نام و نام خانوادگی: سهیل حاج کرم

نام آزمون: ۲۲۰ سوال تشریحی هندسه دوازدهم

فصل دو

آموزشگاه پرسا

فصل دوم : مقاطع مخروطی

انواع مقاطع | دایره

۱ - در نقطهٔ $A(۲,۳)$ روی دایرهٔ $x^۲ + y^۲ - ۲x - ۲y = ۳$ مماسی بر دایره رسم کرده‌ایم، معادلهٔ این خط مماس را به دست آورید. متوسط- ۱۳۹۸

مکان هندسی و کاربرد

۲ - مکان هندسی وسط پاره‌خط‌هایی به طول ثابت L که دو سر آنها روی دو خط عمود برهم باشد را بیابید. متوسط- ۱۳۹۸

انواع مقاطع | دایره

۳ - دایره‌های $x^۲ + y^۲ - ۲x = ۴$ و $x^۲ + y^۲ = ۴$ نسبت به هم چه وضعی دارند؟ متوسط- ۱۳۹۸

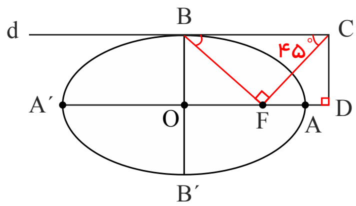
۴ - معادلهٔ دایره‌ای را بنویسید که مرکزش روی خط $d: y = ۳x - ۸$ باشد و بر محورهای مختصات در ناحیهٔ چهارم مماس باشد. متوسط- ۱۳۹۸

سهمی

۵ - معادلهٔ مکان هندسی نقاطی از صفحه که از نقطهٔ $(۱,-۲)$ و خط $x = ۳$ به یک فاصله‌اند را به دست آورید. متوسط- ۱۳۹۸

بیضی

۶- در بیضی مقابل AA' و BB' در قطراند. خط d در نقطهٔ B بر بیضی مماس است. پاره‌خط BF را رسم می‌کنیم و در نقطهٔ F عمودی بر BF رسم می‌کنیم تا خط d را در نقطهٔ C قطع کند و از C عمودی بر امتداد قطر بزرگ بیضی رسم می‌کنیم تا آن را در نقطه‌ای مانند D قطع کند. اگر $B\hat{C}F = ۴۵^\circ$، مقدار $\dfrac{AD}{AF}$ را به دست آورید.
سخت- ۱۴۰۲



دایره

۷- نقاط $A(-۱,-۱)$ و $B(۱,۱)$ و $C(۱,-۳)$ رئوس مثلث ABC هستند. معادلهٔ دایرهٔ محیطی مثلث ABC را بنویسید. سپس معادلهٔ مماس بر این دایره را در رأس B به دست آورید.
سخت- ۱۴۰۲

۸ - معادلهٔ دایره‌ای را بنویسید که مرکز آن $O'(۲,۱)$ بوده و بر خط $۳x + ۴y = -۵$ مماس باشد. متوسط- ۱۴۰۰

۹ - وضعیت دو دایرهٔ $x^۲ + (y-۱)^۲ = ۱$ و $(x-۱)^۲ + y^۲ = ۱$ را نسبت به هم مشخص کنید. متوسط- ۱۴۰۰

۱۰ - مساحت دایره‌ای که از نقطهٔ $A(۱,۲)$ گذشته و بر محورهای مختصات مماس شود را بیابید. متوسط- ۱۳۹۸

مکان هندسی و کاربرد

۱۱ - مکان هندسی نقاطی را بیابید که از آنها بر دایرهٔ $C(O,R)$ دو مماس عمود بر هم رسم شود. متوسط- ۱۳۹۸

۱۲ - در مثلث ABC، ضلع BC ثابت و فاصلهٔ رأس A از BC برابر با h است. با جابه‌جا شدن رأس A، مکان هندسی مرکز همرسی میانه‌های مثلث ABC را بیابید.

متوسط - ۱۳۹۸

انواع مقاطع دایره

۱۳ - معادلهٔ دایره‌ای را بنویسید که خطوط $x + y = ۱$ و $x - y = ۳$ شامل قطرهایی از آن بوده و خط $۴x + ۳y = -۵$ بر آن مماس باشد.

متوسط - ۱۳۹۸

مکان هندسی و کاربرد

۱۴ - دو خط d و d' متقاطع هستند. چند نقطه وجود دارد که از d و d' به فاصلهٔ $۲cm$ است؟

متوسط - ۱۳۹۸

انواع مقاطع دایره

۱۵ - حدود c را طوری مشخص کنید که خط $L : ۳x + ۴y + c = ۰$ دایرهٔ $(x - ۳)^۲ + y^۲ = ۱$ را قطع کند.

متوسط - ۱۳۹۸

متوسط- ۱۳۹۸
۱۶ - طول مماس رسم‌شده از نقطهٔ $M(۱, -۲)$ بر دایرهٔ $C: x^۲ + y^۲ + x - ۲y - ۱ = ۰$ را به دست آورید.

متوسط- ۱۳۹۸
۱۷ - معادلهٔ دایرهٔ C' را که مرکزش $O'(۵, ۷)$ و بر دایرهٔ $C: x^۲ + y^۲ - ۴x - ۶y + ۴ = ۰$ مماس می‌باشد را بنویسید.

سهمی

متوسط- ۱۳۹۸
۱۸ - معادلهٔ سهمی را بنویسید که $F(۵, ۳)$ کانون و $S(۱, ۳)$ رأس آن باشد.

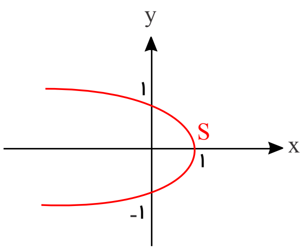
دایره

متوسط- ۱۳۹۸
۱۹ - معادلهٔ دایره‌ای را بنویسید که مرکز آن مبدأ مختصات بوده و بر خط $۳y + ۴x = ۵$ مماس باشد.

سهمی

۲۰ – نمودار معادلهٔ $y^{۲} - ۲y + ۸x + ۹ = ۰$ را رسم کنید. متوسط- ۱۳۹۸

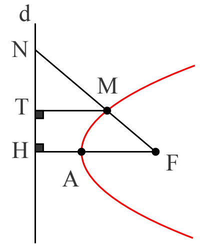
۲۱ – در شکل زیر معادلهٔ سهمی و خط هادی آن را به دست آورید. متوسط- ۱۳۹۸



۲۲ – معادلهٔ $y^{۲} = ۶x$ مربوط به چه شکلی است؟ آن را مشخص نمایید. متوسط- ۱۳۹۸

۲۳ - در شکل، سهمی با رأس A و کانون F و خط هادی d رسم شده است. از F به نقطهٔ دلخواه M روی سهمی وصل کرده و امتداد داده‌ایم تا d را در N قطع کند و از نقطهٔ M، MT را بر d عمود کرده‌ایم. ثابت کنید: $\frac{FN}{FA} = \frac{۲NT}{TH}$

سخت- ۱۴۰۲



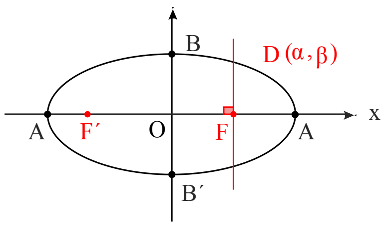
بیضی

۲۴ - نقاط $F'(۲-\sqrt{۵}, ۰)$ و $F(۲+\sqrt{۵}, ۰)$ دو کانون یک بیضی و $A(۵, ۰)$ نقطه‌ای از آن است. خروج از مرکز بیضی را محاسبه کنید.

متوسط- ۱۳۹۸

۲۵ - مرکز بیضی مقابل بر مبدأ مختصات و قطرهای آن مانند شکل بر محورهای x و y منطبق هستند و فاصلهٔ F از هر دو نقطهٔ O و A برابر ۴ است. اگر خطی که در نقطهٔ F بر AA' عمود کرده‌ایم بیضی را در نقطهٔ D قطع کرده باشد. مختصات D را به دست آورید.

سخت- ۱۳۹۸



مکان هندسی و کاربرد

۲۶ – جای خالی را با عبارت مناسب پر کنید. متوسط- ۱۳۹۸

الف مکان هندسی، مجموعهٔ نقاطی از صفحه (یا فضا) است که همهٔ آن‌ها یک .... داشته باشند و همچنین هر نقطه که آن ویژگی را داشته باشد عضو این مجموعه باشد. آسان- ۱۳۹۸

ب در حالتی که خروج از مرکز بیضی برابر صفر باشد بیضی تبدیل به یک .... می‌شود. متوسط- ۱۳۹۸

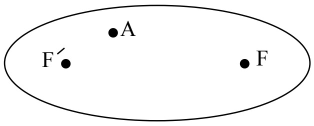
۲۷ – در صفحهٔ مثلث ABC چند نقطه وجود دارد که از رأس‌های B و C به یک فاصله و از اضلاع AB و AC یا امتداد آنها به یک فاصله باشد؟ سخت- ۱۳۹۸

۲۸ – نقاط A، B، C و D در صفحه مفروض‌اند، نقطه‌ای در این صفحه بیابید که از A و B به یک فاصله و از C و D نیز به یک فاصله باشد (بحث کنید). سخت- ۱۴۰۲

انواع مقاطع بیضی

متوسط- ۱۳۹۸

۲۹ - در شکل مقابل نقطهٔ A داخل بیضی و نقاط F و F' کانون‌های بیضی‌اند.
ثابت کنید مجموع فواصل نقطهٔ A از F و F' کوچک‌تر از قطر بزرگ بیضی است.



دایره

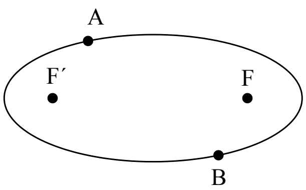
متوسط- ۱۳۹۸

۳۰- وضعیت خط $x+y=۲$ و دایرهٔ $x^۲+y^۲=۲$ را نسبت به هم مشخص کنید.

بیضی

۳۱- دو نقطهٔ A و B مطابق شکل روی بیضی و نقاط F و F' کانون‌های بیضی‌اند. اگر $AF'=BF$ باشد ثابت کنید دو پاره خط AF و BF' موازی‌اند.

سخت- ۱۳۹۸



متوسط- ۱۳۹۸

۳۲- اگر خروج از مرکز بیضی برابر $\frac{۳}{۵}$ و طول قطر کوچک بیضی ۱۶ باشد، طول قطر بزرگ بیضی و فاصلهٔ کانونی آن را به دست آورید.

سهمی

۳۳ - معادلهٔ سهمی را بنویسید که $F(۱,-۲)$ کانون و $S(۱,۲)$ رأس آن باشد، سپس معادلهٔ خط هادی آن را بنویسید. متوسط- ۱۳۹۸

مکان هندسی و کاربرد

۳۴ - مکان هندسی وسط پاره‌خط‌هایی را بیابید که دو سر آنها بر دو خط موازی واقع باشند؟ متوسط- ۱۳۹۸

۳۵ - نقطهٔ A درون زاویهٔ xOy قرار دارد. چند نقطه درون زاویه وجود دارد که از A به فاصلهٔ r و از اضلاع زاویه به یک فاصله باشد. (بحث کنید)

متوسط- ۱۳۹۸

۳۶ - مکان هندسی هریک از مجموعهٔ نقاط زیر را مشخص کنید.

الف) نقاطی از صفحه که از دو خط متقاطع d و d' به یک فاصله‌اند. متوسط- ۱۴۰۲

ب) مرکزهای همهٔ دایره‌هایی در صفحه که بر خط d در نقطهٔ ثابت A مماس هستند.

پ) مرکزهای همهٔ دایره‌هایی با شعاع ثابت R که بر خط d در صفحه مماس هستند.

ت) مرکزهای همهٔ دایره‌هایی با شعاع ثابت R که بر دایره $C(O,r)$ در صفحهٔ این دایره مماس خارجی هستند.

انواع مقاطع سهمی

۳۷- در سهمی $۴y^۲ + ۴y - ۲x - ۱ = ۰$، مختصات کانون و رأس و معادلهٔ خط هادی را بیابید. متوسط- ۱۳۹۸

۳۸- خط هادی سهمی $-(x-۲)^۲ = ۱۶y + ۱۶$ خط به معادلهٔ $y = ۳x$ را در چه نقطه‌ای قطع می‌کند؟ متوسط- ۱۳۹۸

۳۹- نقطهٔ $S = (۲, ۱)$ رأس سهمی افقی با کانون F می‌باشد. اگر F روی خط $y = -x + ۱$ قرار گیرد، مختصات F را مشخص کنید و سپس معادلهٔ سهمی را بنویسید. متوسط- ۱۳۹۸

بیضی

۴۰- طول قطرهای کوچک و بزرگ یک بیضی ۶ و ۱۲ می‌باشد. طول OF چقدر است؟ (O مرکز و F کانون بیضی می‌باشد.) متوسط- ۱۳۹۸

۴۱- ثابت کنید در بیضی، بیشترین و کمترین فاصلهٔ نقاط روی بیضی از کانون‌ها برابر است با: $a + c$ و $a - c$. متوسط- ۱۳۹۸

دایره

۴۲ - طول کوتاه‌ترین وتر گذرنده از نقطهٔ $A(1, 1)$ در دایرهٔ $x^2 - 4x + y^2 - 2y = 4$ را حساب کنید. سخت- ۱۳۹۸

۴۳ - دایرهٔ C بر محور yها و خط $x = 6$ مماس بوده و از نقطهٔ $A(2, 2)$ می‌گذرد. معادلهٔ دایره را بنویسید. سخت- ۱۳۹۸

۴۴ - دایرهٔ C به مرکز $O(-1, 1)$ و شعاع ۲، از چند ناحیهٔ مختصات می‌گذرد؟ متوسط- ۱۳۹۸

۴۵- معادلهٔ دایره‌ای به شعاع ۳ که مرکز آن روی تقاطع دو خط $y = ۲x + ۱$ و $y = x - ۲$ باشد را بنویسید. متوسط- ۱۳۹۸

۴۶- مرکز دایرهٔ C به شعاع ۳ روی خط $y = x$ قرار دارد. اگر این دایره از نقطهٔ $A(-\sqrt{۲}, \sqrt{۲})$ بگذرد معادلهٔ آن را بنویسید. سخت- ۱۳۹۸

سهمی

۴۷- در سهمی $y^۲ + ay + x + b = ۰$ مقادیر a و b را طوری بیابید که $F(۱, ۱)$ کانون آن باشد. متوسط- ۱۳۹۸

۴۸- a و b را چنان تعیین کنید که نقطهٔ $S(-۱, ۲)$ رأس سهمی $x = y^۲ + ay + b$ باشد. متوسط- ۱۳۹۸

۴۹ - در سهمی $(x+۳y)^۲+۸(x-۱)^۲=(۳x+y)^۲$، مختصات کانون و معادلهٔ خط هادی و معادلهٔ محور تقارن را بیابید. متوسط- ۱۳۹۸

۵۰ - مختصات کانون و رأس و معادلهٔ خط هادی سهمی $y^۲-۶y+۱۶x+۲۵=۰$ را بیابید. متوسط- ۱۳۹۸

بیضی

۵۱ - نقطهٔ M روی بیضی واقع است، به‌طوری که $MF-MF'=۲b$ باشد ثابت کنید: $MF\times MF'=a^۲-b^۲=c^۲$ متوسط- ۱۳۹۸

۵۲ - طول قطر کوچک و فاصلهٔ کانونی و خروج از مرکز بیضی را بیابید که نقاط $A(۳,۴)$ و $A'(۳,-۴)$ دو رأس کانونی آن و طول قطر کوچک آن $\frac{۳}{۴}$ فاصلهٔ کانونی می‌باشد. سخت- ۱۳۹۸

۵۳ - مختصات مرکز و طول قطرها و فاصلهٔ کانونی بیضی را بنویسید که $A(۱,۷)$ و $A'(۱,-۵)$ دو سر قطر بزرگ و $e=\frac{\sqrt{۵}}{۳}$ خروج از مرکز آن باشد. متوسط- ۱۳۹۸

۵۴ - طول قطرها و فاصلهٔ کانونی یک بیضی افقی را بیابید که $A(۴,۱)$ یک سر قطر بزرگ و $B(-۱,۴)$ یک سر قطر کوچک آن باشد. متوسط- ۱۳۹۸

۵۵ - طول قطرها و فاصلهٔ کانونی بیضی را بیابید که درآن $A(۷,۲)$ و $A'(-۳,۲)$ دو سر قطر بزرگ آن و $F(۵,۲)$ یک کانون آن باشد. متوسط- ۱۳۹۸

دایره

سخت- ۱۳۹۸

۵۶ - معادلهٔ دایره‌ای را بنویسید که مرکزش روی خط $y = 2x$ باشد و از دو نقطهٔ $A(1, -2)$ و $B(3, 0)$ بگذرد.

سخت- ۱۳۹۸

۵۷ - از نقطهٔ $M(3, 0)$ دو مماس بر دایرهٔ $x^2 + y^2 = 3$ رسم می‌کنیم. مختصات نقاط تماس را بیابید.

متوسط- ۱۳۹۸

۵۸ - معادلهٔ خطی را بنویسید که در نقطهٔ $A(4, 3)$ بر دایرهٔ $x^2 + y^2 = 25$ مماس باشد.

متوسط- ۱۳۹۸

۵۹ - فاصلهٔ نزدیک‌ترین و دورترین نقطهٔ $M(1, 2)$ از دایرهٔ $C: x^2 + y^2 + 2x - 1 = 0$ را بیابید.

۶۰- حدود m را طوری تعیین کنید که خط $d: 3x - 4y + m = 0$ دایرهٔ $x^2 + y^2 - 2x - 4y + 1 = 0$ را قطع نکند؟ متوسط- ۱۳۹۸

۶۱- معادلهٔ دایره‌ای را بنویسید که مرکزش $O(1, 2)$ باشد و از خط $d: 2x - y = 1$ وتری به طول $AB = 8$ جدا کند. متوسط- ۱۳۹۸

۶۲- معادلهٔ $mx^2 + 5y^2 + 20x - 10y + n + 1 = 0$ به‌ازای چه حدودی از m و n معادلهٔ دایره است؟ متوسط- ۱۳۹۸

۶۳ - با چه شرطی معادلهٔ ضمنی $x^۲ + y^۲ + ax + by + c = ۰$ مربوط به دایره است؟ با چه شرطی نمایش یک نقطه و با چه شرطی نقطه‌ای وجود ندارد که نمایش آن باشد؟ متوسط - ۱۳۹۸

سهمی

۶۴ - معادلهٔ سهمی را بنویسید که دارای خط هادی $x = ۲$ بوده و رأس آن نقطهٔ $A(۳, ۴)$ باشد. متوسط - ۱۳۹۸

۶۵ - مختصات رأس، کانون و معادلهٔ خط هادی سهمی به معادلهٔ $x^۲ - ۴x - ۸y - ۴ = ۰$ را به دست آورید. متوسط - ۱۳۹۸

دایره

۶۶ - معادلهٔ دایره‌ای را بنویسید که نقاط $A = (۱, -۱)$ و $B = (۲, ۳)$ دو سر قطر آن باشد. متوسط - ۱۳۹۸

سهمی

۶۷ - n و m را چنان تعیین کنید که نقطهٔ $S = (-۱, ۲)$ رأس سهمی $x = y^۲ + my + n$ باشد. متوسط - ۱۳۹۸

بیضی

۶۸- اگر $F=(\sqrt{۶},۱)$ و $F'=(-\sqrt{۶},۱)$ دو کانون یک بیضی و طول قطر بزرگ آن ۶ باشد. طول قطر کوچک و خروج از مرکز بیضی را بیابید.

متوسط- ۱۳۹۸

سهمی

۶۹ - معادلهٔ یک سهمی را بنویسید که کانون آن نقطهٔ $F(-۱,۲)$ و خط هادی آن $y=۴$ باشد. متوسط- ۱۳۹۸

دایره

۷۰ - معادلهٔ دایره‌ای را بنویسید که مرکز آن روی خط $x=y+۲$ بوده و در نقطه‌ای به طول ۵ بر محور xها مماس باشد. متوسط- ۱۳۹۸

سهمی

۷۱ - معادلهٔ سهمی را بنویسید که کانون آن $F(۲,۳)$ و خط $x=۴$ هادی آن باشد. متوسط- ۱۳۹۸

۷۲ - با استفاده از تعریف سهمی، معادلهٔ سهمی را بنویسید که کانون آن نقطهٔ $F(۲,۱)$ بوده و خط هادی آن $x = ۴$ باشد. متوسط- ۱۳۹۸

دایره

۷۳ - مکان هندسی تمام نقاطی را در صفحه پیدا کنید که فاصلهٔ آنها از نقطهٔ $A = (۷,۱)$ دو برابر فاصلهٔ آنها از نقطهٔ $B = (۱,۴)$ باشد. متوسط- ۱۳۹۸

سهمی

۷۴ - تمام پرتوهای نوری که موازی محور تقارن سهمی $y^۲ - y - ۲x - ۱ = ۰$ بر آن می‌تابند. از چه نقطه‌ای عبور می‌کنند؟ مختصات آن را بیابید.
متوسط- ۱۳۹۸

۷۵ - مختصات رأس و کانون سهمی به معادلهٔ $y = ax^۲ + bx + c$ را به دست آورید. $(a \neq ۰)$ سخت- ۱۴۰۲

۷۶ - اگر فاصلهٔ کانون تا خط هادی سهمی به معادلهٔ $y^۲ - ۲y + mx + m = ۰$ برابر ۲ باشد. آنگاه مختصات رأس سهمی را به دست آورید.

متوسط - ۱۳۹۸

متوسط - ۱۳۹۸

۷۷ - اگر در سهمی به معادلهٔ $۲y^۲ + ۴y - x + m = ۰$ طول کانون برابر $\frac{۱۷}{۸}$ باشد آنگاه مقدار m را بیابید.

متوسط - ۱۳۹۸

۷۸ - اگر در سهمی به معادلهٔ $y = ۲x^۲ + mx - ۳$ خط $x = ۱$ محور تقارن باشد آنگاه مقدار m را به دست آورید.

سخت - ۱۳۹۸

۷۹ - ثابت کنید خط $y = -\frac{۱}{۲}x + \frac{۳}{۲}$ بر سهمی به معادلهٔ $y^۲ - ۲y + x + ۱ = ۰$ مماس است و مختصات نقطهٔ تماس را بیابید.

۸۰ – معادلهٔ خطی که از کانون سهمی $x^۲ + ۲y + ۱۰ = ۴x$ و مبدأ می‌گذرد را به دست آورید. متوسط- ۱۳۹۸

۸۱ – معادلهٔ وتر مشترک سهمی‌های $x + y^۲ = ۰$ و $y^۲ = x + ۲y$ را به دست آورید. متوسط- ۱۳۹۸

۸۲ – طول وتری که از کانون سهمی $y^۲ + ۴x = ۳ + ۲y$ گذشته و بر محور کانونی عمود است را به دست آورید. متوسط- ۱۳۹۸

۸۳ – محور یک سهمی موازی محور yها و مختصات کانون آن $F(۲, -\frac{۷}{۲})$ است. اگر دهانهٔ سهمی رو به پایین و فاصلهٔ کانونی آن برابر یک باشد. معادلهٔ سهمی را به دست آورید. متوسط- ۱۳۹۸

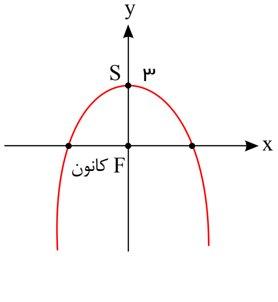
۸۴ – سهمی $y^۲ = ۲x - ۴y$ مفروض است. مختصات رأس و کانون سهمی را یافته و آن را رسم کنید. همچنین مختصات نقاط برخورد سهمی و محورهای مختصات را بیابید. متوسط- ۱۴۰۲

۸۵ – معادلهٔ یک سهمی به‌صورت $y = x^{۲} + ۳x + ۵$ داده شده است. آن را به یکی از حالت‌های متعارف تبدیل کنید و کانون و خط هادی و محور سهمی را مشخص نمایید.
متوسط– ۱۳۹۸

۸۶ – معادلهٔ محور تقارن سهمی به معادلهٔ $y = -۲x^{۲} + ۴x - ۳$ را به دست آورید.
متوسط– ۱۳۹۸

۸۷ – مختصات کانون سهمی به معادلهٔ $x^{۲} = ۴(x + ۲y + ۳)$ را به دست آورید.
متوسط– ۱۳۹۸

۸۸ – در شکل مقابل، سهمی محور xها را در چه نقاطی قطع می‌کند؟
متوسط– ۱۳۹۸



۸۹ – اگر مختصات کانون یک سهمی $(-۲,۳)$ و معادلهٔ خط هادی آن $x = ۶$ باشد مختصات رأس سهمی را به دست آورید و آن را رسم کنید.
متوسط– ۱۳۹۸

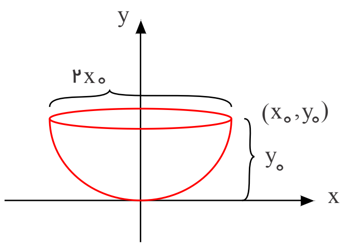
۹۰ - معادلهٔ سهمی با کانون $F(۲,-\frac{۷}{۲})$ و خط هادی $y=-\frac{۵}{۲}$ را به دست آورید. متوسط- ۱۳۹۸

۹۱ - مختصات کانون و همچنین معادلهٔ سهمی را به رأس $A(۴,۶)$ و خط هادی $x=۹$ بنویسید. متوسط- ۱۳۹۸

۹۲ - معادلهٔ سهمی به رأس $A(۲,۱)$ و کانون $F(۲,۵)$ را بیابید و معادلهٔ خط هادی آن را بنویسید. متوسط- ۱۳۹۸

۹۳ - معادلهٔ سهمی را بنویسید که $S(۱,۲)$ رأس و $F(۱,-۲)$ کانون آن باشد. متوسط- ۱۴۰۲

۹۴ - یک دانش‌آموز با دیدن دو دیش مخابراتی با ابعاد متفاوت و مشاهدهٔ فاصلهٔ کانونی متفاوت آن به این فکر افتاد که چگونه می‌توان با داشتن یک دیش فاصلهٔ کانونی آن را به دست آورد. او از معلمش خواست که فرمولی برای محاسبهٔ فاصلهٔ کانونی یک دیش به او بگوید. معلم به او گفت: باید قطر دهانه دیش را در خودش ضرب کرد و حاصل‌ضرب را بر اندازهٔ گودی (عمق) دیش تقسیم کرد و عدد حاصل را بر ۱۶ تقسیم کرد. حاصل فاصلهٔ کانونی دیش است. دلیل درستی این دستور را با توجه به سهمی رسم‌شده در شکل مقابل و فرمول سهمی توضیح دهید. متوسط- ۱۴۰۲

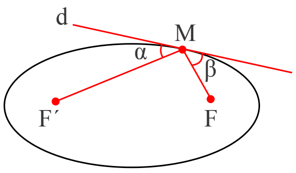


۹۵ - ثابت کنید اندازهٔ وتر کانونی یک سهمی با فاصلهٔ کانونی a برابر $۴a$ است. متوسط- ۱۳۹۸

۹۶ - ثابت کنید خطی که از کانون بر خط هادی سهمی عمود می‌شود محور تقارن آن است؟ متوسط- ۱۳۹۸

بیضی

۹۷ - فرض کنیم خط d مانند شکل مقابل در نقطهٔ M بر بیضی مماس است. ۱- مجموع فواصل کدام‌یک از نقاط خط d نسبت به دو کانون F و F' کمترین مقدار را دارد؟ چرا؟ سخت- ۵۰

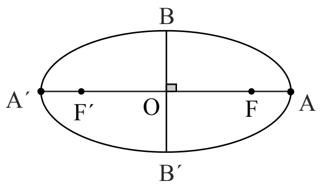


۲- دو زاویهٔ α و β نسبت به‌هم چگونه‌اند؟ چرا؟

۳- اگر بدنهٔ داخلی بیضی آینه‌ای باشد و از یکی از کانون‌های بیضی اشعهٔ نوری بر بدنهٔ داخلی بیضی تابیده شود، انعکاس نور از کدام نقطه خواهد گذشت؟ چرا؟

۹۸ - ثابت کنید اگر M نقطه‌ای بیرون بیضی باشد آنگاه مجموع فواصل M از دو کانون بیشتر از $2a$ است. متوسط- ۴۷

۹۹ – در بیضی مقابل طول قطر بزرگ دو برابر طول قطر کوچک است. اندازهٔ زاویهٔ FBF' چند درجه است؟ سخت- ۱۴۰۲

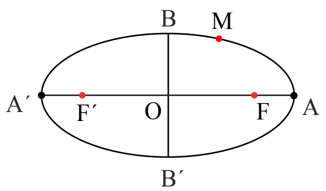


۱۰۰ – نقطهٔ M روی بیضی به طول اقطار کوچک و بزرگ ۶ و ۱۰ واحد به گونه‌ای قرار دارد که فاصلهٔ آن تا مرکز بیضی برابر ۴ واحد است. سخت- ۱۴۰۲

الف) نشان دهید $OM = OF = OF'$.

ب) نشان دهید مثلث MFF' قائم‌الزاویه است.

ت) طول‌های MF و MF' را به دست آورید.



۱۰۱ - دو نقطهٔ A و B روی یک بیضی و F و F' کانون‌های بیضی‌اند. A به کانون F' نزدیک‌تر و B به کانون F نزدیک‌تر است. اگر $AF' = BF$ باشد، نشان دهید: سخت- ۱۴۰۲

الف) در حالتی که دو پاره‌خط AF و BF' یکدیگر را درون بیضی قطع نکنند با هم موازی‌اند.

ب) در حالتی که AF و BF' یکدیگر را درون بیضی و در نقطه‌ای مانند M قطع کنند مثلث FMF' متساوی‌الساقین است و M روی قطر کوچک بیضی است.

۱۰۲ - خروج از مرکز بیضی را که در آن قطر کوچک واسطهٔ هندسی بین قطر بزرگ و فاصلهٔ کانونی است به دست آورید. سخت- ۱۳۹۸

۱۰۳ - در یک بیضی مساحت مثلث متساوی‌الساقینی که رأس آن کانون F و قاعدهٔ آن کوتاه‌ترین وتر کانونی F' است را برحسب خروج از مرکز به دست آورید. متوسط- ۱۳۹۸

۱۰۴ - در یک بیضی فاصلهٔ یک کانون از دورترین نقطهٔ بیضی دو برابر فاصلهٔ کانون دیگر از نزدیک‌ترین نقطهٔ آن است.

متوسط - ۱۳۹۸

الف) خروج از مرکز بیضی را به دست آورید.

ب) نسبت قطر کوچک به قطر بزرگ بیضی را محاسبه کنید.

متوسط - ۱۳۹۸

۱۰۵ - ثابت کنید در یک بیضی با خروج از مرکز e، طول کوتاه‌ترین وتر کانونی برابر است با: $2a(1-e^2)$

متوسط - ۱۳۹۸

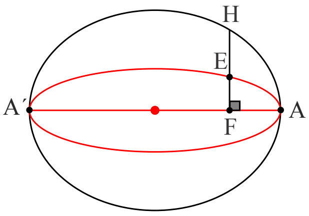
۱۰۶ - در یک بیضی با خروج از مرکز e ثابت کنید اندازهٔ قطر کوچک برابر است با: $BB' = 2a\sqrt{1-e^2}$

سخت - ۱۳۹۸

۱۰۷ - ثابت کنید مکان هندسی مرکز دایره‌هایی که بر دو دایرهٔ متداخل $C_1(O_1, R_1)$ و $C_2(O_2, R_2)$ مماس‌اند. یک بیضی می‌باشد.

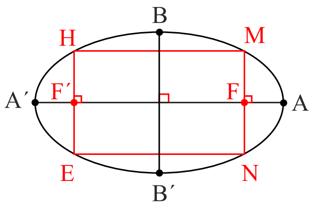
۱۰۸ - در شکل مقابل قطر دایره بر قطر بزرگ بیضی منطبق است. از کانون F عمودی بر محور کانونی رسم می‌کنیم تا بیضی و دایره را به‌ترتیب در نقاط E و H قطع کند. ثابت کنید: $\frac{HF}{EF}=\frac{a}{b}$

سخت- ۱۳۹۸



۱۰۹ - در شکل مقابل طول قطر بزرگ برابر ۴۰ و طول قطر کوچک برابر ۲۴ می‌باشد. محیط و مساحت مستطیل $MNEH$ را به دست آورید.

