \end{bmatrix}$ ثابت کنید برای هر عدد طبیعی $n$ داریم: سخت- ۱۳۹۸

$$A^n = \begin{bmatrix} n+۱ & -n \\ n & -n+۱ \end{bmatrix}$$

۲۳- اگر $A = \begin{bmatrix} ۲ & ۱ \\ ۱ & ۰ \end{bmatrix}$ ماتریس $A^{۲۰}$ را به دست آورید. متوسط- ۱۳۹۸

۲۴- در ماتریس $A = \begin{bmatrix} ۱ & ۱ & ۱ & ۱ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۱ & ۱ & ۱ & ۱ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۰ \end{bmatrix}$ مجموع درایه‌های $A^{۱۰}$ را به‌دست آورید. متوسط- ۱۳۹۸

## دترمینان و کاربردها

متوسط- ۱۴۰۲

۲۵- اگر $A = \begin{bmatrix} ۵\,|A| & |A| \\ ۵ & ۴|A|^۲ \end{bmatrix}$ در این صورت حاصل $(۲ - |A|^۳)$ را بیابید.

## وارون یک ماتریس

متوسط- ۱۴۰۰

۲۶- اگر $۲A = \begin{bmatrix} |A| & -۴ \\ ۱ & |A| \end{bmatrix}$ باشد، در این صورت حاصل $|A^{-۱}|$ را بیابید.

## حل و بحث دستگاه دو معادله و دو مجهول

متوسط- ۱۴۰۰

۲۷- دستگاه مقابل را با استفاده از $A^{-۱}$ حل کنید.

$$\begin{cases} ۳x - ۵y = -۱ \\ ۲x + y = ۸ \end{cases}$$

### ماتریس‌ها و اعمال روی آن ضرب ماتریس‌ها

متوسط- ۱۳۹۸

۲۸- اگر $A=\begin{bmatrix} \circ & \frac{\sqrt{۳}}{۳} \\ -\frac{\sqrt{۳}}{۳} & ۲\frac{\sqrt{۳}}{۳} \end{bmatrix}$ باشد، مطلوبست $A^{۱\circ\circ}$.

### وارون یک ماتریس

سخت- ۱۳۹۸

۲۹- از رابطهٔ ماتریسی $\begin{bmatrix} ۲ & ۱ \\ -۱ & \circ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۲ & -۳ \\ -۳ & ۵ \end{bmatrix}A\begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ ۲ & ۳ \end{bmatrix}$، ماتریس $A$ را محاسبه کنید.

### ماتریس‌ها و اعمال روی آن ضرب ماتریس‌ها

متوسط- ۱۳۹۸

۳۰- اگر $A=\begin{bmatrix} -۱ & ۱ \\ ۱ & ۱ \end{bmatrix}$ باشد، ماتریس $A^{۱\circ\circ}$ را به دست آورید؟

## حل و بحث دستگاه دو معادله و دو مجهول

متوسط- ۱۳۹۸

۳۱- دستگاه $\begin{bmatrix} ۳x - ۴y = ۱ \\ -x + ۲y = ۱ \end{bmatrix}$ را با استفاده از ماتریس وارون حل کنید.

## ماتریس‌ها و اعمال روی آن ضرب ماتریس‌ها

متوسط- ۱۳۹۸

۳۲- اگر ماتریس‌های $A = \begin{bmatrix} x & y \\ ۲ & -۱ \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} ۳ & ۴ \\ ۴ & ۳ \end{bmatrix}$ تعویض‌پذیر باشد، حاصل $\begin{bmatrix} ۲ \\ ۲ \\ -x \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} x & ۲ & -y \end{bmatrix}$ را بیابید.

## دترمینان و کاربردها

متوسط- ۱۳۹۸

۳۳- اگر $A$ ماتریسی $۳ \times ۳$ باشد و $|A| = -۲$، حاصل $||A| \cdot A|$ را بیابید.

## حل و بحث دستگاه دو معادله و دو مجهول

متوسط- ۱۴۰۲

۳۴- دستگاه معادلات خطی تشکیل دهید که $A = \begin{bmatrix} ۳ & -۵ \\ ۴ & ۲ \end{bmatrix}$ ماتریس ضرایب دستگاه بوده و $B = \begin{bmatrix} ۱ \\ ۱۰ \end{bmatrix}$ ماتریس معلومات آن باشد و سپس جواب دستگاه را با استفاده از $A^{-۱}$ بیابید.

## وارون یک ماتریس

سخت- ۲۳

۳۵- قضیهٔ یکتایی وارون: وارون هر ماتریس مربعی در صورت وجود، منحصربه‌فرد است.

## ماتریس‌ها و اعمال روی آن  ضرب ماتریس‌ها

۳۶- اگر $A$ و $B$ ماتریس‌های ۳ × ۳ و تعویض‌پذیر باشند، آنگاه ثابت کنید:

متوسط- ۱۴۰۲

الف) $(A+B)^{2} = A^{2} + 2AB + B^{2}$

ب) $(A-B)(A+B) = A^{2} - B^{2}$

## دترمینان و کاربردها

متوسط- ۱۲۶

۳۷- نشان دهید $\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ a & b & 1 \\ c & d & 1 \end{vmatrix} = 0$ معادلهٔ خطی است که از نقاط $(a,b), (c,d)$ در $\mathbb{R}^{2}$ می‌گذرد.

۳۸- اگر $A=(a_1,a_2), B=(b_1,b_2), C=(c_1,c_2)$ رئوس یک مثلث از صفحهٔ $\mathbb{R}^{2}$ باشند، ثابت کنید مساحت مثلث $ABC$ برابر است با قدر مطلق مقدار زیر:

متوسط- ۱۲۶

$$\frac{1}{2}\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

۳۹ - فرض کنید بتوان یک ماتریس $۳ \times ۳$ مانند $A$ را به‌صورت حاصل‌ضرب یک ماتریس $۲ \times ۳$ در یک ماتریس $۳ \times ۲$ نوشت. ثابت کنید $|A| = ۰$.

سخت- ۱۲۶

## ماتریس‌ها و اعمال روی آن

### ضرب ماتریس‌ها

۴۰ - کارخانه‌ای سه محصول $c, b, a$ را به دو بازار $n, m$ می‌فروشد. تعداد واحدهای فروخته‌شده هر محصول در هر بازار در یک سال معین با ماتریس

متوسط - ۱۱۰

$$A = \begin{array}{c c} & \begin{array}{ccc} a & b & c \end{array} \\ \begin{array}{c} m \\ n \end{array} & \begin{bmatrix} ۵۰۰۰ & ۲۰۰۰ & ۱۵۰۰ \\ ۲۰۰۰ & ۲۰۰۰ & ۱۰۰۰ \end{bmatrix} \end{array}$$

نمایش داده شده است. ماتریس‌های $B = \begin{bmatrix} ۲ \\ ۴ \\ ۳ \end{bmatrix}$ , $C = \begin{bmatrix} ۱/۸ \\ ۳/۵ \\ ۲/۵ \end{bmatrix}$ به‌ترتیب، قیمت فروش و قیمت تمام‌شده هر واحد از $c, b, a$ را نشان می دهند.
درایه‌های هر یک از ماتریس‌های $AB - AC, AC, AB$ را تعبیر کنید.

## وارون یک ماتریس

متوسط- ۱۳۹۸

۴۱ - جای خالی را با عبارت مناسب پر کنید.

آسان- ۱۳۹۸

**الف** شرط لازم و کافی برای اینکه ماتریس مربعی $A$ وارون‌پذیر باشد آن است که دترمینان ماتریس $A$ ................. باشد.

## دترمینان و کاربردها

۴۲ - اگر دترمینان ماتریس مربعی $A$ از مرتبهٔ ۳ برابر با ۳ $= |A|$ باشد، حاصل $||A|A^{۲}|$ را حساب کنید. متوسط- ۱۳۹۸

## حل و بحث دستگاه دو معادله و دو مجهول

۴۳ - مقدار $m$ را چنان بیابید که دستگاه $\begin{cases} mx+۳y=-۳ \\ ۴x+(m+۴)y=۲ \end{cases}$ جواب نداشته باشد. متوسط- ۱۳۹۸

۴۴ - دستگاه $\begin{cases} (m-۳)x+۳y=m \\ ۴x+(m+۱)y=۲ \end{cases}$ به ازای چه مقادیری از $m$ دارای جواب منحصربه‌فرد می‌باشد. متوسط- ۱۳۹۸

## ماتریس‌ها و اعمال روی آن | معرفی ماتریس و درایه‌های آن

۴۵ - اگر درایه‌های ماتریس $A=[a_{ij}]_{۳\times۳}$ به‌صورت $a_{ij}=\begin{cases} i\cdot j & i>j \\ i^{۲} & i=j \\ ۲i-j & i<j \end{cases}$ تعریف شده باشد، ماتریس $۲A-۳I$ را به دست آورید.

متوسط- ۱۳۹۸

## ضرب ماتریس‌ها

۴۶ - دو ماتریس ۳ $\times$ ۳ مانند $A$ و $B$ مثال برنید که $A\neq\overline{O}$ و $B\neq\overline{O}$ ولی $AB=\overline{O}$. متوسط- ۱۴۰۲

۴۷ - با یک مثال نقص نشان دهید که قانون حذف در ضرب ماتریس‌ها برقرار نمی‌باشد. به عبارت دیگر نشان دهید در حالت کلی از تساوی $AB=AC$ نمی‌توان نتیجه گرفت $B=C$. متوسط- ۱۴۰۲

متوسط- ۱۴۰۲

۴۸- اگر $A = \begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & -۱ \end{bmatrix}$ حاصل $A^۳$ و $A^۷$ را بیابید.

متوسط- ۱۴۰۲

۴۹- اگر $A = \begin{bmatrix} -۲ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۳ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۴ \end{bmatrix}$ مفروض باشد، حاصل $A^۳$ را به دست آورید. چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟

## دترمینان و کاربردها

۵۰- فرض کنید $A = \begin{bmatrix} ۱ & ۵ & ۷ \\ ۲ & -۱ & ۳ \\ ۴ & ۵ & -۲ \end{bmatrix}$، مقدار $|A|$ را با بسط دادن نسبت به سطر دوم و همچنین ستون سوم پیدا کنید. همچنین $|A|$ را به کمک روش ساروس محاسبه کنید.

متوسط- ۱۲۶

## ماتریس‌ها و اعمال روی آن | ضرب ماتریس‌ها

متوسط- ۱۱۰

۵۱- اگر $A = \begin{bmatrix} ۳ & ۱ & ۰ \\ ۴ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ \end{bmatrix}$، به کمک محاسبهٔ توان‌های مختلف $A$، نشان دهید عدد طبیعی $n$ موجود است که $A^n = O$.

سخت- ۱۱۰

**۵۲ - فرض کنید $d, c, b, a$ چهار واحد طول باشد. ماتریس زیر یک جدول تبدیل واحد است:**

$$A = \begin{array}{c} \\ a \\ b \\ c \\ d \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} a & b & c & d \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 3 & 6 & 24 \\ \frac{1}{3} & 1 & 2 & 8 \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{2} & 1 & 4 \\ \frac{1}{24} & \frac{1}{8} & \frac{1}{4} & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

**در این ماتریس، یک واحد از $a$، شش واحد از $c$ است، یک واحد از $b$ هشت واحد از $d$ است و یک واحد از $c$ نصف واحد از $b$ است. این جدول را به‌عنوان یک ماتریس در نظر بگیرید و شرح دهید که چرا $a_{ik}a_{kj} = a_{ij}$. آیا می‌توانید بدون محاسبهٔ مستقیم، $A^2$ را پیدا کنید؟**

**۵۳ - اگر** $A = \begin{bmatrix} 2 & -3 & -5 \\ -1 & 4 & 5 \\ 1 & -3 & -4 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 5 \\ 1 & -3 & -5 \\ -1 & 3 & 5 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 2 & -2 & -4 \\ -1 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & -3 \end{bmatrix}$ **نشان دهید**

$$CA = C, AC = A, AB = BA = O$$

متوسط- ۱۱۰

## جمع و تفریق ماتریس‌ها و ضرب اعداد حقیقی در ماتریس

۵۴- ماتریس‌های $A=\begin{bmatrix} ۲ & ۱ \\ ۴ & ۳ \\ ۶ & ۵ \end{bmatrix}$ , $B=\begin{bmatrix} -۲ & -۳ \\ -۵ & ۱ \\ ۳ & ۴ \end{bmatrix}$ مفروض‌اند. یک ماتریس ۲ × ۳ مانند $C$ را طوری پیدا کنید که $A+B-C=O_{۳\times ۲}$

متوسط- ۱۱۰

## ضرب ماتریس‌ها

۵۵- درستی و نادرستی عبارت زیر را مشخص کنید. متوسط- ۱۳۹۸

**الف** اگر برای ماتریس‌های متمایز $A$، $B$ و $C$ داشته باشیم، $AB=AC$، آن‌گاه لزوماً $B=C$ است. متوسط- ۱۳۹۸

## دترمینان و کاربردها

۵۶- ماتریس $A=[a_{ij}]_{۳\times ۳}$ که در آن $a_{ij}=\begin{bmatrix} i^۲-۱ & ,i=j \\ i-j & ,i>j \\ j-i & ,i<j \end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix} ۰ & ۱ & ۲ \\ ۲ & ۳ & -۱ \\ ۵ & ۰ & ۲ \end{bmatrix}$ مفروض‌اند. حاصل ماتریس $A\times B$ را به دست آورید.