سخت- ۱۳۹۸



۱۱۰ - ثابت کنید در هر بیضی طول کوتاه‌ترین وتر کانونی برابر است با: $MN=\frac{۲b^۲}{a}$

سخت- ۱۳۹۸

۱۱۱ - M روی یک بیضی با کانون‌های F و F' به‌گونه‌ای قرار دارد که MF و MF' بر هم عمودند. ثابت کنید: $MF\times MF'=۲b^۲$

سخت- ۱۳۹۸

۱۱۲ - یک بیضی بر خط‌های $x = ۲$، $x = -۴$، $y = ۳$ و $y = -۱$ مماس است. اگر قطرهای کوچک و بزرگ این بیضی، موازی محورهای مختصات باشد، مساحت چهارضلعی محاطی حاصل از به هم وصل کردن رأس‌های آن را به دست آورید. متوسط- ۱۳۹۸

۱۱۳ - نقاط B و B' دو سر قطر کوچک یک بیضی هستند. ثابت کنید اندازهٔ قطر کوچک برابر است با: $BB' = ۲\sqrt{a^۲ - c^۲}$ متوسط- ۱۳۹۸

۱۱۴ - ثابت کنید عمودمنصف FF' محور تقارن بیضی است. متوسط- ۱۳۹۸

۱۱۵ - ثابت کنید نقطهٔ برخورد دو محور تقارن بیضی مرکز تقارن آن می‌باشد. متوسط- ۱۳۹۸

دایره

۱۱۶ - معادلهٔ دایره‌ای را بنویسید که مرکز آن $O(۰,۱)$ بوده و با دایرهٔ $x^۲+y^۲-۴x-۶y=۳$ مماس داخل باشد. سخت- ۱۳۹۸

۱۱۷ - معادلهٔ دایره‌ای را بنویسید که مرکز آن نقطهٔ $O(-۱,۱)$ بوده و بر دایره به معادلهٔ $x^۲+y^۲-۲x+۲y=۰$ مماس خارج باشد. متوسط- ۱۳۹۸

۱۱۸ - وضعیت هریک از جفت دایره‌های زیر را نسبت به‌هم مشخص کنید:

الف) $x^۲+y^۲-۲x=۱\ ,\ x^۲+y^۲=۱$ متوسط- ۱۳۹۸

ب) $x^۲+y^۲=۴\ ,\ x^۲+y^۲-۸x-۴y+۱۹=۰$

۱۱۹ - وضعیت هریک از جفت دایره‌های زیر را نسبت به‌هم مشخص کنید:

الف) $x^۲ + y^۲ - ۴x - ۶y = ۳\ ,\ x^۲ + y^۲ - ۱۰x - ۱۴y + ۷۳ = ۰$ متوسط- ۱۳۹۸

ب) $x^۲ + y^۲ = ۹\ ,\ x^۲ + y^۲ - ۲x + ۲y + ۱ = ۰$

۱۲۰ - وضعیت هریک از جفت دایره‌های زیر را نسبت به‌هم مشخص کنید: (سوال تکراری با تمرین کتاب است)

الف) $x^۲ + y^۲ = ۴\ ,\ x^۲ + y^۲ - ۲x = ۴$ متوسط- ۱۳۹۸

ب) $x^۲ + y^۲ = ۱\ ,\ x^۲ + y^۲ - ۳\sqrt{۲}x - ۳\sqrt{۲}y + ۵ = ۰$

۱۲۱ – وضعیت هریک از جفت دایره‌های زیر را نسبت به هم مشخص کنید. (سوال تکراری با تمرین کتاب است)

الف) $x^۲+(y-۱)^۲=۱\ ,\ (x-۱)^۲+y^۲=۱$ متوسط- ۱۳۹۸

ب) $x^۲+y^۲=۱\ ,\ x^۲+y^۲-۶x-۲y+۹=۰$

۱۲۲ – معادلهٔ دایره‌ای را بنویسید که خطوط $x+y=۱$ و $x-y=۳$ شامل قطرهایی از آن بوده و خط $۴x+۳y=۶$ بر آن مماس باشد.
سخت- ۱۳۹۸

۱۲۳ – معادلهٔ دایره‌ای را بنویسید که $O(۰,۱)$ مرکز آن بوده و روی خط به معادلهٔ $x+y=۲$ وتری به طول $۲\sqrt{۲}$ جدا کند. سخت- ۱۳۹۸

۱۲۴ – معادلهٔ دایره‌ای را بنویسید که $O(۲,۱)$ مرکز آن بوده و بر خط $۳x+۴y=۰$ مماس باشد. متوسط- ۱۳۹۸

۱۲۵ – وضعیت هریک از خطوط و دایره‌های زیر را نسبت به‌هم مشخص کنید:

الف) $x+y=۲\ ,\ x^۲+y^۲=۲$ متوسط- ۱۳۹۸

ب) $x+y=۴\ ,\ x^۲+y^۲-۲y-۳=۰$

۱۲۶ – وضعیت هریک از خطوط و دایره‌های زیر را نسبت به‌هم مشخص کنید. (سوال تکراری با تمرین کتاب است)

الف) $۳x+۴y=۰\ ,\ x^۲+y^۲-۴x-۴y+۷=۰$ متوسط- ۱۳۹۸

ب) $x+y=۱\ ,\ x^۲+y^۲-۲x-۲y=۲$

۱۲۷ - وضعیت هریک از نقاط $A(-۱,-۱)$ و $B(۱,-۲)$ و $C(۲,۳)$ و $D(۴,-۱)$ را نسبت به دایرهٔ $x^۲+y^۲-۲x+۴y-۵=۰$ تعیین کنید.

متوسط- ۱۴۰۲

۱۲۸ - کدام‌یک از روابط زیر می‌تواند معادلهٔ یک دایره باشد؟ مختصات مرکز و اندازهٔ شعاع دایره‌ها را به دست آورید و دایره را رسم کنید.

الف) $x^۲+y^۲-۲x-۶y-۱=۰$ متوسط- ۱۳۹۸

ب) $x^۲+y^۲+۲x+۳y+۴=۰$

ج) $۲x^۲+۲y^۲-۳x+۴y-۲=۰$

۱۲۹ - معادلهٔ دایره‌ای را بنویسید که از نقاط $A(۱,۲)$ و $B(۳,۰)$ بگذرد و $y = ۲x - ۱$ شامل قطری از آن باشد. سخت- ۱۳۹۸

مکان هندسی و کاربرد

۱۳۰ - هرگاه دو خط d و ℓ موازی باشند، از دوران d حول ℓ سطحی ایجاد می‌شود که آن را یک سطح استوانه‌ای می‌نامیم. حال فرض کنید صفحهٔ p، یک سطح استوانه‌ای را قطع کند. در حالت‌های مختلف دربارهٔ سطح مقطع حاصل بحث کنید (چهار حالت). متوسط- ۱۴۰۲

۱۳۱ - مکان هندسی نقاطی از صفحه را مشخص کنید که از دو خط متقاطع d و d' به یک فاصله‌اند. متوسط- ۱۳۹۸

۱۳۲ - دو نقطهٔ A و B و خط d در صفحه مفروض‌اند. نقطه‌ای بیابید که از A و B به یک فاصله بوده و از d به فاصلهٔ ۳ سانتی‌متر باشد. متوسط- ۱۳۹۸

۱۳۳ – ثابت کنید مکان هندسی نقاطی که از دو ضلع یک زاویه به یک فاصله‌اند، نیمساز آن زاویه است. متوسط– ۱۳۹۸

۱۳۴ – ثابت کنید هر نقطه که از دو سر یک پاره‌خط، یک فاصله باشد، حتما روی عمودمنصف آن است. متوسط– ۱۳۹۸

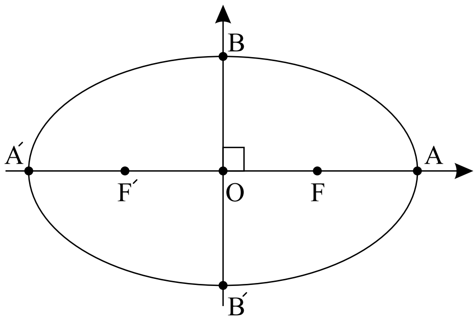
۱۳۵ – درستی و نادرستی عبارت زیر را مشخص کنید. متوسط– ۱۳۹۸

الف در حالتی که صفحهٔ P بر محور سطح مخروطی (I) عمود نباشد و با مولد آن (d) نیز موازی نباشد و تنها یکی از دو نیمهٔ مخروط را قطع کند، فصل مشترک حاصل یک بیضی خواهد بود. متوسط– ۱۳۹۸

انواع مقاطع بیضی

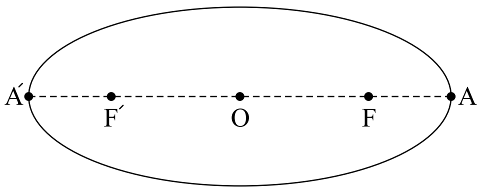
۱۳۶ - در بیضی مقابل، طول قطر کوچک $\frac{\sqrt{۳}}{۲}$ طول قطر بزرگ است. اندازهٔ زاویهٔ $F'BF$ را به دست آورید.

متوسط- ۱۴۰۰



۱۳۷ - در بیضی روبه‌رو نقاط A و A' دو سر قطر بزرگ و نقاط F و F' کانون‌های بیضی هستند، ثابت کنید: $A'F' = AF$

متوسط- ۱۴۰۰



دایره

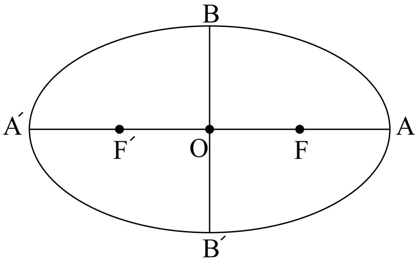
۱۳۸ - معادلهٔ دایره‌ای را بنویسید که $O(۰,۱)$ مرکز آن بوده و روی خط به معادلهٔ $x + y = ۲$ وتری به طول $۲\sqrt{۲}$ جدا کند.

متوسط- ۱۴۰۰

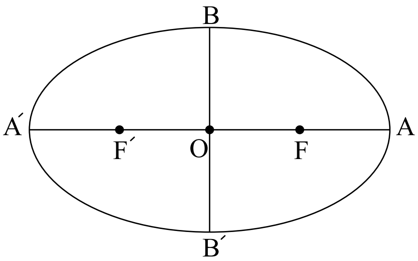
بیضی

۱۳۹ - در بیضی روبه‌رو: $OF = OF' = c\ ,\ OB = OB' = b\ ,\ OA = OA' = a$ متوسط- ۱۴۰۱

ثابت کنید: $b^۲ + c^۲ = a^۲$



۱۴۰ - اگر در بیضی طول قطر بزرگ دو برابر طول قطر کوچک باشد، اندازهٔ زاویهٔ $F\hat{B}F'$ چند درجه است؟ متوسط- ۱۴۰۱



دایره

۱۴۱ - در نقطه $A(۲,۳)$ روی دایرهٔ $x^۲ + y^۲ - ۲x - ۲y = ۳$ مماسی بر دایره رسم کرده‌ایم، معادله این خط مماس را به دست آورید. متوسط- ۱۴۰۱

۱۴۲ - معادله دایره‌ای را بنویسید که مرکز آن $O(۲,۳)$ بوده و $M(۱,۱)$ یک نقطه از آن باشد. متوسط- ۱۴۰۱

سهمی

۱۴۳ - مختصات نقاط برخورد سهمی $y^۲ + ۷x + ۵ = ۰$ و دایرهٔ $x^۲ + y^۲ = ۲۵$ را به‌دست آورید. متوسط- ۱۴۰۲

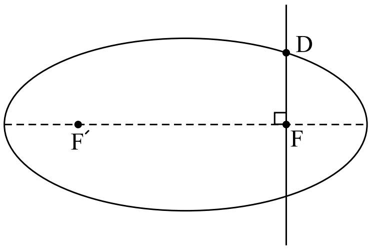
۱۴۴ - معادلهٔ سهمی را بنویسید که $F(-۳,۲)$ مختصات کانون و معادلهٔ خط هادی آن $x = ۱$ باشد. متوسط- ۱۴۰۲

بیضی

۱۴۵ - بیضی با قطر بزرگ $۲a$، قطر کوچک $۲b$ و کانون‌های F و F' مطابق شکل روبه‌رو مفروض است. اگر خطی در کانون F بر قطر کانونی عمود باشد و بیضی را در نقطهٔ D قطع کند، ثابت کنید:

متوسط- ۱۴۰۲

$$DF = \frac{b^۲}{a}$$



۱۴۶ - در یک بیضی مختصات کانون‌ها $F(۴,۰)$ و $F'(-۲,۰)$ طول قطر بزرگ برابر با ۱۰ است. اگر نقطهٔ $P(۱,m)$ روی این بیضی قرار داشته باشد، مقدار m را بیابید.

متوسط- ۱۴۰۲

دایره

۱۴۷ - در دایره به معادلهٔ ضمنی $x^۲+y^۲+ax+by+c=۰$ با استفاده از روش مربع کامل، ثابت کنید شعاع دایره برابر با $r=\frac{\sqrt{a^۲+b^۲-۴c}}{۲}$ است.

متوسط- ۱۴۰۲

۱۴۸ - معادلهٔ دایره‌ای را بنویسید که $O(۲,-۱)$ مرکز آن بوده و از خط $۳x-۴y+۱۰=۰$ وتری به طول ۶ جدا کند.

متوسط- ۱۴۰۲

مکان هندسی و کاربرد

۱۴۹ - مکان هندسی مرکز همهٔ دایره‌های با شعاع ثابت یک، بر دایره $(x-۱)^۲+(y+۲)^۲=۱۶$ مماس خارج باشند، دایره‌ای به مرکز $O(۱,-۲)$ و شعاع .... است.

متوسط- ۱۴۰۲

۱۵۰ - هر گاه دو خط d و l موازی باشند، از دوران d حول l سطحی ایجاد می‌شود. اگر صفحهٔ P بر خط l عمود باشد، سطح مقطع صفحهٔ P و سطح ایجادشده بیضی است. (درست ـ نادرست)
متوسط- ۱۴۰۲

انواع مقاطع دایره

۱۵۱ - وضعیت خط $x + y = ۱$ و دایرهٔ $x^۲ + y^۲ - ۲x - ۲y - ۲ = ۰$ را نسبت به هم مشخص کنید.
متوسط- ۱۴۰۱

سهمی

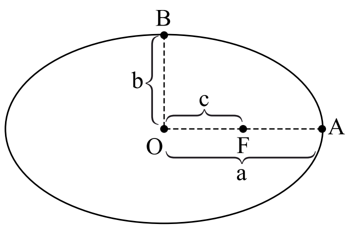
۱۵۲ - الف) معادلهٔ سهمی را بنویسید که $A(۲ ,۳)$ رأس آن بوده و معادلهٔ خط هادی آن $x = ۳$ باشد.
متوسط- ۱۴۰۱

ب) مختصات کانون سهمی را بیابید.

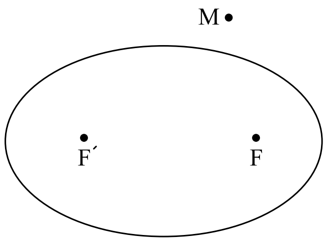
پ) مختصات نقطهٔ برخورد سهمی با محور طول‌ها را حساب کنید.

بیضی

۱۵۳ - اگر در یک بیضی طول AA' (قطر بزرگ) برابر با ۱۶ و خروج از مرکز $\frac{۳}{۴}$ باشد، فاصلهٔ رأس A تا نزدیک‌ترین کانون را به دست آورید.
متوسط- ۱۴۰۱



۱۵۴ - اگر M نقطه‌ای بیرون بیضی باشد، ثابت کنید مجموع فواصل نقطه M از کانون‌های F و F' بزرگ‌تر از طول قطر بیضی است. متوسط- ۱۴۰۱



دایره

۱۵۵ - حدود a را طوری به دست آورید که $x^۲ + y^۲ - ۴x + ۶y + a = ۰$ معادلهٔ یک دایره باشد. متوسط- ۱۴۰۱

مکان هندسی و کاربرد

۱۵۶ - دو نقطه A و B و خط d که شامل هیچ‌یک نیست در صفحه مفروض‌اند. نقطه‌ای بیابید که از A و B به یک فاصله بوده و از خط d به فاصله ۳ سانتی‌متر است. متوسط- ۱۴۰۱

۱۵۷ – الف) اگر صفحهٔ P بر محور سطح مخروطی عمود نباشد و با مولد موازی نباشد و فقط یکی از دو نیمه سطح مخروطی را قطع کند، در این صورت فصل مشترک صفحهٔ P و سطح مخروطی یک .... است. متوسط- ۱۴۰۱

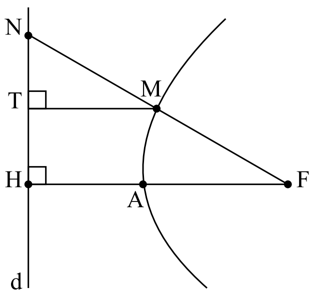
ب) سهمی، مکان هندسی نقاطی از یک صفحه است که از یک خط ثابت در آن صفحه و یک نقطهٔ ثابت غیرواقع بر آن خط در آن صفحه به یک فاصله باشد. (درست – نادرست)

انواع مقاطع | سهمی

۱۵۸ – شکل کلی (نمودار) مربوط به رابطهٔ $۲ \leq y \leq x^۲$ را رسم کنید. متوسط- ۱۴۰۱

۱۵۹ – در شکل زیر سهمی با رأس A و کانون F و خط هادی d رسم شده است، از کانون F به نقطهٔ دلخواه M روی سهمی وصل کرده و امتداد داده‌ایم تا خط d را در N قطع کند و از نقطهٔ M، MT را برای d عمود کرده‌ایم. متوسط- ۱۴۰۱

ثابت کنید: $\frac{FN}{FA} = \frac{۲NT}{TH}$



متوسط- ۱۴۰۱

۱۶۰ - الف) معادلهٔ متعارف و فاصلهٔ کانونی سهمی به معادلهٔ $y^2 - 2y - 8x + 9 = 0$ را بیابید.

ب) مختصات رأس، کانون و معادلهٔ خط هادی سهمی را به دست آورید.

مکان هندسی و کاربرد

متوسط- ۱۴۰۲

۱۶۱ - نقاط A و B و C در صفحه مفروض‌اند. نقطه‌ای بیابید که از A و B به یک فاصله و از C به فاصله ۳ سانتی‌متر باشد (بحث کنید).

انواع مقاطع سهمی

۱۶۲ - در یک دیش مخابراتی به شکل سهمی با دهانهٔ دایره‌ای به قطر ۶۰ واحد و گودی (عمق) ۹ واحد مفروض است. فاصلهٔ کانونی این دیش را به دست آوردید.

سخت- ۱۴۰۰

متوسط- ۱۴۰۰

۱۶۳ - اگر نقطهٔ $A(2,3)$ رأس سهمی و $y = 7$ معادلهٔ خط هادی سهمی باشد:

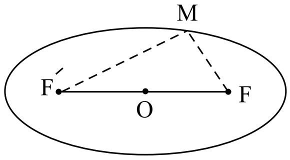
الف) معادلهٔ سهمی را به دست آورید.

ب) مختصات کانون سهمی را بیابید.

۱۶۴ - نقطهٔ M روی بیضی به اقطار ۱۰ و ۶ واحد به‌گونه‌ای قرار دارد که فاصلهٔ آن تا مرکز بیضی برابر ۴ واحد است.الف) نشان دهید مثلث MFF' قائم‌الزاویه است. متوسط- ۱۴۰۰

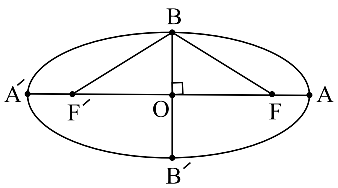
ب) طول MF را به‌دست آورید.

(F و F' کانون‌های بیضی هستند و $MF < MF'$).



بیضی

۱۶۵ - در شکل مقابل اگر $OF = c, OB = b, OA = a$ باشد، ثابت کنید: $a^2 = b^2 + c^2$ متوسط- ۱۴۰۰



دایره

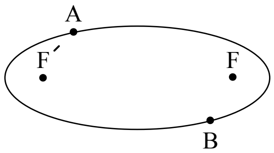
۱۶۶ - وضعیت دایرهٔ $x^2 + y^2 - 6x - 2y + 9 = 0$ با دایره‌ای به مرکز مبدأ مختصات و شعاع یک را نسبت به هم مشخص کنید. متوسط- ۱۴۰۰

سهمی

۱۶۷ - معادلهٔ سهمی را بنویسید که $A(1, 2)$ رأس و $F(1, -2)$ کانون آن باشد، سپس معادلهٔ خط هادی آن را بیابید. متوسط- ۱۴۰۲

بیضی

۱۶۸ – دو نقطهٔ A و B مطابق شکل روی بیضی و نقاط F و F' کانون‌های بیضی‌اند. اگر $AF' = BF$ باشد، ثابت کنید دو پاره‌خط AF و BF' موازی‌اند. متوسط- ۱۴۰۰



مکان هندسی و کاربرد

۱۶۹ – نقطهٔ A و خط d در صفحه مفروض‌اند. نقطه‌ای را بیابید که از A به فاصلهٔ ۲ سانتی‌متر و از خط d به فاصلهٔ ۳ سانتی‌متر باشد. (بحث کنید.)
متوسط- ۱۴۰۲

انواع مقاطع دایره

۱۷۰ – معادلهٔ دایره‌ای را بنویسید که مرکز آن $O(۰,۱)$ باشد و با دایره به معادلهٔ $x^۲ + y^۲ - ۸x + ۴y + ۱۶ = ۰$ مماس داخل باشد. متوسط- ۱۳۹۹

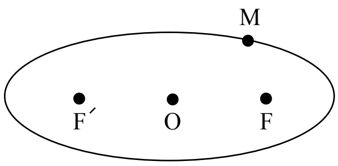
سهمی

۱۷۱ – معادلهٔ سهمی را بنویسید که $A(۴,۶)$ رأس و $y = ۳$ معادلهٔ خط هادی آن باشد. متوسط- ۱۳۹۹

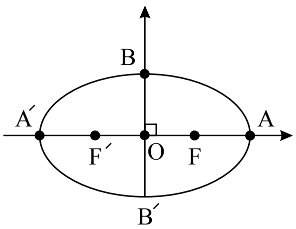
۱۷۲ - مختصات کانون، رأس و معادلهٔ خط هادی سهمی به معادلهٔ $y^{۲} - ۶y + ۱۶x + ۲۵ = ۰$ را تعیین کنید. متوسط- ۱۳۹۹

بیضی

۱۷۳ - در شکل مقابل نقطهٔ M روی بیضی با کانون‌های F و F' مشخص شده‌اند. خط d را به گونه‌ای رسم کنید که در نقطهٔ M بر بیضی مماس باشد و سپس از نقطهٔ F' خطی موازی با MF رسم کنید تا خط d را در نقطه‌ای مانند N قطع کند. ثابت کنید: $NF' = MF'$ سخت- ۱۴۰۲



۱۷۴ - مرکز بیضی مقابل بر مبدأ مختصات و قطرهای آن مانند شکل بر محورهای x و y منطبق هستند و فاصلهٔ F از هر دو نقطهٔ O و A برابر ۴ است. طول قطر کوچک بیضی را محاسبه کنید. متوسط- ۱۳۹۹



دایره

۱۷۵ - معادلهٔ دایره‌ای را بنویسید که $O(۳, ۱)$ مرکز آن بوده و بر خط به معادلهٔ $۴x + ۳y + ۵ = ۰$ مماس باشد. متوسط- ۱۳۹۹

بیضی

۱۷۶ - در یک بیضی F و F' کانون‌ها و B و B' دو سر قطر کوچک هستند. اگر مساحت و محیط چهارضلعی $BFB'F'$ به‌ترتیب ۲۴ و $۸\sqrt{۱۰}$ باشد، خروج از مرکز بیضی را حساب کنید. سخت- ۱۳۹۸

مکان هندسی و کاربرد

۱۷۷ - دو دایره به شعاع‌های R و r هم‌مرکزند. مکان هندسی مرکز دایره‌هایی که خارج دایرهٔ کوچک قرار دارند و بر این دو دایره مماس هستند را بیابید.
سخت- ۱۳۹۸

انواع مقاطع | دایره

۱۷۸ - دایره‌ای به شعاع $\sqrt{5}$ در ربع چهارم قرار داشته و خط $x + y = 2$ شامل قطری از این دایره است. اگر دایره بر خط $y = 1 - 2x$ مماس باشد، معادلهٔ دایره را بیابید.
سخت- ۱۳۹۸

۱۷۹ - از نقطه‌ای به طول ۱ روی دایرهٔ $x^2 + y^2 - 2x + 2y - 2 = 0$، بر دایره مماس رسم کرده‌ایم. معادلهٔ خط مماس را بیابید.
سخت- ۱۳۹۸

مکان هندسی و کاربرد

۱۸۰ – دایرهٔ C درون زاویهٔ xOy قرار دارد. چند نقطه روی دایره وجود دارد که از اضلاع زاویه به یک فاصله باشد؟ بحث کنید. متوسط- ۱۳۹۸

۱۸۱ – نقاط A و B و C در صفحه مفروض هستند. نقاطی را بیابید که از A و B به یک فاصله و از C به فاصلهٔ ۳ سانتی‌متر باشد. (بحث کنید.) (سوال تکراری است) متوسط- ۱۳۹۸

انواع مقاطع دایره

۱۸۲ – طول مماس رسم‌شده از نقطهٔ $M(۱,۲)$ بر دایرهٔ $(x-۳)^۲+y^۲=۴$ را محاسبه کنید و سپس مختصات نقطهٔ تماس را بیابید. سخت- ۱۳۹۸

بیضی

۱۸۳ - در بیضی به طول قطرهای بزرگ و کوچک به‌ترتیب $2a$ و $2b$، طول وتر کانونی را به دست آورید. متوسط- ۱۳۹۸

سهمی

۱۸۴ - اگر دو خط موازی d و d'، سهمی را در وترهای AB و $A'B'$ قطع کنند، خط گذرنده بر وسط AB و $A'B'$ با .... موازی است.

متوسط- ۱۳۹۸

بیضی

۱۸۵ - در بیضی طول قطر بزرگ دو برابر طول قطر کوچک است. اگر B سر قطر کوچک و F و F' رأس‌های کانونی باشد، زاویهٔ FBF' برابر است با ....

متوسط- ۱۳۹۸

مکان هندسی و کاربرد

۱۸۶ - خط d و نقطهٔ A در صفحه مفروض هستند. نقاطی را بیابید که از خط d به فاصلهٔ L و از نقطهٔ A به فاصلهٔ r باشند. همهٔ حالات را بررسی کنید.

متوسط- ۱۳۹۸

۱۸۷ - دو نقطهٔ B و A درون زاویهٔ xOy قرار دارند. چند نقطه می‌توان یافت که از A و B به یک فاصله و از اضلاع زاویه هم به یک فاصله باشد؟

سخت- ۱۳۹۸

۱۸۸ - در صفحهٔ مثلث ABC، چند نقطه وجود دارد که از اضلاع مثلث یا امتداد آنها به یک فاصله باشد؟

سخت- ۱۳۹۸

۱۸۹ - درون مثلث ABC، چند نقطه وجود دارد که از ضلع BC به فاصلهٔ L و از AB و AC یا امتداد آنها به یک فاصله باشد؟ در صفحهٔ مثلث چطور؟

سخت- ۱۳۹۸

۱۹۰ - ارتفاع ذوزنقه‌ای $12cm$ می‌باشد. چند نقطه روی ساق‌های ذوزنقه وجود دارد که نسبت فاصلهٔ آن نقاط از قاعده‌ها ۲ به ۱ باشد؟ متوسط- ۱۳۹۸

۱۹۱ - مربع $ABCD$ به طول ضلع $3cm$ مفروض است. چند نقطه روی محیط مربع وجود دارد که فاصله‌اش از قطر AC برابر با $\frac{\pi}{2}$ باشد؟ متوسط- ۱۳۹۸

۱۹۲ - خط مورب L، دو خط موازی d و d' را در نقاط A و B قطع می‌کند. مکان هندسی محل برخورد نیمساز زوایای A و B را با جابه‌جایی خط L بیابید. سخت- ۱۳۹۸

۱۹۳ - زاویهٔ xOy مفروض است. چند نقطه داخل زاویه وجود دارد که از دو ضلع زاویه به فاصلهٔ $۲cm$ باشد؟ متوسط- ۱۳۹۸

۱۹۴ - مربع $ABCD$ به طول ضلع a مفروض است. مکان هندسی نقاطی درون مربع را بیابید که فاصلهٔ آنها از مرکز مربع بین $\frac{a}{۲}$ و $\frac{\sqrt{۲}}{۲}a$ باشد.

سخت- ۱۳۹۸

۱۹۵ - فاصلهٔ نقطهٔ A از خط d برابر با $۱۲cm$ است. مکان هندسی نقاطی که وسط پاره‌خط AB (B روی d جابه‌جا می‌شود) قرار دارند چیست؟

متوسط- ۱۳۹۸

انواع مقاطع سهمی

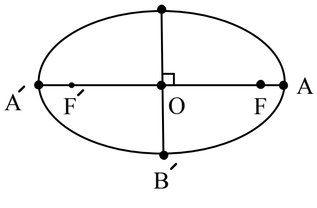
۱۹۶ - سهمی $y^{۲} = ۴x - ۴$ مفروض است. به مرکز کانون سهمی و به شعاع ۳ دایره‌ای رسم می‌کنیم، مختصات نقاط برخورد دایره و سهمی را بیابید.
متوسط- ۱۴۰۲

۱۹۷ - الف) مختصات رأس، کانون و معادلهٔ خط هادی سهمی $x^{۲} - ۴y + ۸x = ۰$ را به دست آورید. متوسط- ۱۳۹۹
ب) نمودار سهمی را با استفاده از نقاط کمکی رسم کنید.

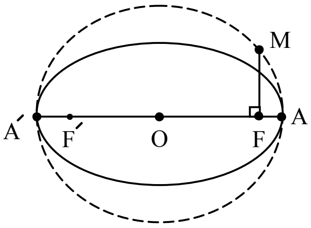
بیضی

۱۹۸ - اگر در یک بیضی طول قطر کوچک ۲۴ و فاصلهٔ کانون تا مرکز آن برابر ۵ باشد، خروج از مرکز بیضی را به دست آورید. متوسط- ۱۳۹۹

۱۹۹ - در بیضی مقابل طول قطر بزرگ $\sqrt{۲}$ برابر طول قطر کوچک است. اندازهٔ زاویهٔ $F\hat{B}F'$ چند درجه است؟ متوسط- ۱۳۹۹



۲۰۰ – قطر دایرهٔ C مانند شکل، قطر بزرگ بیضی است و از کانون F عمودی بر AA' رسم کرده‌ایم تا دایره را در نقطه‌ای مانند M قطع کند. ثابت کنید MF با نصف قطر کوچک بیضی برابر است.
متوسط- ۱۴۰۲



دایره

۲۰۱ – معادلهٔ دایره‌ای را بنویسید که $O(-۱,-۱)$ مرکز آن بوده و روی خط $۲x+y=۲$ وتری به طول ۴ ایجاد کند.
متوسط- ۱۳۹۹

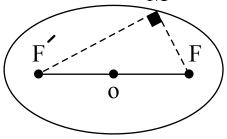
سهمی

۲۰۲ – سهمی $y^۲=۴x-۴$ مفروض است. به مرکز کانون سهمی و به شعاع ۳ واحد دایره‌ای رسم می‌کنیم، معادلهٔ دایره را بنویسید و سپس مختصات نقاط برخورد دایره و سهمی را بیابید. (سوال تکراری است)
متوسط- ۱۳۹۹

بیضی

۲۰۳ – نقطهٔ M روی بیضی به اقطار ۶ و ۱۰ واحد به گونه‌ای قرار دارد که فاصلهٔ آن تا مرکز بیضی برابر ۴ واحد است. در صورتی که بدانیم مثلث MFF' در رأس M قائم‌الزاویه است، طول MF را به دست آورید. (F و F' کانون‌های بیضی هستند.)
سخت- ۱۳۹۹

طبق فرض داریم: $۲a=۱۰ \to a=۵$ و $۲b=۶ \to b=۳$



دایره

۲۰۴ - وضعیت خط $۳x + y = ۰$ را نسبت به دایرهٔ $x^۲ + y^۲ - ۴x - ۴y + ۷ = ۰$ مشخص کنید. متوسط - ۱۳۹۹

۲۰۵ - معادلهٔ دایره‌ای را بنویسید که مرکز آن $O(۲, -۲)$ بوده بر دایره به معادلهٔ $x^۲ + y^۲ + ۲x - ۴y = ۴$ مماس خارج باشد. متوسط - ۱۳۹۹

مکان هندسی و کاربرد

۲۰۶ - درستی یا نادرستی عبارت‌های زیر را مشخص کنید. متوسط - ۱۳۹۸

الف) تنها یک نقطه وجود دارد که از سه رأس مثلث ABC به یک فاصله است. متوسط - ۱۳۹۸

ب) هرگاه صفحه‌ای یک سطح مخروطی را قطع کند، فصل مشترک می‌تواند هذلولی باشد. متوسط - ۱۳۹۸

پ) همواره یک نقطه وجود دارد که از چهار نقطهٔ متمایز در یک صفحه به یک فاصله است. متوسط - ۱۳۹۸

انواع مقاطع | بیضی

۲۰۷ - درستی یا نادرستی عبارت‌های زیر را مشخص کنید. متوسط - ۱۳۹۸

الف) اگر خط d در نقطهٔ M بر بیضی مماس شود، زاویهٔ MF و MF' با خط d برابرند. (F و F' کانون‌ها هستند.) متوسط - ۱۳۹۸

ب) در سهمی با کانون F و خط هادی d، مرکز هر دایره که از F بگذرد و بر خط d مماس باشد، روی سهمی است. متوسط - ۱۳۹۸

مکان هندسی و کاربرد

۲۰۸ - درستی یا نادرستی عبارت زیر را مشخص کنید. متوسط - ۱۴۰۰

الف) مکان هندسی نقاطی از صفحه که از دو خط متقاطع d و d' به یک فاصله‌اند، نیمساز زاویه بین آن دو خط می‌باشد. متوسط - ۱۴۰۰

ب) نقطهٔ $(۳, -۲)$ روی دایرهٔ $x^۲ + y^۲ + ۲x = ۰$ قرار دارد. متوسط - ۱۴۰۰

۲۰۹ - درستی و نادرستی عبارت زیر را مشخص کنید. متوسط - ۱۴۰۰

الف مکان هندسی مرکزهای همهٔ دایره‌هایی در صفحه که بر خط d در نقطهٔ ثابت A مماس‌اند، یک نیم‌خط عمود بر خط d در نقطهٔ A است.

متوسط- ۱۴۰۰

ب در یک سهمی، هر شعاع نوری که موازی با محور سهمی به بدنهٔ سهمی بتابد، بازتاب آن از کانون سهمی خواهد گذشت. متوسط- ۱۴۰۰

انواع مقاطع بیضی

۲۱۰ - عبارت‌های زیر را کامل کنید. متوسط- ۱۴۰۱

الف اگر در بیضی خروج از مرکز به عدد صفر نزدیک شود کشیدگی بیضی کمتر شده و بیضی به .... نزدیک‌تر می‌شود. متوسط- ۱۴۰۱

ب نقطه $A(۱,-۲)$ در .... دایره به معادله $x^۲+y^۲-۲x+۲y=۰$ قرار دارد. متوسط- ۱۴۰۱

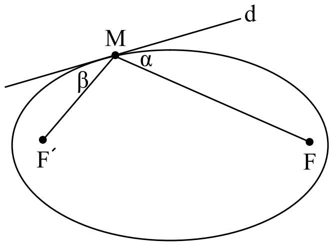
مکان هندسی و کاربرد

۲۱۱ - درستی و نادرستی عبارات زیر را مشخص کنید. سپس شکل صحیح عبارت نادرست را بنویسید. متوسط- ۱۴۰۱

الف اگر صفحهٔ P به گونه‌ای باشد که هر دو تکهٔ بالایی و پایینی سطح مخروطی را قطع کند و شامل محور نباشد، در این صورت فصل مشترک صفحه P و سطح مخروطی یک هذلولی است. متوسط- ۱۴۰۱

ب در شکل روبه‌رو اگر خط d در نقطه M بر بیضی مماس باشد، زاویه $F\hat{M}F' = ۵۰^\circ$ باشد آنگاه اندازهٔ زاویه $\alpha = \beta = ۶۰^\circ$ است.

متوسط- ۱۴۰۱



انواع مقاطع بیضی

۲۱۲ - در یک بیضی افقی به مرکز مبدأ مختصات طول قطرها برابر ۱۰ و ۶ است. متوسط- ۱۴۰۱

الف خروج از مرکز بیضی را بیابید. متوسط- ۱۴۰۱

ب مختصات کانون‌ها (F و F')، مختصات دو سر قطر بزرگ (A و A') و دو سر قطر کوچک (B و B') را به دست آورید. متوسط- ۱۴۰۱

پ بیضی را روی محور مختصات رسم کنید. متوسط- ۱۴۰۱

مکان هندسی و کاربرد

۲۱۳ - درستی یا نادرستی عبارات زیر را مشخص کنید. متوسط- ۱۴۰۱

الف در حالتی که صفحهٔ P بر محور سطح مخروطی (I) عمود باشد و از رأس آن عبور نکند، فصل مشترک حاصل یک دایره خواهد بود. متوسط- ۱۴۰۱

ب در حالتی که خروج از مرکز بیضی برابر صفر باشد، بیضی تبدیل به یک پاره‌خط می‌شود. متوسط- ۱۴۰۱

۲۱۴ - جاهای خالی را با عبارات مناسب پر کنید. متوسط- ۱۴۰۱

الف مکان هندسی، مجموعه نقاطی از صفحه (یا فضا) است که همهٔ آنها یک ویژگی .... داشته باشند و همچنین هر نقطه که آن ویژگی را داشته باشد، عضو این مجموعه باشد. متوسط- ۱۴۰۱

ب اگر مجموع فواصل نقطه A از دو کانون بیضی بیشتر از طول قطر بزرگ بیضی باشد، نقطه A در .... بیضی است. متوسط- ۱۴۰۱

انواع مقاطع سهمی

۲۱۵- سهمی $y^۲ = ۲x + ۴y$ را در نظر بگیرید. متوسط- ۱۴۰۱

الف مختصات رأس، کانون و خط هادی سهمی را به دست آورید. متوسط- ۱۴۰۱

ب نقاط برخورد سهمی با محورهای مختصات را به دست آورید. متوسط- ۱۴۰۱

مکان هندسی و کاربرد

۲۱۶- جاهای خالی را با عبارات مناسب پر کنید. متوسط- ۱۴۰۰

الف مکان هندسی، مجموعهٔ نقاطی از صفحه (یا فضا) است که همهٔ آنها یک ویژگی .... داشته باشند و همچنین هر نقطه که آن ویژگی را داشته باشد، عضو این مجموعه باشد. متوسط- ۱۴۰۰

ب در حالتی که $\frac{c}{a} = ۱$ بیضی به یک .... تبدیل می‌شود. متوسط- ۱۴۰۰

۲۱۷- درستی و نادرستی عبارات زیر را مشخص کنید. متوسط- ۱۴۰۰

الف اگر صفحه P به‌گونه‌ای باشد که هر دو تکهٔ بالایی و پایینی سطح مخروطی را قطع کند و شامل محور باشد، در این صورت فصل مشترک صفحه P و سطح مخروطی یک هذلولی است. متوسط- ۱۴۰۰

ب نقطهٔ $(۳, -۲)$ روی دایره $x^۲ + y^۲ + ۲x = ۰$ قرار دارد. متوسط- ۱۴۰۰

انواع مقاطع سهمی

۲۱۸- سهمی به معادلهٔ $y^۲ - ۲y + ۸x + ۹ = ۰$ را در نظر بگیرید: متوسط- ۱۴۰۰

الف مختصات رأس، کانون و معادله خط هادی سهمی را به دست آورید. متوسط- ۱۴۰۰

ب نمودار سهمی را رسم کنید.

متوسط- ۱۴۰۰

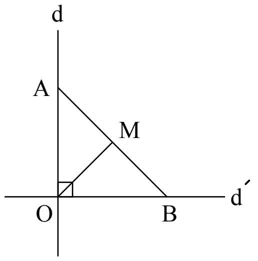
پاسخنامه تشریحی

۱ -

$(x-۱)^۲+(y-۱)^۲=۵$

$O(۱,۱)\ ,\ A(۲,۳)\rightarrow m_{OA}=\dfrac{y_A-y_O}{x_A-x_O}=\dfrac{۳-۱}{۲-۱}=۲\xrightarrow{\text{شیب خط مماس}}m'=-\dfrac{۱}{۲}\rightarrow y-۳=-\dfrac{۱}{۲}(x-۲)$

۲ - مطابق شکل دو خط d و d' برهم عمودند. مثلث AOB همواره قائم‌الزاویه می‌باشد. اگر M وسط وتر AB باشد، چون میانهٔ وارد بر وتر نصف وتر است، پس:



$OM=\dfrac{AB}{۲}=\dfrac{L}{۲}$

بنابراین با جابه‌جایی B و A، طول OM همواره مقدار ثابت $\dfrac{L}{۲}$ می‌باشد. پس مکان هندسی M دایره‌ای به مرکز O و شعاع $\dfrac{L}{۲}$ می‌باشد. توجه کنید که A و B در هر چهار ناحیه می‌توانند جابه‌جا شوند. (به‌جز چهار نقطه‌ای که روی دو خط d و d' می‌افتد.)

۳ -

$C: x^۲+y^۲=۴\quad ,\quad C': x^۲+y^۲-۲x=۴$

$O(۰,۰)\ ,\ O'(۱,۰)\qquad r=۲\ ,\ r'=\sqrt{۵}$

$OO'=\sqrt{۱^۲+۰}=۱\Rightarrow |r-r'|=\sqrt{۵}-۲<OO'<r+r'=\sqrt{۵}+۲\Rightarrow$ دو دایره متقاطع می‌باشند.

۴ - اگر دایره‌ای در ناحیهٔ چهارم بر محورها مماس باشد، مرکز آن به‌صورت $O(R,-R)$ می‌باشد که R شعاع دایره است. داریم:

$O\in d\Rightarrow -R=۳R-۸\Rightarrow R=۲$ و $O(۲,-۲)$

معادلهٔ دایره: $(x-۲)^۲+(y+۲)^۲=۴$

۵ - نقطه‌های موردنظر را به‌صورت $M(x,y)$ در نظر می‌گیریم و فاصلهٔ آنها را از نقطهٔ $(۱,-۲)$ و خط $x=۳$ برابر قرار می‌دهیم.

$\sqrt{(x-۱)^۲+(y+۲)^۲}=|x-۳|\rightarrow (x-۱)^۲+(y+۲)^۲=(x-۳)^۲$

$\rightarrow x^۲-۲x+۱+y^۲+۴y+۴=x^۲-۶x+۹\rightarrow y^۲+۴y+۴x-۴=۰$

۶ -

$\left.\begin{array}{r}\hat{B}=\hat{C}=۴۵^\circ\rightarrow BF=FC\\ BF=a\end{array}\right\}\rightarrow BF=FC=a$

$\left.\begin{array}{r}\overset{\triangle}{BFC}: a^۲+a^۲=BC^۲\rightarrow BC=a\sqrt{۲}\\ OD=BC\end{array}\right\}\rightarrow BC=OD=a\sqrt{۲}$

$AD=OD-OA=a\sqrt{۲}-a=a(\sqrt{۲}-۱)$

$C\hat{F}D=F\hat{C}D=۴۵^\circ\rightarrow DF=DC$

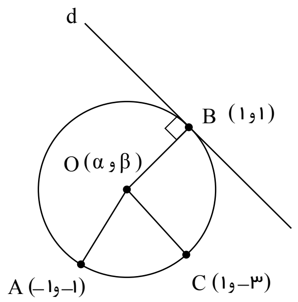
$\overset{\triangle}{FDC}: DF^۲+DC^۲=a^۲\rightarrow DF^۲=\dfrac{a^۲}{۲}\rightarrow DF=\dfrac{a}{\sqrt{۲}}=\dfrac{\sqrt{۲}}{۲}a$

$AF=FD-AD=\dfrac{\sqrt{۲}}{۲}a-(a\sqrt{۲}-a)=a(\dfrac{\sqrt{۲}}{۲}-\sqrt{۲}+۱)=a(۱-\dfrac{\sqrt{۲}}{۲})$

$$\frac{AD}{AF}=\frac{a(\sqrt{2}-1)}{a(1-\frac{\sqrt{2}}{2})}=\frac{\sqrt{2}-1}{1-\frac{1}{\sqrt{2}}}=\frac{\sqrt{2}-1}{\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}}}=\sqrt{2}$$

۷ -

فاصلهٔ هریک از نقاط A، B و C تا مرکز برابر شعاع دایره است.



$$OA=OB\to\sqrt{(-1-\alpha)^2+(-1-\beta)^2}=\sqrt{(1-\alpha)^2+(1-\beta)^2}$$

$$\to(1+\alpha)^2+(1+\beta)^2=(1-\alpha)^2+(1-\beta)^2$$

$$\to\cancel{1}+2\alpha+\cancel{\alpha^2}+\cancel{1}+2\beta+\cancel{\beta^2}=\cancel{1}-2\alpha+\cancel{\alpha^2}+\cancel{1}-2\beta+\cancel{\beta^2}$$

$$\to4\alpha+4\beta=0\to\alpha+\beta=0\ (1)$$

$$OB=OC\to\sqrt{(1-\alpha)^2+(1-\beta)^2}=\sqrt{(1-\alpha)^2+(-3-\beta)^2}$$

$$\to\cancel{1}+\cancel{\alpha^2}-\cancel{2\alpha}+1+\cancel{\beta^2}-2\beta=\cancel{1}+\cancel{\alpha^2}-\cancel{2\alpha}+9+\cancel{\beta^2}+6\beta$$

$$\to8\beta+8=0\to\beta=-1\xrightarrow{(1)}\alpha=1$$

مختصات مرکز: $O(1,-1)\quad,\quad R=OB=\sqrt{(1-1)^2+(1-(-1))^2}=2$

$\Rightarrow$ معادلهٔ دایره: $(x-1)^2+(y+1)^2=4$

شیب خط مماس در نقطهٔ B (m_d) معکوس قرینهٔ شیب BO می‌باشد.

$$m_{BO}=\frac{-1-1}{1-1}=\infty$$

بنابراین شیب‌خط مماس بر دایره در نقطهٔ B صفر است. پس معادلهٔ خط مماس به‌صورت زیر می‌باشد:

معادلهٔ خط مماس: $y=1$

۸ -

فاصلهٔ مرکز دایره تا خط مماس بر دایره، برابر با شعاع دایره است:

$$r=\frac{|3(2)+4(1)+5|}{\sqrt{4^2+3^2}}=\frac{15}{5}=3$$

معادلهٔ دایره برابر است با:

$$(x-2)^2+(y-1)^2=9$$

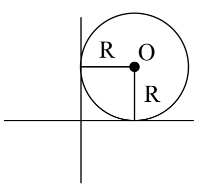
۹ - مرکز و شعاع دایرهٔ $(x-1)^2+y^2=1$ برابر است با: $O=(1,0),r=1$

و مرکز و شعاع دایرهٔ $x^2+(y-1)^2=1$ برابر $O'=(0,1),r'=1$

فاصلهٔ دو مرکز برابر $OO'=\sqrt{2}$ است و $r+r'=2$ و $r-r'=0$ پس:

دو دایره متقاطع‌اند. $|r-r'|<OO'<r+r'\Rightarrow$

۱۰ - چون دایره از نقطهٔ $A(1,2)$ می‌گذرد پس بر محورهای مختصات ناحیهٔ اول مماس است.



معادلهٔ چنین دایره‌ای برابر است با:

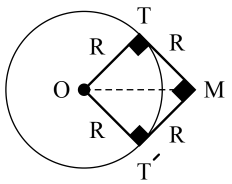
$(x-R)^{۲}+(y-R)^{۲}=R^{۲}\xrightarrow{(۱,۲)}(۱-R)^{۲}+(۲-R)^{۲}=R^{۲}\Rightarrow R^{۲}-۲R+۱+R^{۲}-۴R+۴=R^{۲}\Rightarrow R^{۲}-۶R+۵=۰$

$\Rightarrow R=۱$ یا $R=۵$

$S=\pi R^{۲}\Rightarrow S_{۱}=\pi$ یا $S_{۲}=۲۵\pi$

۱۱ - مطابق شکل مماس‌های رسم‌شده از M برهم عمودند $(\hat{M}=۹۰^{\circ})$ و شعاع در نقطهٔ تماس بر مماس عمود است. $(\hat{T}=\hat{T}'=۹۰^{\circ})$

مماس‌های رسم‌شده از M برابرند. یعنی: $MT=MT'$

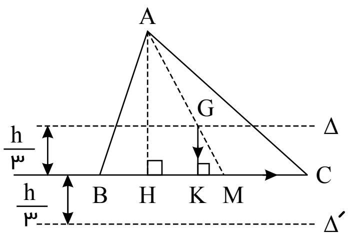


پس می‌توان نتیجه گرفت که $MTOT'$ مربع می‌باشد. داریم:

$$MT=MT'=OT=OT'=R\Rightarrow OM=\sqrt{۲}R$$

پس مکان هندسی M دایره‌ای به مرکز O و شعاع $\sqrt{۲}R$ می‌باشد.

۱۲ - ارتفاع $AH=h$ را رسم می‌کنیم. می‌دانیم که اگر G محل همرسی میانه‌های مثلث ABC باشد، آنگاه داریم:



$$GM=\frac{۱}{۳}AM$$

در ادامه داریم:

$$GK||AH\Rightarrow\frac{GM}{AM}=\frac{GK}{AH}=\frac{۱}{۳}\Rightarrow GK=\frac{AH}{۳}=\frac{h}{۳}$$

پس فاصلهٔ G از ضلع ثابت BC، همواره $\frac{h}{۳}$ است. بنابراین مکان هندسی G، دو خط موازی با BC و به فاصلهٔ $\frac{h}{۳}$ از آن در دو طرف BC می‌باشد.

۱۳ -

$$\begin{cases}x+y=۱\\x-y=۳\end{cases}\rightarrow\begin{cases}x=۲\\y=-۱\end{cases}$$

$$d:۴x+۳y+۵=۰\ ,\ O(۲,-۱)\rightarrow r=\frac{|۴(۲)+۳(-۱)+۵|}{\sqrt{۴^{۲}+۳^{۲}}}=\frac{۱۰}{۵}=۲$$

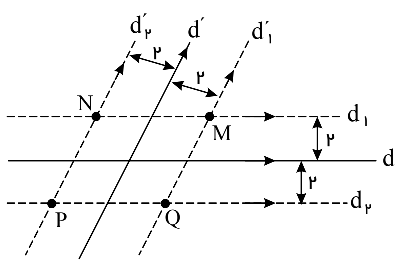
مرکز دایره $O(۲,-۱)$ و شعاع آن برابر $r=۲$ است. معادلهٔ دایره برابر با $(x-۲)^{۲}+(y+۱)^{۲}=۴$ است.

۱۴ -

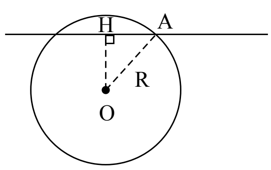
مکان هندسی نقاطی که از یک خط به فاصلهٔ $۲cm$ باشد، دو خط موازی با آن خط و به فاصلهٔ $۲cm$ از آن می‌باشد.

مطابق شکل، مکان هندسی نقاطی که از d به فاصلهٔ $۲cm$ باشند، دو خط موازی با d و به فاصلهٔ $۲cm$ از آن می‌باشد و به همین ترتیب برای d'.

محل برخورد این مکان‌ها، چهار نقطه جواب مسئله می‌باشد یعنی نقاط M، N، P و Q.



۱۵ - اگر خط L، دایرهٔ C را قطع کند، آنگاه فاصلهٔ O تا این خط کمتر از شعاع دایره می‌باشد: $OH<R$

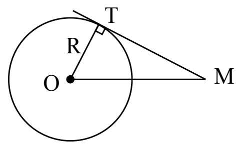


$$OH = \frac{|۳ \times ۳ + ۴ \times ۰ + c|}{\sqrt{۳^۲ + ۴^۲}} = \frac{|۹ + c|}{۵} < ۱ \Rightarrow |۹ + c| < ۵$$

$$\Rightarrow -۵ < ۹ + c < ۵ \Rightarrow -۱۴ \leq c \leq -۴$$

۱۶ -

مطابق شکل داریم:



$$x^۲ + y^۲ + x - ۲y - ۱ = ۰ \Rightarrow (x + \frac{۱}{۲})^۲ - \frac{۱}{۴} + (y - ۱)^۲ - ۱ - ۱ = ۰$$

$$(x + \frac{۱}{۲})^۲ + (y - ۱)^۲ = \frac{۹}{۴} \Rightarrow O(-\frac{۱}{۲}, ۱) \text{ و } R = \frac{۳}{۲} \qquad (۱)$$

$$MO = \sqrt{(۱ - (-\frac{۱}{۲}))^۲ + (-۲ - ۱)^۲} = \sqrt{\frac{۹}{۴} + ۹} = \frac{\sqrt{۴۵}}{۲} \qquad (۲)$$

در نتیجه مطابق شکل طول مماس MT برابر است با:

$$MT^۲ = OM^۲ - R^۲ \xrightarrow{(۱) \text{ و } (۲)} \frac{۴۵}{۴} - \frac{۹}{۴} = \frac{۳۶}{۴} = ۹ \Rightarrow MT = ۳$$

۱۷ -

$$x^۲ + y^۲ - ۴x - ۶y + ۴ = ۰ \Rightarrow (x^۲ - ۴x + ۴) + (y^۲ - ۶y) = ۰$$

$$\Rightarrow (x - ۲)^۲ + (y - ۳)^۲ - ۹ = ۰ \Rightarrow (x - ۲)^۲ + (y - ۳)^۲ = ۹ \Rightarrow O(۲, ۳) \text{ و } R = ۳$$

حالت اوّل) C' و C مماس خارج باشند:

$$OO' = d = R + R' \Rightarrow \sqrt{(۵ - ۲)^۲ + (۷ - ۳)^۲} = ۳ + R' \Rightarrow ۵ = ۳ + R' \Rightarrow R' = ۲$$

$$C' : (x - ۵)^۲ + (y - ۷)^۲ = ۴$$

حالت دوم) C' و C مماس داخل باشند:

$$OO' = d = |R - R'| \Rightarrow ۵ = |۳ - R'| \Rightarrow ۳ - R' = ۵ \text{ یا } ۳ - R' = -۵$$

$$\Rightarrow R' = -۲ (\text{غ ق ق}) \text{ یا } R' = ۸ \Rightarrow (x - ۵)^۲ + (y - ۷)^۲ = ۶۴$$

۱۸ - از آنجا که F و S دارای عرض‌های برابر هستند، نتیجه می‌گیریم که سهمی افقی می‌باشد. می‌دانیم که فاصلهٔ FS برابر a می‌باشد. از طرفی با توجه به مختصات F و S نتیجه می‌گیریم که دهانهٔ سهمی به‌سمت راست می‌باشد. داریم:

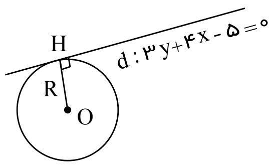
$$FS = \sqrt{(۵ - ۱)^۲ + (۳ - ۳)^۲} = ۴ \Rightarrow a = ۴$$

معادلهٔ سهمی برابر است با:

$$\text{معادلهٔ سهمی}: \quad (y - ۳)^۲ = ۴ \times ۴(x - ۱) \Rightarrow (y - ۳)^۲ = ۱۶(x - ۱)$$

۱۹ -

از آنجایی که دایره بر خط $۳y + ۴x = ۵$ مماس است مطابق شکل داریم:



$$d : ۳y + ۴x - ۵ = ۰ \text{ و } O(۰, ۰)$$

$$OH = R = \frac{|۳ \times ۰ + ۴ \times ۰ - ۵|}{\sqrt{۳^۲ + ۴^۲}} = \frac{۵}{۵} = ۱$$

در نتیجه معادله دایرهٔ برابر است با:

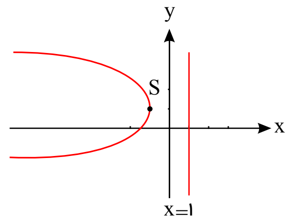
$$\text{معادله دایره} : x^۲ + y^۲ = ۱$$

۲۰ -

$$y^۲ - ۲y = -۸x - ۹ \xrightarrow{+۱} y^۲ - ۲y + ۱ = -۸x - ۹ + ۱ \rightarrow (y-۱)^۲ = -۸(x+۱)$$

$$\Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \text{مختصات رأس:} \quad A(-۱,۱) \\ ۴a = ۸ \rightarrow a = ۲ \\ \text{دهانهٔ سهمی رو به چپ است} \end{array}\right.$$

$\Rightarrow$ معادلهٔ خط هادی: $x = -۱ + ۲ = ۱$



۲۱ – سهمی افقی و دهانهٔ آن رو به چپ است بنابراین معادلهٔ آن به‌صورت زیر است:

$$\left.\begin{array}{l} (y-\beta)^۲ = -۴a(x-\alpha) \\ \text{مختصات راس} \quad S(۱,۰) \end{array}\right\} \rightarrow (y-۰)^۲ = -۴a(x-۱) \rightarrow y^۲ = -۴a(x-۱)$$

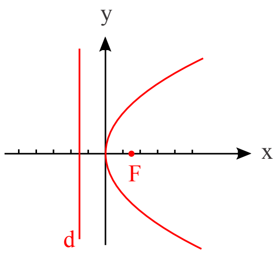
نقطهٔ $(۰,۱)$ روی سهمی قرار دارد بنابراین در معادلهٔ آن صدق می‌کند. $\rightarrow ۱ = -۴a(۰-۱) \rightarrow a = \frac{۱}{۴}$

معادلهٔ سهمی: $y^۲ = -۴ \times \frac{۱}{۴}(x-۱) \rightarrow y^۲ = -(x-۱)$

معادلهٔ خط هادی: $x = ۱ + \frac{۱}{۴} = \frac{۵}{۴}$

۲۲ –

این معادله یک سهمی است که دهانهٔ آن رو به راست بوده و محور تقارن آن محور xهاست. با قرار دادن $۴a = ۶$ داریم $a = \frac{۳}{۲}$. لذا کانون آن $F(\frac{۳}{۲},۰)$ و خط هادی آن موازی محور yها و به معادله $x = -\frac{۳}{۲}$ بوده و رأس آن مبدا مختصات است.



۲۳ – فاصلهٔ هر نقطه روی سهمی تا خط هادی برابر فاصلهٔ آن تا کانون است. بنابراین:

$$MT = MF \ , \ FA = AH$$

$$\left.\begin{array}{l} MT \parallel FH \rightarrow \frac{MT}{FH} = \frac{NT}{NH} \rightarrow \frac{MT}{۲FA} = \frac{NT}{NH} \\ MT \parallel FH \rightarrow \frac{MF}{FN} = \frac{TH}{HN} \rightarrow \frac{MT}{FN} = \frac{TH}{NH} \end{array}\right\} \xrightarrow[\text{تقسیم می‌کنیم}]{\text{طرفین دو تساوی را بر هم}} \frac{\frac{\cancel{MT}}{۲FA}}{\frac{\cancel{MT}}{FN}} = \frac{\frac{NT}{\cancel{NH}}}{\frac{TH}{\cancel{NH}}}$$

$$\rightarrow \frac{FN}{۲FA} = \frac{NT}{TH} \rightarrow \frac{FN}{FA} = \frac{۲NT}{TH}$$

۲۴ –

$$FF' = ۲c = \sqrt{(۲+\sqrt{۵} - (۲-\sqrt{۵}))^۲ + (۰,۰)^۲} = ۲\sqrt{۵} \rightarrow c = \sqrt{۵}$$

$$AF + AF' = ۲a \rightarrow \sqrt{(۵-۲-\sqrt{۵})^۲ + ۰^۲} + \sqrt{(۵-۲+\sqrt{۵})^۲ + ۰^۲} = ۲a$$

$$\rightarrow |۳-\sqrt{۵}| + |۳+\sqrt{۵}| = ۲a \rightarrow ۳ - \cancel{\sqrt{۵}} + ۳ + \cancel{\sqrt{۵}} = ۲a \rightarrow ۶ = ۲a \rightarrow a = ۳$$

خروج از مرکز: $e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{۵}}{۳}$

۲۵ –

$$OF = FA = ۴ \rightarrow \alpha = ۴$$

$$FF' = OF + OF' = ۴ + ۴ = ۸ \rightarrow ۲c = ۸ \rightarrow c = ۴$$

$$OA = OF + FA = ۴ + ۴ = ۸ \rightarrow a = ۸$$

$$a^۲ = b^۲ + c^۲ \rightarrow ۸^۲ = b^۲ + ۴^۲ \rightarrow b = \sqrt{۶۴ - ۱۶} = \sqrt{۴۸} = ۴\sqrt{۳}$$

اندازهٔ DF برابر نصف کوتاه‌ترین وتر کانونی است بنابراین:

$$DF=\frac{b^2}{a}=\frac{(4\sqrt{3})^2}{8}=\frac{16\times 3}{8}=6\rightarrow \beta=6$$

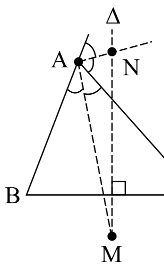
مختصات نقطهٔ D به‌صورت $(4,6)$ می‌باشد.

۲۶ -

الف ویژگی مشترک

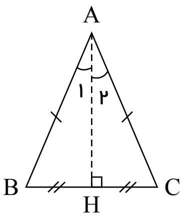
ب دایره

۲۷ - مکان هندسی نقاطی که از دو سر پاره‌خط به یک فاصله‌اند، عمودمنصف آن می‌باشد.



همچنین مکان هندسی نقاطی که از اضلاع زاویه به یک فاصله‌اند، روی نیمساز زاویه هستند.

در شکل مقابل Δ عمودمنصف BC می‌باشد. M و N محل برخورد عمودمنصف Δ و نیمسازهای داخلی و خارجی رأس A است. نقطه‌های M و N، از B و C به یک فاصله و از اضلاع AB و AC یا امتداد آنها به فاصلهٔ یکسان هستند. پاسخ مسئله نقاط M و N می‌باشد. اگر مثلث ABC متساوی‌الساقین باشد ($AB=AC$)، همهٔ نقاط روی ارتفاع وارد بر قاعده پاسخ مسئله می‌باشند زیرا در مثلث متساوی‌الساقین ABC، ارتفاع AH، نیمساز $\hat{A}$ و عمودمنصف BC است.



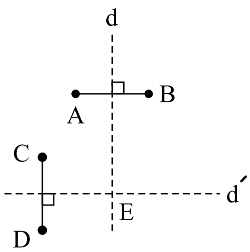
۲۸ - مکان هندسی نقاطی که از A و B به یک فاصله‌اند، عمودمنصف پاره‌خط AB است این خط را d می‌نامیم؛ همچنین مکان هندسی نقاطی که از دو نقطهٔ C و D به یک فاصله باشد، عمودمنصف پاره‌خط CD است این خط را d' می‌نامیم.

بنابراین نقطهٔ برخورد خطوط d و d' جواب مسئله است. (نقطهٔ E)

اگر خطوط d و d' متقاطع باشند، مسئله یک جواب دارد.

اگر خطوط d و d' منطبق باشند، مسئله بی‌شمار جواب دارد.

اگر خطوط d و d' موازی باشند، مسئله جواب ندارد.