متوسط- ۱۳۹۸

**الف** حاصل ماتریس $A\times B$ را به دست آورید. متوسط- ۱۳۹۸

## حل و بحث دستگاه دو معادله و دو مجهول

۵۷- مقدار $m$ را طوری بیابید که دستگاه معادلات خطی $\begin{cases} ۲x+my=۱ \\ (m-۱)x+y=۳ \end{cases}$ جواب نداشته باشد. متوسط- ۱۴۰۰

## وارون یک ماتریس

۵۸- ماتریس $A^{-۱}=\begin{bmatrix} -۱ & ۲ \\ ۳ & ۲ \end{bmatrix}$ مفروض است، ماتریس $A$ را به دست آورید. متوسط- ۱۴۰۰

### ماتریس‌ها و اعمال روی آن — ضرب ماتریس‌ها

۵۹- اگر $A=\begin{bmatrix} ۴ & a \\ b & -۱ \end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix} ۱ & -۲ \\ ۳ & ۲ \end{bmatrix}$ باشد، مقادیر $a$ و $b$ را طوری به‌دست آورید که حاصل‌ضرب $A \times B$ ماتریس قطری باشد. (سوال تکراری)

متوسط- ۱۴۰۰

### دترمینان و کاربردها

۶۰- اگر $A$ ماتریس ۳ $\times$ ۳ باشد، $|A| =$ ۴ باشد، آنگاه حاصل $||A|A|$ را به دست آورید.

متوسط- ۱۴۰۱

### حل و بحث دستگاه دو معادله و دو مجهول

۶۱- اگر ماتریس $A$ را ماتریس ضرایب و $X$ را ماتریس مجهولات و $B$ را ماتریس معلومات دستگاه دو معادله و دو مجهولی $\begin{cases} ۲x - y = ۴ \\ -۴x + ۳y = ۲ \end{cases}$ در نظر بگیریم، از تساوی $AX = B$ ماتریس $X$ را به دست آورید.

متوسط- ۱۴۰۱

### دترمینان و کاربردها

۶۲- اگر $A = [۲i - ۳j]_{۳\times۲}$ و $B_{۲\times۳} = \begin{cases} -۱ & i \neq j \\ ۰ & i = j \end{cases}$ باشد، دترمینان ماتریس $AB$ را به دست آورید.

متوسط- ۱۴۰۱

### ماتریس‌ها و اعمال روی آن — معرفی ماتریس و درایه‌های آن

۶۳- اگر $A=\begin{bmatrix} ۲x & ۵ \\ z & ۱ \end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix} ۳ & ۲x+y \\ -۲ & ۱ \end{bmatrix}$ و $A = B$، در این صورت حاصل $x + ۲y + ۳z$ را به دست آورید.

متوسط- ۱۴۰۱

### دترمینان و کاربردها

۶۴- اگر $A=\begin{bmatrix} ۱ & ۲ & ۱ \\ ۲ & ۶ & ۲ \\ ۱ & -۱ & ۲ \end{bmatrix}$، حاصل $|-\frac{۱}{۲}A^۴|$ را به‌دست آورید.

متوسط- ۱۴۰۲

## وارون یک ماتریس

متوسط- ۱۴۰۲

۶۵- با استفاده از ویژگی‌های ضرب ماتریس‌ها و ماتریس همانی $I$ درستی رابطهٔ زیر را ثابت کنید:

$$(A-۳I)^۲ = A^۲ - ۶A + ۹I$$

متوسط- ۱۴۰۲

۶۶- اگر $A = \begin{bmatrix} ۳ & -۱ \\ ۱ & -۱ \end{bmatrix}$، نشان دهید:

$$(۵A)^{-۱} = \frac{۱}{۵}A^{-۱}$$

## ماتریس‌ها و اعمال روی آن | ضرب ماتریس‌ها

متوسط- ۱۴۰۲

۶۷- ماتریس $(B^۲ + ۲I)$ را محاسبه کنید. ($I$ ماتریس همانی مرتبه سه است.)

## معرفی ماتریس و درایه‌های آن

متوسط- ۱۴۰۲

۶۸- اگر $bij = \begin{cases} i+۱ & i=j \\ j-۲ & i<j \\ ۱ & i>j \end{cases}$ , $B = [bij]_{۳\times۳}$، ماتریس $B$ را به‌صورت آرایش مستطیلی بنویسید.

## معرفی ماتریس‌های خاص

متوسط- ۱۴۰۲

۶۹- اگر $A = \begin{bmatrix} ۰ & m \\ n & m-۲ \end{bmatrix}$ ماتریسی اسکالر باشد، مقادیر $m$ و $n$ را بیابید.

## حل و بحث دستگاه دو معادله و دو مجهول

متوسط- ۱۴۰۱

۷۰- الف) در دستگاه $\begin{cases} ax+by=c \\ a'x+b'y=c' \end{cases}$، اگر $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} \neq \frac{c}{c'}$، آنگاه دستگاه بی‌شمار جواب دارد. (درست – نادرست)

ب) اگر $A = \begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۲ & ۰ \\ ۰ & ۰ & -۱ \end{bmatrix}$ باشد، حاصل $||A|A|$ را بیابید.

## وارون یک ماتریس

متوسط- ۱۴۰۱

۷۱- اگر ماتریس $A=\begin{bmatrix} ۱ & ۴ \\ ۳ & ۰ \end{bmatrix}$ باشد، وارون ماتریس $A-۲I$ را بیابید. ($I$ ماتریس همانی مرتبه دو است.)

## ماتریس‌ها و اعمال روی آن | ضرب ماتریس‌ها

متوسط- ۱۴۰۱

۷۲- اگر $A$ و $B$ دو ماتریس مربعی مرتبه ۳ و تعویض‌پذیر باشند، ثابت کنید:

$$(A-B)^۲=A^۲-۲AB+B^۲$$

متوسط- ۱۴۰۱

۷۳- اگر دو ماتریس مربعی $A$ و $B$ به‌صورت $A=[۳i-۲j]_{۳\times۳}$ و $B=\begin{bmatrix} ۰ & ۲ & ۱ \\ ۳ & ۱ & ۰ \\ ۱ & ۲ & -۱ \end{bmatrix}$ باشند،

الف) ماتریس $A$ را به‌صورت آرایش مستطیلی بنویسید.

ب) ماتریس $B^۲$ را محاسبه کنید.

## معرفی ماتریس و درایه‌های آن

متوسط- ۱۴۰۱

۷۴- الف) اگر دو ماتریس $A=\begin{bmatrix} ۳ & ۲x-۱ \\ ۰ & ۲ \end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix} ۳ & ۵ \\ ۰ & ۲ \end{bmatrix}$ مساوی باشند، آنگاه مقدار $x$ برابر با ................. است.

ب) اگر $A=\begin{bmatrix} m+۱ & ۲ \\ ۵ & ۲n+۴ \end{bmatrix}$ یک ماتریس قطری باشد، با محاسبهٔ $m$ و $n$ ماتریس $A+I$ را بیابید. ($I$ ماتریس همانی مرتبه دو است.)

## حل و بحث دستگاه دو معادله و دو مجهول

متوسط- ۱۴۰۱

۷۵ - دستگاه $\begin{cases} ۲x + y = ۴ \\ ۷x + ۴y = ۱۵ \end{cases}$ را با استفاده از ماتریس وارون حل کنید.

## ماتریس‌ها و اعمال روی آن | معرفی ماتریس‌های خاص

متوسط- ۱۴۰۱

۷۶- اگر $A = \begin{bmatrix} ۴ & a \\ b & -۱ \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} ۱ & -۲ \\ ۳ & ۲ \end{bmatrix}$ مقادیر $a$ و $b$ را طوری به دست آورید که $A \times B$ ماتریس قطری باشد.

## حل و بحث دستگاه دو معادله و دو مجهول

۷۷ - جواب دستگاه زیر را در صورت وجود، با استفاده از ماتریس وارون بیابید.

متوسط- ۱۴۰۰

$$\begin{cases} ۳x - ۴y = ۷ \\ ۲x + y = ۱ \end{cases}$$

## ماتریس‌ها و اعمال روی آن | ضرب ماتریس‌ها

۷۸ - دو ماتریس $A = \begin{bmatrix} ۰ & m-۲ & ۲ \\ ۰ & ۳ & ۰ \\ ۳ & ۰ & n+۱ \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} ۱ & ۱ & ۲ \\ n & ۰ & m \\ ۲ & -۱ & ۳ \end{bmatrix}$ مفروض‌اند، اگر $A$ یک ماتریس قطری باشد، حاصل $A \cdot B$ را محاسبه کنید.

متوسط- ۱۴۰۰

## دترمینان و کاربردها

متوسط- ۱۴۰۰

۷۹- اگر $A = \begin{bmatrix} ۲ & ۳ & ۲ \\ ۳ & ۲ & ۱ \\ ۱ & -۲ & -۱ \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} ۰ & ۰ & ۳ \\ ۰ & -۱ & ۰ \\ ۲ & ۰ & ۰ \end{bmatrix}$ و $I_۳$ ماتریس همانی $۳ \times ۳$ باشد، حاصل عبارت زیر را به دست آورید.

$$|A \times B| + |۲I_۳|$$

ماتریس‌ها و اعمال روی آن | ضرب ماتریس‌ها

۸۰- اگر $A=\begin{bmatrix} ۴ & a \\ b & -۱ \end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix} ۱ & -۲ \\ ۳ & ۲ \end{bmatrix}$ مقادیر $a$ و $b$ را طوری به دست آورید که $A\times B$ ماتریس قطری باشد. (سوال تکراری است)

متوسط- ۱۴۰۰

حل و بحث دستگاه دو معادله و دو مجهول

متوسط- ۱۳۹۹

۸۱ - الف) به‌ازای چه مقداری از $m$ دستگاه معادلات $\begin{cases} x-۲y=۳ \\ mx+۶y=-۴ \end{cases}$ فاقد جواب است؟

ب) دستگاه معادلات $\begin{cases} x-۲y=۳ \\ ۲x+۶y=-۴ \end{cases}$ را با استفاده از $A^{-۱}$ حل کنید.

ماتریس‌ها و اعمال روی آن | ضرب ماتریس‌ها

متوسط- ۱۳۹۹

۸۲- اگر $A=\begin{bmatrix} ۱ & ۴ \\ ۲ & ۰ \end{bmatrix}$ باشد مقادیر $m$ و $n$ را طوری بیابید که رابطهٔ $A^{۲}=mA+nI_{۲}$ برقرار باشد. ($I_{۲}$ ماتریس همانی است.)

دترمینان و کاربردها

متوسط- ۱۳۹۹

۸۳- اگر $A=\begin{bmatrix} -۱ & ۱ & ۲ \\ -۲ & ۱ & ۰ \\ ۴ & ۳ & ۰ \end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix} ۰ & ۰ & ۳ \\ ۰ & -۱ & ۰ \\ ۲ & ۰ & ۰ \end{bmatrix}$ باشند حاصل $|B^{۲}|+|A|$ را بیابید.

## ماتریس‌ها و اعمال روی آن — ضرب ماتریس‌ها

متوسط- ۱۳۹۹

۸۴- معادلهٔ ماتریسی $\begin{bmatrix} ۳ \\ -۱ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ۰ & ۱ \\ ۴ & -۱ \end{bmatrix} [۳ \ \ x] = ۰$ را حل کنید.

## معرفی ماتریس و درایه‌های آن

متوسط- ۱۳۹۹

۸۵- اگر دو ماتریس $A = \begin{bmatrix} x-۱ & ۸ \\ ۳ & z+۱ \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} y+۱ & x-۲ \\ ۳ & ۴ \end{bmatrix}$ مساوی باشند مقدار $x+y+z$ را بیابید.

## دترمینان و کاربردها

متوسط- ۱۳۹۸

۸۶- ماتریس $A_{۳\times۳}$ را طوری بیابید که در معادلهٔ $۲|A|^{۲} + ۳|A| - ۲ = ۰$ صدق کند.

## ماتریس‌ها و اعمال روی آن — جمع و تفریق ماتریس‌ها و ضرب اعداد حقیقی در ماتریس

متوسط- ۱۳۹۸

۸۷- اگر $\begin{bmatrix} ۰ & ۰ \\ ۰ & ۳ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۱ & -۱ \\ ۲ & m \end{bmatrix} + ۲A - I$ و مجموعه درایه‌های روی قطر اصلی ماتریس $A$ برابر با ۵ باشد، مقدار $m$ را بیابید.