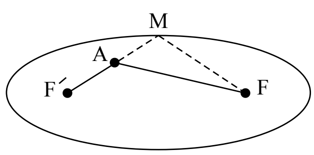


۲۹ - پاره خط $F'A$ را ادامه می‌دهیم تا بیضی را در نقطهٔ M قطع کند M را به F وصل می‌کنیم. نقطهٔ M روی بیضی قرار دارد بنا به تعریف بیضی داریم: $MF'+MF=2a$

در مثلث MAF بنا به قضیهٔ نامساوی مثلثی داریم: $AF<MA+MF$

به‌طرف نامساوی مقدار AF' را اضافه می‌کنیم: $AF+AF'<(MA+AF')+MF=MF'+MF$

طبق تعریف بیضی $MF'+MF=2a$، پس: $AF+AF'<2a$



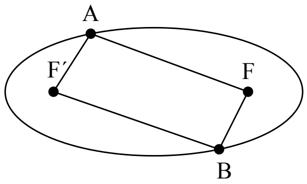
۳۰ -

دایره: $x^2+y^2=2 \Rightarrow$ مرکز دایره: $O(0,0)$ و شعاع دایره: $r=\sqrt{2}$

خط: $x+y-2=0\ ,\ O(0,0)\Rightarrow d=\dfrac{|1(0)+1(0)-2|}{\sqrt{1+1}}=\sqrt{2}$

خط بر دایره مماس است. $\Rightarrow d = r = \sqrt{۲} \Rightarrow$

- ۳۱



نقاط A و B را به کانون‌های بیضی وصل می‌کنیم.

نقطهٔ A روی بیضی قرار دارد بنا به تعریف بیضی (۱) $\quad AF + AF' = ۲a$

نقطهٔ B روی بیضی قرار دارد (۲) $\quad BF + BF' = ۲a$

از (۱) و (۲) و فرض $(AF' = BF)$ نتیجه می‌شود $AF = BF'$

بنابراین چهارضلعی $AFBF'$ یک متوازی‌الاضلاع است در متوازی‌الاضلاع، ضلع‌های روبرو موازی‌اند. $AF || BF'$

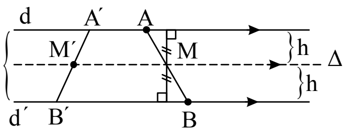
- ۳۲

خروج از مرکز: $\frac{c}{a} = \frac{۳}{۵} \to c = \frac{۳}{۵}a$ ، طول قطر کوچک: $۲b = ۱۶ \to b = ۸ \xrightarrow{a^۲ = b^۲ + c^۲} a^۲ = ۶۴ + \frac{۹}{۲۵}a^۲ \Rightarrow a = ۱۰ \ , \ c = ۶$

طول قطر بزرگ $۲a = ۲۰$ و فاصلهٔ کانونی $۲c = ۱۲$ است.

۳۳ - با توجه به جایگاه رأس و کانون این سهمی در دستگاه مختصات خواهیم داشت: سهمی رو به پایین، $a = ۴$، معادلهٔ خط هادی: $y = ۶$، معادلهٔ سهمی: $(x - ۱)^۲ = -۱۶(y - ۲)$

- ۳۴

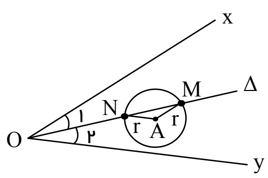


مطابق شکل دو خط d و d' موازیند.

همهٔ نقاطی مانند M که وسط پاره‌خط‌های متکی بر d و d' هستند، این ویژگی را دارند که از d و d' به یک فاصله‌اند.

پس مکان هندسی وسط این پاره‌خط‌ها، خط Δ موازی d و d' و به فاصلهٔ یکسان از آنها می‌باشد.

- ۳۵



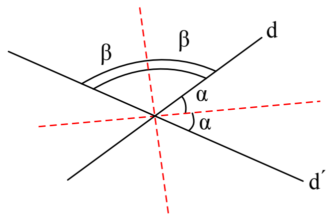
مکان هندسی نقاطی که از A به فاصلهٔ r باشند، دایره‌ای به مرکز A و شعاع r می‌باشد.

مکان هندسی نقاطی که از اضلاع زاویه به یک فاصله‌اند، نیمساز زاویه می‌باشد.

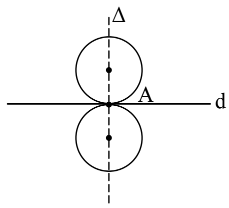
محل برخورد این دو مکان پاسخ مسئله هستند.

مسئله ممکن است ۲ نقطه M و N به‌عنوان جواب داشته باشد یا یک نقطه در حالت مماس بودن خط Δ و دایره و هیچ نقطه در حالتی که Δ و دایره همدیگر را قطع نکنند.

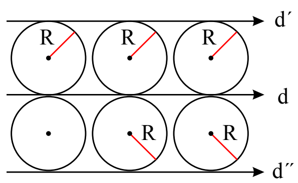
۳۶ - الف) نیمساز زاویه‌های دو خط متقاطع



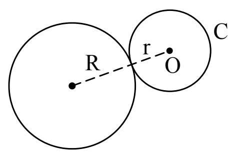
ب) خطی عمود بر d که از A می‌گذرد.



پ) دو خط موازی با d و به فاصلهٔ R از آن



ت) دایره‌ای به مرکز O و شعاع $R + r$



- ۳۷

$۴y^۲ + ۴y = ۲x + ۱ \Rightarrow y^۲ + y = \frac{۱}{۲}x + \frac{۱}{۴}$

$(y+\frac{1}{2})^2-\frac{1}{4}=\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}\Rightarrow (y+\frac{1}{2})^2=\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}=\frac{1}{2}(x+1)$

$\begin{cases} \text{رأس سهمی}: S(-1,-\frac{1}{2}) \text{ و } 4a=\frac{1}{2}\Rightarrow a=\frac{1}{8} \\ \text{سهمی افقی و دهانهٔ رو به راست} \end{cases}$

کانون سهمی: $F(-1+\frac{1}{8},-\frac{1}{2})=(-\frac{7}{8},-\frac{1}{2})$

معادلهٔ خط هادی: $x=-1-\frac{1}{8}=-\frac{9}{8}$

۳۸ -

$-(x-2)^2=16y+16\Rightarrow (x-2)^2=-16(y+1)$

$\begin{cases} \text{رأس سهمی}: S(2,-1) \text{ و } 4a=16\Rightarrow a=+4 \\ \text{سهمی قائم و دهانهٔ رو به پایین} \end{cases}$

خط هادی: $y=-1+4=3$

در نتیجه نقطهٔ برخورد برابر است با:

$\begin{cases} y=3 \\ y=3x \end{cases}\Rightarrow x=1\Rightarrow$ نقطهٔ برخورد $(1,3)$

۳۹ - سهمی افقی می‌باشد پس عرض رأس سهمی با عرض کانون برابر است . پس کانون آن $F(\alpha,1)$ می‌باشد، داریم:

$F\in(y=-x+1)\Rightarrow 1=-\alpha+1\Rightarrow\alpha=0\Rightarrow F(0,1)$

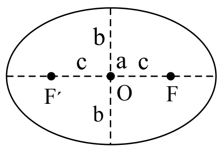
می‌دانیم که $SF=a$. داریم:

$SF=\sqrt{(2-0)^2+(1-1)^2}=2\Rightarrow a=2$

همچنین از مختصات S و F می‌یابیم که دهانهٔ سهمی به‌سمت چپ باز می‌شود. داریم:

معادلهٔ سهمی: $(y-1)^2=-4(2)(x-2)\Rightarrow (y-1)^2=-8(x-2)$

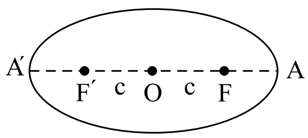
۴۰ -



$\begin{cases} \text{قطر بزرگ}: 2a=12\Rightarrow a=6 \\ \text{قطر کوچک}: 2b=6\Rightarrow b=3 \end{cases}$

$\Rightarrow$ می‌دانیم: $c^2=a^2-b^2=36-9=27\Rightarrow c=3\sqrt{3}\Rightarrow OF=3\sqrt{3}$

۴۱ - مطابق شکل، AF بیشترین و $A'F$ کمترین فاصلهٔ نقاط بیضی از کانون‌ها هستند. داریم:

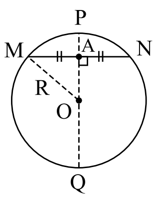


$AA'=2a\Rightarrow OA=OA'=a\Rightarrow AF=A'F'=a-c$

$\Rightarrow AF'=AF+F'F \xlongequal{AF'=a-c \text{ و } FF'=2c} (a-c)+2c=a+c$

۴۲ - کوتاه‌ترین وتر گذرنده از نقطهٔ A، وتری است که بر قطر گذرنده از A عمود باشد (وتر MN).

مطابق شکل داریم:



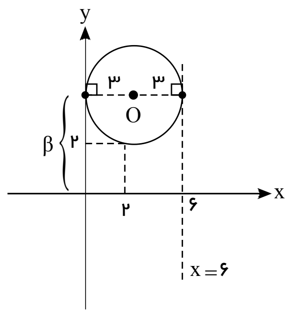
$x^2-4x+y^2-2y=4\Rightarrow (x-2)^2-4+(y-1)^2-1=4$

$\Rightarrow (x-2)^2+(y-1)^2=9\Rightarrow O(2,1) \text{ و } R=3$

$\overset{\Delta}{AMO}: R^2=OA^2+MA^2\Rightarrow 9=1+MA^2\Rightarrow MA=2\sqrt{2}\Rightarrow MN=2AM=4\sqrt{2}$

۴۳ - مطابق شکل شعاع دایره برابر است با ۳.

مختصات مرکز دایره: $O(۳,\beta)$



$C:(x-۳)^۲+(y-\beta)^۲=۹$

$A(۲,۲)\in C\Rightarrow(۲-۳)^۲+(۲-\beta)^۲=۹\Rightarrow(۲-\beta)^۲=۸$

$\Rightarrow ۲-\beta=\pm۲\sqrt{۲}\Rightarrow\beta=۲-۲\sqrt{۲}$ و $\beta=۲+۲\sqrt{۲}$

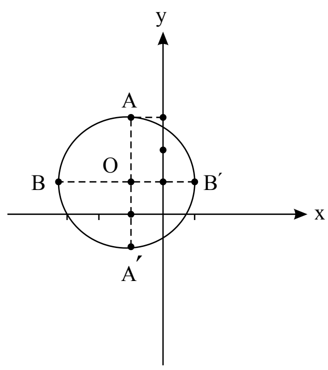
معادلهٔ دایره برابر است با:

معادلهٔ دایره: $\begin{cases}(x-۳)^۲+(y-۲+۲\sqrt{۲})^۲=۹\\(x-۳)^۲+(y-۲-۲\sqrt{۲})^۲=۹\end{cases}$

۴۴ -

معادلهٔ دایره: $(x+۱)^۲+(y-۱)^۲=۴$

نمودار این دایره به‌صورت زیر است؛ مطابق شکل از ۴ ناحیه مختصات دایره می‌گذرد.



۴۵ - برای یافتن تقاطع دو خط داریم:

$\begin{cases}y=x-۲\\y=۲x+۱\end{cases}\Rightarrow ۲x+۱=x-۲\Rightarrow x=-۳$ و $y=-۵\Rightarrow$ مرکز دایره: $O(-۳,-۵)$

در نتیجه معادلهٔ دایره برابر است با:

معادلهٔ دایره: $(x+۳)^۲+(y+۵)^۲=۹$

۴۶ - مرکز دایره روی $y=x$ قرار دارد پس به‌صورت $O(\alpha,\alpha)$ می‌باشد. داریم:

دایره $C:(x-\alpha)^۲+(y-\alpha)^۲=۹$

$A\in C\Rightarrow(-\sqrt{۲}-\alpha)^۲+(\sqrt{۲}-\alpha)^۲=۹$

$۲+\alpha^۲+۲\sqrt{۲}\alpha+۲+\alpha^۲-۲\sqrt{۲}\alpha=۹$

$۲\alpha^۲+۴=۹\Rightarrow ۲\alpha^۲=۵\Rightarrow\alpha^۲=\frac{۵}{۲}\Rightarrow\alpha=\frac{\pm\sqrt{۵}}{\sqrt{۲}}$

$\Rightarrow O(\frac{\sqrt{۵}}{\sqrt{۲}},\frac{\sqrt{۵}}{\sqrt{۲}})$ و $O(\frac{-\sqrt{۵}}{\sqrt{۲}},\frac{-\sqrt{۵}}{\sqrt{۲}})$

معادلهٔ دایره: $\begin{cases}(x+\frac{\sqrt{۵}}{\sqrt{۲}})^{۲}+(y+\frac{\sqrt{۵}}{\sqrt{۲}})^{۲}=۹\\(x-\frac{\sqrt{۵}}{\sqrt{۲}})^{۲}+(y-\frac{\sqrt{۵}}{\sqrt{۲}})^{۲}=۹\end{cases}$

۴۷ -

$y^{۲}+ay+x+b=۰$

$(y+\frac{a}{۲})^{۲}-\frac{a^{۲}}{۴}=-x-b\Rightarrow(y+\frac{a}{۲})^{۲}=-x+\frac{a^{۲}}{۴}-b$

$(y+\frac{a}{۲})^{۲}=-(x-\frac{a^{۲}}{۴}+b)$

$\Rightarrow\begin{cases}\text{سهمی افقی و دهانهٔ رو به چپ}\\ \text{رأس سهمی}: S(\frac{a^{۲}}{۴}-b,-\frac{a}{۲})\\ ۴a=۱\Rightarrow a=\frac{۱}{۴}\end{cases}$

کانون سهمی: $F(\frac{a^{۲}}{۴}-b-\frac{۱}{۴},-\frac{a}{۲})=(۱,۱)$

$\frac{-a}{۲}=۱\Rightarrow a=-۲$ و $\frac{(-۲)^{۲}}{۴}-b-\frac{۱}{۴}=۱\Rightarrow b=-\frac{۱}{۴}$

۴۸ -

$y^{۲}+ay+b=x\Rightarrow(y+\frac{a}{۲})^{۲}-\frac{a^{۲}}{۴}=x-b$

$(y+\frac{a}{۲})^{۲}=x+\frac{a^{۲}}{۴}-b\Rightarrow$ (رأس سهمی) $S:(b-\frac{a^{۲}}{۴},-\frac{a}{۲})=(-۱,۲)$

$\Rightarrow\begin{cases}\frac{-a}{۲}=۲\Rightarrow a=-۴\\ b-\frac{(-۴)^{۲}}{۴}=-۱\Rightarrow b=۳\end{cases}$

۴۹ -

$x^{۲}+۹y^{۲}+۶xy+۸x^{۲}+۸-۱۶x=۹x^{۲}+y^{۲}+۶xy$

$۸y^{۲}=۱۶x-۸\Rightarrow y^{۲}=۲x-۱\Rightarrow y^{۲}=۲(x-\frac{۱}{۲})$ $\begin{cases}\text{سهمی افقی و دهانهٔ رو به راست}\\ ۴a=۲\Rightarrow a=\frac{۱}{۲}\\ S=(h,k)=(\frac{۱}{۲},۰)\end{cases}$

کانون سهمی: $F=(h+a,k)=(۱,۰)$

خط هادی: $x=h-a=\frac{۱}{۲}-\frac{۱}{۲}=۰$ و محور تقارن: $y=k=۰$ محور xها

۵۰ -

$y^{۲}-۶y+۱۶x+۲۵=۰$

$(y-۳)^{۲}-۹=-۱۶x-۲۵\Rightarrow(y-۳)^{۲}=-۱۶x-۱۶\Rightarrow$ سهمی افقی است

$(y-۳)^{۲}=-۱۶(x+۱)\Rightarrow\begin{cases}S=(h,k)=(-۱,۳)\\ ۴a=۱۶\Rightarrow a=۴\\ \text{دهانهٔ سهمی رو به چپ}\end{cases}$

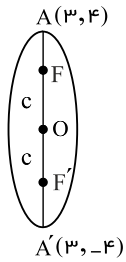
$F(h-a,k)\Rightarrow F(-۱-۴,۳)=(-۵,۳)$

خط هادی $x=h+a=-۱+۴=۳$

۵۱ - M روی بیضی قرار دارد. داریم:

$\begin{cases}MF+MF'=۲a\\MF-MF'=۲b\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}MF=a+b\\MF'=a-b\end{cases}\Rightarrow MF\times MF'=(a-b)(a+b)=a^{۲}-b^{۲}=c^{۲}$

۵۲ - بیضی قائم می‌باشد. می‌دانیم که مرکز بیضی وسط AA' می‌باشد. داریم:



$$O\left|\begin{array}{l} x_O=\frac{۳+۳}{۲}=۳ \\ y_O=\frac{۴-۴}{۲}=۰ \end{array}\right. \Rightarrow O(۳,۰)$$

$$OA=a=\sqrt{(۳-۳)^۲+(۴-۰)^۲}=۴$$

$$۲b=\frac{۳}{۴}\times ۲c \Rightarrow b=\frac{۳}{۴}c \Rightarrow c=\frac{۴}{۳}b$$

$$a^۲=b^۲+c^۲ \Rightarrow ۱۶=b^۲+\frac{۱۶}{۹}b^۲=\frac{۲۵}{۹}b^۲ \Rightarrow b^۲=\frac{۹\times ۱۶}{۲۵} \Rightarrow b=\frac{۳\times ۴}{۵}=\frac{۱۲}{۵}$$

$$\text{قطر کوچک}=۲b=\frac{۲۴}{۵}$$

$$c=\frac{۴}{۳}\times b=\frac{۴}{۳}\times\frac{۱۲}{۵}=\frac{۱۶}{۵}$$

$$\text{فاصلهٔ کانونی}=۲c=\frac{۳۲}{۵}$$

$$e=\frac{c}{a}=\frac{\frac{۱۶}{۵}}{۴}=\frac{۱۶}{۲۰}=\frac{۴}{۵}$$

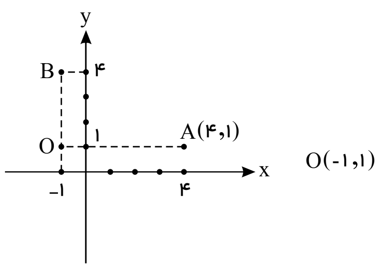
۵۳ -

$$AA'=۲a=\sqrt{(۱-۱)^۲+(۷-(-۵))^۲}=۱۲ \Rightarrow a=۶ \Rightarrow \text{قطر بزرگ}=۲\times ۶=۱۲$$

$$e=\frac{\sqrt{۵}}{۳}=\frac{c}{a}=\frac{c}{۶} \Rightarrow c=۲\sqrt{۵} \Rightarrow \text{فاصلهٔ کانونی}=۲\times ۲\sqrt{۵}=۴\sqrt{۵}$$

$$b^۲=a^۲-c^۲=۳۶-۲۰=۱۶ \Rightarrow b=۴ \Rightarrow \text{قطر کوچک}=۲\times ۴=۸$$

۵۴ - **مطابق شکل نقطهٔ O مرکز بیضی می‌باشد.** $O(-۱,۱)$



$$OA=a=\sqrt{(۴-(-۱))^۲+(۱-۱)^۲}=۵ \Rightarrow \text{قطر بزرگ}=۲a=۱۰$$

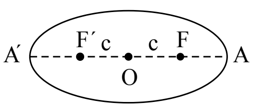
$$OB=b=\sqrt{(-۱-(-۱))^۲+(۴-۱)^۲}=۳ \Rightarrow \text{قطر کوچک}=۲b=۶$$

$$c^۲=a^۲-b^۲=۲۵-۹=۱۶ \Rightarrow c=۴$$

$$\Rightarrow \text{فاصلهٔ کانونی}=۲c=۲\times ۴=۸$$

۵۵ -

شکل روبه‌رو را در نظر می‌گیریم. داریم:



$AF = a - c$ و $A'F = a + c$

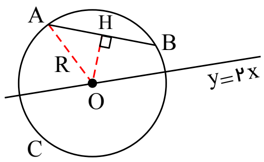
$AA' = ۲a = \sqrt{(۷ - (-۳))^{۲} + (۲ - ۲)^{۲}} = ۱۰$ (طول قطر بزرگ)

$۲a = ۱۰ \Rightarrow a = ۵$

$$\left.\begin{array}{l} AF = \sqrt{(۷-۵)^{۲} + (۲-۲)^{۲}} = ۲ \\ A'F = \sqrt{(۵-(-۳))^{۲} + (۲-۲)^{۲}} = ۸ \end{array}\right. \Rightarrow \begin{cases} a - c = ۲ \\ a + c = ۸ \end{cases} \Rightarrow c = ۳ \Rightarrow \text{فاصلهٔ کانونی: } ۲c = ۶$$

$b^{۲} = a^{۲} - c^{۲} \Rightarrow b^{۲} = ۲۵ - ۹ = ۱۶ \Rightarrow b = ۴ \Rightarrow ۲b = ۸$ (طول قطر کوچک)

۵۶ - از آنجا که مرکز دایره روی خط $y = ۲x$ قرار دارد، پس مختصات آن به‌صورت $O(\alpha, ۲\alpha)$ می‌باشد. مطابق شکل داریم:



معادلهٔ دایره: $(x - \alpha)^{۲} + (y - ۲\alpha)^{۲} = R^{۲}$

$$\begin{cases} A(۱ \text{ و } -۲) \in C \Rightarrow (۱ - \alpha)^{۲} + (-۲ - ۲\alpha)^{۲} = R^{۲} \\ B(۳ \text{ و } ۰) \in C \Rightarrow (۳ - \alpha)^{۲} + (۰ - ۲\alpha)^{۲} = R^{۲} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha^{۲} - ۲\alpha + ۱ + ۴ + ۴\alpha^{۲} + ۸\alpha = R^{۲} \\ ۹ + \alpha^{۲} - ۶\alpha + ۴\alpha^{۲} = R^{۲} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} ۵\alpha^{۲} + ۶\alpha + ۵ = R^{۲} \\ ۵\alpha^{۲} - ۶\alpha + ۹ = R^{۲} \quad (۱) \end{cases}$$

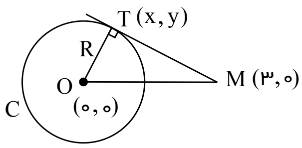
$$\Rightarrow ۵\alpha^{۲} + ۶\alpha + ۵ = ۵\alpha^{۲} - ۶\alpha + ۹ \Rightarrow ۱۲\alpha = ۹ - ۵ = ۴ \Rightarrow \alpha = \frac{۱}{۳}$$

$$\xrightarrow{(۱)} R^{۲} = ۵ \times \frac{۱}{۹} - ۲ + ۹ = \frac{۵}{۹} + ۷ = \frac{۶۸}{۹} \text{ و } O(\alpha \text{ و } ۲\alpha) = (\frac{۱}{۳}, \frac{۲}{۳})$$

معادلهٔ دایره: $(x - \frac{۱}{۳})^{۲} + (y - \frac{۲}{۳})^{۲} = \frac{۶۸}{۹}$

۵۷ -

مطابق شکل داریم:



$OT \perp MT \Rightarrow m_{OT} \times m_{MT} = -۱$

$$\Rightarrow \frac{y - ۰}{x - ۰} \times \frac{y - ۰}{x - ۳} = -۱ \Rightarrow \frac{y^{۲}}{x(x - ۳)} = -۱ \Rightarrow y^{۲} = -x^{۲} + ۳x$$

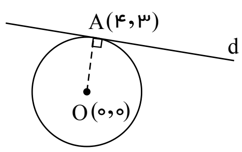
$$\begin{cases} x^{۲} + y^{۲} = ۳x \quad (۱) \\ T(x \text{ و } y) \in C \Rightarrow x^{۲} + y^{۲} = ۳ \end{cases} \Rightarrow ۳x = ۳ \Rightarrow x = ۱ \xrightarrow{(۱)} y^{۲} + ۱ = ۳ \Rightarrow y = \pm\sqrt{۲}$$

نقاط تماس برابر است با:

نقاط تماس: $(۱, \sqrt{۲})$ و $(۱, -\sqrt{۲})$

۵۸ -

مطابق شکل داریم:



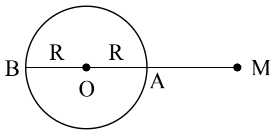
$OA \perp d \Rightarrow m_{OA} \times m_d = -۱$

$$m_{OA} = \frac{۳ - ۰}{۴ - ۰} = \frac{۳}{۴} \Rightarrow m_d = -\frac{۴}{۳} \text{ و } A(۴ \text{ و } ۳)$$

$$\Rightarrow d\colon (y - ۳) = -\frac{۴}{۳}(x - ۴)$$

۵۹ -

مطابق شکل داریم:



$R:$ و شعاع دایره $OM = d \Rightarrow \begin{cases} AM = d - R & \text{نزدیک‌ترین فاصله} \\ BM = d + R & \text{دورترین فاصله} \end{cases}$

$x^2 + y^2 + 2x - 1 = 0 \Rightarrow (x+1)^2 - 1 + y^2 - 1 = 0$

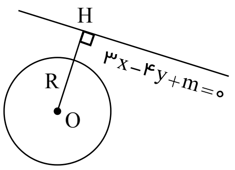
$\Rightarrow (x+1)^2 + y^2 = 2 \Rightarrow O(-1, 0)$ و $R = \sqrt{2}$

$d = OM = \sqrt{(1-(-1))^2 + (2-0)^2} = 2\sqrt{2}$

$$\begin{cases} AM = d - R = 2\sqrt{2} - \sqrt{2} = \sqrt{2} \\ BM = d + R = 2\sqrt{2} + \sqrt{2} = 3\sqrt{2} \end{cases}$$

۶۰ -

شرط اینکه خط d دایره را قطع نکند این است که $OH > R$ باشد. داریم:



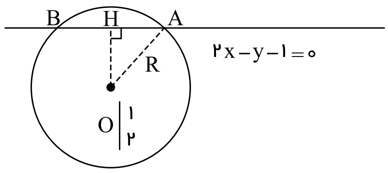
$x^2 + y^2 - 2x - 4y + 1 = 0 \Rightarrow (x^2 - 2x + 1) + (y^2 - 4y) = 0$

$(x-1)^2 + (y-2)^2 = 4 \Rightarrow O(1, 2)$ و $R = 2$

$$OH = \frac{|3 \times 1 - 4 \times 2 + m|}{\sqrt{3^2 + (-4)^2}} = \frac{|m-5|}{5} > 2 \Rightarrow |m - 5| > 10$$

$$\Rightarrow \begin{cases} m - 5 > 10 \Rightarrow m > 15 \\ \text{یا} \\ m - 5 < -10 \Rightarrow m < -5 \end{cases}$$

۶۱ -



$AB = 8 \Rightarrow AH = BH = \frac{8}{2} = 4, OB = R$

$$OH = \frac{|2 \times 1 - 2 - 1|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2}} = \frac{1}{\sqrt{5}} \text{ و } R^2 = AH^2 + OH^2 \xrightarrow{AH=4 \text{ و } OH=\frac{1}{\sqrt{5}}} 16 + \frac{1}{5} = \frac{81}{5}$$

در نتیجه معادلهٔ دایره برابر است با:

معادله دایره: $(x-1)^2 + (y-2)^2 = \frac{81}{5}$

۶۲ - اوّل اینکه باید ضرایب x^2 و y^2 یکسان باشد. پس: $m = 5$

داریم:

$$5x^2 + 5y^2 + 20x - 10y + n + 1 = 0 \Rightarrow x^2 + y^2 + 4x - 2y + \frac{n+1}{5} = 0$$

شرط اینکه دایره باشد این است که:

$$a^2 + b^2 > 4c \Rightarrow 4^2 + (-2)^2 > 4 \times \frac{n+1}{5} \Rightarrow 20 > 4 \times \frac{n+1}{5} \Rightarrow n + 1 < 25 \Rightarrow n < 24$$

۶۳ -

$x^۲ + y^۲ + ax + by + c = ۰$

$(x + \frac{a}{۲})^۲ - \frac{a^۲}{۴} + (y + \frac{b}{۲})^۲ - \frac{b^۲}{۴} + c = ۰$

$\Rightarrow (x + \frac{a}{۲})^۲ + (y + \frac{b}{۲})^۲ = \frac{a^۲ + b^۲ - ۴c}{۴}$

۱) اگر $\frac{a^۲ + b^۲ - ۴c}{۴} > ۰$ و به بیان دیگر $a^۲ + b^۲ > ۴c$ باشد، معادلهٔ دایره‌ای به مرکز $O(\frac{a}{۲}, \frac{b}{۲})$ و شعاع $R = \sqrt{\frac{a^۲ + b^۲ - ۴c}{۴}}$ می‌باشد.

۲) اگر $a^۲ + b^۲ = ۴c$ باشد، نمایش نقطهٔ $M(\frac{a}{۲}, \frac{b}{۲})$ می‌باشد.

۳) اگر $a^۲ + b^۲ < ۴c$ باشد، نمایش هیچ نقطه‌ای از صفحه نمی‌باشد.

۶۴ - چون خط هادی $x = ۲$ می‌باشد پس سهمی افقی است. فاصلهٔ رأس سهمی تا خط هادی برابر با a می‌باشد. داریم:

$(x - ۲ = ۰)$ تا خط $A(۳, ۴)$ فاصلهٔ $= ۳ - ۲ = ۱ \Rightarrow a = ۱$

با توجه به رأس سهمی و خط هادی، دهانهٔ سهمی به‌سمت راست می‌باشد. داریم:

$(y - ۴)^۲ = ۴ \times ۱(x - ۳) \Rightarrow (y - ۴)^۲ = ۴(x - ۳)$

۶۵ -

$x^۲ - ۴x - ۸y - ۴ = ۰ \to (x^۲ - ۴x) = ۸y + ۴ \Rightarrow (x - ۲)^۲ - ۴ = ۸y + ۴$

$\Rightarrow (x - ۲)^۲ = ۸y + ۸ \Rightarrow (x - ۲)^۲ = ۸(y + ۱)$

$۴a = ۸ \Rightarrow a = ۲$ و $S = (h, k) = (۲, -۱)$:رأس سهمی

$F(h, a + k) = (۲, -۱ + ۲) = (۲, ۱)$:کانون سهمی قائم

$y = k - a = -۱ - ۲ = -۳$:خط هادی

۶۶ - می‌دانیم که وسط AB، مرکز دایره می‌باشد. داریم:

$$O: \left| \begin{array}{l} x_O = \frac{x_A + x_B}{۲} \\ y_O = \frac{y_A + y_B}{۲} \end{array} \right. \Rightarrow O: \left| \begin{array}{l} x_O = \frac{۲ + ۱}{۲} = \frac{۳}{۲} \\ y_O = \frac{۳ - ۱}{۲} = ۱ \end{array} \right. \Rightarrow O: \left| \begin{array}{l} \frac{۳}{۲} \\ ۱ \end{array} \right.$$

همچنین شعاع دایره برابر نصف طول پاره‌خط AB(قطر) می‌باشد. داریم:

$$۲R = AB = \sqrt{(۲ - ۱)^۲ + (۳ - (-۱))^۲} = \sqrt{۱ + ۱۶} = \sqrt{۱۷} \Rightarrow R = \frac{\sqrt{۱۷}}{۲}$$

در نتیجه معادلهٔ دایره برابر است با:

$(x - \frac{۳}{۲})^۲ + (y - ۱)^۲ = \frac{۱۷}{۴}$:معادلهٔ دایره

۶۷ -

$x = y^۲ + my + n \Rightarrow y^۲ + my - x + n = ۰$

$(y + \frac{m}{۲})^۲ - \frac{m^۲}{۴} - x + n = ۰ \Rightarrow (y + \frac{m}{۲})^۲ = x + \frac{m^۲}{۴} - n$

$(n - \frac{m^۲}{۴}, -\frac{m}{۲}) = (-۱, ۲)$:مختصات رأس سهمی

$\frac{-m}{۲} = ۲ \Rightarrow m = -۴$ و $n - \frac{m^۲}{۴} \overset{m=-۴}{=\!=\!=} n - \frac{(-۴)^۲}{۴} = -۱ \Rightarrow n = ۳$

۶۸ - از آنجا که عرضهای کانون‌های بیضی برابرند، پس بیضی افقی می‌باشد. داریم:

$FF' = ۲c \Rightarrow ۲c = \sqrt{(\sqrt{۶} - (-\sqrt{۶}))^۲ + (۱ - ۱)^۲} = \sqrt{۲۴} = ۲\sqrt{۶} \Rightarrow ۲c = ۲\sqrt{۶} \Rightarrow c = \sqrt{۶}$

$۲a = ۶ \Rightarrow a = ۳ \to a^۲ = b^۲ + c^۲ \Rightarrow ۹ = b^۲ + ۶ \Rightarrow b = \sqrt{۳}$

قطر کوچک $= ۲b = ۲\sqrt{۳}$

$e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{۶}}{۳}$:خروج از مرکز

۶۹ - می‌دانیم که فاصلهٔ کانون تا خط هادی برابر است با $۲a$. داریم:

$(y - ۴ = ۰)$ تا خط هادی $F(-۱, ۲)$:فاصلهٔ کانون $۴ - ۲ = ۲ \Rightarrow ۲a = ۲ \Rightarrow a = ۱$

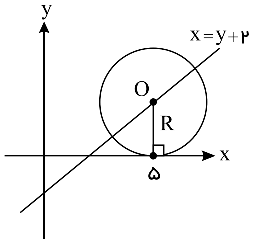
از آنجا که خط هادی $y = ۴$ (افقی) است پس سهمی هم قائم بوده و دهانهٔ آن به‌سمت پائین می‌باشد. داریم:

رأس سهمی: $S(-1,2+1)=(-1,3)$

در نتیجه معادلهٔ سهمی برابر است با:

معادلهٔ سهمی: $(x+1)^2=-4\times(y-3)\Rightarrow(x+1)^2=-4(y-3)$

۷۰ - از آنجا که مرکز دایره روی خط $x=y+2$ می‌باشد. پس می‌توان مختصات O را به‌صورت $(\alpha+2,\alpha)$ نشان داد. چون طول نقطهٔ O برابر با ۵ می‌باشد.
شکل زیر را در نظر می‌گیریم، پس داریم:



$\alpha+2=5\Rightarrow\alpha=3\Rightarrow O(5,3)\Rightarrow R=3$

در نتیجه معادلهٔ دایره برابر است با:

معادلهٔ دایره: $(x-5)^2+(y-3)^2=9$

۷۱ -

$$\begin{cases}\text{خط هادی}: x=4\\ \text{کانون}: F(2,3)\end{cases}$$

می‌دانیم که فاصلهٔ کانون تا خط هادی برابر با $2a$ می‌باشد. داریم:

فاصلهٔ $F(2,3)$ تا $(x-4=0)$ $=2\Rightarrow 2a=2\Rightarrow a=1$

سهمی افقی است چون هادی آن $x=4$ می‌باشد و دهانهٔ آن به‌سمت چپ باز می‌شود.

رأس سهمی: $S(2+1,3)=(3,3)$

معادلهٔ سهمی: $-4\times1(x-3)=(y-3)^2\Rightarrow(y-3)^2=-4(x-3)$

۷۲ - اگر نقطهٔ $M(x,y)$ روی سهمی باشد، فاصلهٔ آن تا خط هادی $x-4=0$ و $F(2,1)$ یکسان می‌باشد. داریم:

فاصلهٔ M تا $(x-4=0)$: $|x-4|$

فاصلهٔ M تا F: $\sqrt{(x-2)^2+(y-1)^2}$

$$\sqrt{(x-2)^2+(y-1)^2}=|x-4|\Rightarrow x^2-4x+4+y^2-2y+1=x^2-8x+16$$

$$y^2-2y=-4x+11\Rightarrow(y-1)^2=-4x+12\Rightarrow(y-1)^2=-4(x-3)$$

۷۳ -

نقطهٔ $M(x,y)$ در این مکان هندسی را در نظر می‌گیریم. داریم:

$$MA=2MB\Rightarrow\sqrt{(x-7)^2+(y-1)^2}=2\sqrt{(x-1)^2+(y-4)^2}$$

$$x^2-14x+49+y^2-2y+1=4x^2-8x+4+4y^2-32y+64$$

$$\Rightarrow 3x^2+6x+3y^2-30y+18=0$$

$$\Rightarrow x^2+2x+y^2-10y+6=0\Rightarrow(x+1)^2+(y-5)^2=20$$

پس مکان هندسی دایره‌ای به مرکز $(-1,5)$ و شعاع $2\sqrt{5}$ می‌باشد.

۷۴ - بازتاب پرتوهایی که موازی محور تقارن سهمی بر آن تابیده می‌شوند از کانون آن عبور می‌کنند.

$$y^2-y=2x+1\xrightarrow{+\frac{1}{4}}y^2-y+\frac{1}{4}=2x+1+\frac{1}{4}\rightarrow y^2-y+\frac{1}{4}=2x+\frac{5}{4}$$

$\rightarrow(y-\frac{1}{2})^2=2(x+\frac{5}{8})\rightarrow$ سهمی افقی و دهانهٔ آن رو به راست است.

$$\left.\begin{array}{l}\text{مختصات رأس}\ S(-\frac{5}{8},\frac{1}{2})\\ 4a=2\rightarrow a=\frac{1}{2}\end{array}\right\}\rightarrow F(-\frac{5}{8}+\frac{1}{2},\frac{1}{2})=(-\frac{1}{8},\frac{1}{2})\ \text{:کانون سهمی}$$

۷۵ -

$$y=ax^2+bx+c\rightarrow ax^2+bx=y-c\xrightarrow{\div a}x^2+\frac{b}{a}x=\frac{y}{a}-\frac{c}{a}$$

$$\xrightarrow{+(\frac{b}{۲a})^۲} x^۲ + \frac{b}{a}x + \frac{b^۲}{۴a^۲} = \frac{y}{a} - \frac{c}{a} + \frac{b^۲}{۴a^۲}$$

$$\rightarrow (x + \frac{b}{۲a})^۲ = \frac{۱}{a}(y + \frac{b^۲}{۴a} - c) \rightarrow (x + \frac{b}{۲a})^۲ = \frac{۱}{a}(y + \frac{b^۲ - ۴ac}{۴a})$$

سهمی قائم است.

مختصات رأس $S(-\frac{b}{۲a}, -\frac{b^۲ - ۴ac}{۴a}) = (-\frac{b}{۲a}, -\frac{\Delta}{۴a})$

$$۴m = \left|\frac{۱}{a}\right| \rightarrow m = \frac{۱}{۴\,|a|}$$

الف) اگر $a > ۰$ باشد دهانهٔ سهمی روبه‌بالا است و مختصات کانون آن برابر است با:

$$F(-\frac{b}{۲a}, -\frac{\Delta}{۴a} + \frac{۱}{۴a}) = (-\frac{b}{۲a}, \frac{۱ - \Delta}{۴a})$$

ب) اگر $a < ۰$ باشد دهانهٔ سهمی رو به پایین است و مختصات کانون آن برابر است با:

$$F(-\frac{b}{۲a}, -\frac{\Delta}{۴a} - \frac{۱}{-۴a}) = (-\frac{b}{۲a}, \frac{۱ - \Delta}{۴a})$$

بنابراین در هر حالت مختصات کانون سهمی $F(-\frac{b}{۲a}, \frac{۱ - \Delta}{۴a})$ می‌باشد.

۷۶ -

$$y^۲ - ۲y + mx + m = ۰ \rightarrow y^۲ - ۲y = -mx - m$$

$$\xrightarrow{+۱} y^۲ - ۲y + ۱ = -mx - m + ۱ \rightarrow (y - ۱)^۲ = -m(x + \frac{m - ۱}{m})$$ سهمی افقی است

فاصلهٔ کانون تا خط هادی: $۲a = ۲ \rightarrow a = ۱$

$$|m| = ۴a = ۴$$

اگر $m > ۰$ باشد آنگاه $m = ۴$ است و معادلهٔ سهمی به‌صورت زیر است:

$$(y - ۱)^۲ = -۴(x + \frac{۴ - ۱}{۴}) \rightarrow (y - ۱)^۲ = -۴(x + \frac{۳}{۴}) \rightarrow x_S = -\frac{۳}{۴}$$

اگر $m < ۰$ باشد آنگاه $m = -۴$ است و معادلهٔ سهمی به‌صورت زیر است:

$$(y - ۱)^۲ = ۴(x + \frac{-۴ - ۱}{-۴}) \rightarrow (y - ۱)^۲ = ۴(x + \frac{۵}{۴}) \rightarrow x_S = \frac{-۵}{۴}$$

۷۷ -

$$۲y^۲ + ۴y = x - m \xrightarrow{\div ۲} y^۲ + ۲y = \frac{x}{۲} - \frac{m}{۲} \xrightarrow{+۱} y^۲ + ۲y + ۱ = \frac{x}{۲} - \frac{m}{۲} + ۱$$

$\rightarrow (y + ۱)^۲ = \frac{۱}{۲}(x - m + ۲) \rightarrow$ سهمی افقی و دهانهٔ آن رو به راست است.

$$\begin{cases} S(m - ۲, -۱) \\ ۴a = \frac{۱}{۲} \rightarrow a = \frac{۱}{۸} \end{cases} \rightarrow x_F = x_S + a \rightarrow \frac{۱۷}{۸} = m - ۲ + \frac{۱}{۸}$$

$$\rightarrow \frac{۱۷}{۸} - \frac{۱}{۸} = m - ۲ \rightarrow \frac{۱۶}{۸} = m - ۲ \rightarrow m = ۴$$

۷۸ -

$$y = ۲x^۲ + mx - ۳ \rightarrow ۲x^۲ + mx = y + ۳ \xrightarrow{\div ۲} x^۲ + \frac{m}{۲}x = \frac{۱}{۲}y + \frac{۳}{۲}$$

$$\xrightarrow{+(\frac{m}{۴})^۲} x^۲ + \frac{m}{۲}x + \frac{m^۲}{۱۶} = \frac{۱}{۲}y + \frac{۳}{۲} + \frac{m^۲}{۱۶}$$

$\rightarrow (x + \frac{m}{۴})^۲ = \frac{۱}{۲}(y + \frac{m^۲}{۳۲} + \frac{۳}{۴}) \rightarrow$ سهمی قائم و دهانهٔ آن روبه‌بالا است.

$$\left.\begin{array}{r} \text{محور تقارن } x = ۱ \rightarrow x_S = ۱ \\ x = -\frac{m}{۴} \end{array}\right\} \rightarrow -\frac{m}{۴} = ۱ \rightarrow m = -۴$$

۷۹ - خط بر سهمی مماس است بنابراین باید معادلهٔ حاصل از حل دستگاه آنها دارای ریشهٔ مضاعف باشد.

$$y = -\frac{۱}{۲}x + \frac{۳}{۲} \xrightarrow{\times(-۲)} -۲y = x - ۳ \rightarrow x = -۲y + ۳ \quad (۱)$$

$y^2-2y+x+1=0 \xrightarrow{(1)} y^2-2y-2y+3+1=0 \to y^2-4y+4=0 \to (y-2)^2=0 \to y=2$

$y=2$ ریشهٔ مضاعف است پس این خط بر سهمی مماس است.

$x=-2y+3 \xrightarrow{y=2} x=-2\times 2+3=-1 \to$ مختصات نقطهٔ تماس $(-1,2)$

۸۰ -

$x^2+2y+10=4x \to x^2-4x=-2y-10 \xrightarrow{+4} x^2-4x+4=-2y-6$

$\to (x-2)^2=-2(y+3) \to$ سهمی قائم و دهانهٔ آن رو به پایین است.

$\left.\begin{array}{l} 4a=2 \to a=\frac{1}{2} \\ \text{مختصات رأس } S(2,-3) \end{array}\right\} \to F(2,-3-\frac{1}{2})=(2,-\frac{7}{2})$

معادلهٔ خطی که از کانون و مبدأ می‌گذرد را می‌نویسیم.

$\left.\begin{array}{l} F(2,-\frac{7}{2}) \\ O(0,0) \end{array}\right\} \to m_{OF}=\dfrac{-\frac{7}{2}-0}{2-0}=-\frac{7}{4}$

$\to y-0=-\frac{7}{4}(x-0) \to 7x+4y=0$

۸۱ - برای تعیین معادلهٔ وتر مشترک دو سهمی متقاطع، از دستگاه معادلات آنها جملهٔ درجهٔ ۲ را حذف می‌کنیم.

$\left.\begin{array}{r} x+y^2=0 \\ y^2=x+2y \end{array}\right\} \to \left\{\begin{array}{l} y^2=-x \\ y^2=x+2y \end{array}\right. \to -x=x+2y \to 2x+2y=0 \to x+y=0$

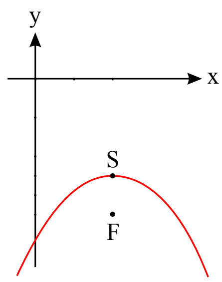
۸۲ -

$y^2+4x=3+2y \to y^2-2y=-4x+3 \xrightarrow{+1} y^2-2y+1=-4x+3+1$

$\to (y-1)^2=-4(x-1) \to 4a=4 \to$ اندازهٔ وتر کانونی $=4$

۸۳ -

$\left.\begin{array}{l} F(2,-\frac{7}{2}) \\ a=1 \end{array}\right\} \to S(2,-\frac{7}{2}+1)=(2,-\frac{5}{2})$:رأس سهمی



سهمی قائم و دهانهٔ آن رو به پایین است بنابراین معادلهٔ آن به‌صورت زیر است:

$(x-2)^2=-4(y-(-\frac{5}{2}))$

$\to (x-2)^2=-4(y+\frac{5}{2})$

$\to x^2-4x+4=-4y-10$

$\to x^2-4x+4y+14=0$

۸۴ -

$y^2+4y=2x \xrightarrow{+4} y^2+4y+4=2x+4$

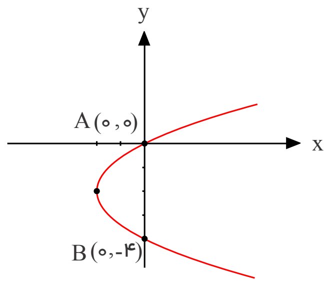
$\to (y+2)^2=2(x+2) \to$ سهمی افقی و دهانهٔ آن رو به راست است.

$\left.\begin{array}{l} \text{مختصات راس } S(-2,-2) \\ 4a=2 \to a=\frac{1}{2} \end{array}\right\} \to$ مختصات کانون $F(-2+\frac{1}{2},-2)=(-\frac{3}{2},-2)$

برای یافتن محل تقاطع سهمی با محور yها در معادلهٔ سهمی $x=0$ قرار می‌دهیم:

$$(y+۲)^۲=۲(۰+۲)\to(y+۲)^۲=۴$$

$$\to\begin{cases}y+۲=۲\to y=۰\\ y+۲=-۲\to y=-۴\end{cases}$$



سهمی در نقاط $A(۰,۰)$ و $B(۰,-۴)$ محور yها را قطع می‌کند.

- ۸۵

$$x^۲+۳x=y-۵\xrightarrow{+\frac{۹}{۴}}x^۲+۳x+\frac{۹}{۴}=y-۵+\frac{۹}{۴}\to\left(x+\frac{۳}{۲}\right)^۲=y-\frac{۱۱}{۴}$$

معادلهٔ یک سهمی است که دهانهٔ آن روبه‌بالا، رأس آن $\left(-\frac{۳}{۲},\frac{۱۱}{۴}\right)$ و $۴a=۱$ و در نتیجه $a=\frac{۱}{۴}$ است. $F\left(-\frac{۳}{۲},\frac{۱}{۴}+\frac{۱۱}{۴}\right)=\left(-\frac{۳}{۲},۳\right)$ و معادلهٔ خط هادی $y=\frac{۱۱}{۴}-\frac{۱}{۴}=\frac{۱۰}{۴}=\frac{۵}{۲}$ و معادلهٔ محور سهمی به‌صورت $x=-\frac{۳}{۲}$ است.

- ۸۶

$$-۲x^۲+۴x=y+۳\xrightarrow{\div(-۲)}x^۲-۲x=-\frac{y}{۲}-\frac{۳}{۲}$$

$$\xrightarrow{+۱}x^۲-۲x+۱=-\frac{y}{۲}-\frac{۳}{۲}+۱\to(x-۱)^۲=-\frac{۱}{۲}(y+۱)$$

$$\to\begin{cases}\text{سهمی قائم و دهانهٔ آن رو به پایین است}\\ S(۱,-۱)\end{cases}\to \text{محور تقارن سهمی}: x=۱$$

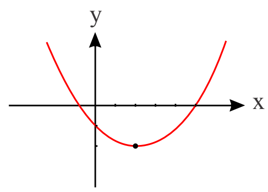
- ۸۷

$$x^۲=۴x+۸y+۱۲\to x^۲-۴x=۸y+۱۲\xrightarrow{+۴}x^۲-۴x+۴=۸y+۱۶$$

$$\to(x-۲)^۲=۸(y+۲)$$

سهمی قائم و دهانهٔ آن رو به بالا است.

$$\left.\begin{array}{l}۴a=۸\to a=۲\\ S(۲,-۲)\end{array}\right\}\to F(۲,-۲+۲)=(۲,۰)$$



- ۸۸

$$\left.\begin{array}{ll}S(۰,۳) & \text{مختصات راس}\\ F(۰,۰) & \text{مختصات کانون}\end{array}\right\}\to a=SF=۳$$

سهمی قائم و دهانهٔ آن رو به پایین است. بنابراین معادلهٔ آن به‌صورت زیر است:

$$(x-۰)^۲=-۴(۳)(y-۳)\to x^۲=-۱۲(y-۳)\xrightarrow{y=۰}x^۲=-۱۲(۰-۳)$$

$$\to x^۲=۳۶\to x=\pm۶$$

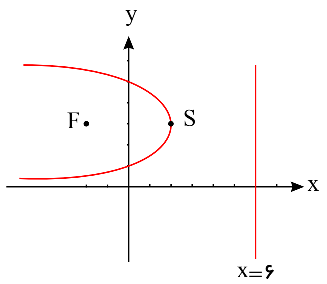
- ۸۹

سهمی افقی و دهانهٔ آن رو به چپ است.

$$\left.\begin{array}{l}F(-۲,۳)\\ x=۶\ \text{خط هادی}\end{array}\right\}\to ۲a=۶-(-۲)=۸\to a=۴$$

$$\Rightarrow\ \text{رأس سهمی}: S(-۲+۴,۳)=(۲,۳)$$

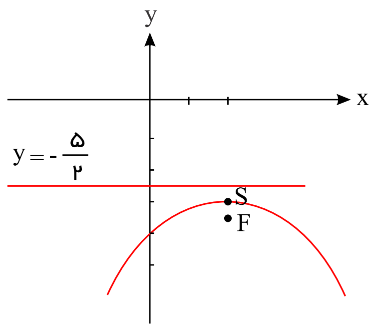
$$\text{معادلهٔ سهمی}: (y-۳)^۲=-۴\times۴(x-۲)=-۱۶(x-۲)$$



- ۹۰

$$\left.\begin{array}{l} F(2,-\frac{7}{2}) \\ \text{خط هادی } y=-\frac{5}{2} \end{array}\right\} \to 2a=-\frac{5}{2}-(-\frac{7}{2})=\frac{2}{2}=1 \to a=\frac{1}{2}$$

مختصات رأس: $S(2,-\frac{7}{2}+\frac{1}{2})=(2,-3)$



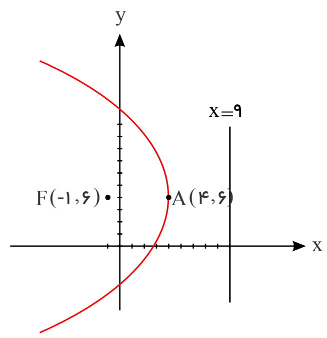
سهمی قائم و دهانهٔ آن رو به پایین است.

$$(x-2)^2=-4(\frac{1}{2})(y-(-3))$$
$$\to (x-2)^2=-2(y+3)$$

۹۱ - با توجه به جایگاه رأس و خط هادی در دستگاه مختصات داریم: $a=9-4=5$

مختصات کانون به‌صورت زیر است:

$$x_F=x_A-a=4-5=-1 \quad , \quad y_F=y_A=6$$
$$\Rightarrow F(-1,6)$$

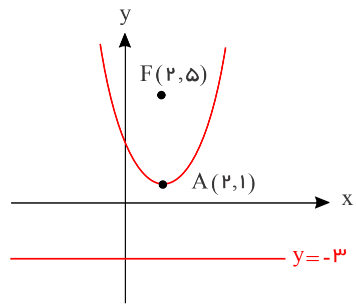


دهانهٔ سهمی رو به چپ است و معادلهٔ آن $(y-k)^2=-4a(x-h)$ می‌باشد و داریم:

$$(y-6)^2=-20(x-4)$$

۹۲ - با توجه به جایگاه رأس و کانون این سهمی در دستگاه مختصات داریم:

$$a=y_F-y_A=5-1=4$$



معادلهٔ خط هادی $y=y_A-a=1-4=-3$ می‌باشد و دهانهٔ سهمی روبه‌بالاست.

معادلهٔ سهمی به‌صورت $(x-h)^2=4a(y-k)$ است و داریم:

$$(x-2)^2=16(y-1)$$

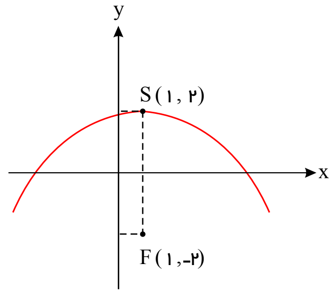
۹۳ -

$$\left.\begin{array}{c} \left.\begin{array}{r} S(1,2) \\ F(1,-2) \end{array}\right\} \to x_S=x_F=1 \\ y_F<y_S \end{array}\right\} \to \text{سهمی قائم و دهانهٔ آن رو به پایین است}$$

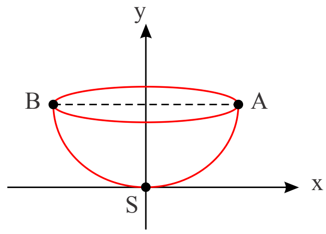
$$SF = a = \sqrt{(۱-۱)^۲ + (۲-(-۲))^۲} = ۴$$

معادلهٔ سهمی: $(x-۱)^۲ = -۴ \times ۴(y-۲)$

$$\Rightarrow (x-۱)^۲ = -۱۶(y-۲)$$



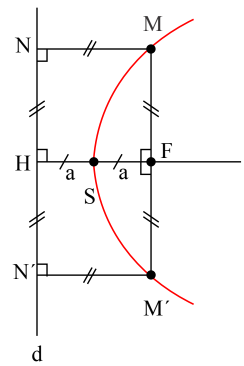
۹۴ – رأس سهمی را منطبق بر مبدأ مختصات در نظر می‌گیریم. اگر قطر دهانهٔ دیش برابر $۲x_۰$ و گودی دیش (عمق) دیش برابر $y_۰$ باشد مختصات نقطهٔ $A(x_۰, y_۰)$ در معادلهٔ $x^۲ = ۴ay$ صدق می‌کند.



$$\left.\begin{array}{l} x_۰^۲ = ۴ay_۰ \to a = \dfrac{x_۰^۲}{۴y_۰} \\ x_۰ = \dfrac{AB}{۲} \end{array}\right\} \to a = \frac{(\frac{AB}{۲})^۲}{۴y_۰}$$

$$\to a = \frac{AB^۲}{۱۶y_۰}$$

۹۵ –



$MNHF$ مربع است $\to MF = HF = ۲a$

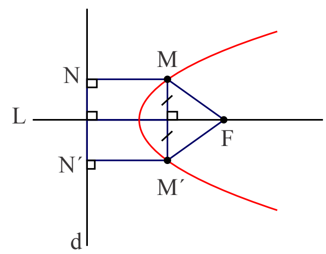
$M'FHN'$ مربع است $\to M'F = M'N' = ۲a$

$MM' = MF + M'F = ۲a + ۲a = ۴a$

۹۶ – نقطهٔ دلخواه M را روی سهمی در نظر می‌گیریم و بازتاب آن را نسبت به خطی که از کانون بر خط هادی سهمی عمود می‌شود (خط L)، M' می‌نامیم.

$$\left.\begin{array}{l} MNN'M' \ \text{مستطیل است} \to MN = M'N' \\ M' \ \text{بازتاب} \ M \ \text{نسبت به خط} \ L \ \text{است} \to MF = M'F \\ M \ \text{روی سهمی قرار دارد} \to MF = MN \end{array}\right\} \to M'N' = M'F$$

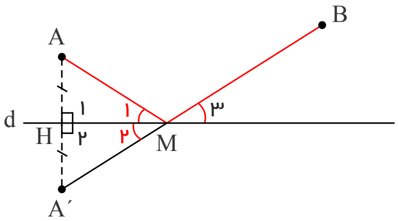
$\to$ M' روی سهمی قرار دارد



چون بازتاب M نسبت به خط L روی سهمی قرار می‌گیرد، بنابراین خط L، محور تقارن است.

۹۷ – ۱) اگر نقطه‌ای خارج از بیضی باشد مجموع فواصل آن از دو کانون بیشتر از مجموع فواصل نقطهٔ روی بیضی از دو کانون است بنابراین نقطهٔ M از d که روی بیضی قرار دارد کمترین مقدار مجموع فواصل از دو کانون F و F' را دارد.

۲) یادآوری مسئله کوتاه‌ترین مسیر:



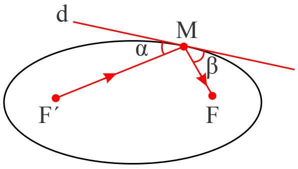
در شکل روبه‌رو برای اینکه نقطهٔ M را روی خط d طوری پیدا کنیم که طول $AM+MB$ کمترین مقدار ممکن را داشته باشد به روش زیر عمل می‌کنیم:

ابتدا بازتاب A را نسبت به d پیدا کرده و A' می‌نامیم. سپس A' را به B وصل می‌کنیم. محل تلاقی $A'B$ با d نقطهٔ مورد (M) است. در ادامه داریم:

$$\left.\begin{array}{l} AH = A'H \\ \hat{H}_1 = \hat{H}_2 = 90^\circ \\ HM = HM \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{ض ض ض}} \overset{\triangle}{AHM} \cong \overset{\triangle}{A'HM}$$

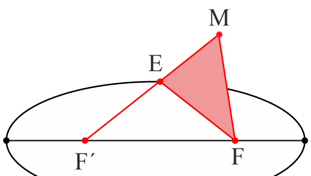
$$\xrightarrow[\text{متقابل به رأس}]{\text{اجزای نظیر}} \left.\begin{array}{l} \hat{M}_1 = \hat{M}_2 \\ \hat{M}_2 = \hat{M}_3 \end{array}\right\} \to \hat{M}_1 = \hat{M}_3 \to \alpha = \beta$$

۳) در تابش نور، زاویهٔ تابش و بازتابش باهم برابرند بنابراین اگر اشعهٔ نوری از کانون F' بر بیضی در نقطهٔ M با زاویهٔ α تابیده شود زاویهٔ بازتاب برابر α خواهد بود، چون $\beta = \alpha$ است بنابراین اشعهٔ بازتاب نور از کانون دیگر یعنی F می‌گذرد.



۹۸ -

بنابر قضیه حمار در مثلث EMF داریم:



$$ME + MF > EF \xrightarrow{+EF'} (ME + EF') + MF > EF + EF'$$

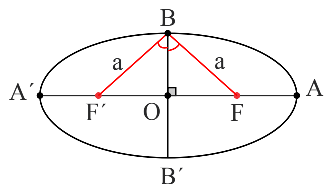
$$\xrightarrow{EF+EF'=2a} MF' + ME > 2a$$

۹۹ - راه‌حل اول:

طول قطر بزرگ دو برابر طول قطر کوچک است. بنابراین:

$$AA' = 2BB' \to \cancel{2}a = 2 \times \cancel{2}b \to a = 2b \to b = \frac{a}{2} \quad (1)$$

$$\left.\begin{array}{l} BF + BF' = 2a \\ BF = BF' \end{array}\right\} \to BF = BF' = a$$



$$\overset{\triangle}{BOF}: BO^2 + OF^2 = BF^2 \to b^2 + c^2 = a^2 \xrightarrow{(1)} (\frac{a}{2})^2 + c^2 = a^2$$

$$\to c^2 = a^2 - \frac{a^2}{4} = \frac{4a^2 - a^2}{4} = \frac{3a^2}{4} \to c = \frac{\sqrt{3}}{2}a$$

$$\to \overset{\triangle}{BOF}: \sin(O\hat{B}F) = \frac{OF}{BF} = \frac{c}{a} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}a}{a} = \frac{\sqrt{3}}{2} \to O\hat{B}F = 60^\circ$$

$$F\hat{B}F' = O\hat{B}F + O\hat{B}F' = 60^\circ + 60^\circ = 120^\circ$$

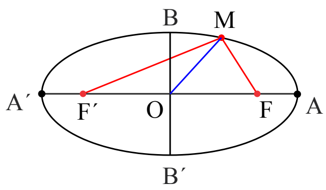
راه‌حل دوم:

در مثلث قائم‌الزاویه $\overset{\triangle}{OBF}$:

$$b = \frac{a}{2} \Rightarrow OB = \frac{BF}{2} \Rightarrow \cos(O\hat{B}F) = \frac{OB}{BF} = \frac{1}{2} \Rightarrow O\hat{B}F = 60^\circ$$

پس در مثلث BFF' زاویهٔ B برابر $2 \times 60^\circ = 120^\circ$ درجه است.

۱۰۰ – الف)



$$۲a = ۱۰ \to a = ۵ \qquad ۲b = ۶ \to b = ۳$$

$$a^۲ = b^۲ + c^۲ \to ۵^۲ = ۳^۲ + c^۲ \to c = ۴$$

$$\left.\begin{array}{l} \to \quad OF = OF' = c = ۴ \\ \text{فرض } OM = ۴ \end{array}\right\} \to OF = OF' = OM$$

ب) میانهٔ OM نصف FF' است. می‌دانیم اگر در مثلثی میانهٔ اندازهٔ میانه وارد بر یک ضلع نصف اندازهٔ آن ضلع باشد آن مثلث قائم‌الزاویه است بنابراین $F\hat{M}F' = ۹۰^\circ$ می‌باشد.

$$MF + MF' = ۲a \to MF + MF' = ۱۰$$

$$\left.\begin{array}{l} \xrightarrow[\text{می‌رسانیم}]{\text{طرفین را به توان ۲}} MF^۲ + MF'^۲ + ۲MF \times MF' = ۱۰۰ \\ \overset{\triangle}{FMF'}: MF^۲ + MF'^۲ = FF'^۲ \to MF^۲ + MF'^۲ = ۶۴ \end{array}\right\}$$

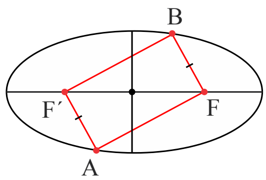
$$\left.\begin{array}{r} \to ۶۴ + ۲MF \times MF' = ۱۰۰ \to ۲MF \times MF' = ۳۶ \to MF \times MF' = ۱۸ \\ MF + MF' = ۱۰ \to MF = ۱۰ - MF' \end{array}\right\}$$

$$\to MF' \times (۱۰ - MF') = ۱۸ \to MF'^۲ - ۱۰MF' + ۱۸ = ۰$$

$$\to MF' = \frac{۵ \pm \sqrt{۲۵ - ۱۸}}{۱} = ۵ \pm \sqrt{۷} \to MF' = ۵ + \sqrt{۷},\ MF = ۵ - \sqrt{۷}$$

۱۰۱ -

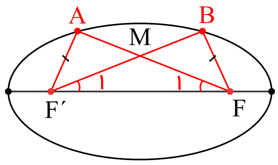
الف)



$$\left.\begin{array}{r} \left.\begin{array}{l} \text{روی بیضی است } B \to BF + BF' = ۲a \\ \text{روی بیضی است } A \to AF + AF' = ۲a \end{array}\right\} \to BF + BF' = AF + AF' \\ AF' = BF \end{array}\right\} \to AF = BF' \left.\begin{array}{l} \\ AF' = BF \end{array}\right\}$$

چهارضلعی $AFBF'$ متوازی‌الاضلاع است پس AF و BF' موازی‌اند.