## وارون یک ماتریس

متوسط- ۱۳۹۸

۸۸- اگر $A = \begin{bmatrix} ۲ & -۱ \\ ۳ & ۴ \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} ۰ & ۱ \\ ۴ & ۱ \end{bmatrix}$ باشد، مطلوبست محاسبه: $A^{-۱}(A + ۲B^{-۱} + AB^{-۱})BA$.

## دترمینان و کاربردها

۸۹- اگر ماتریس $A_{۳\times۳}$ به‌صورت $A=[i-j]$ باشد، مطلوبست محاسبه دترمینان ماتریس $۲A+I$. متوسط- ۱۳۹۸

## وارون یک ماتریس

۹۰- اگر $A$ ماتریسی $۳\times۳$ که $|A|=۲$ باشد، حاصل $|A^۳A^{-۱}+۳A^۲|$ را بیابید. متوسط- ۱۳۹۸

۹۱- اگر $A=\begin{bmatrix}۵|A| & ۲|A|\\ ۵ & ۴|A|^۲\end{bmatrix}$ و $|A|>۰$ باشد در این صورت $(A^{-۱})$ را محاسبه کنید. سخت- ۱۳۹۸

۹۲- برای ماتریس‌های مربعی و هم‌مرتبهٔ $A$ و $B$، کدام‌یک از گزاره‌های زیر نادرست است؟ متوسط- ۱۳۹۸

الف) اگر $A$ و $B$ وارون‌پذیر باشند، $AB$ نیز وارون‌پذیر است.

ب) اگر $AB$ وارون‌پذیر باشد، $A$ و $B$ وارون‌پذیرند.

پ) اگر $A$ و $B$ وارون‌پذیر نباشند، $AB$ نیز وارون‌پذیر نیست.

ت) اگر $AB$ وارون‌پذیر نباشد، $A$ و $B$ هم وارون‌پذیر نیستند.

## دترمینان و کاربردها

۹۳ - دترمینان ماتریس $M = [i^{۲} - j^{۲}]_{۳\times۳}$ را به دست آورید؟ متوسط - ۱۳۹۸

## وارون یک ماتریس

۹۴ - برای دو ماتریس $۲ \times ۲$ و وارون‌پذیر $A$ و $B$ داریم: متوسط - ۱۳۹۸

$(A^{-۱})^{-۱} = \dots\dots\dots\dots\dots$ $(kA)^{-۱} = \dots\dots\dots\dots\dots$ $(A \times B)^{-۱} = \dots\dots\dots\dots\dots$

## ماتریس‌ها و اعمال روی آن | ضرب ماتریس‌ها

۹۵ - اگر $A = \begin{bmatrix} -۱ & ۲ \\ -۲ & ۳ \end{bmatrix}$ باشد، ماتریس $A^{۴} - A^{۷}$ را به دست آورید؟ متوسط - ۱۳۹۸

## حل و بحث دستگاه دو معادله و دو مجهول

۹۶ - الف) مقادیر قابل‌قبول $m$ را طوری بیابید که دستگاه معادلات $\begin{cases} ۲mx + ۳y = ۱ \\ ۲x - y = ۳ \end{cases}$ دارای جواب منحصربه‌فرد باشد. متوسط - ۱۳۹۹

ب) جواب دستگاه مذکور را به‌ازای $m = ۲$ با استفاده از ماتریس وارون محاسبه کنید.

ماتریس‌ها و اعمال روی آن — ضرب ماتریس‌ها

متوسط - ۱۳۹۹

۹۷ - در تساوی ماتریسی $\circ = \begin{bmatrix} ۲ \\ ۱ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ۴ & ۲ \\ ۲ & ۱ \end{bmatrix} [x \quad ۱]$ مقدار $x$ را بیابید.

دترمینان و کاربردها

متوسط - ۱۳۹۹

۹۸ - الف) اگر $A = \begin{bmatrix} ۸ & |A| \\ ۵ & ۳ \end{bmatrix}$ در این صورت حاصل $|A|$ را بیابید.

ب) ماتریس وارون $A$ را حساب کنید.

۹۹ - دو ماتریس $A = \begin{bmatrix} m-۲ & ۲ \\ ۱ & n+۱ \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} ۱ & ۱ & ۲ \\ n & \circ & m \\ ۲ & -۱ & ۳ \end{bmatrix}$ مفروض‌اند. اگر $A$ یک ماتریس قطری باشد، حاصل $|A|+|B|$ را محاسبه کنید.

متوسط - ۱۳۹۹

ماتریس‌ها و اعمال روی آن — ضرب ماتریس‌ها

۱۰۰ - ماتریس‌های $A = \begin{bmatrix} ۲ & \circ & ۱ \\ ۱ & -۱ & \circ \\ \circ & ۱ & ۲ \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} ۲ & ۲ & a+b \\ -۱ & ۲ & ۲ \\ ۴a+b & -۱ & ۲ \end{bmatrix}$ مفروض‌اند، مقادیر $a$ و $b$ را چنان بیابید که داشته باشیم:

متوسط - ۱۳۹۹

$A^۲ - B = \overline{O}$ ($\overline{O}$ ماتریس صفر است.)

متوسط - ۱۳۹۹

۱۰۱ - اگر $A = \begin{bmatrix} ۲ & \circ \\ \circ & -۱ \end{bmatrix}$ باشد، ماتریس $A^۷$ را به دست آورید.

## دترمینان و کاربردها

متوسط- ۱۳۹۹

۱۰۲- اگر $A=\begin{bmatrix} ۱ & ۴ & ۲ \\ ۲ & ۳ & -۱ \end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix} -۱ & ۱ \\ ۱ & ۰ \\ ۳ & ۲ \end{bmatrix}$ باشد، دترمینان ماتریس $BA$ را به دست آورید.

## ماتریس‌ها و اعمال روی آن | ضرب ماتریس‌ها

متوسط- ۱۴۰۰

۱۰۳- درستی یا نادرستی عبارت زیر را مشخص کنید.

آسان- ۱۴۰۰

**الف** اگر برای ماتریس‌های متمایز $A$، $B$ و $C$ داشته باشیم، $AB=AC$، آنگاه لزوماً $B=C$ است.

## معرفی ماتریس‌های خاص

متوسط- ۱۴۰۱

۱۰۴- عبارت‌های زیر را کامل کنید.

متوسط- ۱۴۰۱

**الف** اگر ماتریس $\begin{bmatrix} ۱ & m-۱ & r \\ ۱ & & ۰ \end{bmatrix}$ یک ماتریس همانی باشد، حاصل $m+r$ برابر با ................ است.

## دترمینان و کاربردها

متوسط- ۱۴۰۱

۱۰۵- درستی و نادرستی عبارات زیر را مشخص کنید. سپس شکل صحیح عبارت نادرست را بنویسید.

متوسط- ۱۴۰۱

**الف** اگر $A$ یک ماتریس $۳\times۳$ و $|A|=۵$ باشد، آنگاه $|۲A|=۴۰$ است.

متوسط- ۱۴۰۱

۱۰۶- ماتریس $A$ مربعی مرتبه سه به‌صورت $A=[a_{ij}]_{۳\times۳}$ که $a_{ij}=\begin{cases} i+j & i=j \\ j & i>j \\ ۰ & i<j \end{cases}$ و $B=\begin{bmatrix} ۰ & ۱ & ۲ \\ ۲ & ۳ & -۱ \\ ۵ & ۰ & ۲ \end{bmatrix}$ باشد،

متوسط- ۱۴۰۱

**الف** ماتریس $A$ را به‌صورت آرایش مستطیلی بنویسید.

متوسط- ۱۴۰۱

**ب** دترمینان ماتریس $B$ را محاسبه کنید.

۱۰۷ – درستی یا نادرستی عبارات زیر را مشخص کنید. متوسط- ۱۴۰۱

الف اگر $A$ و $B$ دو ماتریس ۲ × ۲ باشند آنگاه: $|AB| = |A||B|$ متوسط- ۱۴۰۱

## ماتریس‌ها و اعمال روی آن معرفی ماتریس و درایه‌های آن

۱۰۸ – جاهای خالی را با عبارات مناسب پر کنید. متوسط- ۱۴۰۱

الف هر آرایش مستطیلی از اعداد حقیقی، شامل تعداد سطر و ستون ................. نامیده می‌شود. متوسط- ۱۴۰۱

### معرفی ماتریس‌های خاص

۱۰۹ – جاهای خالی را با عبارات مناسب پر کنید. متوسط- ۱۴۰۰

الف ماتریس مربعی که همهٔ درایه‌های غیرواقع بر قطر اصلی آن صفر باشند را ماتریس ................. گویند. متوسط- ۱۴۰۰

### ضرب ماتریس‌ها

۱۱۰ – درستی و نادرستی عبارات زیر را مشخص کنید. متوسط- ۱۴۰۰

الف اگر $A$ و $B$ دو ماتریس ۳ × ۳ دلخواه باشند، آنگاه عبارت $(A+B)^۲ = A^۲ + ۲AB + B^۲$ همواره برقرار است. متوسط- ۱۴۰۰

### دترمینان و کاربردها

۱۱۱ – دو ماتریس $A = \begin{bmatrix} ۱ & -۱ \\ ۲ & ۰ \\ ۳ & -۲ \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} ۰ & -۱ & ۱ \\ -۲ & ۳ & -۲ \end{bmatrix}$ را در نظر بگیرید. متوسط- ۱۴۰۰

الف آیا جمع دو ماتریس $A$ و $B$ تعریف می‌شود؟ چرا؟ متوسط- ۱۴۰۰

ب حاصل $|A \times B|$ را به‌دست آورید. متوسط- ۱۴۰۰

# پاسخنامه تشریحی

۱ -

$$\begin{cases} ax+by=۲ \\ cx+dy=-۱ \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۰ & -۱ \\ ۲ & ۱ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۲ \\ -۱ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۱ \\ ۳ \end{bmatrix}\rightarrow x+y=۱+۳=۴$$

۲ -

$$(A^{-۱}BA)^{۲}=(A^{-۱}BA)(A^{-۱}BA)=A^{-۱}B(\underbrace{AA^{-۱}}_{I})BA=A^{-۱}B^{۲}A$$

$$(A^{-۱}BA)^{۳}=(A^{-۱}B^{۲}A)(A^{-۱}BA)=A^{-۱}B^{۲}(\underbrace{AA^{-۱}}_{I})BA=A^{-۱}B^{۳}A$$

به همین ترتیب داریم: $(A^{-۱}BA)^{n}=A^{-۱}B^{n}A$

۳ - خیر، زیرا دترمینان ماتریس ضرایب صفر است؛ بنابراین محاسبهٔ وارون امکان ندارد.

$$|A|=\begin{vmatrix} ۲ & -۱ \\ -۴ & ۲ \end{vmatrix}=۴-۴=۰$$

درواقع معادلات این دستگاه، معادلهٔ ۲ خط موازی را نشان می‌دهد که می‌دانیم دو خط موازی نقطهٔ برخوردی (جوابی) ندارند.

$$\begin{cases} ۲x-y=۴ \\ -۴x+۲y=۲ \end{cases} \qquad \frac{۲}{-۴}=\frac{-۱}{۲}\neq\frac{۴}{۲}$$

۴ -

$$|A|=\begin{vmatrix} |A| & ۳ \\ ۱ & ۴|A| \end{vmatrix}\rightarrow |A|=۴|A|^{۲}-۳$$

$$\rightarrow ۴|A|^{۲}-|A|-۳=۰\rightarrow \begin{cases} |A|=۱ \\ |A|=-\frac{۳}{۴} \end{cases}$$

۵ -

$$A^{۲}=A\xrightarrow{\text{ضرب طرفین در } A^{-۱}}\underbrace{A^{-۱}A}_{I}A=\underbrace{A^{-۱}A}_{I}\rightarrow A=I$$

$$\rightarrow (I-۳A)^{-۱}=(I-۳I)^{-۱}=(-۲I)^{-۱}=-\frac{۱}{۲}I^{-۱}=-\frac{۱}{۲}I$$

۶ -

$$A^{۳}=\begin{bmatrix} ۲ & ۳ \\ -۳ & ۹ \end{bmatrix}\rightarrow |A|^{۳}=۲۷\rightarrow |A|=۳$$

$$\left|(۲A)^{-۱}\right|=\left|\frac{۱}{۲}A^{-۱}\right|=\frac{۱}{۴}\left|A^{-۱}\right|=\frac{۱}{۴}\times\frac{۱}{|A|}=\frac{۱}{۱۲}$$

۷ -

$$A=\begin{bmatrix} |A| & ۲|A| \\ -۳ & ۵|A| \end{bmatrix}\xrightarrow{\text{از دو طرف دترمینان می‌گیریم.}}|A|=۵|A|^{۲}+۶|A|\rightarrow ۵|A|^{۲}+۵|A|=۰$$

$$\rightarrow ۵|A|(|A|+۱)=۰\rightarrow \begin{cases} |A|=۰ \quad \text{غ ق ق} \\ |A|=-۱ \end{cases}$$

$$\rightarrow A=\begin{bmatrix} -۱ & -۲ \\ -۳ & -۵ \end{bmatrix}\rightarrow A^{-۱}=\frac{۱}{-۱}\begin{bmatrix} -۵ & ۲ \\ ۳ & -۱ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۵ & -۲ \\ -۳ & ۱ \end{bmatrix}$$

۸ -

$$\frac{|A+B|}{|AB|}=\frac{|A+B|}{|A|\,|B|}=\frac{۱}{|A|}\frac{|A+B|}{|B|}$$

$$=\left|A^{-۱}\right|\left|A+B\right|\left|B^{-۱}\right|=\left|A^{-۱}(A+B)B^{-۱}\right|=\left|(I+A^{-۱}B)B^{-۱}\right|=\left|B^{-۱}+A^{-۱}\right|$$

۹ -

$$A^{۲}=\begin{bmatrix} ۵ & ۳ \\ ۲ & ۱ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۵ & ۳ \\ ۲ & ۱ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۳۱ & ۱۸ \\ ۱۲ & ۷ \end{bmatrix}$$

$$mA^{۲}+nA+rI=\overline{O}\rightarrow \begin{bmatrix} ۳۱m & ۱۸m \\ ۱۲m & ۷m \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} ۵n & ۳n \\ ۲n & n \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} r & ۰ \\ ۰ & r \end{bmatrix}=\overline{O}$$

$$\rightarrow \begin{bmatrix} ۳۱m+۵n+r & ۱۸m+۳n \\ ۱۲m+۲n & ۷m+n+r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ \end{bmatrix}$$

$$\left.\begin{matrix} ۱۸m+۳n=۰ \\ ۱۲m+۲n=۰ \end{matrix}\right\} \rightarrow ۶m+n=۰ \Rightarrow n=-۶m$$

با جایگذاری $n=-۶m$ در درایه‌های دیگر نتیجه می‌گیریم $r=-m$؛ پس با فرض $m=۱$ مقادیر $n=-۶$ و $r=-۱$ به دست می‌آیند.

۱۰ -

$$AB=A+B \xrightarrow[\text{از سمت چپ}]{A^{-۱}\ \text{ضرب در}} A^{-۱}(AB)=A^{-۱}(A+B)$$

$$(A^{-۱}A)B=A^{-۱}A+A^{-۱}B \quad \rightarrow \quad IB=I+A^{-۱}B$$

$$\rightarrow B=I+A^{-۱}B \xrightarrow[\text{از سمت راست}]{B^{-۱}\ \text{ضرب در}} BB^{-۱}=(I+A^{-۱}B)B^{-۱}$$

$$I=IB^{-۱}+A^{-۱}BB^{-۱} \quad \rightarrow \quad I=B^{-۱}+A^{-۱} \quad \rightarrow \quad A^{-۱}+B^{-۱}=I$$

۱۱ -

$$A^{۲}=A \xrightarrow{A^{-۱}\ \text{ضرب طرفین در}} \underbrace{A^{-۱}A}_{I}A=\underbrace{A^{-۱}A}_{I} \rightarrow A=I$$

$$B^{۲}=B \xrightarrow{B^{-۱}\ \text{ضرب طرفین در}} \underbrace{B^{-۱}B}_{I}B=\underbrace{B^{-۱}B}_{I} \rightarrow B=I$$

$$\rightarrow (A+B)^{-۱}=(I+I)^{-۱}=(۲I)^{-۱}=\frac{۱}{۲}I^{-۱}=\frac{۱}{۲}I$$

۱۲ -

$$A+I=\begin{bmatrix} ۱ & ۱ \\ ۱ & ۱ \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۲ & ۱ \\ ۱ & ۲ \end{bmatrix} \rightarrow a-b=۲-۱=۱$$

$$(A+I)^{۲}=\begin{bmatrix} ۲ & ۱ \\ ۱ & ۲ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۲ & ۱ \\ ۱ & ۲ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۵ & ۴ \\ ۴ & ۵ \end{bmatrix} \rightarrow a-b=۵-۴=۱$$

$$(A+I)^{۳}=\begin{bmatrix} ۲ & ۱ \\ ۱ & ۲ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۵ & ۴ \\ ۴ & ۵ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۱۴ & ۱۳ \\ ۱۳ & ۱۴ \end{bmatrix} \rightarrow a-b=۱۴-۱۳=۱$$

همانطور که می‌بینید در تمام توان‌ها $a-b=۱$ می‌باشد.

۱۳ -

$$||A|\,A| \overset{|A|=۵}{=\!=\!=} |۵A|=۱۲۵\underbrace{|A|}_{۵}=۶۲۵$$

۱۴ -

$$AB=\begin{bmatrix} ۱ & ۲ & ۳ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -۲ \\ -۱ \\ ۳ \end{bmatrix}=[-۲-۲+۹]=[۵] \rightarrow |AB|=۵$$

$$BA=\begin{bmatrix} -۲ \\ -۱ \\ ۳ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۱ & ۲ & ۳ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -۲ & -۴ & -۶ \\ -۱ & -۲ & -۳ \\ ۳ & ۶ & ۹ \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow |BA|=-۲\underbrace{\begin{vmatrix} -۲ & -۳ \\ ۶ & ۹ \end{vmatrix}}_{۰}-(-۴)\underbrace{\begin{vmatrix} -۱ & -۳ \\ ۳ & ۹ \end{vmatrix}}_{۰}-۶\underbrace{\begin{vmatrix} -۱ & -۲ \\ ۳ & ۶ \end{vmatrix}}_{۰}=۰$$

۱۵ - معادلهٔ خطی که از نقاط $(a,b)$ و $(c,d)$ می‌گذرد به شکل زیر است:

$$y-b=\frac{b-d}{a-c}(x-a) \rightarrow y=(\frac{b-d}{a-c})x-(\frac{ab-ad}{a-c})+b$$

$$\rightarrow y=(\frac{d-b}{c-a})x+\frac{bc-ad}{c-a}$$

مطابق روش ساروس داریم:

$$\left|\begin{matrix} x & y & ۱ \\ a & b & ۱ \\ c & d & ۱ \end{matrix}\right|\begin{matrix} x & y \\ a & b \\ c & d \end{matrix}=۰ \rightarrow (bx+yc+ad)-(ay+dx+bc)=۰$$

$$(b-d)x+(c-a)y+(ad-bc)=۰$$

$$(c-a)y=(d-b)x+(bc-ad)$$

$$y=(\frac{d-b}{c-a})x+\frac{bc-ad}{c-a}$$

۱۶ -

$$(A^{۲})^{-۱}=B$$

$$(A^{-۱})^{۲}=B\to A^{-۱}\times A^{-۱}=B$$

$$\xrightarrow{\times A}\underbrace{AA^{-۱}}_{I}\times A^{-۱}=AB\to A^{-۱}=AB$$

۱۷ -

$$-۲A^{۲}+A=I\to A(-۲A+I)=I\to |A|\,|I-۲A|=|I|$$

$\to |A|\,|I-۲A|=۱\to |A|\neq ۰\to$ $A$ وارون‌پذیر است.

$$A(I-۲A)=I\to A^{-۱}=I-۲A$$

۱۸ -

$$|A|^{۲}-۵\,|A|+۶=۰\to (|A|-۲)(|A|-۳)=۰$$

$$\to |A|=۲\xrightarrow[c=۱,d=۴]{a=۱,b=۲}\begin{vmatrix}۱&۲\\ ۱&۴\end{vmatrix}=۴-۲=۲$$

یا

$$|A|=۳\xrightarrow[c=۳,d=۳]{a=۲,b=۱}\begin{vmatrix}۲&۱\\ ۳&۳\end{vmatrix}=۶-۳=۳$$

۱۹ - طبق تعریف وارون باید ضرب $AB$ و $B^{-۱}A^{-۱}$ برابر $I$ باشد.

$$(AB)(B^{-۱}A^{-۱})=A(\underbrace{BB^{-۱}}_{I})A^{-۱}=AIA^{-۱}=AA^{-۱}=I$$

$$(B^{-۱}A^{-۱})(AB)=B^{-۱}(\underbrace{A^{-۱}A}_{I})B=B^{-۱}IB=B^{-۱}B=I$$

۲۰ - باید ضرب دو ماتریس $(I+\frac{m}{۱-m}A)$ و $(I-mA)$ برابر $I$ شود.

$$(I-mA)(I+\frac{m}{۱-m}A)=I+\frac{m}{۱-m}A-mA-\frac{m^{۲}A^{۲}}{۱-m}$$

$$=I+\frac{m-m(۱-m)-m^{۲}}{۱-m}A=I+\frac{۰}{۱-m}A=I$$

به‌همین ترتیب ثابت می‌شود $(I+\frac{m}{۱-m}A)(I-mA)$ هم برابر $I$ می‌شود.

۲۱ -

$$A=\begin{bmatrix}\begin{vmatrix}۲&۳\\ ۱&۲\end{vmatrix}&\begin{vmatrix}۴&۲\\ -۱&۱\end{vmatrix}\\ -\begin{vmatrix}۱&۵\\ ۲&۱۱\end{vmatrix}&\begin{vmatrix}۲&-۳\\ ۱&۵\end{vmatrix}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۱&۶\\ -۱&۱۳\end{bmatrix}\to |A|=۱۳+۶=۱۹$$

$$\begin{vmatrix}۲&۳\\ ۱&۲\end{vmatrix}=۱\ ,\quad \begin{vmatrix}۴&۲\\ -۱&۱\end{vmatrix}=۶\ ,\quad -\begin{vmatrix}۱&۵\\ ۲&۱۱\end{vmatrix}=-۱\ ,\quad \begin{vmatrix}۲&-۳\\ ۱&۵\end{vmatrix}=۱۳$$

۲۲ -

$$A=\begin{bmatrix}۲&-۱\\ ۱&۰\end{bmatrix}$$

$$A^{۲}=\begin{bmatrix}۲&-۱\\ ۱&۰\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۲&-۱\\ ۱&۰\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۳&-۲\\ ۲&-۱\end{bmatrix}$$

$$A^{۳}=\begin{bmatrix}۳&-۲\\ ۲&-۱\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۲&-۱\\ ۱&۰\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۴&-۳\\ ۳&-۲\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{\text{به همین ترتیب}}A^{n}=\begin{bmatrix}n+۱&-n\\ n&-n+۱\end{bmatrix}$$

۲۳ -

$$A=\begin{bmatrix}۱&۲\\ ۰&۱\end{bmatrix}$$

$$A^{۲}=\begin{bmatrix}۱&۲\\ ۰&۱\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۱&۲\\ ۰&۱\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۱&۴\\ ۰&۱\end{bmatrix}$$

$$A^{۳}=\begin{bmatrix}۱&۴\\ ۰&۱\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۱&۲\\ ۰&۱\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۱&۶\\ ۰&۱\end{bmatrix}\to A^{۲۰}=\begin{bmatrix}۱&۴۰\\ ۰&۱\end{bmatrix}$$

دقت کنید فقط درایهٔ سطر اول و ستون دوم متغیر است.