ب)



$$\left.\begin{array}{r} \text{روی بیضی است } A \to AF + AF' = ۲a \\ \text{روی بیضی است } B \to BF + BF' = ۲a \\ AF' = BF \end{array}\right\} \to AF = BF'$$

$$\left.\begin{array}{l} AF = BF' \\ AF' = BF \\ FF' = FF' \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{ض ض ض}} \overset{\triangle}{AFF'} \cong \overset{\triangle}{BFF'} \xrightarrow{\text{اجزای نظیر}} \hat{F}_۱ = \hat{F'}_۱ \to \text{ متساوی‌الساقین است.} \overset{\triangle}{FMF'}$$

$\to FMF'$ متساوی‌الساقین است $\to MF = MF' \to$ بنابراین روی عمودمنصف آن $\to$ قرار دارد (قطر کوچک بیضی)

۱۰۲ -

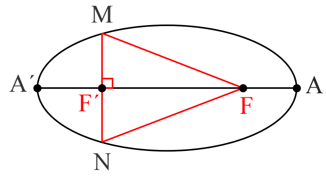
قطر بزرگ $= ۲a$ قطر کوچک $= ۲b$ فاصلهٔ کانونی $= ۲c$

$$\text{طبق فرض: } (۲b)^۲ = ۲a \times ۲c \to \cancel{۴} b^۲ = \cancel{۴} ac \to b^۲ = ac \xrightarrow{\div a^۲} \left(\frac{b}{a}\right)^۲ = \frac{c}{a}$$

$$\to ۱ - e^۲ = e \to e^۲ + e - ۱ = ۰ \to e = \frac{-۱ \pm \sqrt{۱^۲ - ۴(-۱)}}{۲}$$

$$\to \begin{cases} e_۱ = \dfrac{-۱ + \sqrt{۵}}{۲} \\ e_۲ = \dfrac{-۱ - \sqrt{۵}}{۲} \quad \text{غیرقابل قبول} \end{cases}$$

۱۰۳ -



$$S_{\overset{\triangle}{FMN}} = \frac{۱}{۲} \times FF' \times MN = \frac{۱}{\cancel{۲}} \times \cancel{۲}c \times \frac{۲b^۲}{a}$$
$$= ۲ \times \frac{c}{a} \times b^۲ = ۲eb^۲$$

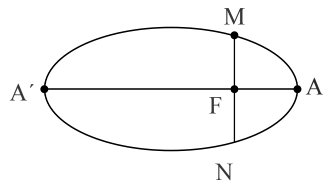
۱۰۴ -

الف) طبق فرض: $a + c = ۲(a - c) \rightarrow a + c = ۲a - ۲c \rightarrow ۳c = a \rightarrow \frac{c}{a} = \frac{۱}{۳} \rightarrow e = \frac{۱}{۳}$

ب) $a^۲ = b^۲ + c^۲ \xrightarrow{\div a^۲} ۱ = (\frac{b}{a})^۲ + (\frac{c}{a})^۲ \rightarrow ۱ = (\frac{b}{a})^۲ + (\frac{۱}{۳})^۲$

$$\rightarrow (\frac{b}{a})^۲ = ۱ - \frac{۱}{۹} = \frac{۸}{۹} \rightarrow \frac{b}{a} = \frac{۲\sqrt{۲}}{۳} \rightarrow \frac{۲b}{۲a} = \frac{۲\sqrt{۲}}{۳} \rightarrow \frac{BB'}{AA'} = \frac{۲\sqrt{۲}}{۳}$$

۱۰۵ -



$$\left.\begin{array}{l} \text{طول کوتاه‌ترین وتر کانونی } MN = \frac{۲b^۲}{a} \\ a^۲ = b^۲ + c^۲ \rightarrow b^۲ = a^۲ - c^۲ \end{array}\right\}$$

$$\rightarrow MN = \frac{۲(a^۲ - c^۲)}{a} \times \frac{a}{a} = ۲a\frac{a^۲ - c^۲}{a^۲}$$
$$\rightarrow MN = ۲a(۱ - (\frac{c}{a})^۲) \rightarrow MN = ۲a(۱ - e^۲)$$

۱۰۶ - اگر طول قطر بزرگ $۲a$، طول قطر کوچک $۲b$ و فاصلهٔ کانونی $۲c$ باشد. داریم:

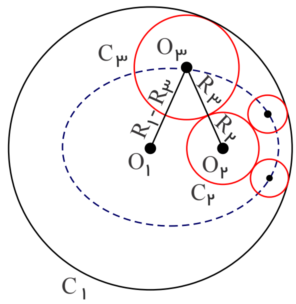
$$a^۲ = b^۲ + c^۲ \xrightarrow{\div a^۲} ۱ = (\frac{b}{a})^۲ + (\frac{c}{a})^۲ \rightarrow ۱ = (\frac{b}{a})^۲ + e^۲$$
$$\rightarrow (\frac{b}{a})^۲ = ۱ - e^۲ \rightarrow \frac{b}{a} = \sqrt{۱ - e^۲} \rightarrow b = a\sqrt{۱ - e^۲}$$

قطر کوچک: $BB' = ۲b = ۲a\sqrt{۱ - e^۲}$

۱۰۷ -

مطابق شکل، دایرهٔ $C_۳$ بر دو دایرهٔ متداخل $C_۱$, $C_۲$ مماس است.

دو دایرهٔ $C_۱$ و $C_۳$ مماس داخل هستند بنابراین طول خط‌المرکزین آنها برابر است با:



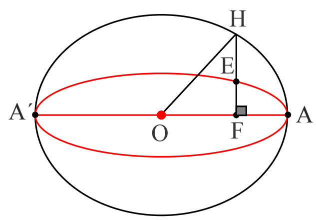
$$O_۱O_۳ = R_۱ - R_۳$$

دو دایرهٔ $C_۲$ و $C_۳$ مماس خارج هستند بنابراین طول خط‌المرکزین آنها برابر است با:

$$O_۲O_۳ = R_۲ + R_۳$$
$$O_۱O_۳ + O_۲O_۳ = (R_۱ - R_۳) + (R_۲ + R_۳) = R_۱ + R_۲$$

بنابراین مکان هندسی مرکز دایرهٔ $C_۳$ یک بیضی با طول قطر بزرگ $R_۱ + R_۲$ با کانون‌های $O_۱$ و $O_۲$ می‌باشد.

۱۰۸ -



$$AA' = ۲R = ۲a \rightarrow R = a \rightarrow OH = a$$

$$\left.\begin{array}{l} \overset{\triangle}{OHF}: OH^۲ = OF^۲ + HF^۲ \rightarrow a^۲ = c^۲ + HF^۲ \rightarrow HF = \sqrt{a^۲ - c^۲} \\ a^۲ = c^۲ + b^۲ \rightarrow b = \sqrt{a^۲ - c^۲} \end{array}\right\} \rightarrow HF = b$$

اندازهٔ FE برابر نصف کوتاه‌ترین وتر کانونی می‌باشد:

$EF = \frac{b^۲}{a}$

$\left.\begin{array}{l} HF = b \\ EF = \frac{b^۲}{a} \end{array}\right\} = \frac{HF}{EF} = \frac{\frac{b}{۱}}{\frac{b^۲}{a}} = \frac{a}{b}$

۱۰۹ -

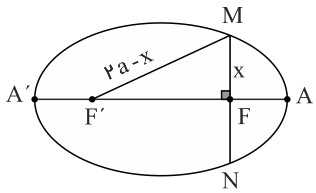
$۲a = ۴۰ \to a = ۲۰ \qquad ۲b = ۲۴ \to b = ۱۲$

$a^۲ = b^۲ + c^۲ \to ۲۰^۲ = ۱۲^۲ + c^۲ \to ۴۰۰ = ۱۴۴ + c^۲ \to c^۲ = ۲۵۶ \to c = ۱۶$
$\to FF' = HM = ۲c = ۲ \times ۱۶ = ۳۲$

$MN = \frac{۲b^۲}{a} = \frac{۲ \times ۱۲^۲}{۲۰} = ۱۴/۴$

$S_{MNEH} = MN \times HM = ۱۴/۴ \times ۳۲ = ۴۶۰/۸$

۱۱۰ -



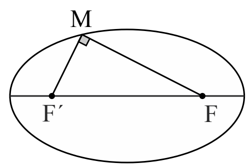
$\left\{\begin{array}{l} MF = x \\ MF' + MF = ۲a \end{array}\right. \to MF' = ۲a - x$

$M\overset{\triangle}{F}F' : FF'^۲ + MF^۲ = MF'^۲ \to x^۲ + (۲c)^۲ = (۲a - x)^۲$

$\left.\begin{array}{r} \to \cancel{x^۲} + ۴c^۲ = ۴a^۲ + \cancel{x^۲} - ۴ax \\ a^۲ = b^۲ + c^۲ \end{array}\right\} \to ۴c^۲ = ۴(b^۲ + c^۲) - ۴ax$

$\to \cancel{۴c^۲} = ۴b^۲ + \cancel{۴c^۲} - ۴ax \to \cancel{۴}ax = \cancel{۴}b^۲ \to x = \frac{b^۲}{a} \ , \ MN = ۲MF = ۲x = \frac{۲b^۲}{a}$

۱۱۱ -

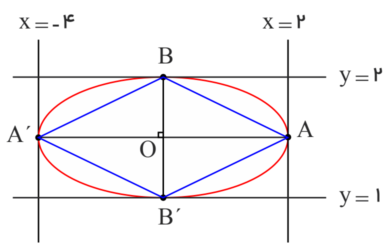


$MF + MF' = ۲a \xrightarrow[\text{می‌رسانیم}]{\text{طرفین معادله را به توان ۲}} (MF + MF')^۲ = ۴a^۲$

$\left.\begin{array}{l} \to MF^۲ + MF'^۲ + ۲MF \times MF' = ۴a^۲ \\ M\overset{\triangle}{F}F' : MF^۲ + MF'^۲ = FF'^۲ \to MF^۲ + MF'^۲ = ۴c^۲ \end{array}\right\} \to ۴c^۲ + ۲MF \times MF' = ۴a^۲$

$\to ۲MF \times MF' = ۴(a^۲ - c^۲) = ۴b^۲ \to MF \times MF' = ۲b^۲$

۱۱۲ -

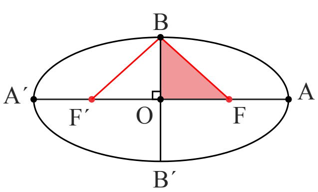


$\left\{\begin{array}{l} AA' = ۲ - (-۴) = ۶ \\ BB' = ۳ - (-۱) = ۴ \end{array}\right.$

$ABB'A'$ مساحت لوزی $= \frac{۱}{۲} AA' \times BB' = \frac{۱}{۲} \times ۶ \times ۴ = ۱۲$

۱۱۳ -

BB' عمودمنصف FF' است و هر نقطهٔ روی عمودمنصف از دو سر پاره‌خط به یک فاصله است. بنابراین:



$\left.\begin{array}{l} BF = BF' \\ BF + BF' = ۲a \end{array}\right\} \to BF = BF' = a$

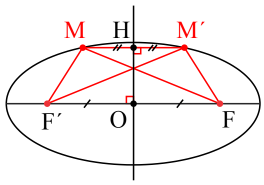
$\left.\begin{array}{r} FF' = OF + OF' = ۲c \\ OF = OF' \end{array}\right\} \to OF = OF' = c$

$$\overset{\triangle}{BOF}: OB^{۲} + OF^{۲} = BF^{۲} \to OB^{۲} + c^{۲} = a^{۲} \to OB = \sqrt{a^{۲} - c^{۲}}$$

$$\left.\begin{matrix} BB' = OB + OB' \\ OB = OB' \end{matrix}\right\} \to BB' = ۲OB = ۲\sqrt{a^{۲} - c^{۲}}$$

– ۱۱۴

نقطهٔ دلخواه M را روی بیضی در نظر می‌گیریم و بازتاب آن را نسبت به عمودمنصف FF'، M' می‌نامیم. در ذوزنقهٔ $MM'FF'$ پاره‌خطی که وسط‌های دو قاعده را به هم وصل می‌کند بر آنها عمود است. بنابراین ذوزنقه متساوی‌الساقین است و دو ساق و دو قطر آن برابرند یعنی:

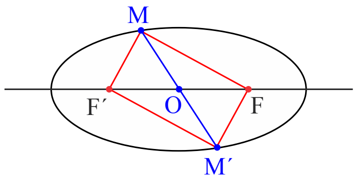


$$\left.\begin{matrix} MF' = M'F \\ MF = M'F' \end{matrix}\right\} \xrightarrow[\text{جمع می‌کنیم}]{\text{طرفین دو معادله را باهم}} \underbrace{MF + MF'}_{۲a} = M'F' + M'F \to M' \text{ روی بیضی قرار دارد}$$

چون بازتاب نقطهٔ دلخواه M نسبت به عمودمنصف FF' روی بیضی قرار می‌گیرد بنابراین عمودمنصف FF' محور تقارن بیضی است.

– ۱۱۵

نقطهٔ دلخواه M را روی بیضی در نظر می‌گیریم و بازتاب آن را نسبت به محل برخورد محورهای تقارن بیضی (نقطهٔ O)، M' می‌نامیم.



$$\left.\begin{matrix} OM' = OM \\ OF = OF' \end{matrix}\right\} \to \text{چهارضلعی } MFM'F' \text{ متوازی‌الاضلاع است زیرا قطرهایش یکدیگر را نصف کرده‌اند.}$$

$$\to \left\{\begin{matrix} MF' = FM' \\ MF = F'M' \end{matrix}\right. \xrightarrow[\text{جمع می‌کنیم}]{\text{طرفین دو معادله را}} \underbrace{MF' + MF}_{۲a} = FM' + F'M' \to M' \text{ روی بیضی قرار دارد}$$

چون بازتاب نقطهٔ دلخواه M نسبت به O روی بیضی قرار می‌گیرد بنابراین نقطهٔ O (محل برخورد دو محور تقارن بیضی) مرکز تقارن است.

– ۱۱۶

$$x^{۲} + y^{۲} - ۴x - ۶y - ۳ = ۰ \to O' = (-\frac{-۴}{۲}, -\frac{-۶}{۲}) = (۲,۳)$$

$$R' = \frac{۱}{۲}\sqrt{(-۴)^{۲} + (-۶)^{۲} - ۴(-۳)} = \frac{۱}{۲}\sqrt{۱۶ + ۳۶ + ۱۲} = \frac{\sqrt{۶۴}}{۲} = \frac{۸}{۲} = ۴$$

بررسی وضعیت مرکز $O(۰,۱)$ نسبت به دایرهٔ $x^{۲} + y^{۲} - ۴x - ۶y - ۳ = ۰$:

مختصات مرکز را در معادلهٔ دایره جایگذاری می‌کنیم.

$$۰^{۲} + ۱^{۲} - (۴ \times ۰) - (۶ \times ۱) - ۳ = -۸ < ۰$$

بنابراین O درون دایره قرار دارد و مسئله دو جواب دارد و دو دایرهٔ مماس داخل بر آن می‌توان رسم کرد.

طول خط‌المرکزین (OO') را به دست می‌آوریم.

$$OO' = \sqrt{(۰ - ۲)^{۲} + (۱ - ۳)^{۲}} = \sqrt{۴ + ۴} = ۲\sqrt{۲}$$

برای اینکه دو دایره مماس داخل باشند باید داشته باشیم:

$$OO' = |R - R'| \to ۲\sqrt{۲} = |R - ۴| \to \left\{\begin{matrix} R_۱ - ۴ = ۲\sqrt{۲} \to R_۱ = ۲\sqrt{۲} + ۴ \\ R_۲ - ۴ = -۲\sqrt{۲} \to R_۲ = ۴ - ۲\sqrt{۲} \end{matrix}\right.$$

معادلهٔ دو دایره مماس داخل با دایرهٔ داده‌شده به‌صورت زیر هستند:

$$C_۱ : (x - ۰)^{۲} + (y - ۱)^{۲} = (۴ + ۲\sqrt{۲})^{۲}$$

$$C_۲ : (x - ۰)^{۲} + (y - ۱)^{۲} = (۴ - ۲\sqrt{۲})^{۲}$$

۱۱۷ – مختصات مرکز و اندازهٔ شعاع را برای دایرهٔ $x^{۲} + y^{۲} - ۲x + ۲y = ۰$ به دست می‌آوریم:

$$O'(-\frac{x \text{ ضریب}}{۲}, -\frac{y \text{ ضریب}}{۲}) = (-\frac{-۲}{۲}, -\frac{۲}{۲}) = (۱,-۱)$$

$$R' = \frac{۱}{۲}\sqrt{(-۲)^{۲} + ۲^{۲} - ۴ \times ۰} = \frac{۲\sqrt{۲}}{۲} = \sqrt{۲}$$

طول خط‌المرکزین دو دایره (OO') برابر است با:

$$OO' = \sqrt{(-۱ - ۱)^{۲} + (۱ - (-۱))^{۲}} = \sqrt{۴ + ۴} = ۲\sqrt{۲}$$

برای اینکه دو دایره مماس خارج باشند باید داشته باشیم:

$OO' = R + R' \to ۲\sqrt{۲} = R + \sqrt{۲} \to R = \sqrt{۲}$

معادلهٔ دایره را با استفاده از مختصات مرکز $O(-۱, ۱)$ و اندازهٔ شعاع $R = \sqrt{۲}$ می‌نویسیم:

$(x - (-۱))^۲ + (y - ۱)^۲ = (\sqrt{۲})^۲ \to (x + ۱)^۲ + (y - ۱)^۲ = ۲$

۱۱۸ -

الف) $x^۲ + y^۲ - ۲x = ۱ \ \to \ O(-\frac{-۲}{۲}, \frac{۰}{۲}) = (۱, ۰)$

$R = \frac{۱}{۲}\sqrt{a^۲ + b^۲ - ۴c} = \frac{۱}{۲}\sqrt{(-۲)^۲ + (۰)^۲ - ۴(-۱)} = \frac{۲\sqrt{۲}}{۲} = \sqrt{۲}$

$x^۲ + y^۲ = ۱ \ \to \ O'(۰, ۰) \ , \ R' = ۱$

$\left.\begin{array}{l} OO' = \sqrt{(۱ - ۰)^۲ + (۰ - ۰)^۲} = ۱ \\ R + R' = \sqrt{۲} + ۱ \\ |R - R'| = \sqrt{۲} - ۱ \end{array}\right\} \to |R - R'| < OO' < R + R' \to$ دو دایره متقاطع هستند .

ب) $x^۲ + y^۲ = ۴ \qquad O(۰, ۰) \ , \ R = ۲$

$x^۲ + y^۲ - ۸x - ۴y + ۱۹ = ۰ \qquad O'(-\frac{-۸}{۲}, -\frac{-۴}{۲}) = (۴, ۲)$

$R = \frac{۱}{۲}\sqrt{(-۸)^۲ + (-۴)^۲ - ۴ \times ۱۹} = \frac{۱}{۲}\sqrt{۶۴ + ۱۶ - ۷۶} = \frac{\sqrt{۴}}{۲} = ۱$

$\left.\begin{array}{l} OO' = \sqrt{(۴ - ۰)^۲ + (۲ - ۰)^۲} = \sqrt{۱۶ + ۴} = \sqrt{۲۰} = ۲\sqrt{۵} \\ R + R' = ۲ + ۱ = ۳ \end{array}\right\} \to OO' > R + R' \to$ دو دایره متخارج هستند.

۱۱۹ -

الف) $x^۲ + y^۲ - ۴x - ۶y - ۳ = ۰ \qquad \to \qquad O(-\frac{-۴}{۲}, -\frac{-۶}{۲}) = (۲, ۳)$

$R = \frac{۱}{۲}\sqrt{(-۴)^۲ + (-۶)^۲ - ۴(-۳)} = \frac{۱}{۲}\sqrt{۱۶ + ۳۶ + ۱۲} = \frac{\sqrt{۶۴}}{۲} = \frac{۸}{۲} = ۴$

$x^۲ + y^۲ - ۱۰x - ۱۴y + ۷۳ = ۰ \qquad \to \qquad O'(-\frac{-۱۰}{۲}, -\frac{-۱۴}{۲}) = (۵, ۷)$

$R' = \frac{۱}{۲}\sqrt{(-۱۰)^۲ + (-۱۴)^۲ - ۴ \times ۷۳} = \frac{\sqrt{۴}}{۲} = \frac{۲}{۲} = ۱$

$OO' = \sqrt{(۵ - ۲)^۲ + (۷ - ۳)^۲} = \sqrt{۳^۲ + ۴^۲} = ۵$

$\left\{\begin{array}{l} OO' = ۵ \\ R + R' = ۴ + ۱ = ۵ \end{array}\right. \to OO' = R + R' \to$ **دو دایره مماس خارج هستند.**

ب) $x^۲ + y^۲ = ۹ \qquad \to \qquad O(۰, ۰), R = ۳$

$x^۲ + y^۲ - ۲x + ۲y + ۱ = ۰ \qquad \to \qquad O'(-\frac{-۲}{۳}, -\frac{۲}{۲}) = (۱, -۱)$

$R' = \frac{۱}{۲}\sqrt{(-۲)^۲ + (۲)^۲ - ۴ \times ۱} = ۱$

$\left.\begin{array}{l} OO' = \sqrt{(۱ - ۰)^۲ + (-۱ - ۰)^۲} = \sqrt{۲} \\ |R - R'| = |۳ - ۱| = ۲ \end{array}\right\} \to OO' < |R - R'| \to$ دو دایره متداخل هستند.

۱۲۰ -

الف) $x^۲ + y^۲ = ۴ \ \to \ O(۰, ۰), R = ۲ \qquad x^۲ + y^۲ - ۲x - ۴ = ۰ \to$

$O'(-\frac{-۲}{۲}, ۰) = (۱, ۰) \ , \ R' = \frac{۱}{۲}\sqrt{(-۲)^۲ + ۰^۲ - ۴(-۴)} = \frac{\sqrt{۲۰}}{۲} = \frac{۲\sqrt{۵}}{۲} = \sqrt{۵}$

$$\left.\begin{array}{l} OO' = \sqrt{(۱-۰)^۲ + (۰-۰)^۲} = ۱ \\ R + R' = ۲ + \sqrt{۵} \\ |R' - R| = \sqrt{۵} - ۲ \end{array}\right\} \to |R' - R| < OO' < R + R'$$

دو دایره متقاطع هستند.

ب) $x^۲ + y^۲ = ۱ \ \to \ O(۰,۰), R = ۱ \qquad x^۲ + y^۲ - ۳\sqrt{۲}x - ۳\sqrt{۲}y + ۵ = ۰ \to$

$$O'(-\frac{-۳\sqrt{۲}}{۲}, -\frac{-۳\sqrt{۲}}{۲}) = (\frac{۳\sqrt{۲}}{۲}, \frac{۳\sqrt{۲}}{۲})$$

$$R' = \frac{۱}{۲}\sqrt{(-۳\sqrt{۲})^۲ + (-۳\sqrt{۲})^۲ - ۴ \times ۵} = \frac{۱}{۲}\sqrt{۱۸ + ۱۸ - ۲۰} = \frac{\sqrt{۱۶}}{۲} = \frac{۴}{۲} = ۲$$

$$\left.\begin{array}{l} OO' = \sqrt{(\frac{۳\sqrt{۲}}{۲} - ۰)^۲ + (\frac{۳\sqrt{۲}}{۲} - ۰)^۲} = \sqrt{\frac{۹}{۲} + \frac{۹}{۲}} = \sqrt{۹} = ۳ \\ R + R' = ۱ + ۲ = ۳ \end{array}\right\} \to OO' = R + R'$$

بنابراین دو دایرهٔ مماس خارج هستند.

۱۲۱ -

الف) $x^۲ + (y-۱)^۲ = ۱ \ \to \ O(۰,۱)\ ,\ R = ۱$

$(x-۱)^۲ + y^۲ = ۱ \ \to \ O'(۱,۰)\ ,\ R' = ۱$

$$\left.\begin{array}{l} OO' = \sqrt{(۱-۰)^۲ + (۰-۱)^۲} = \sqrt{۲} \\ R + R' = ۲ \\ |R - R'| = ۱ - ۱ = ۰ \end{array}\right\} \to |R - R'| < OO' < R + R' \to \text{دو دایره متقاطع هستند.}$$

ب) $x^۲ + y^۲ = ۱ \ \to \ O(۰,۰)\ ,\ R = ۱$

$$x^۲ + y^۲ - ۶x - ۲y + ۹ = ۰ \ \to \ O'(-\frac{-۶}{۲}, -\frac{-۲}{۲}) = (۳,۱)\ , R' = \frac{۱}{۲}\sqrt{(-۶)^۲ + (-۲)^۲ - ۴ \times ۹} = ۱$$

$$\left.\begin{array}{l} OO' = \sqrt{(۳-۰)^۲ + (۱-۰)^۲} = \sqrt{۹+۱} = \sqrt{۱۰} \\ R + R' = ۱ + ۱ = ۲ \end{array}\right\} \to OO' > R + R' \ \text{دو دایره متخارج هستند.}$$

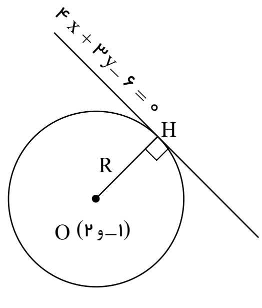
۱۲۲ - تمامی قطرهای دایره از مرکز می‌گذرند بنابراین از حل دستگاه معادله‌های دو قطر، نقطهٔ تقاطع آنها (مرکز) به دست می‌آید.

$$\left.\begin{array}{l} x - y = ۳ \\ x + y = ۱ \end{array}\right\} \xrightarrow[\text{جمع می‌کنیم}]{\text{طرفین دو معادله را باهم}} ۲x = ۴ \to x = ۲\ ,\ ۲ - y = ۳ \to y = ۲ - ۳ = -۱$$

$\to$ مختصات مرکز دایره $O(۲,-۱)$

فاصلهٔ مرکز دایرهٔ (O) از خط مماس $۴x + ۳y - ۶ = ۰$ برابر شعاع دایره است.

$$R = OH = \frac{|۴ \times ۲ + ۳(-۱) - ۶|}{\sqrt{۴^۲ + ۳^۲}} = \frac{۱}{۵}$$



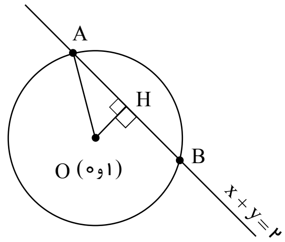
معادلهٔ دایره را تشکیل می‌دهیم:

$$(x-۲)^۲ + (y-(-۱))^۲ = (\frac{۱}{۵})^۲ \to (x-۲)^۲ + (y+۱)^۲ = \frac{۱}{۲۵}$$

۱۲۳ - فاصلهٔ نقطهٔ O از خط $x + y - ۲ = ۰$ را به دست می‌آوریم:

$$OH = \frac{|۰ + ۱ - ۲|}{\sqrt{۱^۲ + ۱^۲}} = \frac{۱}{\sqrt{۲}} = \frac{\sqrt{۲}}{۲}$$

عمودی که از مرکز می‌گذرد وتر AB را نصف می‌کند؛ بنابراین:



$$AH=\frac{AB}{۲}=\frac{۲\sqrt{۲}}{۲}=\sqrt{۲}$$

در مثلث قائم‌الزاویهٔ AOH رابطهٔ فیثاغورس را می‌نویسیم:

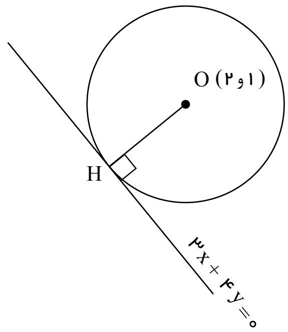
$$O\overset{\Delta}{A}H: AH^{۲}+OH^{۲}=OA^{۲}\rightarrow(\sqrt{۲})^{۲}+(\frac{\sqrt{۲}}{۲})^{۲}=OA^{۲}$$

$$\rightarrow ۲+\frac{۱}{۲}=OA^{۲}\rightarrow\frac{۵}{۲}=OA^{۲}\rightarrow OA=\sqrt{\frac{۵}{۲}}=\frac{\sqrt{۱۰}}{۲}$$

معادلهٔ دایره به‌صورت زیر است:

$$(x-۰)^{۲}+(y-۱)^{۲}=\frac{۵}{۲}$$

۱۲۴ - فاصلهٔ O تا خط $۳x+۴y=۰$ برابر شعاع دایره است.



$$R=OH=\frac{|(۳\times ۲)+(۴\times ۱)|}{\sqrt{۳^{۲}+۴^{۲}}}=\frac{۱۰}{۵}=۲$$

معادلهٔ دایره را می‌نویسیم:

$$(x-۲)^{۲}+(y-۱)^{۲}=۲^{۲}=۴$$

۱۲۵ -

الف)
$$\left.\begin{array}{l} x^{۲}+y^{۲}=۲\rightarrow O(۰,۰)\ ,\ R=\sqrt{۲} \\ x+y-۲=۰ \text{ از خط } (O) \text{ فاصلهٔ مرکز دایرهٔ } =\frac{|۰+۰-۲|}{\sqrt{۱^{۲}+۱^{۲}}}=\frac{۲}{\sqrt{۲}}=\sqrt{۲}\end{array}\right\}$$

$\rightarrow$ خط بر دایره مماس است.

ب) $x^{۲}+y^{۲}-۲y-۳=۰\rightarrow O(-\frac{۰}{۲}\ ,\ -\frac{-۲}{۲})=(۰,۱)$

$$\left.\begin{array}{l} R=\frac{۱}{۲}\sqrt{۰^{۲}+(-۲)^{۲}-۴(-۳)}=\frac{۴}{۲}=۲ \\ x+y-۴=۰ \text{ از خط } (O) \text{ فاصلهٔ مرکز دایرهٔ } =\frac{|۰+۱-۴|}{\sqrt{۱^{۲}+۱^{۲}}}=\frac{۳}{\sqrt{۲}}\times\frac{\sqrt{۲}}{\sqrt{۲}}=\frac{۳\sqrt{۲}}{۲}\end{array}\right\}$$

$\xrightarrow{\frac{۳\sqrt{۲}}{۲}>۲}$ خط، دایره را قطع نمی‌کند.

۱۲۶ -

الف) $x^{۲}+y^{۲}-۴x-۴y+۷=۰\rightarrow O(-\frac{-۴}{۲}\ ,\ -\frac{-۴}{۲})=(۲,۲)$

$$\left.\begin{array}{l} R=\frac{۱}{۲}\sqrt{(-۴)^{۲}+(-۴)^{۲}-۴\times ۷}=\frac{\sqrt{۴}}{۲}=۱ \\ ۳x+۴y=۰ \text{ فاصلهٔ مرکز دایره از خط } =\frac{|(۳\times ۲)+(۴\times ۲)|}{\sqrt{۳^{۲}+۴^{۲}}}=\frac{۱۴}{۵}=۲/۸\end{array}\right\}$$

$\xrightarrow{۲,۸>۱}$ خط، دایره را قطع نمی‌کند.

ب) $x^۲+y^۲-۲x-۲y-۲=۰ \to O(-\frac{-۲}{۲},-\frac{-۲}{۲})=(۱,۱)$

$$\left.\begin{array}{l} R=\frac{۱}{۲}\sqrt{(-۲)^۲+(-۲)^۲-۴(-۲)}=\frac{\sqrt{۱۶}}{۲}=۲ \\ x+y-۱=۰ \text{ فاصلهٔ مرکز دایره از خط } =\frac{|۱+۱-۱|}{\sqrt{۱^۲+۱^۲}}=\frac{۱}{\sqrt{۲}}=\frac{\sqrt{۲}}{۲} \end{array}\right\}$$

$\xrightarrow{\frac{\sqrt{۲}}{۲}<۲}$ خط، دایره را در دو نقطه قطع می‌کند.

۱۲۷ - نقطهٔ A درون دایره قرار دارد.

$A(-۱,-۱)\to(-۱)^۲+(-۱)^۲-۲(-۱)+۴(-۱)-۵=-۵<۰$

نقطهٔ B درون دایره قرار دارد.

$B(۱,-۲)\to ۱^۲+(-۲)^۲-۲\times۱+۴\times(-۲)-۵=-۱۰<۰$

نقطهٔ C بیرون دایره قرار دارد.

$C(۲,۳)\to ۲^۲+۳^۲-۲\times۲+۴\times۳-۵=۱۶>۰$

نقطهٔ D روی دایره قرار دارد.

$D(۴,-۱)\to ۴^۲+(-۱)^۲-۲\times۴+۴\times(-۱)-۵=۰$

۱۲۸ -

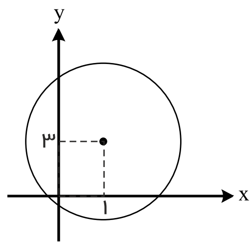
الف) $x^۲+y^۲-۲x-۶y-۱=۰$

$R=\frac{۱}{۲}\sqrt{(-۲)^۲+(-۶)^۲-۴(-۱)}=\frac{\sqrt{۴۴}}{۲}=\sqrt{۱۱}$

$O(-\frac{-۲}{۲}\ ,\ -\frac{-۶}{۲})=(۱,۳)$

معادلهٔ دایره است زیرا ضرایب $x^۲$ و $y^۲$ برابرند و عدد زیر رادیکال برای محاسبهٔ شعاع، مقداری مثبت است.

$$(x-۱)^۲+(y-۳)^۲=۱۱$$



ب) $x^۲+y^۲+۲x+۳y+۴=۰$

$R=\frac{۱}{۲}\sqrt{۲^۲+۳^۲-۴\times۴}=\frac{۱}{۲}\sqrt{-۳}$

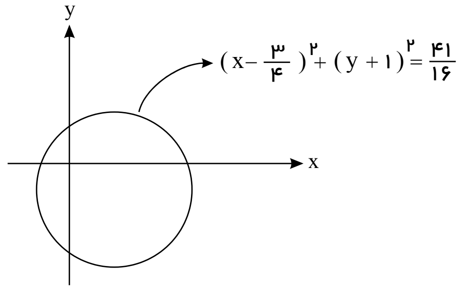
زیرا رادیکال عدد منفی است بنابراین معادله، مربوط به دایره نمی‌باشد.

ج) $۲x^۲+۲y^۲-۳x+۴y-۲=۰\xrightarrow{\div۲}x^۲+y^۲-\frac{۳}{۲}x+۲y-۱=۰$

$R=\frac{۱}{۲}\sqrt{(\frac{-۳}{۲})^۲+۲^۲-۴(-۱)}=\frac{۱}{۲}\sqrt{\frac{۴۱}{۴}}=\frac{\sqrt{۴۱}}{۴}$

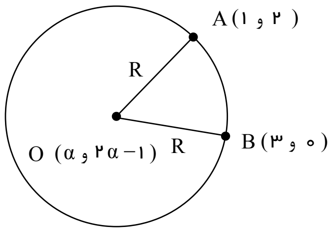
$O=(-\frac{\frac{-۳}{۲}}{۲}\ ,\ -\frac{۲}{۲})=(\frac{۳}{۴}\ ,\ -۱)$

ضرایب $x^۲$ و $y^۲$ با یکدیگر برابرند و عدد زیر رادیکال برای محاسبه شعاع مثبت است. بنابراین معادلهٔ فوق، مربوط به دایره است.



- ۱۲۹

قطر از مرکز دایره می‌گذرد بنابراین مختصات مرکز به‌صورت $(\alpha, 2\alpha-1)$ می‌باشد.



فاصلهٔ نقاط A و B از مرکز (O) با یکدیگر برابر بوده و مساوی اندازهٔ شعاع دایره است، بنابراین:

$$R=OA=OB\rightarrow\sqrt{(1-\alpha)^2+(2-2\alpha+1)^2}=\sqrt{(3-\alpha)^2+(0-2\alpha+1)^2}$$

$$\rightarrow(1-\alpha)^2+(3-2\alpha)^2=(3-\alpha)^2+(1-2\alpha)^2$$

$$\rightarrow\cancel{1}+\cancel{\alpha^2}-2\alpha+\cancel{9}+\cancel{4\alpha^2}-12\alpha=\cancel{9}+\cancel{\alpha^2}-6\alpha+\cancel{1}+\cancel{4\alpha^2}-4\alpha$$

$$\rightarrow4\alpha=0\rightarrow\alpha=0\ ,\ 2\alpha-1=-1\rightarrow O(0,-1)$$

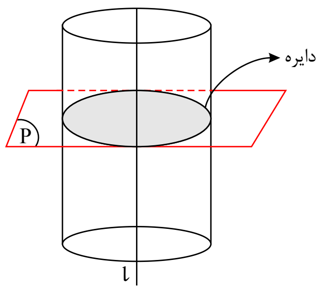
$$\rightarrow R=OA=\sqrt{(1-0)^2+(2-(-1))^2}=\sqrt{10}$$

معادلهٔ دایره را می‌نویسیم:

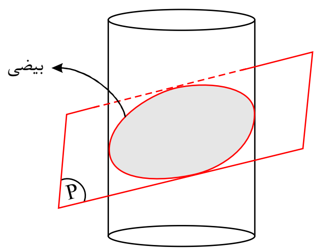
$$(x-0)^2+(y-(-1))^2=(\sqrt{10})^2\rightarrow x^2+(y+1)^2=10$$

- ۱۳۰

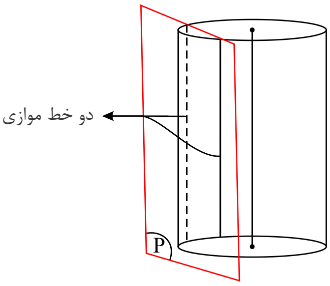
– اگر صفحهٔ p عمود بر محور سطح استوانهٔ (ℓ) آن را قطع کند سطح مقطع حاصل دایره است.



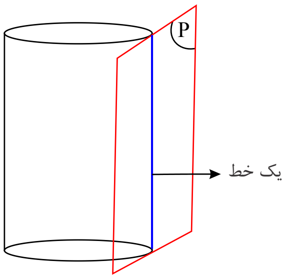
– اگر صفحهٔ p بر محور سطح استوانه‌ای عمود نباشد و آن را قطع کند سطح مقطع حاصل بیضی است.



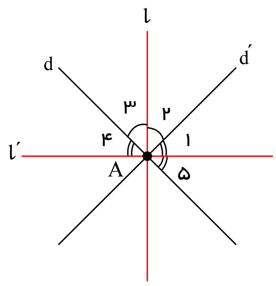
– اگر صفحهٔ P شامل محور سطح استوانه‌ای یا موازی آن باشد، در دو خط موازی، سطح استوانه‌ای را قطع می‌کند.



– اگر صفحهٔ p مماس بر سطح استوانه‌ای باشد آن را در یک خط قطع می‌کند.



۱۳۱ – نقطهٔ تقاطع دو خط d و d' را A می‌نامیم. از تقاطع دو خط d و d' چهار زاویه با رأس A ایجاد می‌شود که دوبه‌دو متقابل به رأس هستند. مکان هندسی تقاطعی که از ضلع‌های این زاویه‌ها به یک فاصله هستند، نیمساز آنها یعنی خط‌های ℓ و ℓ' می‌باشند. دقت کنید که ℓ و ℓ' بر هم عمودند.



$$\ell\ \text{نیمساز}\ d\hat{A}d' \Rightarrow \hat{A}_۲ = \hat{A}_۳$$

$$\left.\begin{array}{l}\hat{A}_۵ = \hat{A}_۱ \\ (\text{متقابل به رأس})\ \hat{A}_۴ = \hat{A}_۵\end{array}\right\} \rightarrow \hat{A}_۱ = \hat{A}_۴$$

$$\underbrace{\hat{A}_۱ + \hat{A}_۴}_{\Downarrow} + \underbrace{\hat{A}_۲ + \hat{A}_۳}_{\Downarrow} = ۱۸۰^\circ$$

$$\rightarrow ۲\hat{A}_۱ + ۲\hat{A}_۲ = ۱۸۰^\circ$$

$$\rightarrow \hat{A}_۱ + \hat{A}_۲ = ۹۰^\circ$$

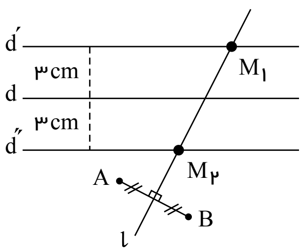
$$\Rightarrow \ell, \ell'\ \text{بر هم عمودند.}$$

۱۳۲ – مکان هندسی نقاطی که از A و B به یک فاصله‌اند، عمودمنصف AB و مکان هندسی نقاطی که از خط d به فاصلهٔ ۳ سانتی‌متر باشند، دو خط موازی به d به فاصلهٔ ۳ سانتی‌متر از آن هستند.

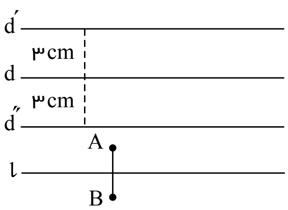
بنابراین نقطهٔ برخورد خط ℓ (عمودمنصف AB) و دو خط d' و d'' جواب مسئله است.

بحث در وجود جواب:

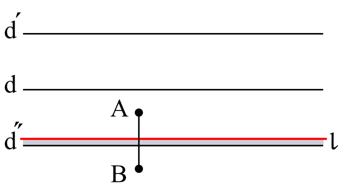
– اگر ℓ یکی از دو خط d' و d'' را قطع کند دیگری را هم می‌کند و مسئله ۲ جواب دارد. (نقاط $M_۱$ و $M_۲$) شکل را ببینید.



– اگر ℓ با دو خط d' , d'' موازی باشد مسئله جواب ندارد. (AB بر d عمود است.)



– اگر ℓ بر یکی از دو خط d' یا d'' منطبق باشد، مسئله بی‌شمار جواب دارد.

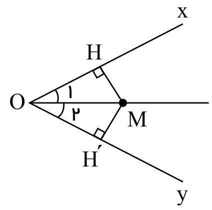


۱۳۳ – طبق تعریف، مکان هندسی مجموعهٔ نقاطی از صفحه است که همهٔ آنها یک ویژگی مشترک داشته باشند و همچنین هر نقطه که آن ویژگی را داشته باشد عضو این مجموعه باشد. بنابراین اثبات در دو مرحله و به‌صورت قضیه دو شرطی انجام می‌شود یعنی ابتدا ثابت می‌کنیم هر نقطه‌ای روی نیمساز زاویه از دو ضلع آن زاویه به یک فاصله است و هر نقطه که از دو ضلع زاویه به یک

فاصله باشد روی نیمساز آن زاویه قرار دارد.

مرحلهٔ ۱:

فرض	$M(\hat{O}_1 = \hat{O}_2)$ روی نیمساز $\hat{O}$ قرار دارد
حکم	$MH = MH'$

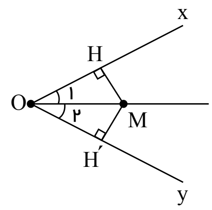


$$\left.\begin{matrix} MO = MO \\ \hat{O}_1 = \hat{O}_2 \end{matrix}\right\} \xrightarrow{\text{وتر و یک زاویهٔ حاده}} M\overset{\Delta}{O}H \cong M\overset{\Delta}{O}H'$$

$$\xrightarrow{\text{اجزای متناظر}} MH = MH'$$

مرحلهٔ ۲:

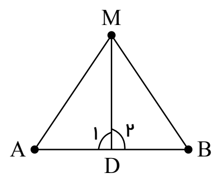
فرض	$MH = MH'$
حکم	$M(\hat{O}_1 = \hat{O}_2)$ روی نیمساز O قرار دارد



$$\left.\begin{matrix} MO = MO \\ MH = MH' \end{matrix}\right\} \xrightarrow{\text{وتر و یک ضلع زاویهٔ قائمه}} M\overset{\Delta}{O}H \cong M\overset{\Delta}{O}H' \xrightarrow{\text{اجزای نظیر}} \hat{O}_1 = \hat{O}_2$$

۱۳۴ -

فرض	$MA = MB$
حکم	M روی عمودمنصف AB قرار دارد



از M به وسط AB (D) وصل می‌کنیم. داریم:

$$\left.\begin{matrix} MA = MB \\ MD = MD \\ DA = DB \end{matrix}\right\} \xrightarrow{\text{ض ض ض}} M\overset{\Delta}{A}D \cong M\overset{\Delta}{B}D$$

$$\xrightarrow{\text{اجزای نظیر}} \left.\begin{matrix} \hat{D}_1 = \hat{D}_2 \\ \hat{D}_1 + \hat{D}_2 = 180^\circ \end{matrix}\right\} \rightarrow \hat{D}_1 + \hat{D}_1 = 180^\circ$$

$$\rightarrow 2\hat{D}_1 = 180^\circ \rightarrow \hat{D}_1 = 90^\circ \;,\; \hat{D}_2 = 90^\circ$$

۱۳۵ -

الف درست

۱۳۶ - در مثلث BOF داریم:

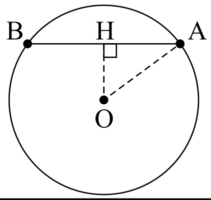
$$\cos O\hat{B}F = \frac{BO}{BF} \xrightarrow{BF=a \;,\; BO=b} \cos O\hat{B}F = \frac{b}{a} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\rightarrow O\hat{B}F = 30^\circ \rightarrow F'\hat{B}F = 2O\hat{B}F = 60^\circ$$

۱۳۷ - نقطهٔ A و A' روی بیضی قرار دارند. بنا به تعریف بیضی داریم $A'F' + A'F = 2a$ و $AF' + AF = 2a$. نتیجه می‌گیریم:

$$A'F' + A'F = AF + AF' \rightarrow A'F' + (A'F' + FF') = AF + (AF + FF') \rightarrow AF = A'F'$$

۱۳۸ - از مرکز دایره بر وتر عمود می‌کنیم، عمود OH وتر AB را نصف می‌کند.



$$OH = \frac{|x+y-۲|}{\sqrt{۱+۱}} = \frac{|۰+۱-۲|}{\sqrt{۲}} = \frac{\sqrt{۲}}{۲}$$

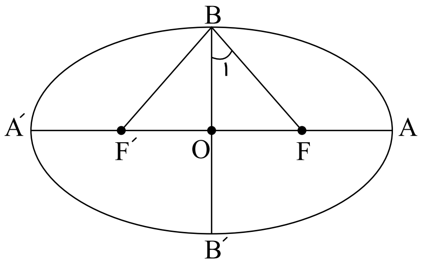
$$OA^۲ = OH^۲ + AH^۲ \to OA^۲ = (\frac{\sqrt{۲}}{۲})^۲ + (\sqrt{۲})^۲ = \frac{۱۰}{۴} = R^۲$$

$$(x-۰)^۲ + (y-۱)^۲ = \frac{۱۰}{۴}$$

۱۳۹ – نقطه B روی بیضی است $BF + BF' = ۲a$

از طرفی نقطه B روی عمودمنصف پاره‌خط FF' قرار دارد $BF = BF'$؛ بنابراین $BF = BF' = a$ در مثلث قائم‌الزاویه OFB داریم: $OB^۲ + OF^۲ = BF^۲ \to b^۲ + c^۲ = a^۲$

۱۴۰ –



$$a = ۲b \to c^۲ = a^۲ - b^۲ = ۴b^۲ - b^۲ = ۳b^۲ \to c = \sqrt{۳}b$$

$$\tan B_۱ = \frac{OF}{OB} = \frac{c}{b} = \frac{\sqrt{۳}b}{b} = \sqrt{۳} \to B_۱ = ۶۰^\circ \to F\hat{B}F' = ۲ \times ۶۰ = ۱۲۰$$

۱۴۱ –

$$x^۲ + y^۲ - ۲x - ۲y = ۳ \to (x-۱)^۲ + (y-۱)^۲ = ۵ \to O = (۱,۱)$$

$m_{OA} = \frac{۳-۱}{۲-۱} = ۲$ شیب خط مماس $m' = \frac{۱}{m} = \frac{-۱}{۲}$ برابر است:

$$y - ۳ = \frac{-۱}{۲}(x-۲)$$

۱۴۲ –

$$R = OM = \sqrt{(۱-۲)^۲ + (۱-۳)^۲} = \sqrt{۵}$$

$$(x-۲)^۲ + (y-۳)^۲ = ۵$$

۱۴۳ –

$$\begin{cases} y^۲ + ۷x + ۵ = ۰ \\ x^۲ + y^۲ = ۲۵ \end{cases} \to x^۲ + (-۷x - ۵) = ۲۵ \to x^۲ - ۷x - ۳۰ = ۰$$

$$x = -۳, x = ۱۰$$

$$\begin{cases} x = -۳ \to y^۲ = ۱۶ \to y = \pm ۴ \to (-۳, ۴)\ ,\ (-۳, -۴) \\ x = ۱۰ \to y^۲ = -۷۵ \quad \text{غ ق ق} \end{cases}$$

۱۴۴ – با توجه به جایگاه کانون و معادله خط هادی، سهمی افقی و دهانه آن به‌سمت چپ است.

مختصات رأس سهمی $A(-۱, ۲)$ در این سهمی $a = AF = ۲$

معادلهٔ آن برابر است با:

$$(y-۲)^۲ = -۸(x+۱)$$

۱۴۵ – نقطهٔ D روی بیضی قرار دارد، بنا به تعریف بیضی: $DF + DF' = ۲a$

در مثلث قائم‌الزاویه DFF' بنا به قضیهٔ فیثاغورث داریم:

$$DF^۲ + FF'^۲ = DF'^۲ \to DF^۲ + (۲c)^۲ = (۲a - DF)^۲$$

$$DF = \frac{a^۲ - c^۲}{a} \xrightarrow{a^۲ - c^۲ = b^۲} DF = \frac{b^۲}{a}$$

۱۴۶ –

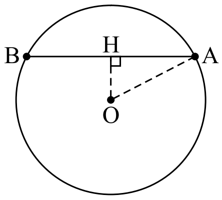
$$PF + PF' = ۲a \to \sqrt{۹ + m^۲} + \sqrt{۹ + m^۲} = ۱۰ \to m = \pm ۴$$

۱۴۷ –

$$x^۲ + y^۲ + ax + by + c = ۰ \to (x^۲ + ax + \frac{a^۲}{۴}) + (y^۲ + by + \frac{b^۲}{۴}) = -c + \frac{a^۲}{۴} + \frac{b^۲}{۴}$$

$$(x + \frac{a}{۲})^۲ + (y + \frac{b}{۲})^۲ = \frac{a^۲ + b^۲ - ۴c}{۴} \to r^۲ = \frac{a^۲ + b^۲ - ۴c}{۴} \to r = \frac{\sqrt{a^۲ + b^۲ - ۴c}}{۲}$$

۱۴۸ – از مرکز دایره بر وتر عمود می‌کنیم عمود OH وتر AB را نصف می‌کند.



$AH = \frac{۱}{۲} AB = ۳$

$OH = \frac{|۳(۲) - ۴(-۱) + ۱۰|}{\sqrt{۹ + ۱۶}} = ۴$

$OA^۲ = OH^۲ + AH^۲ \to r^۲ = (۴)^۲ + (۳)^۲ = ۲۵ \;,\; (x - ۲)^۲ + (y + ۱)^۲ = ۲۵$

۱۴۹ -
۵

۱۵۰ - نادرست

۱۵۱ -
ابتدا معادلهٔ دایره را به‌صورت معادلهٔ استاندارد می‌نویسیم.

$(x - ۱)^۲ + (y - ۱)^۲ = ۴$

مرکز و شعاع دایره برابر است با:

$O = (۱ , ۱) \;,\; r = ۲$

حال فاصله مرکز دایره از خط را به دست می‌آوریم:

$d = \frac{|۱ + ۱ - ۱|}{\sqrt{۱^۲ + ۱^۲}} = \frac{\sqrt{۲}}{۲} \Rightarrow d < r$

می‌بینیم که فاصلهٔ مرکز دایره از خط از شعاع کوچک‌تر است؛ پس خط و دایره در دو نقطهٔ متقاطع هستند.

۱۵۲ - الف) با توجه به جایگاه رأس و معادله خط هادی، سهمی افقی و دهانهٔ آن به‌سمت چپ است.
معادلهٔ کلی سهمی به‌صورت $(y - k)^۲ = -۴a(x - h)$ است که در آن رأس سهمی (h , k) و $y = k$ محور سهمی و $x = a + h$ خط هادی و $(-a + h , k)$ کانون سهمی است.
در این سهمی داریم:

$\begin{cases} h = ۲ \\ x = ۳ \end{cases} \to x = a + h \to ۳ = a + ۲ \to a = ۱$

بنابراین معادلهٔ سهمی برابر است با:

$(y - ۳)^۲ = -۴(x - ۲)$

ب) مختصات کانون سهمی $F(-a + h , k) = (-۱ + ۲ , ۳) = (۱ , ۳)$

پ) برای به دست آوردن مختصات محل برخورد سهمی با محور طول‌ها باید $y = ۰$ قرار دهیم.

$(y - ۳)^۲ = -۴(x - ۲) \xrightarrow{y=۰} x = \frac{-۱}{۴}$

$\text{مختصات محل برخورد} = (-\frac{۱}{۴} , ۰)$

۱۵۳ -

$\text{طول قطر بزرگ بیضی} = ۲a = ۱۶ \Rightarrow a = ۸$

$\text{خروج از مرکز} = \frac{c}{a} = \frac{۳}{۴} \xrightarrow{a=۸} c = ۶$

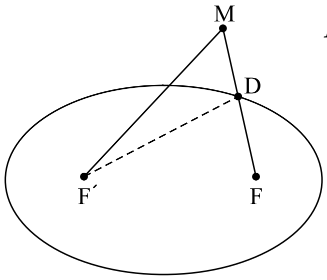
با توجه به شکل فاصلهٔ رأس A تا نزدیک‌ترین کانون برابر AF است.

$AF = a - c = ۲$

۱۵۴ - از نقطهٔ M به کانون‌های بیضی وصل می‌کنیم تا بیضی را در نقطهٔ D قطع کند، نقطهٔ D روی بیضی قرار دارد. بنا بر تعریف بیضی داریم:

$DF + DF' = ۲a$

بنا بر نامساوی مثلثی در مثلث MDF' داریم:



$$MD + MF' > DF' \xrightarrow{+DF} DF + MD + MF' > DF' + DF \to MF + MF' > ۲a$$

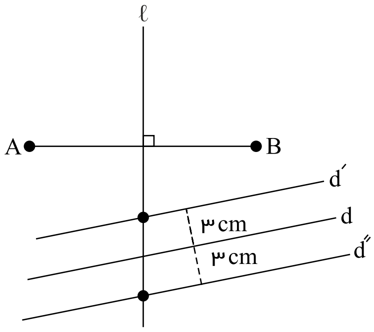
۱۵۵ - رابطهٔ منحنی $x^۲ + y^۲ + ax + by + c = ۰$ معادلهٔ یک دایره است، اگر و تنها اگر $a^۲ + b^۲ > ۴c$ باشد.

$a^۲ + b^۲ > ۴c \to ۱۶ + ۳۶ > ۴a \to a < ۱۳$

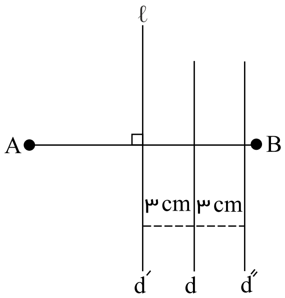
۱۵۶ - مکان هندسی نقاطی که از دو نقطهٔ A و B به یک فاصله‌اند، عمودمنصف پاره‌خط AB است. این خط را رسم می‌کنیم و l می‌نامیم.

مکان هندسی نقاطی که از خط d به فاصلهٔ ۳ سانتی‌متر باشند، دو خط موازی d هستند که d' و d'' می‌نامیم. محل برخورد دو خط d' و d'' با خط l جواب مسئله است.

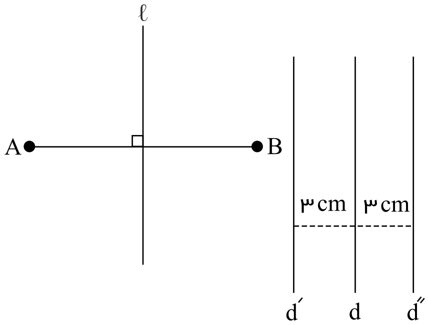
الف- اگر خط l دو خط d' و d'' را قطع کند، مسئله دو جواب دارد.



ب- اگر خط l بر یکی از دو خط d' یا d'' را منطبق باشد، مسئله بی‌شمار جواب دارد.

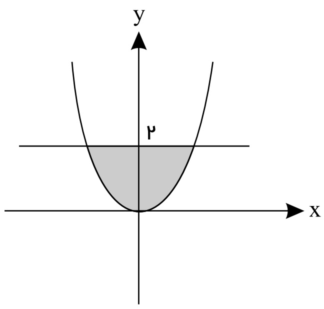


پ- اگر خط l هیچ‌یک از دو خط d' یا d'' را قطع نکند، مسئله جواب ندارد.



۱۵۷ - الف) بیضی ب) درست

۱۵۸ -



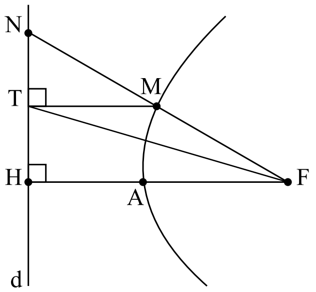
۱۵۹ - روش اول:

بنا به تعریف سهمی $MF=MT$ مثلث MFT متساوی‌الساقین است. $(۱) M\hat{T}F = T\hat{F}M$

از طرفی بنا به خطوط موازی $FH||MT$ و مورب FT نتیجه می‌شود $(۲) M\hat{T}F = T\hat{F}H$

از (۱) و (۲) نتیجه می‌شود TF نیمساز است. بنا به قضیه نیمساز در مثلث FHN داریم:

$$\frac{NF}{FH}=\frac{NT}{TH}\xrightarrow{FH=۲FA}\frac{NF}{۲FA}=\frac{NT}{TH}\xrightarrow{\times ۲}\frac{NF}{FA}=\frac{۲NT}{TH}$$



روش دوم:

با توجه به قضیهٔ تالس در مثلث $FH||MT$:NHF

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{NM}{MF}=\dfrac{NT}{TH}\\ \dfrac{MT}{FH}=\dfrac{NM}{NF}\xrightarrow{MT=MF}\dfrac{NF}{FH}=\dfrac{NM}{MF}\end{array}\right\}\xrightarrow{FH=۲FA}\frac{NF}{۲FA}=\frac{NT}{TH}\xrightarrow{\times ۲}\frac{NF}{FA}=\frac{۲NT}{TH}$$

۱۶۰ - الف)

معادلهٔ متعارف سهمی:

$$y^۲-۲y-۸x+۹=۰\Rightarrow y^۲-۲y+۱=۸x-۹+۱\Rightarrow (y-۱)^۲=۸(x-۱)$$

فاصله کانونی سهمی:

$$۴a=۸\Rightarrow a=۲$$

ب)

رأس سهمی:

$$(h\,,k)=(۱\,,۱)$$

معادلهٔ خط هادی سهمی:

$$x=-a+h\Rightarrow x=-۱$$

مختصات کانون:

$$(a+h\,,k)=(۳\,,۱)$$

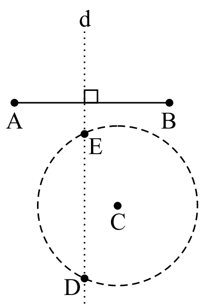
۱۶۱ - مکان هندسی نقاطی که از A و B به یک فاصله‌اند، عمود منصف پاره‌خط AB است.

مکان هندسی نقاطی که از نقطه C به فاصلهٔ ۳ واحد باشد، دایره‌ای به مرکز C و شعاع ۳ است.

بنابراین نقطه برخورد خط عمودمنصف و دایره جواب مسئله است.

اگر خط عمودمنصف (d) و دایره یکدیگر را در دو نقطه قطع کنند (نقاط D و E) مسئله دو جواب دارد . (همانند شکل روبه‌رو)

اگر مماس شوند مسئله یک جواب دارد و در صورتی که یکدیگر را قطع نکنند مسئله جواب ندارد.



۱۶۲ - اگر قطر دهانهٔ دیش را با $۲b$ و گودی را با h نمایش دهیم، فاصلهٔ کانونی برابر $a=\frac{۴b^۲}{۱۶h}$ است.

$h=۹$ و $۲b=۶۰$ با جایگذاری در رابطهٔ فوق داریم: $a=\frac{(۲b)(۲b)}{۱۶h}=\frac{۶۰\times ۶۰}{۱۶(۹)}=۲۵$

۱۶۳ - الف) با استفاده از جایگاه رأس و خط هادی سهمی قائم در دستگاه مختصات خواهیم داشت: $a=۴$

دهانهٔ سهمی رو به پایین است و معادلهٔ آن برابر است با: $(x-۲)^{۲}=-۴(۴)(y-۳)$

ب) مختصات کانون سهمی برابر است با: $F=(۲,-۱)$

۱۶۴ - الف)

$$\begin{cases} ۲a=۱۰\rightarrow a=۵ \\ ۲b=۶\rightarrow b=۳ \end{cases}\rightarrow a^{۲}=b^{۲}+c^{۲}\rightarrow c=۴$$

در مثلث MFF' میانهٔ وارد بر یک ضلع $MO=\frac{۱}{۲}FF'=۴$ نصف ضلع روبه‌رو است. درنتیجه مثلث MFF' قائم‌الزاویه است.

ب)

$$MF+MF'=۲a=۱۰\rightarrow MF'=۱۰-MF$$
$$MF^{۲}+MF'^{۲}=FF'^{۲}\rightarrow MF^{۲}+(۱۰-MF)^{۲}=۸^{۲}\rightarrow MF=۵-\sqrt{۷}$$

۱۶۵ -

نقطهٔ B روی عمودمنصف پاره‌خط FF' قرار دارد در نتیجه:

$$BF=BF' \quad (۱)$$

مجموع فاصله‌های هر نقطه روی بیضی از دو کانون برابر است با قطر بزرگ بیضی:

$$BF+BF'=۲a\xrightarrow{(۱)}BF=BF'=a$$

بنا به رابطهٔ فیثاغورس در مثلث BOF داریم:

$$OF^{۲}+OB^{۲}=BF^{۲}\rightarrow c^{۲}+b^{۲}=a^{۲}$$

۱۶۶ - مرکز و شعاع دایرهٔ $x^{۲}+y^{۲}-۶x-۲y+۹=۰$ برابر است با: $O'=(۳,۱)\ ,\ r'=۱$

$$r+r'=۲\ ,\ d=OO'=\sqrt{(۳)^{۲}+(۱)^{۲}}=\sqrt{۱۰}\rightarrow d>r+r'$$

دو دایره بیرون یکدیگرند (متخارج هستند).

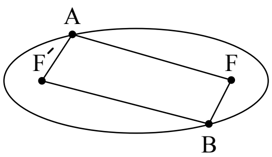
۱۶۷ - با توجه به جایگاه رأس و کانون این سهمی در دستگاه مختصات خواهیم داشت:

سهمی رو به پایین و $a=۴$

معادلهٔ سهمی برابر است با: $(x-۱)^{۲}=-۱۶(y-۲)$

معادلهٔ خط هادی: $y=۶$

۱۶۸ - نقاط A و B را به کانون‌های بیضی وصل می‌کنیم.



نقطهٔ A روی بیضی قرار دارد بنا به تعریف بیضی $AF+AF'=۲a$ (۱)

نقطهٔ B روی بیضی قرار دارد. $BF+BF'=۲a$ (۲)

از (۱) و (۲) و فرض $(AF'=BF)$ نتیجه می‌شود: $AF=BF'$

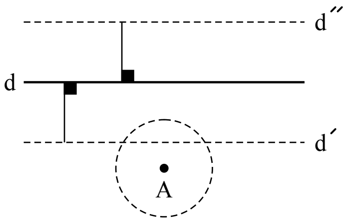
بنابراین چهارضلعی $AFBF'$ یک متوازی‌الاضلاع است و در متوازی‌الاضلاع، ضلع‌های روبه‌رو موازی‌اند: $AF||BF'$

۱۶۹ - مکان هندسی نقاطی که از A به فاصلهٔ ۲ سانتی‌متر باشد یک دایره به مرکز A و شعاع ۲ سانتی‌متر است. این دایره را رسم می‌کنیم. نقاطی که از خط d به فاصلهٔ ۳ سانتی‌متر باشد. دو خط d' و d'' در طرفین خط d و به‌موازات d است، این دو خط را رسم می‌کنیم. محل برخورد دو خط d' و d'' با دایره، مطابق شکل، جواب مسئله است.

اگر یکی از دو خط d' یا d'' دایره را قطع کند، مسئله ۲ جواب دارد.

اگر یکی از دو خط d' و d'' بر دایره مماس باشد، مسئله ۱ جواب دارد.

اگر هیچ‌یک از دو خط d' و d'' دایره را قطع نکند، مسئله جواب ندارد.



۱۷۰ -

$$(x-۴)^{۲}+(y+۲)^{۲}=۴\rightarrow O'(۴,-۲)\ ,\ r'=۲$$
$$OO'=\sqrt{۴^{۲}+۳^{۲}}=۵$$

$|r-r'|=OO' \to |r-2|=5 \to \begin{cases} r=7 \\ r=-3 \quad \text{غ ق ق} \end{cases}$

معادلهٔ دایره: $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=r^2 \xrightarrow{O(0,1), r=7} x^2+(y-1)^2=49$

۱۷۱ – با توجه به جایگاه رأس و خط هادی، سهمی قائم بوده و دهانهٔ سهمی روبه‌بالا است. همچنین $(h,k)=A(4,6)$ رأس سهمی و $a=3$؛ فرم استاندارد سهمی به‌صورت زیر است:

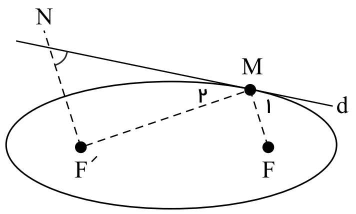
$(x-h)^2=4a(y-k) \Rightarrow (x-4)^2=12(y-6)$

۱۷۲ – فرم استاندارد سهمی به‌صورت $(y-3)^2=-16(x+1)$ است. سهمی افقی و دهانهٔ سهمی به‌سمت چپ باز می‌شود. رأس سهمی نقطهٔ $A(-1,3)$ است و $a=4$ و مختصات کانون آن نقطه $F(-a+h,k)=(-5,3)$ است. معادلهٔ خط هادی سهمی به‌صورت $x=a+h=3$ است.