- ۲۴

$$A=\begin{array}{c}\begin{array}{cccc}\overset{۲^{۰}}{\uparrow} & & & \end{array}\\ \begin{bmatrix}۱&۱&۱&۱\\ ۰&۰&۰&۰\\ ۱&۱&۱&۱\\ ۰&۰&۰&۰\end{bmatrix}\end{array}$$

$$A^{۲}=\begin{bmatrix}۱&۱&۱&۱\\ ۰&۰&۰&۰\\ ۱&۱&۱&۱\\ ۰&۰&۰&۰\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۱&۱&۱&۱\\ ۰&۰&۰&۰\\ ۱&۱&۱&۱\\ ۰&۰&۰&۰\end{bmatrix}=\begin{array}{c}\begin{array}{cccc}\overset{۲^{۱}}{\uparrow} & & & \end{array}\\ \begin{bmatrix}۲&۲&۲&۲\\ ۰&۰&۰&۰\\ ۲&۲&۲&۲\\ ۰&۰&۰&۰\end{bmatrix}\end{array}$$

$$A^{۳}=\begin{bmatrix}۲&۲&۲&۲\\ ۰&۰&۰&۰\\ ۲&۲&۲&۲\\ ۰&۰&۰&۰\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۱&۱&۱&۱\\ ۰&۰&۰&۰\\ ۱&۱&۱&۱\\ ۰&۰&۰&۰\end{bmatrix}=\begin{array}{c}\begin{array}{cccc}\overset{۲^{۲}}{\uparrow} & & & \end{array}\\ \begin{bmatrix}۴&۴&۴&۴\\ ۰&۰&۰&۰\\ ۴&۴&۴&۴\\ ۰&۰&۰&۰\end{bmatrix}\end{array}$$

$$\rightarrow A^{۱۰}=\begin{bmatrix}۲^{۹}&۲^{۹}&۲^{۹}&۲^{۹}\\ ۰&۰&۰&۰\\ ۲^{۹}&۲^{۹}&۲^{۹}&۲^{۹}\\ ۰&۰&۰&۰\end{bmatrix}\rightarrow \text{مجموع درایه‌ها}=۸\times ۲^{۹}=۲^{۳}\times ۲^{۹}=۲^{۱۲}$$

- ۲۵

$$A=\begin{bmatrix}۵\,|A| & |A|\\ ۵ & ۴|A|^{۲}\end{bmatrix}$$

$$|A|=۲۰|A|^{۳}-۵\,|A|\rightarrow ۲۰|A|^{۳}-۶\,|A|=۰\rightarrow ۲\,|A|\,(۱۰|A|^{۲}-۳)=۰$$

$$\rightarrow\begin{cases}|A|=۰\rightarrow |A|^{۳}-۲=-۲\\ |A|=\pm\dfrac{\sqrt{۳}}{\sqrt{۱۰}}\Rightarrow\begin{cases}\xrightarrow{+}|A|^{۳}-۲=\dfrac{۳}{۱۰}\sqrt{\dfrac{۳}{۱۰}}-۲\\ \xrightarrow{-}|A|^{۳}-۲=-\dfrac{۳}{۱۰}\sqrt{\dfrac{۳}{۱۰}}-۲\end{cases}\end{cases}$$

- ۲۶

$$|۲A|=(|A|^{۲}+۴)\Rightarrow ۴|A|=|A|^{۲}+۴\rightarrow(|A|-۲)^{۲}=۰\rightarrow|A|=۲$$

$$|A^{-۱}|=\frac{۱}{|A|}=\frac{۱}{۲}$$

- ۲۷ - نکته: $A=\begin{bmatrix}a&b\\ c&d\end{bmatrix}$ ماتریس ضرایب و $B=\begin{bmatrix}e_{۱}\\ e_{۲}\end{bmatrix}$ ماتریس مقادیر معلوم دستگاه $\begin{cases}ax+by=e_{۱}\\ cx+dy=e_{۲}\end{cases}$ باشد، داریم:

$$AX=B\Rightarrow X=A^{-۱}B$$

از طرفی:

$$A^{-۱}=\frac{۱}{|ad-bc|}\begin{bmatrix}d&-b\\ -c&a\end{bmatrix}$$

$$A=\begin{bmatrix}۳&-۵\\ ۲&۱\end{bmatrix}\ ,\ |A|=۳+۱۰=۱۳\Rightarrow A^{-۱}=\frac{۱}{۱۳}\begin{bmatrix}۱&۵\\ -۲&۳\end{bmatrix}\ ,\ B=\begin{bmatrix}-۱\\ ۸\end{bmatrix}$$

$$X=\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}=A^{-۱}\times B=\frac{۱}{۱۳}\begin{bmatrix}۱&۵\\ -۲&۳\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}-۱\\ ۸\end{bmatrix}=\frac{۱}{۱۳}\begin{bmatrix}-۱+۴۰\\ ۲+۲۴\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۳\\ ۲\end{bmatrix}\Rightarrow x=۳, y=۲$$

- ۲۸

$$A=\frac{\sqrt{۳}}{۳}\times\begin{bmatrix}۱&۰\\ ۲&-۱\end{bmatrix}\Rightarrow A^{۱۰۰}=\left(\frac{\sqrt{۳}}{۳}\right)^{۱۰۰}\times B^{۱۰۰}$$

$$B^{۲}=\begin{bmatrix}۱&۰\\ ۲&-۱\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۱&۰\\ ۲&-۱\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۱&۰\\ ۰&۱\end{bmatrix}=I\Rightarrow B^{۲}=I$$

$$B^{۴}=B^{۲}\times B^{۲}=I\times I=I\Rightarrow B^{۶}=B^{۲}\times B^{۴}=I\times I=I\Rightarrow B^{۱۰۰}=I$$

$$A^{۱۰۰}=\left(\frac{\sqrt{۳}}{۳}\right)^{۱۰۰}\times B^{۱۰۰}=\frac{۱}{۳^{۵۰}}\times I$$

۲۹ -

$$B=\begin{bmatrix}2&1\\3&2\end{bmatrix},\ C=\begin{bmatrix}-3&2\\5&-3\end{bmatrix}\Rightarrow BAC=\begin{bmatrix}1&2\\0&-1\end{bmatrix}\Rightarrow \underbrace{B^{-1}B}_{I}A\underbrace{CC^{-1}}_{I}=B^{-1}\begin{bmatrix}1&2\\0&-1\end{bmatrix}C^{-1}\Rightarrow A=B^{-1}\begin{bmatrix}1&2\\0&-1\end{bmatrix}C^{-1}$$

$$B=\begin{bmatrix}2&1\\3&2\end{bmatrix}\Rightarrow |B|=4-3=1$$

$$\Rightarrow B^{-1}=\begin{bmatrix}2&-1\\-3&2\end{bmatrix}$$

$$C=\begin{bmatrix}-3&2\\5&-3\end{bmatrix}\Rightarrow |C|=9-10=-1$$

$$\Rightarrow C^{-1}=\frac{1}{-1}\times\begin{bmatrix}-3&-2\\-5&-3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3&2\\5&3\end{bmatrix}$$

$$A=B^{-1}\begin{bmatrix}1&2\\0&-1\end{bmatrix}C^{-1}=\begin{bmatrix}2&-1\\-3&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&2\\0&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3&2\\5&3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}31&19\\-49&-30\end{bmatrix}$$

۳۰ -

$$A=\begin{bmatrix}1&-1\\1&1\end{bmatrix}\Rightarrow A^2=\begin{bmatrix}1&-1\\1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&-1\\1&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&-2\\2&0\end{bmatrix}$$

$$A^4=\begin{bmatrix}0&-2\\2&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&-2\\2&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-4&0\\0&-4\end{bmatrix}=-4I$$

$$A^{100}=(A^4)^{25}=(-4I)^{25}=-(4^{25})\times I^{25}=-(2^{50})I$$

۳۱ - نکته: اگر $A=\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}$ باشد، در این صورت وارون ماتریس $A$ یعنی $A^{-1}$ از تساوی زیر به دست می‌آید:

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}\times\begin{bmatrix}d&-b\\-c&a\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}2&4\\1&3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3\\2\end{bmatrix}\Rightarrow x=3, y=2A=\begin{bmatrix}3&-4\\-1&2\end{bmatrix}, |A|=2\Rightarrow A^{-1}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}2&4\\1&3\end{bmatrix},$$

۳۲ - ماتریس‌های $A$ و $B$ تعویض‌پذیرند، پس:

$$\begin{bmatrix}x&y\\2&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}4&3\\3&4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4&3\\3&4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x&y\\2&-1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}4x+3y&3x+4y\\5&2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4x+6&4y-3\\3x+8&3y-4\end{bmatrix}$$

$$3x+8=5\to x=-1\quad ,\quad 3y-4=2\to y=2$$

$$\begin{bmatrix}x&2&-y\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2\\2\\-x\end{bmatrix}\xrightarrow{x=-1\ ,\ y=2}\begin{bmatrix}-1&2&-2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2\\2\\1\end{bmatrix}=-2+4-2=0$$

۳۳ -

$$||A|\cdot A|=|-2A|=(-2)^3|A|=-8\times(-2)=16$$

۳۴ -

$$A=\begin{bmatrix}3&-5\\4&2\end{bmatrix}\ ,\ B=\begin{bmatrix}1\\10\end{bmatrix}\to\begin{cases}3x-5y=1\\4x+2y=10\end{cases}$$

$$A^{-1}=\frac{1}{26}\begin{bmatrix}2&5\\-4&3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{1}{13}&\frac{5}{26}\\-\frac{2}{13}&\frac{3}{26}\end{bmatrix}$$

$$X=A^{-1}B\to X=\begin{bmatrix}\frac{1}{13}&\frac{5}{26}\\-\frac{2}{13}&\frac{3}{26}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\10\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{1}{13}+\frac{50}{26}\\-\frac{2}{13}+\frac{30}{26}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{52}{26}\\\frac{26}{26}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}\to\begin{matrix}x=2\\y=1\end{matrix}$$

۳۵ - فرض می‌کنیم ماتریس‌های $B$ و $C$ هر دو وارون $A$ باشند؛ ثابت می‌کنیم: $B=C$.

طبق فرض: $AB=BA=I$

طبق فرض: $AC=CA=I$

$$B=IB=(CA)B=C(AB)=CI=C$$

۳۶ -

الف) $(A+B)^2=(A+B)(A+B)=A^2+AB+BA+B^2$

$$\xrightarrow{AB=BA}A^2+2AB+B^2$$

ب) $(A-B)(A+B)=A^2+AB-BA-B^2 \xrightarrow{AB=BA} A^2-B^2$

۳۷ -

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ a & b & 1 \\ c & d & 1 \end{vmatrix}=0 \Rightarrow +x(b-d)-y(a-c)+1(ad-bc)=0$$
$$\Rightarrow Ax+By+C=0$$

پس معادلهٔ داده‌شده معادله یک خط راست است.

حال وضعیت دو نقطه را در معادله چک می‌کنیم

$$A(a,b) \Rightarrow \begin{vmatrix} a & b & 1 \\ a & b & 1 \\ c & d & 1 \end{vmatrix}=0 \text{ برقرار است}$$

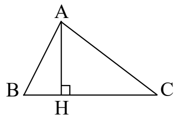
$$B(c,d) \Rightarrow \begin{vmatrix} c & d & 1 \\ a & b & 1 \\ c & d & 1 \end{vmatrix}=0 \text{ برقرار است}$$

پس معادلهٔ داده‌شده معادله یک خط راست است که از دو نقطه $A(a,b)$, $B(c,d)$ عبور می‌کند.

۳۸ - برای پیدا کردن مساحت مثلث $ABC$ باید اندازه قاعده و ارتفاع مثلث را داشته باشیم:

اندازه ارتفاع $AH$ یعنی فاصله $A$ از خط $BC$.

ابتدا معادله خط $BC$ را می نویسیم.




$$\begin{cases} B(b_1,b_2) \\ C(c_1,c_2) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m=\dfrac{c_2-b_2}{c_1-b_1} \\ y-b_2=\dfrac{c_2-b_2}{c_1-b_1}(x-b_1) \Rightarrow (y-b_2)(c_1-b_1)=(c_2-b_2)(x-b_1) \end{cases}$$

$$|AH|=\frac{|(a_2-b_2)(c_1-b_1)-(c_2-b_2)(a_1-b_1)|}{\sqrt{(c_1-b_1)^2+(c_2-b_2)^2}}=\frac{|a_1(b_2-c_2)-b_1(a_2-c_2)+c_1(a_2-b_2)|}{\sqrt{(c_1-b_1)^2+(c_2-b_2)^2}}$$

از طرفی $|BC|=\sqrt{(c_1-b_1)^2+(c_2-b_2)^2}$، پس:

$$S_{ABC}=\frac{1}{2}|AH|\times|BC|=\frac{1}{2}|a_1(b_2-c_2)-b_1(a_2-c_2)+c_1(a_2-b_2)|$$

از طرفی حاصل دترمینان داده‌شده به‌صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}=a_1(b_2-c_2)-b_1(a_2-c_2)+c_1(a_2-b_2)$$

بنابراین نصف قدرمطلق این دترمینان با مساحت مثلث برابر است.

۳۹ - فرض کنیم $B=\begin{bmatrix} x & y \\ p & q \\ r & s \end{bmatrix}$ و $C=\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{bmatrix}$ در این صورت داریم:

$$A=B\times C \Rightarrow |A|=|BC|=\left|\begin{bmatrix} x & y \\ p & q \\ r & s \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{bmatrix}\right|=\left|\begin{bmatrix} x & y & 0 \\ p & q & 0 \\ r & s & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\right|$$
$$=\left|\begin{bmatrix} x & y & 0 \\ p & q & 0 \\ r & s & 0 \end{bmatrix}\right|\left|\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\right|=0\times 0=0$$

۴۰ -

$$AB=\begin{bmatrix} 5000 & 2000 & 1500 \\ 2000 & 2000 & 1000 \end{bmatrix}\times\begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 22500 \\ 15000 \end{bmatrix}$$

عدد ۲۲۵۰۰ میزان فروش کل محصولات در بازار $m$ را نشان می‌دهد و عدد ۱۵۰۰۰ میزان فروش کل محصولات در بازار $n$ را نشان می‌دهد.

$$AC=\begin{bmatrix} 5000 & 2000 & 1500 \\ 2000 & 2000 & 1000 \end{bmatrix}\times\begin{bmatrix} 1/8 \\ 3/5 \\ 2/5 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 19750 \\ 13100 \end{bmatrix}$$

عدد ۱۹۷۵۰ میزان قیمت تمام‌شده محصولات در بازار $m$ و عدد ۱۳۱۰۰ میزان قیمت تمام‌شده محصولات در بازار $n$ می‌باشد.

$$AB-AC=\begin{bmatrix} 2750 \\ 1900 \end{bmatrix}$$

می‌دانیم سود یعنی از قیمت فروش، قیمت تمام‌شده را کم کنیم، پس ۲۷۵۰ میزان سود فروش محصولات در بازار $m$ و عدد ۱۹۰۰ میزان سود فروش محصولات در بازار $n$ را نشان می‌دهد.