۱۷۳ – مجموع $MF+MF'$ کمترین مقدار است بنا به خاصیت کوتاه‌ترین مسیر، داریم: $\hat{M}_1=\hat{M}_2$

از طرفی: $MF||NF'$ و d مورب، پس $\hat{N}=\hat{M}_1$ و در نتیجه $\hat{N}=\hat{M}_2$.

مثلث MNF' متساوی‌الساقین است یعنی $MF'=NF'$.



۱۷۴ –

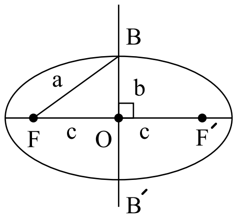
$OF=c=4 \ , \ OA=a=8$ می‌دانیم و: $b^2=a^2-c^2=64-16=48 \to b=4\sqrt{3} \to$ طول قطر کوچک: $2b=8\sqrt{3}$

۱۷۵ –

شعاع دایره: $r=\dfrac{|ax+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}=\dfrac{|12+3+5|}{\sqrt{16+9}}=4$

معادلهٔ دایره: $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=r^2 \Rightarrow (x-3)^2+(y-1)^2=16$

۱۷۶ –



$S_{BFB'F'}=\dfrac{1}{2}(2b\times 2c)=2bc=24 \Rightarrow bc=12$

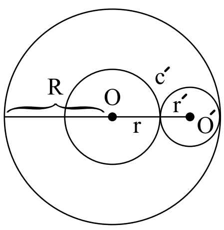
$BFB'F'$ محیط $=4BF=4a=8\sqrt{10} \Rightarrow a=2\sqrt{10}$

$BF^2=b^2+c^2=a^2 \Rightarrow b^2+c^2=40 \Rightarrow \begin{cases} bc=12 \\ b^2+c^2=40=(b+c)^2-2bc=40 \\ \Rightarrow (b+c)^2-2\times 12=40 \end{cases}$

$(b+c)^2=64 \Rightarrow b+c=8 \Rightarrow \begin{cases} bc=12 \\ b+c=8 \end{cases} \Rightarrow (1) \begin{cases} b=6 \\ c=2 \end{cases} \Rightarrow$ خروج از مرکز $e_1=\dfrac{c}{a}=\dfrac{2}{2\sqrt{10}}=\dfrac{\sqrt{10}}{10}$

یا $(2) \begin{cases} b=2 \\ c=6 \end{cases} \Rightarrow$ خروج از مرکز $e_2=\dfrac{c}{a}=\dfrac{6}{2\sqrt{10}}=\dfrac{3\sqrt{10}}{10}$

۱۷۷ – مطابق شکل، دایره C' بر هر دو دایره مماس است. داریم:



$2r'+r=R \Rightarrow r'=\dfrac{R-r}{2} \Rightarrow OO'=r+r'=r+\dfrac{R-r}{2} \Rightarrow OO'=\dfrac{R+r}{2}$

پس مکان هندسی مرکز دایره C'، دایره‌ای به مرکز O و شعاع $\frac{R+r}{۲}$ می‌باشد.

۱۷۸ - اگر $O(x,y)$ مختصات مرکز دایره باشد:

اولاً در معادلهٔ خط $x+y=۲$ صدق می‌کند چون این خط شامل قطر دایره می‌باشد. پس:

$$x+y=۲ \quad (۱)$$

ثانیاً فاصلهٔ آن از خط $y+۲x-۱=۰$ برابر با طول شعاع $(\sqrt{۵})$ است. داریم:

$$\sqrt{۵}=\frac{|y+۲x-۱|}{\sqrt{۱^۲+۲^۲}} \Rightarrow |y+۲x-۱|=۵ \quad (۲)$$

$$(۱),(۲) \Rightarrow \begin{cases} x+y=۲ \\ y+۲x-۱=۵ \text{ یا } y+۲x-۱=-۵ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+y=۲ \\ y+۲x-۱=۵ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=۴ \\ y=-۲ \end{cases}$$

$$\begin{cases} x+y=۲ \\ y+۲x-۱=-۵ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-۶ \\ y=۸ \end{cases}$$

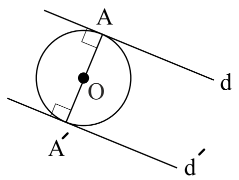
معادلهٔ دایره: $(x-۴)^۲+(y+۲)^۲=۵\,,\ (x+۶)^۲+(y-۸)^۲=۵$

۱۷۹ - نقطهٔ موردنظر $A(۱,\alpha)$ می‌باشد، چون A روی دایره است پس مختصات آن روی دایره صدق می‌کند. داریم:

$$x^۲+y^۲-۲x+۲y-۲=۰ \Rightarrow (x-۱)^۲+(y+۱)^۲-۴=۰$$

$$(x-۱)^۲+(y+۱)^۲=۴ \Rightarrow O(۱,-۱)\,,\ r=۲$$

$$(۱-۱)^۲+(۱+\alpha)^۲=۴ \Rightarrow ۱+\alpha=\pm ۲ \Rightarrow \begin{cases} \alpha=۱ \\ \alpha=-۳ \end{cases}$$



$$\Rightarrow A(۱,۱) \text{ یا } A'(۱,-۳)$$

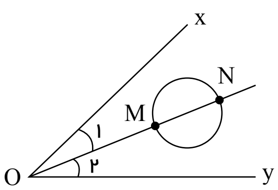
$$OA\perp d \Rightarrow m_d=\frac{-۱}{\infty}=۰$$

$$OA'\perp d' \Rightarrow m_{d'}=\frac{-۱}{m_{OA'}}\,,\ m_{OA'}=\frac{-۳-(-۱)}{۱-۱}=\infty \Rightarrow m_{d'}=\frac{-۱}{\infty}=۰$$

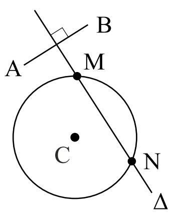
d موازی محور xها بوده و معادلهٔ آن $y=۱$ می‌باشد.

خط d' نیز موازی محور xها بوده و معادلهٔ آن $y=-۳$ می‌باشد.

۱۸۰ - مکان هندسی نقاطی که از اضلاع زاویه به یک فاصله می‌باشد، نیمساز آن زاویه است. محل برخورد نیمساز با دایره جواب مسئله است. مسئله می‌تواند دو جواب M و N یا یک جواب و یا بدون جواب باشد.



۱۸۱ - مکان هندسی نقاطی که از A و B به یک فاصله‌اند، عمودمنصف AB می‌باشد. همچنین مکان هندسی نقاطی که از C به فاصلهٔ $۳cm$ هستند دایره‌ای به مرکز C و به شعاع $۳cm$ می‌باشد. بنابراین محل برخورد این دو مکان پاسخ مسئله است.

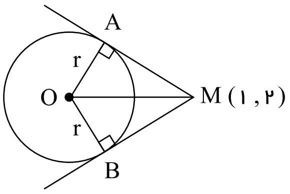


نقاط M و N پاسخ مسئله هستند. البته مسئله می‌تواند ۱ جواب (خط Δ مماس بر دایره) و بدون جواب باشد.

۱۸۲ -

مرکز دایره $O\left|\begin{matrix}۳\\۰\end{matrix}\right.\,,\ r=۲\,,\ A\left|\begin{matrix}x\\y\end{matrix}\right.$

$(x-۳)^۲+(y-۰)^۲=۴$:معادلهٔ دایره



$$\begin{cases} AM=\sqrt{OM^۲-r^۲} \\ OM=\sqrt{(۳-۱)^۲+(۰-۲)^۲}=\sqrt{۴+۴}=۲\sqrt{۲} \end{cases} \Rightarrow AM=\sqrt{۸-۴}=۲\Rightarrow AM=۲$$

برای یافتن مختصات نقاط A و B می‌دانیم که فاصلهٔ O از AM برابر با شعاع دایره می‌باشد. برای نوشتن معادلهٔ AM داریم:

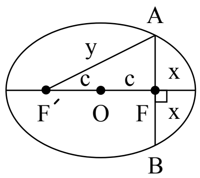
$$AM \text{ شیب}: m=\frac{y-۲}{x-۱}\Rightarrow AM \text{ معادله}: (y-۲)=m(x-۱)\Rightarrow y-mx+m-۲=۰$$

$$OA=\frac{|۰-m\times ۳+m-۲|}{\sqrt{۱+m^۲}}=r=۲\Rightarrow ۲|m+۱|=۲\sqrt{۱+m^۲}\Rightarrow m^۲+۲m+۱=m^۲+۱\Rightarrow ۲m=۰\Rightarrow m=۰$$

$$AM \text{ معادله}: y-۲=۰\Rightarrow y=۲$$

$$y=۲\Rightarrow (x-۳)^۲+۴=۴\Rightarrow x-۳=۰\Rightarrow x=۳\Rightarrow A(۳,۲)$$

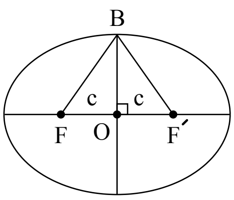
۱۸۳ – در شکل مقابل AB وتر کانونی است. داریم:



$$A\hat{F}F'=۹۰^\circ\Rightarrow\begin{cases} y^۲=۴c^۲+x^۲ \\ x+y=۲a\Rightarrow y=(۲a-x)\end{cases}\Rightarrow(۲a-x)^۲=۴c^۲+x^۲\Rightarrow ۴a^۲+x^۲-۴ax=۴c^۲+x^۲\Rightarrow x=\frac{b^۲}{a}\Rightarrow AB=۲x=\frac{۲b^۲}{a}$$

۱۸۴ – محور تقارن سهمی

۱۸۵ – ۱۲۰°

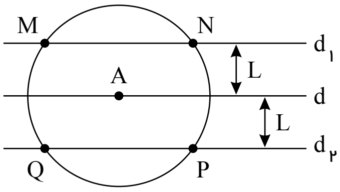


$$\text{فرض}: ۲a=۲\times ۲b\Rightarrow a=۲b$$

$$a^۲=b^۲+c^۲\Rightarrow ۴b^۲=b^۲+c^۲\Rightarrow c^۲=۳b^۲\Rightarrow c=\sqrt{۳}b$$

$$\overset{\Delta}{BOF'}: \tan O\hat{B}F'=\frac{c}{b}=\sqrt{۳}\Rightarrow O\hat{B}F'=۶۰^\circ\Rightarrow F\hat{B}F'=۲\times ۶۰^\circ=۱۲۰^\circ$$

۱۸۶ – مکان هندسی نقاطی که از d به فاصلهٔ L باشند، دو خط $d_۱$ و $d_۲$ موازی با آن و به فاصلهٔ L می‌باشد.



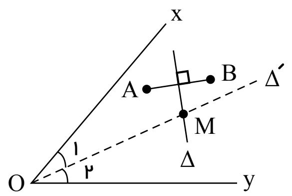
همچنین مکان هندسی نقاطی که از A به فاصلهٔ r باشد، دایره‌ای به مرکز A و شعاع r می‌باشد. محل برخورد دایره و $d_۱$ و $d_۲$ پاسخ مسئله است.

در شکل رسم‌شده، چهار نقطهٔ M و N و P و Q پاسخ مسئله هستند. برای یافتن بقیهٔ حالت‌ها باید در نظر بگیریم که دو خط $d_۱$ و $d_۲$ در چه حالت‌هایی دایره را قطع می‌کنند.

این دو خط می‌توانند دایره را در هیچ، یک، دو، سه یا حداکثر چهار نقطه قطع کنند.

۱۸۷ – مکان هندسی نقاطی که از A و B به یک فاصله‌اند، عمودمنصف AB است.

(حالت ۱)

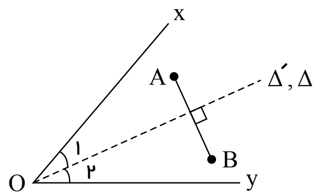


مکان هندسی نقاطی که از اضلاع زاویهٔ xOy به یک فاصله‌اند، نیمساز زاویه می‌باشد (خط Δ').

محل برخورد Δ و Δ' پاسخ مسئله است. (نقطهٔ M در حالت (۱))

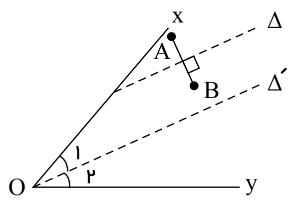
(حالت ۲)

در حالت (۲) Δ' و Δ بر هم منطبق هستند و مسئله بی‌شمار جواب دارد.

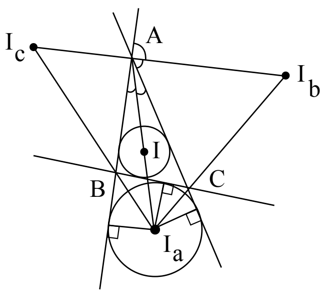


(حالت ۳)

در حالت (۳) عمودمنصف Δ و نیمساز Δ' موازی‌اند پس مسئله جواب ندارد.

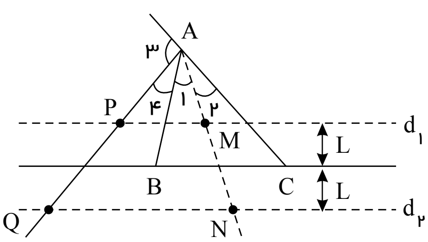


۱۸۸ - می‌دانیم مکان هندسی نقاطی که از اضلاع زاویه به یک فاصله باشند، نیمساز زاویه است. درون مثلث، محل هم‌رأسی نیمسازها از سه ضلع مثلث به یک فاصله می‌باشد.



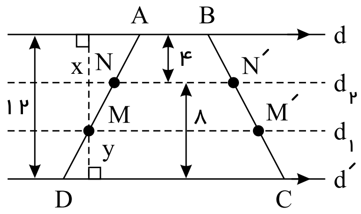
حال اگر مرکز دایره محاطی خارجی هر رأس را در نظر بگیریم، مرکز این دایره‌ها، نقاطی هستند که از اضلاع مثلث یا امتداد آنها به یک فاصله‌اند. پس پاسخ مسئله ۴ نقطه (مراکز دوایر محاطی داخلی و خارجی مثلث) می‌باشد یعنی نقاط I و I_a و I_b و I_c.

۱۸۹ - می‌دانیم مکان هندسی نقاطی که از خطی به فاصلهٔ L باشد، دو خط موازی با آن و به فاصلهٔ L از آن است، پس مکان هندسی نقاطی که از BC به فاصلهٔ L باشد، دو خط d_1 و d_2 موازی با آن می‌باشد. همچنین می‌دانیم مکان هندسی نقاطی که از اضلاع زاویه‌ای به یک فاصله باشد، نیمساز آن زاویه است. پس مکان هندسی نقاطی که از AB و AC به یک فاصله باشد، نیمساز زاویهٔ A می‌باشد. محل برخورد این دو مکان هندسی پاسخ مسئله می‌باشد. در داخل مثلث تنها یک نقطهٔ M جواب است.



در خارج از مثلث باید در نظر داشت که نیمساز خارجی رأس A هم با خطوط d_1 و d_2 متقاطع است. پس در خارج از مثلث سه نقطهٔ P و N و Q هم پاسخ مسئله است که از اضلاع AB و AC یا امتداد آنها به یک فاصله هستند.

۱۹۰ - مطابق شکل در ذوزنقه $ABCD$، ارتفاع ذوزنقه $12cm$ می‌باشد.



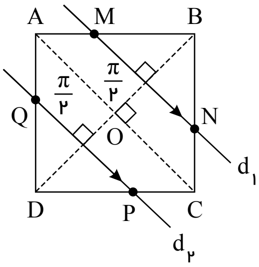
اگر M نقطه‌ای باشد که نسبت فاصلهٔ آن از AB و CD، ۱ و ۲ باشد داریم:

$$x+y=۱۲\,,\ \frac{x}{y}=۲\Rightarrow x=۸\,,\ y=۴$$

پس فاصلهٔ M از AB (خط d روی AB) برابر با ۸ و از CD برابر با ۴ می‌باشد. می‌دانیم که مکان هندسی نقاطی که از خطی به فاصلهٔ L باشند، دو خط موازی با آن خط و به فاصلهٔ L از آن است.

پس مکان هندسی نقاطی مثل M و N دو خط $d_۱$ و $d_۲$ موازی با AB (یا امتداد آن) و CD (یا امتداد آن) می‌باشد. محل برخورد این خطوط و ساق‌های AD و BC، چهار نقطهٔ M و M' و N و N' پاسخ مسئله است.

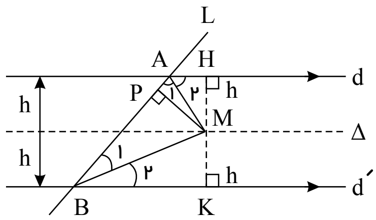
۱۹۱ - مطابق شکل مربع $ABCD$ به طول ضلع ۳cm را داریم. طول قطر این مربع $۳\sqrt{۲}$ و به همین ترتیب:



$$OA=OB=OC=OD=\frac{۳\sqrt{۲}}{۲}$$

می‌دانیم که مکان هندسی نقاطی که از یک خط به فاصهٔ L باشند، دو خط موازی با آن خط و به فاصلهٔ L از آن است. بنابراین نقاطی که از AC به فاصلهٔ $\frac{\pi}{۲}$ باشند، دو خط $d_۱$ و $d_۲$ موازی با AC و به فاصلهٔ $\frac{\pi}{۲}$ از آن است. از آنجا که $\frac{۳\sqrt{۲}}{۲}<\frac{\pi}{۲}$، پس دو خط $d_۱$ و $d_۲$ درون مربع رسم شده و اضلاع مربع را در چهار نقطهٔ M، N، P و Q قطع می‌کنند.

۱۹۲ - مطابق شکل نیمساز زوایای A و B در M یکدیگر را قطع می‌کنند.

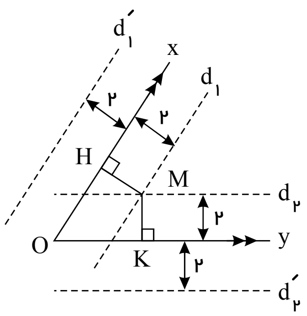


می‌دانیم که هر نقطه روی نیمساز زاویه از دو ضلع آن به یک فاصله است. بنابراین داریم:

$$\begin{cases} M\text{روی نیمساز } A \Rightarrow MH=MP=h \\ M\text{روی نیمساز } B \Rightarrow MP=MK=h \end{cases}$$

بنابراین $MH=MK=h$ می‌باشد. پس مکان هندسی M خطی مثل Δ موازی با d و d' می‌باشد که از وسط فاصله بین دو خط d و d' می‌گذرد.

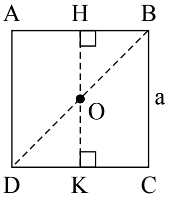
۱۹۳ - مکان هندسی نقاطی که از خط Ox به فاصهٔ ۲ باشند، دو خط موازی با آن و به فاصلهٔ ۲ از آن است.



بنابراین مکان هندسی نقاطی که از Ox به فاصلهٔ ۲ باشند، دو خط $d_۱$ و $d_۱'$ موازی با آن و به فاصلهٔ ۲ از آن می‌باشد. به همین شکل، مکان هندسی نقاطی که از Oy به فاصلهٔ ۲ باشند، دو خط $d_۲$ و $d_۲'$ موازی با آن و به فاصلهٔ ۲ از آن می‌باشد. محل برخورد دوبه‌دوی این خطوط پاسخ مسئله است.

از آنجا که تنها برخورد درون زاویه پاسخ است پس تنها جواب مسئله نقطهٔ M می‌باشد.

۱۹۴ - اگر O مرکز مربع باشد داریم:



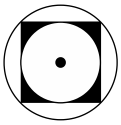
$$HK = a\,,\ OH = OK \Rightarrow OH = OK = \frac{a}{۲}$$

پس مکان هندسی نقاطی مثل H و K که فاصلهٔ آنها از مرکز مربع برابر با $\frac{a}{۲}$ باشد، دایره‌ای به مرکز O و شعاع $\frac{a}{۲}$ می‌باشد. داریم:

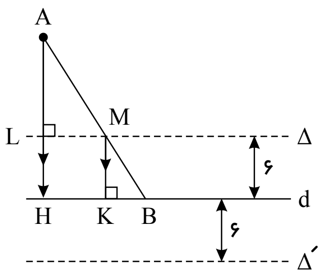
$$BD = a\sqrt{۲} \Rightarrow OB = OD = \frac{a\sqrt{۲}}{۲}$$

پس مکان هندسی نقاطی مثل B و D که فاصلهٔ آنها از مرکز مربع برابر با $\frac{a\sqrt{۲}}{۲}$ باشد، دایره‌ای به مرکز O و شعاع $\frac{a\sqrt{۲}}{۲}$ است.

در صورت سؤال، نقاطی موردنظر است که داخل مربع بوده و بین دو دایره قرار گیرد که همان قسمت هاشورزده شده است.



۱۹۵ - مطابق شکل فاصلهٔ نقطهٔ A از d برابر با $۱۲cm$ می‌باشد. وسط AH را نقطهٔ L در نظر می‌گیریم. داریم:



$$AL = LH = \frac{۱۲}{۲} = ۶cm$$

برای پاره‌خط دلخواهی مثل AB هم داریم:

$$AB \text{ وسط } M \text{ و } MK || AH \Rightarrow \frac{MK}{AH} = \frac{BM}{AB} = \frac{۱}{۲} \Rightarrow MK = \frac{AH}{۲} = \frac{۱۲}{۲} = ۶cm$$

پس همهٔ نقاطی مثل M، فاصله‌ای به اندازهٔ ثابت $۶cm$ از d دارند. بنابراین مکان هندسی وسط پاره‌خط‌هایی مثل AB، دو خط Δ و Δ' موازی با d و به فاصلهٔ $۶cm$ از آن می‌باشد. (برای خط Δ' یادمان باشد که نقطهٔ A را پایین خط d در نظر می‌گیریم.)

۱۹۶ -

$$y^۲ = ۴(x-۱) \rightarrow S(۱,۰)\,,\ F(۲,۰)$$

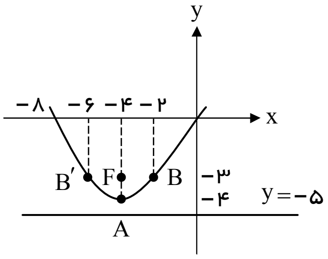
$$(x-۲)^۲ + y^۲ = ۹\,,\ \begin{cases} y^۲ = ۴x - ۴ \\ y^۲ = -x^۲ + ۴x + ۵ \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = ۳ \text{ قق} \\ x = -۳ \text{ غقق} \end{cases}$$

$$M(۳, ۲\sqrt{۲})\,,\ M'(۳, -۲\sqrt{۲})$$

۱۹۷ - الف) فرم استاندارد سهمی به‌صورت $(x+۴)^۲ = ۴(y+۴)$ است.

سهمی قائم و دهانهٔ آن رو به بالا باز می‌شود. رأس سهمی نقطهٔ $A(-۴,-۴)$ است و $a = ۱$، مختصات کانون آن نقطه $F(-۴,-۴+۱) = (-۴,-۳)$ است. معادلهٔ خط هادی سهمی به‌صورت $y = -۴ - ۱ = -۵$ است.

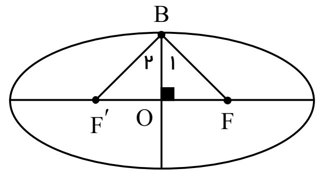
ب) نقاط کمکی $B(-۲,-۳)$ و $B'(-۶,-۳)$ برای رسم سهمی استفاده می‌کنیم؛ شکل سهمی به‌صورت مقابل است.



۱۹۸ -

$2b = 24 \Rightarrow b = 12 \,,\, c = 5 \xrightarrow{a^2 = b^2 + c^2} a^2 = 12^2 + 5^2 \to a = 13$ ، خروج از مرکز: $\dfrac{c}{a} = \dfrac{5}{13}$

۱۹۹ - با توجه به شکل زیر و فرض سؤال داریم:



$$2a = \sqrt{2}(2b) \to a = b\sqrt{2} \to \cos \widehat{B}_1 = \frac{OB}{BF} = \frac{b}{b\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \to \widehat{B}_1 = 45^\circ$$

$$\Rightarrow F\hat{B}F' = 2 \times 45^\circ = 90^\circ$$

۲۰۰ -

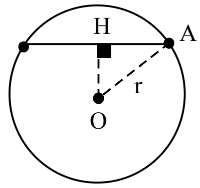
$$OM = OA = a$$

$$O\overset{\triangle}{M}F : OF^2 + MF^2 = OM^2 \to c^2 + MF^2 = a^2 \to MF^2 = a^2 - c^2 = b^2 \to MF = b$$

۲۰۱ -

$$OH = \frac{|2(-1) + 1(-1) - 2|}{\sqrt{2^2 + 1^2}} = \frac{5}{\sqrt{5}} = \sqrt{5}$$

$A\overset{\triangle}{O}H$ (بنابر قضیهٔ فیثاغورس): $OH^2 + AH^2 = OA^2 \to (\sqrt{5})^2 + 2^2 = r^2 \to r = 3$



$\Rightarrow$ معادلهٔ دایره: $(x+1)^2 + (y+1)^2 = 9$

۲۰۲ -

$y^2 = 4(x-1) \to$ سهمی افقی و $S(1, 0) \,,\, a = 1 \to F(2, 0)$

$(x-2)^2 + y^2 = 9 \,,\, \begin{cases} y^2 = 4x - 4 \\ y^2 = -x^2 + 4x + 5 \end{cases} \to x^2 = 9 \to \begin{cases} x = 3 \\ x = -3 \end{cases}$ غ ق ق

$M(3, 2\sqrt{2}) \,,\, M'(3, -2\sqrt{2})$

۲۰۳ -

می‌دانیم: $c^2 = a^2 - b^2 = 25 - 9 = 16 \to c = 4$

از طرفی:

$$MF + MF' = 2a = 10 \to MF' = 10 - MF$$

با توجه به شکل داریم:

قضیهٔ فیثاغورس: $(MF)^2 + (MF')^2 = (FF')^2 \to (MF)^2 + (10 - MF)^2 = 8^2$

$$\to 2MF^2 - 20MF + 36 = 0 \to MF^2 - 10MF + 18 = 0 \to MF = 5 \pm \sqrt{7}$$

۲۰۴ -

$$(x-2)^2 + (y-2)^2 = 1 \to O(2, 2) \,,\, r = 1$$

$$d = \frac{|3(2) + 2|}{\sqrt{10}} = \frac{8}{\sqrt{10}} \to d > r$$

خط، دایره را قطع نمی‌کند.

۲۰۵ -

$$(x+1)^2 + (y-2)^2 = 9 \to O' = (-1, 2) \,,\, r' = 3$$

$$OO' = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5 \xrightarrow{r' = 3} r + r' = 5 \to r = 2$$

$(x-۲)^۲+(y+۲)^۲=۴$

۲۰۶ -

الف
درست - محل برخورد عمودمنصف‌های AB و BC

ب
درست

پ
نادرست - در صورتی درست است که چهار نقطه روی یک دایره باشند.

۲۰۷ -

الف
درست

ب
درست - زیرا هر نقطه روی سهمی از F و d به یک فاصله است.

۲۰۸ -

الف
درست

ب
نادرست است زیرا:

$A(۳,-۲)\to(۳)^۲+(-۲)^۲\ \ +۲(۳)=۱۹>۰$

پس نقطه A بیرون دایره قرار دارد.

۲۰۹ -

الف
نادرست - مکان هندسی فوق، خط عمود بر خط d در نقطهٔ A است.

ب
درست

.۲۱۰ -

الف
دایره

ب
روش اول: نقطهٔ A را درون معادلهٔ دایره جایگذاری می‌کنیم. اگر حاصل برابر صفر شود، نقطه روی دایره، کوچک‌تر از صفر شود، درون دایره و بزرگ‌تر از صفر شود، خارج از دایره قرار دارد.

$x^۲+y^۲-۲x+۲y=۰\xrightarrow{A(۱\ ,-۲)}(۱)^۲+(-۲)^۲-۲(۱)+۲(-۲)=-۱<۰$

پس نقطهٔ A درون دایره است.

روش دوم: اگر $x^۲+y^۲+ax+by+c=۰$ معادلهٔ منحنی در یک دایره باشد، مرکز و شعاع دایره به‌صورت زیر به دست می‌آید.

$\text{مرکز دایره}=O=(-\frac{a}{۲}\ ,-\frac{b}{۲})$

$\text{شعاع دایره}=R=\frac{\sqrt{a^۲+b^۲-۴c}}{۲}$

بنابراین

$x^۲+y^۲-۲x+۲y=۰\to O=(۱\ ,-۱)\ \ ,\ R=۲$

حال فاصلهٔ مرکز دایره از نقطهٔ $A(۱\ ,\ -۲)$ را به دست می‌آوریم.

$OA=\sqrt{۰+۱}=۱<۲\ \Rightarrow$ نقطهٔ A درون دایره قرار دارد

.۲۱۱ -

الف
درست

ب
نادرست

اگر خط d در نقطهٔ M بر بیضی مماس باشد و از نقطهٔ M به دو کانون وصل کنیم، زاویه‌های ایجادشده α و β باهم برابر هستند. بنابراین:

$\alpha+\beta+F\widehat{M}F'=۱۸۰^\circ$
$۲\alpha+۵۰^\circ=۱۸۰^\circ\to\alpha=۶۵^\circ=\beta$

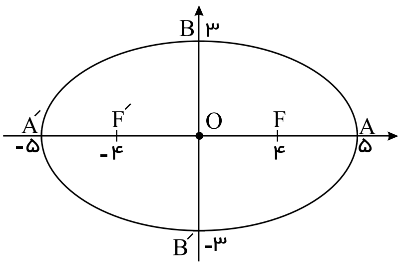
۲۱۲ -

الف
$\begin{cases}۲a=۱۰\to a=۵\\ ۲b=۶\to b=۳\end{cases}\to a^۲=b^۲+c^۲\to c=۴\ \Rightarrow\frac{c}{a}=\frac{۴}{۵}$

ب
باتوجه به اینکه مرکز بیضی مبدأ مختصات است، داریم:

$$\begin{cases} A(a\ ,\ ۰) \to A(۵\ ,\ ۰) \\ A'(-a\ ,\ ۰) \to A'(-۵\ ,\ ۰) \end{cases} \qquad \begin{cases} F(c\ ,\ ۰) \to F(۴\ ,\ ۰) \\ F'(-c\ ,\ ۰) \to F'(-۴\ ,\ ۰) \end{cases} \qquad \begin{cases} B(۰\ ,b) \to B(۰\ ,۳) \\ B'(۰\ ,-b) \to B'(۰\ ,-۳) \end{cases}$$

پ



۲۱۳ -

الف درست

ب نادرست

۲۱۴ -

الف مشترک

ب خارج

۲۱۵ -

الف

$$y^۲ = ۲x + ۴y \to (y-۲)^۲ = ۲(x+۲)$$

نوع سهمی افقی رو به راست، رأس سهمی نقطه $(-۲,۲)$، پارامتر سهمی $a=\frac{۱}{۲}$، مختصات کانون سهمی برابر با $(-\frac{۳}{۲}\ ,\ ۲)$ و معادله خط هادی برابر با $x=\frac{-۵}{۲}$ است.

ب مختصات نقاط برخورد با محور yها برابر است با $(۰,۰)$ و $(۰,۴)$ و محور xها $(۰,۰)$

۲۱۶ -

الف مشترک

ب پاره‌خط

۲۱۷ -

الف نادرست

ب نادرست

۲۱۸ -

الف

$$y^۲ - ۲y + ۱ = -۸x - ۹ + ۱ \to (y-۱)^۲ = -۸(x+۱) \to A = (-۱\ ,\ ۱)\ ,\ a = ۲$$

$F(-۳\ ,\ ۱)\ ,\ x = ۱$

ب