۴۱ -

**الف**

مخالف صفر

۴۲ -

$$|A^{۲}|A|| = |A^{۲}| \times |A|^{۳} = |A|^{۲} \times |A|^{۳} = |A|^{۵} = ۳^{۵} = ۲۴۳$$

۴۳ -

شرط جواب نداشتن : $\frac{m}{۴} = \frac{۳}{m+۴} \neq \frac{-۳}{۲} \to m(m+۴) - ۱۲ = ۰ \to \begin{cases} m = -۶ & (\text{غیر قابل‌قبول}) \\ m = ۲ & (\text{قابل‌قبول}) \end{cases}$

۴۴ -

$$\begin{vmatrix} m-۳ & ۳ \\ ۴ & m+۱ \end{vmatrix} \neq ۰ \to (m-۳)(m+۱) - ۱۲ \neq ۰ \Rightarrow m^{۲} - ۲m - ۱۵ \neq ۰$$
$$\Rightarrow (m-۵)(m+۳) \neq ۰ \to m \neq ۵ \ , \ m \neq -۳$$

$$m \in \mathbb{R} - \{۵, -۳\}$$

۴۵ - ماتریس $A$ به‌صورت روبه‌رو می‌شود:

$$A = \begin{bmatrix} ۱ & ۰ & -۱ \\ ۲ & ۴ & ۱ \\ ۳ & ۶ & ۹ \end{bmatrix}$$
$$۲A - ۳I = \begin{bmatrix} ۲ & ۰ & -۲ \\ ۴ & ۸ & ۲ \\ ۶ & ۱۲ & ۱۸ \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} ۳ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۳ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۳ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -۱ & ۰ & -۲ \\ ۴ & ۵ & ۲ \\ ۶ & ۱۲ & ۱۵ \end{bmatrix}$$

۴۶ -

$$A = \begin{bmatrix} ۰ & a & ۰ \\ ۰ & b & ۰ \\ ۰ & c & ۰ \end{bmatrix} \ , \ B = \begin{bmatrix} d & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ \\ c & f & g \end{bmatrix}$$
$$AB = \begin{bmatrix} ۰ & a & ۰ \\ ۰ & b & ۰ \\ ۰ & c & ۰ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ \\ c & f & g \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ \end{bmatrix}$$

۴۷ -

$$\underbrace{\begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۲ & ۰ \end{bmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ ۰ & ۴ \end{bmatrix}}_{B} = \underbrace{\begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۲ & ۰ \end{bmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ ۵ & ۸ \end{bmatrix}}_{C}$$
$$AB = \begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ ۲ & ۴ \end{bmatrix} \ , \ AC = \begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ ۲ & ۴ \end{bmatrix}$$

همانطور که مشاهده می‌کنید $AB = AC$ اما $B \neq C$ می‌باشد.

۴۸ -

$$A^{۲} = AA = \begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & -۱ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & -۱ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix} = I$$
$$A^{۲} = I \xrightarrow{\times A} A^{۳} = A$$
$$A^{۲} = I \xrightarrow{\text{طرفین به توان ۳}} A^{۶} = I \xrightarrow{\times A} A^{۷} = A$$

۴۹ -

$$A^{۲} = \begin{bmatrix} -۲ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۳ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۴ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -۲ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۳ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۴ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۴ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۹ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱۶ \end{bmatrix}$$
$$A^{۳} = A^{۲}A = \begin{bmatrix} ۴ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۹ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱۶ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -۲ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۳ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۴ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -۸ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۲۷ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۶۴ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (-۲)^{۳} & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۳^{۳} & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۴^{۳} \end{bmatrix}$$

نتیجه می‌گیریم اگر $A = \begin{bmatrix} a & ۰ & ۰ \\ ۰ & b & ۰ \\ ۰ & ۰ & c \end{bmatrix}$ آنگاه داریم: $A^{n} = \begin{bmatrix} a^{n} & ۰ & ۰ \\ ۰ & b^{n} & ۰ \\ ۰ & ۰ & c^{n} \end{bmatrix}$

۵۰ - سطر دوم:

$$|A| \xlongequal{\text{بسط حول سطر ۲}} -۲(-۱۰ - ۳۵) + (-۱)(-۲ - ۲۸) - ۳(۵ - ۲۰) = ۹۰ + ۳۰ + ۴۵ = ۱۶۵$$

ستون سوم:

$$|A| \xlongequal{\text{بسط حول ستون۳}} +۷(۱۰+۴)-۳(۵-۲۰)-۲(-۱-۱۰)=۱۶۵$$

دترمینان: به کمک روش ساروس:

$$|A|=\begin{vmatrix} ۱ & ۵ & ۷ \\ ۲ & -۱ & ۳ \\ ۴ & ۵ & -۲ \end{vmatrix}\begin{vmatrix} ۱ & ۵ & ۷ \\ ۲ & -۱ & ۳ \\ ۴ & ۵ & -۲ \end{vmatrix}=(۲+۶۰+۷۰)-(-۲۸+۱۵-۲۰)=۱۳۲+۳۳=۱۶۵$$

۵۱ -

$$A=\begin{bmatrix} ۰ & ۱ & ۳ \\ ۰ & ۰ & ۴ \\ ۰ & ۰ & ۰ \end{bmatrix} \Rightarrow A^{۲}=\begin{bmatrix} ۰ & ۱ & ۳ \\ ۰ & ۰ & ۴ \\ ۰ & ۰ & ۰ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۰ & ۱ & ۳ \\ ۰ & ۰ & ۴ \\ ۰ & ۰ & ۰ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۰ & ۰ & ۴ \\ ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ \end{bmatrix}$$

$$A^{۳}=\begin{bmatrix} ۰ & ۰ & ۴ \\ ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۰ & ۱ & ۳ \\ ۰ & ۰ & ۴ \\ ۰ & ۰ & ۰ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ \end{bmatrix} \Rightarrow A^{۳}=۰ \Rightarrow n=۳$$

در اینجاست که ماتریس $A$ را پوچ توان از مرتبه ۳ می گوئیم.

۵۲ - می‌دانیم اگر هر واحد از $a$ مساوی $m$ واحد از $b$ باشد پس $a=mb$ ضمناً اگر هر واحد از $b$ مساوی $n$ واحد از $c$ باشد پس $b=nc$ حال از ترکیب روابط فوق می‌توان فهمید هر واحد از $a$ مساوی $mn$ واحد از $c$ است

$$\begin{cases} a=mb \\ b=nc \end{cases} \Rightarrow a=(mn)c$$

حال در ماتریس داده‌شده به‌طور مثال $a_{۱۲}$ یعنی هر واحد از $a$ مساوی چند واحد از $b$ است. و $a_{۲۴}$ یعنی هر واحد از $b$ چند واحد از $d$ است. بنابراین $a_{۱۲}\times a_{۲۴}$ یعنی هر واحد از $a$ چند واحد از $d$ است که این همان مقدار $a_{۱۴}$ می‌باشد.

پس در حالت کلی می‌توان گفت $a_{ik}\times a_{kj}=a_{ij}$ حال با توجه به رابطهٔ فوق اگر $A^{۲}=[m_{ij}]_{۴\times ۴}$ باشد:

$$m_{ij}=\sum_{k=۱}^{۴} a_{ik}a_{kj}=\sum_{k=۱}^{۴} a_{ij}=۴a_{ij}$$

بنابراین کافی است تک‌تک درایه‌های $A$ را در ۴ ضرب کنیم تا درایه‌های $A^{۲}$ ایجاد شوند.

۵۳ -

$$AB=BA=O \Longrightarrow \begin{cases} AB=\begin{bmatrix} ۲ & -۳ & -۵ \\ -۱ & ۴ & ۵ \\ ۱ & -۳ & -۴ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -۱ & ۳ & ۵ \\ ۱ & -۳ & -۵ \\ -۱ & ۳ & ۵ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ \end{bmatrix}=\bar{O} \\ \\ BA=\begin{bmatrix} -۱ & ۳ & ۵ \\ ۱ & -۳ & -۵ \\ -۱ & ۳ & ۵ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۲ & -۳ & -۵ \\ -۱ & ۴ & ۵ \\ ۱ & -۳ & -۴ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ \end{bmatrix}=\bar{O} \end{cases}$$

$$AC=A \Rightarrow AC=\begin{bmatrix} ۲ & -۳ & -۵ \\ -۱ & ۴ & ۵ \\ ۱ & -۳ & -۴ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۲ & -۲ & -۴ \\ -۱ & ۳ & ۴ \\ ۱ & -۲ & -۳ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۲ & -۳ & -۵ \\ -۱ & ۴ & ۵ \\ ۱ & -۳ & -۴ \end{bmatrix} \Rightarrow AC=A$$

$$CA=C \Rightarrow CA=\begin{bmatrix} ۲ & -۲ & -۴ \\ -۱ & ۳ & ۴ \\ ۱ & -۲ & -۳ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۲ & -۳ & -۵ \\ -۱ & ۴ & ۵ \\ ۱ & -۳ & -۴ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۲ & -۲ & -۴ \\ -۱ & ۳ & ۴ \\ ۱ & -۲ & -۳ \end{bmatrix} \Rightarrow CA=C$$

۵۴ -

$$A=\begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ ۳ & ۴ \\ ۵ & ۶ \end{bmatrix} \qquad B=\begin{bmatrix} -۳ & -۲ \\ ۱ & -۵ \\ ۴ & ۳ \end{bmatrix} \qquad C=\begin{bmatrix} a & d \\ b & e \\ c & f \end{bmatrix}$$

$$A+B-C=O_{۳\times ۲} \Rightarrow C=A+B=\begin{bmatrix} -۲ & ۰ \\ ۴ & -۱ \\ ۹ & ۹ \end{bmatrix}$$

۵۵ -

الف

نادرست زیرا:

اگر $A=\begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ ۲ & ۴ \end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix} ۲ & ۱ \\ ۳ & ۲ \end{bmatrix}$ و $C=\begin{bmatrix} -۲ & ۷ \\ ۵ & -۱ \end{bmatrix}$ آن‌گاه داریم:

$$\left.\begin{matrix} AB=\begin{bmatrix}۱ & ۲\\ ۲ & ۴\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۲ & ۱\\ ۳ & ۲\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۸ & ۵\\ ۱۶ & ۱۰\end{bmatrix} \\ AC=\begin{bmatrix}۱ & ۲\\ ۲ & ۴\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-۲ & ۷\\ ۵ & -۱\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۸ & ۵\\ ۱۶ & ۱۰\end{bmatrix}\end{matrix}\right\} \to AB=AC\ ,\ B\neq C$$

- ۵۶

**الف**

$$A\times B=\begin{bmatrix}۰ & ۱ & ۲\\ ۱ & ۳ & ۱\\ ۲ & ۱ & ۸\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}۲ & ۱ & ۰\\ -۱ & ۳ & ۲\\ ۲ & ۰ & ۵\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۳ & ۳ & ۱۲\\ ۱ & ۱۰ & ۱۱\\ ۱۹ & ۵ & ۴۲\end{bmatrix},A=\begin{bmatrix}۰ & ۱ & ۲\\ ۱ & ۳ & ۱\\ ۲ & ۱ & ۸\end{bmatrix}$$

- ۵۷

$$\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}\neq\frac{c}{c'}\to\frac{۲}{m-۱}=\frac{m}{۱}\neq\frac{۱}{۳}\to m(m-۱)=۲\to\begin{cases}m=-۱\\ m=۲\end{cases}$$

- ۵۸

$$A^{-۱}=\begin{bmatrix}۲ & -۱\\ ۲ & ۳\end{bmatrix}\to|A^{-۱}|=۸\ ,A=(A^{-۱})^{-۱}=\frac{۱}{۸}\begin{bmatrix}۳ & ۱\\ -۲ & ۲\end{bmatrix}$$

- ۵۹

$$A\times B=\begin{bmatrix}۴ & a\\ b & -۱\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۱ & -۲\\ ۳ & ۲\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۴+۳a & -۸+۲a\\ b-۳ & -۲b-۲\end{bmatrix}\to\begin{cases}-۸+۲a=۰ & a=۴\\ b-۳=۰ & b=۳\end{cases}$$

- ۶۰

$$|A|A||=|۴A|=۴^{۳}|A|=۴^{۴}$$

- ۶۱

$$A=\begin{bmatrix}۲ & -۱\\ -۴ & ۳\end{bmatrix}\ ,\ X=\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}\ ,\ B=\begin{bmatrix}۴\\ ۲\end{bmatrix}\to X=A^{-۱}B=\frac{۱}{۲}\begin{bmatrix}۳ & ۱\\ ۴ & ۲\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۴\\ ۲\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۷\\ ۱۰\end{bmatrix}$$

- ۶۲

$$B=\begin{bmatrix}۰ & -۱ & -۱\\ -۱ & ۰ & -۱\end{bmatrix}\ \text{و}\ A=\begin{bmatrix}-۱ & -۴\\ ۱ & -۲\\ ۳ & ۰\end{bmatrix}$$

$$AB=\begin{bmatrix}-۱ & -۴\\ ۱ & -۲\\ ۳ & ۰\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۰ & -۱ & -۱\\ -۱ & ۰ & -۱\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۴ & ۱ & ۵\\ ۲ & -۱ & ۱\\ ۰ & -۳ & -۳\end{bmatrix}$$

$$\to|AB|=۴(۶)-۱(-۶)+۵(-۶)=۰$$

- ۶۳

$$A=B\to\begin{bmatrix}۲x & ۵\\ z & ۱\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۳x & ۲x+y\\ -۲ & ۱\end{bmatrix}$$

$$\to\begin{cases}۲x=۳\\ ۲x+y=۵\\ z=-۲\end{cases}\to\begin{cases}x=\frac{۳}{۲}\\ y=۲\end{cases}\to x+۲y+۳z=\frac{-۱}{۲}$$

- ۶۴

$$|A|=۲\ ,\ |-\frac{۱}{۲}A^{۴}|=(-\frac{۱}{۲})^{۳}|A|^{۴}=-۲$$

- ۶۵

$$(A-۳I)^{۲}=(A-۳I)(A-۳I)=A^{۲}-۳AI-۳IA+۹I^{۲}\underset{I^{۲}=I}{\overset{AI=IA=A}{=}}A^{۲}-۶A+۹I$$

- ۶۶

$$A^{-۱}=\frac{۱}{-۲}\begin{bmatrix}-۱ & ۱\\ -۱ & ۳\end{bmatrix}\to\frac{۱}{۵}A^{-۱}=\begin{bmatrix}\frac{۱}{۱۰} & -\frac{۱}{۱۰}\\ \frac{۱}{۱۰} & -\frac{۳}{۱۰}\end{bmatrix}$$

$$۵A=\begin{bmatrix}۱۵ & -۵\\ ۵ & -۵\end{bmatrix}\ (۵A)^{-۱}=\frac{۱}{-۵۰}\begin{bmatrix}-۵ & ۵\\ -۵ & ۱۵\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{۱}{۱۰} & -\frac{۱}{۱۰}\\ \frac{۱}{۱۰} & -\frac{۳}{۱۰}\end{bmatrix}$$

- ۶۷

$$(B^{۲}+۲I)=\begin{bmatrix}۵ & ۱ & ۶\\ ۶ & ۱۰ & ۸\\ ۷ & ۷ & ۱۸\end{bmatrix}+۲\begin{bmatrix}۱ & ۰ & ۰\\ ۰ & ۱ & ۰\\ ۰ & ۰ & ۱\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۷ & ۱ & ۶\\ ۶ & ۱۲ & ۸\\ ۷ & ۷ & ۲۰\end{bmatrix}$$

- ۶۸

$$B=\begin{bmatrix} ۲ & ۰ & ۱ \\ ۱ & ۳ & ۱ \\ ۱ & ۱ & ۴ \end{bmatrix}$$

۶۹ -

$$m-۲=۰ \to m=۲ \qquad n=m=۲$$

۷۰ - الف) نادرست، زیرا در دستگاه دو معادلهٔ دو مجهولی، اگر $\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}\neq\frac{c}{c'}$، دو خط موازی‌اند و هیچ نقطهٔ مشترکی ندارند، پس دستگاه هیچ جوابی ندارد.

ب) با استفاده از دستور ساروس دترمینان ماتریس $A$ را به دست می‌آوریم:

$$\left|\begin{array}{ccc|cc} ۰ & ۰ & ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۲ & ۰ & ۰ & ۲ \\ -۱ & ۰ & ۰ & -۱ & ۰ \end{array}\right. \to |A|=(۰\times ۲\times ۰+۰\times(-۱)+۱\times ۰\times ۰)-(۱\times ۲\times(-۱)+۰+۰)=۰-(-۲)=۲$$

می‌دانیم اگر $k$ یک عدد حقیقی باشد و $A$ ماتریسی $n\times n$ باشد، در این صورت $|kA|=k^n|A|$ بنابراین داریم:

$$||A|A|=|A|^{۳}|A|=|A|^{۴}=۱۶$$

۷۱ -

$$A-۲I=\begin{bmatrix} ۴ & ۱ \\ ۰ & ۳ \end{bmatrix}-۲\begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۴ & ۱ \\ ۰ & ۳ \end{bmatrix}-\begin{bmatrix} ۲ & ۰ \\ ۰ & ۲ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۲ & ۱ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix}$$

فرض کنیم $A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$، وارون ماتریس $A$ از رابطهٔ زیر به دست می‌آید:

$$A^{-۱}=\frac{۱}{|A|}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

$$|A-۲I|=۲\times ۱-۱\times ۰=۲ \to (A-۲I)^{-۱}=\left(\begin{bmatrix} ۲ & ۱ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix}\right)^{-۱}=\frac{۱}{۲}\begin{bmatrix} ۱ & -۱ \\ ۰ & ۲ \end{bmatrix}$$

۷۲ - دو ماتریس $A$ و $B$ را تعویض‌پذیر گوییم هرگاه $AB=BA$.

$$(A-B)^{۲}=(A-B)(A-B)=A^{۲}-AB-BA+B^{۲}\overset{AB=BA}{=}A^{۲}-۲AB+B^{۲}$$

۷۳ - الف)

$$A=\begin{bmatrix} ۳(۱)-۲(۱) & ۳(۱)-۲(۲) & ۳(۱)-۲(۳) \\ ۳(۲)-۲(۱) & ۳(۲)-۲(۲) & ۳(۲)-۲(۳) \\ ۳(۳)-۲(۱) & ۳(۳)-۲(۲) & ۳(۳)-۲(۳) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۱ & -۱ & -۳ \\ ۴ & ۲ & ۰ \\ ۷ & ۵ & ۳ \end{bmatrix}$$

ب)

$$B^{۲}=B\times B=\begin{bmatrix} ۱ & ۲ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۳ \\ -۱ & ۲ & ۱ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۱ & ۲ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۳ \\ -۱ & ۲ & ۱ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۱\times ۱+۲\times ۰+۰\times(-۱) & ۱\times ۲+۲\times ۱+۰\times ۲ & ۱\times ۰+۲\times ۳+۰\times ۱ \\ ۰\times ۱+۱\times ۰+۳\times(-۱) & ۰\times ۲+۱\times ۱+۳\times ۲ & ۰\times ۰+۱\times ۳+۳\times ۱ \\ -۱\times ۱+۲\times ۰+۱\times(-۱) & -۱\times ۲+۲\times ۱+۱\times ۲ & -۱\times ۰+۲\times ۳+۱\times ۱ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۱ & ۴ & ۶ \\ -۳ & ۷ & ۶ \\ -۲ & ۲ & ۷ \end{bmatrix}$$

۷۴ - الف) $۲x-۱=۵ \to x=۳$

ب) ماتریس قطری، ماتریسی است مربعی که تمام درایه‌های غیرواقع بر قطر اصلی آن صفر باشند.

$$\begin{cases} m+۱=۰ \\ ۲n+۴=۰ \end{cases} \to \begin{cases} m=-۱ \\ n=-۲ \end{cases}$$

$$A+I=\begin{bmatrix} ۲ & ۰ \\ ۰ & ۵ \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۳ & ۰ \\ ۰ & ۶ \end{bmatrix}$$

۷۵ -

$$A=\begin{bmatrix} ۲ & ۱ \\ ۷ & ۴ \end{bmatrix} \quad , \quad B=\begin{bmatrix} ۴ \\ ۱۵ \end{bmatrix} \quad , \quad X=\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

$$AX=B \Rightarrow X=A^{-۱}\times B \Rightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}=\frac{۱}{۸-۷}\begin{bmatrix} ۴ & -۱ \\ -۷ & ۲ \end{bmatrix}\times\begin{bmatrix} ۴ \\ ۱۵ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۱ \\ ۲ \end{bmatrix} \Rightarrow x=۱ \text{،} y=۲$$

۷۶ - ماتریس قطری، ماتریسی است مربعی که تمام درایه‌های غیر واقع بر قطر اصلی آن صفر باشد.

$$A\times B=\begin{bmatrix} ۴ & a \\ b & -۱ \end{bmatrix}\times\begin{bmatrix} ۱ & -۲ \\ ۳ & ۲ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۴+۳a & -۸+۲a \\ b-۳ & -۲b-۲ \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} ۲a-۸=۰ & \Rightarrow a=۴ \\ b-۳=۰ & \Rightarrow b=۳ \end{cases}$$

۷۷ -

$$A=\begin{bmatrix} ۳ & -۴ \\ ۲ & ۱ \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}=\frac{۱}{۳+۸}\begin{bmatrix} ۱ & ۴ \\ -۲ & ۳ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۷ \\ ۱ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۱ \\ -۱ \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x=۱ \\ y=-۱ \end{cases}$$

۷۸ -

$$\begin{cases} m-۲=۰ \\ n+۱=۰ \end{cases} \to \begin{cases} m=۲ \\ n=-۱ \end{cases}$$

$$A\cdot B=\begin{bmatrix} ۲ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۳ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۳ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۲ & ۱ & ۱ \\ ۲ & ۰ & -۱ \\ ۳ & -۱ & ۲ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۴ & ۲ & ۲ \\ ۶ & ۰ & -۳ \\ ۹ & -۳ & ۶ \end{bmatrix}$$

۷۹ - بنابر دستور ساروس برای ماتریس $A$ داریم:

$$A=\left[\begin{array}{ccc|cc}۲&۳&۲&۲&۳\\۱&۲&۳&۱&۲\\-۱&-۲&۱&-۱&-۲\end{array}\right]$$

$$|A|=(۴-۹-۴)-(-۴-۱۲+۳)=-۹+۱۳=۴$$

$$B=\begin{bmatrix}۳&۰&۰\\۰&-۱&۰\\۰&۰&۲\end{bmatrix}\Rightarrow B=۳\times(-۱)\times۲=-۶$$

در نتیجه داریم:

$$|A\times B|+|۲I_۳|=|A|\times|B|+۸|I|=-۲۴+۸=-۱۶$$

۸۰ - از آنجایی که ماتریس قطری است؛ همه درایه‌ها جز درایه‌های قطر اصلی برابر صفر است؛ داریم:

$$A\times B=\begin{bmatrix}۴+۳a&-۸+۲a\\b-۳&-۲b-۲\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}۲a-۸=۰\Rightarrow۲a=۸\Rightarrow a=۴\\b-۳=۰\Rightarrow b=۳\end{cases}$$

۸۱ - الف)

$$\text{شرط فاقد جواب}:\ \frac{۱}{m}=\frac{-۲}{۶}\neq\frac{۳}{-۴}\Rightarrow m=-۳\ \text{قابل‌قبول}$$

ب)

$$\begin{vmatrix}۱&-۲\\۲&۶\end{vmatrix}=۱۰\to A^{-۱}=\frac{۱}{۱۰}\begin{bmatrix}۶&۲\\-۲&۱\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=\frac{۱}{۱۰}\begin{bmatrix}۶&۲\\-۲&۱\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۳\\-۴\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۱\\-۱\end{bmatrix}\to x=۱\ ,\ y=-۱$$

۸۲ -

$$\left.\begin{array}{l}A^۲=\begin{bmatrix}۰&۴\\۲&۱\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۰&۴\\۲&۱\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۸&۴\\۲&۹\end{bmatrix}\\mA+nI=\begin{bmatrix}۰&۴m\\۲m&m\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}n&۰\\۰&n\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}n&۴m\\۲m&m+n\end{bmatrix}\end{array}\right\}\Rightarrow n=۸\ ,\ m=۱$$

۸۳ -

$$\left.\begin{array}{l}\text{بسط نسبت به ستون اول}:\ |A|=۲\begin{vmatrix}۱&-۲\\۳&۴\end{vmatrix}=۲\times۱۰=۲۰\\|B|=-۶\to|B^۲|=|B|^۲=۳۶\end{array}\right\}\to|A|+|B^۲|=۵۶$$

۸۴ -

$$[x\ \ ۳]\begin{bmatrix}۱&۰\\-۱&۴\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۳\\-۱\end{bmatrix}=۰=[x-۳\ \ ۱۲]\begin{bmatrix}۳\\-۱\end{bmatrix}=[۳x-۲۱]=۰\Rightarrow x=۷$$

۸۵ -

$$A=B\Rightarrow\begin{cases}x-۱=y+۱\\x-۲=۸\\z+۱=۴\end{cases}\to x=۱۰\ ,\ y=۸\ ,\ z=۳\Rightarrow x+y+z=۲۱$$

۸۶ -

$$۲|A|^۲+۳|A|-۲=۰$$

$$|A|=\frac{-۳\pm\sqrt{۹-۴\times۲(-۲)}}{۴}=\frac{-۳\pm۵}{۴}\Rightarrow|A|=-۲\ ,\ \frac{۱}{۲}$$

می‌توان دو ماتریس زیر را معرفی کرد که برای آنها $|A|=-۲\ ,\ \frac{۱}{۲}$ باشد.

$$A=\begin{bmatrix}-۲&۰&۰\\۰&۱&۰\\۰&۰&۱\end{bmatrix}\Rightarrow|A|=-۲\times۱\times۱=-۲$$

$$A=\begin{bmatrix}\frac{۱}{۲}&۰&۰\\۰&۱&۰\\۰&۰&۱\end{bmatrix}\Rightarrow|A|=\frac{۱}{۲}\times۱\times۱=\frac{۱}{۲}$$

۸۷ -

$$A=\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}\Rightarrow۲A-I=\begin{bmatrix}۰&۰\\۰&۳\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}۱&-۱\\۲&m\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{bmatrix}۲a-۱&۲b\\۲c&۲d-۱\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-۱&۱\\-۲&۳-m\end{bmatrix}$$

$2a-1=-1 \Rightarrow 2a=0 \Rightarrow a=0\,,\ 2b=1 \Rightarrow b=\frac{1}{2}$

$2c=-2 \Rightarrow c=-1\,,\ 2d-1=3-m \quad (1)$

فرض : $a+d=5 \Rightarrow 0+d=5 \Rightarrow d=5 \quad (2)$

$(1),(2) \Rightarrow 2\times 5-1=3-m \Rightarrow m=-6$

۸۸ -

$$A^{-1}(A+2B^{-1}+AB^{-1})BA=(A^{-1}\times A+2A^{-1}B^{-1}+A^{-1}AB^{-1})BA=(I+2A^{-1}B^{-1}+IB^{-1})BA=I\times BA+2A^{-1}\underbrace{B^{-1}B}_{I}A+\underbrace{BB^{-1}}_{I}A$$

$$=BA+2\underbrace{A^{-1}A}_{I}+A=BA+2I+A$$

$$BA=\begin{bmatrix}0&1\\4&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&-1\\3&4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3&4\\11&0\end{bmatrix}\Rightarrow BA+2I+A=\begin{bmatrix}3&4\\11&0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}2&0\\0&2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}2&-1\\3&4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}7&3\\14&6\end{bmatrix}$$

۸۹ -

$$A=\begin{bmatrix}1-1&1-2&1-3\\2-1&2-2&2-3\\3-1&3-2&3-3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&-1&-2\\1&0&-1\\2&1&0\end{bmatrix}$$

$$2A+I=\begin{bmatrix}1&-2&-4\\2&1&-2\\4&2&1\end{bmatrix}$$

دترمینان ماتریس $2A+I$ را با بسط نسبت به سطر اول می‌یابیم:

$$|2A+I|=\begin{vmatrix}1&-2&-4\\2&1&-2\\4&2&1\end{vmatrix}=\begin{matrix}(1+4)-(-2)(2+8)+(-4)(4-4)\\=5+20=25\end{matrix}$$

۹۰ -

$$A^3A^{-1}=A^2\times\underbrace{A\times A^{-1}}_{I}=A^2I=A^2\Rightarrow|A^3A^{-1}+3A^2|=|A^2+3A^2|=|4A^2|=4^3\times|A|^2=4^3\times 2^2=4^4$$

۹۱ -

$|A|>0$

$|A|=5|A|\times 4|A|^2-5\times 2|A|=20|A|^3-10|A|\Rightarrow 20|A|^3-11|A|=0\Rightarrow |A|(20|A|^2-11)=0$

$$\Rightarrow\begin{cases}|A|=0 \text{ غ‌ق یا}\\ 20|A|^2=11\Rightarrow |A|=\sqrt{\frac{11}{20}}|A|=-\sqrt{\frac{11}{20}} \text{ غ‌ق}\end{cases}$$

$$\Rightarrow A=\begin{bmatrix}5\sqrt{\frac{11}{20}}&2\sqrt{\frac{11}{20}}\\5&\frac{11}{5}\end{bmatrix}\quad |A|=\sqrt{\frac{11}{20}}$$

$$=\sqrt{\frac{20}{11}}\times\begin{bmatrix}\frac{11}{5}&-2\sqrt{\frac{11}{20}}\\-5&5\sqrt{\frac{11}{20}}\end{bmatrix}\quad A^{-1}=\frac{1}{|A|}\times\begin{bmatrix}\frac{11}{5}&-2\sqrt{\frac{11}{20}}\\-5&5\sqrt{\frac{11}{20}}\end{bmatrix}$$

۹۲ - الف) درست

$A$ و $B$ وارون‌پذیر $\Rightarrow |A|\neq 0\,,\ |B|\neq 0\Rightarrow |AB|\neq 0\Rightarrow AB$ وارون‌پذیر

ب) درست

$AB$ وارون‌پذیر $\Rightarrow |AB|\neq 0\Rightarrow |A|\times|B|\neq 0\Rightarrow |A|\neq 0\,,\ |B|\neq 0\Rightarrow B$ و $A$ وارون‌پذیر

پ) درست

$A$ و $B$ وارون‌پذیر نیستند $\Rightarrow |A|=0\,,\ |B|=0\Rightarrow |AB|=0\Rightarrow AB$ وارون‌پذیر نیست

ت) نادرست

$AB$ وارون‌پذیر نیست $\Rightarrow |AB|=0\Rightarrow |A|\times|B|=0\Rightarrow |A|=0$ یا $|B|=0$

$A$ یا $B$ وارون‌پذیر نیست، (نه هر دو $A$ و $B$).

۹۳ -

$$M=\begin{bmatrix}1^2-1^2 & 1^2-2^2 & 1^2-3^2\\ 2^2-1^2 & 2^2-2^2 & 2^2-3^2\\ 3^2-1^2 & 3^2-2^2 & 3^2-3^2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&-3&-8\\3&0&-5\\8&5&0\end{bmatrix}$$

$$|M|=0\times\begin{vmatrix}0&-5\\5&0\end{vmatrix}-(-3)\begin{vmatrix}3&-5\\8&0\end{vmatrix}+(-8)\begin{vmatrix}3&0\\8&5\end{vmatrix}\Rightarrow|M|=3\times40-8\times15=80$$

۹۴ -

$$(A\times B)^{-1}=B^{-1}\times A^{-1}\,,\ (kA)^{-1}=\frac{1}{k}\times A^{-1}\,,\ (A^{-1})^{-1}=A$$

۹۵ -

$$A=\begin{bmatrix}2&-1\\3&-2\end{bmatrix}\Rightarrow A^2=A\times A=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}=I\Rightarrow A^2=I\Rightarrow A^3=A\times A^2=AI=A\Rightarrow A^4=A^3A=A\times A=A^2=I\Rightarrow A^7-A^4$$

$$=A^4(A^3-I)=I(A-I)=A-I=\begin{bmatrix}2&-1\\3&-2\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&-1\\3&-3\end{bmatrix}$$

۹۶ - الف)

$$\frac{2m}{2}\neq\frac{3}{-1}\to m\neq-3$$

ب) می‌دانیم اگر $A=\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}$ در این صورت وارون ماتریس $A$ یعنی $A^{-1}$ برابر است با:

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}\times\begin{bmatrix}d&-b\\-c&a\end{bmatrix}$$

$$m=2\Rightarrow A=\begin{bmatrix}4&3\\2&-1\end{bmatrix}\to|A|=-10\Rightarrow A^{-1}=\frac{1}{-10}\begin{bmatrix}-1&-3\\-2&4\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=\frac{1}{-10}\begin{bmatrix}-1&-3\\-2&4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}\to\begin{cases}x=1\\y=-1\end{cases}$$

۹۷ -

$$\begin{bmatrix}1&x\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&4\\1&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}=0\to\begin{bmatrix}2+x&4+2x\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4+2x+4+2x\end{bmatrix}=0\to x=-2$$

۹۸ - الف) از دو طرف ماتریس $A$ دترمینان می‌گیریم؛ داریم:

$$A=\begin{bmatrix}|A|&8\\3&5\end{bmatrix}\Rightarrow|A|=5|A|-24\to|A|=6$$

ب) ماتریس $A$ وارون‌پذیر است و وارون آن برابر است با:

$$A^{-1}=\frac{1}{6}\begin{bmatrix}5&-8\\-3&6\end{bmatrix}$$

می‌دانیم اگر $A=\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}$ در این صورت وارون ماتریس $A$ یعنی $A^{-1}$ برابر است با:

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}\begin{bmatrix}d&-b\\-c&a\end{bmatrix}$$

۹۹ -

ماتریس قطری $A\Rightarrow\begin{cases}m-2=0\to m=2\\n+1=0\to n=-1\end{cases}$

$$B=\begin{bmatrix}2&1&1\\2&0&-1\\3&-1&2\end{bmatrix}\to|B|=2(-1)-1(7)+(-2)=-11\,,\ |A|=2$$

در نتیجه:

$$|A|+|B|=2+(-11)=-9$$

۱۰۰ - طبق فرض $A^2-B=\overline{O}$ داریم:

$$A^2=B\to\begin{bmatrix}5&2&2\\2&2&-1\\2&-1&5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a+b&2&2\\2&2&-1\\2&-1&4a+b\end{bmatrix}$$

$$\begin{cases}a+b=5\\4a+b=5\end{cases}\to a=0\,,\ b=5$$

۱۰۱ -

$$A^2=\begin{bmatrix}0&2\\-1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&2\\-1&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2&0\\0&-2\end{bmatrix}=-2I$$

$$A^7=(A^2)^3\cdot A=(-2I)^3\cdot A=-8\begin{bmatrix}0&2\\-1&0\end{bmatrix}$$

۱۰۲ - دترمینان ماتریس $BA$ را با بسط نسبت به سطر اول محاسبه می‌کنیم:

$$BA = \begin{bmatrix} ۱ & -۱ \\ ۰ & ۱ \\ ۲ & ۳ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ۲ & ۴ & ۱ \\ -۱ & ۳ & ۲ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۳ & ۱ & -۱ \\ -۱ & ۳ & ۲ \\ ۱ & ۱۷ & ۸ \end{bmatrix}$$

$$|BA| = ۳(-۱۰) - ۱(-۱۰) - ۱(-۲۰) = ۰$$

۱۰۳ -

نادرست

الف

مثال نقض: $\begin{bmatrix} ۰ & ۰ \\ ۱ & ۱ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ۱ & ۱ \\ -۱ & -۱ \end{bmatrix} = \overline{O} = \begin{bmatrix} ۰ & ۰ \\ ۱ & ۱ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ۲ & ۲ \\ -۲ & -۲ \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} ۱ & ۱ \\ -۱ & -۱ \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} ۲ & ۲ \\ -۲ & -۲ \end{bmatrix}$

.۱۰۴ -

الف

ماتریس همانی یک ماتریس مربعی است که درایه‌های روی قطر اصلی آن برابر با ۱ و بقیه درایه‌ها همگی صفر هستند.

$$\begin{cases} r = ۱ \\ m - ۱ = ۰ \to m = ۱ \end{cases} \to m + r = ۱ + ۱ = ۲$$

.۱۰۵ -

درست

الف

$n \times n$ ماتریس $A \to |KA| = K^n|A|$

$|۲A| = (۲)^۳|A| = ۸ \times ۵ = ۴۰$

.۱۰۶ -

الف

$$A = \begin{bmatrix} a_{۱۱} & a_{۱۲} & a_{۱۳} \\ a_{۲۱} & a_{۲۲} & a_{۲۳} \\ a_{۳۱} & a_{۳۲} & a_{۳۳} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۲ & ۰ & ۰ \\ ۱ & ۴ & ۰ \\ ۱ & ۲ & ۶ \end{bmatrix}$$

ب

$$\left|\begin{array}{ccc|cc} ۲ & ۱ & ۰ & ۲ & ۱ \\ -۱ & ۳ & ۲ & -۱ & ۳ \\ ۲ & ۰ & ۵ & ۲ & ۰ \end{array}\right| \Rightarrow |B| = (۳۰ + ۴ + ۰) - (۰ + ۰ - ۵) = ۳۹$$

۱۰۷ -

الف

درست

۱۰۸ -

الف

ماتریس

۱۰۹ -

الف

قطری

۱۱۰ -

الف

نادرست

۱۱۱ -

الف

خیر ـ زیرا دو ماتریس هم‌مرتبه نیستند.

ب

$$A \times B = \begin{bmatrix} -۳ & ۴ & -۲ \\ -۴ & ۶ & -۴ \\ -۸ & ۱۱ & -۶ \end{bmatrix} \quad |A \times B| = ۰$$