

دفترچه شماره ۱

آزمون جامع ۲

پنجشنبه ۱۴۰۲/۰۴/۰۱



آزمون‌های سراسر کاج

گزینه درست را انتخاب کنید.

سال تحصیلی ۱۴۰۲-۱۴۰۱

آزمون اختصاصی

پایه دوازدهم ریاضی

دوره دوم متوسطه

نام و نام خانوادگی:	شماره داوطلبی:
تعداد سوالاتی که باید پاسخ دهید: ۴۰	مدت پاسخگویی: ۷۰ دقیقه

عناوین مواد امتحانی آزمون اختصاصی گروه آزمایشی علوم ریاضی، تعداد سؤالات و مدت پاسخگویی

مدت پاسخگویی	شماره سؤال		وضعیت پاسخگویی	تعداد سؤال	مواد امتحانی	ردیف
	تا	از				
۷۰ دقیقه	۴۰	۱	اجباری	۴۰	ریاضیات	۱



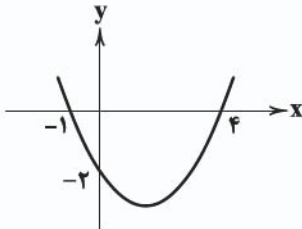
۱- بین دو عدد ۲ و ۱۶۲ به تعداد ۳ واسطه هندسی درج کرده‌ایم به طوری که دنباله صعودی باشد. اگر واسطه اول و سوم این دنباله، جملات اول و دوم یک دنباله حسابی باشند، مجموع ۱۱ جمله اول این دنباله حسابی چقدر است؟

- (۱) ۲۶۰۷ (۲) ۲۶۲۷ (۳) ۲۷۰۶ (۴) ۲۷۲۷

۲- اگر $x = \frac{4\sqrt{3}}{2-\sqrt{7}+\sqrt{3}} - \sqrt{7}$ حاصل $\sqrt{\frac{x}{2-\sqrt{3}}}$ کدام است؟

- (۱) $4+2\sqrt{3}$ (۲) $2+\sqrt{3}$ (۳) $2-\sqrt{3}$ (۴) $4-2\sqrt{3}$

۳- اگر نمودار تابع $y=f(x)$ یک سهمی به شکل زیر باشد، در دامنه تعریف تابع $g(x)=\sqrt{3x^2-f(2x-1)}$ چند عدد صحیح قرار ندارند؟



- (۱) ۳
(۲) ۴
(۳) ۵
(۴) بی‌شمار

۴- اگر f تابعی ثابت و g تابعی همبانی با دامنه \mathbb{R} باشند و داشته باشیم $\frac{f(3x-1)-2f(2x)}{f(x)-3} = 5$ ، از رابطه

$$g(x^2-1)-g(x+1)=4f(x^2-x-2)$$

- (۱) -۶ (۲) ۶ (۳) -۱۲ (۴) ۱۲

۵- α و β ریشه‌های معادله $x^2-3x+1=0$ می‌باشند و معادله درجه دومی که ریشه‌هایش $\alpha^3 + \frac{1}{\alpha^3}$ و $\sqrt{2\alpha^2(6\beta-2)}$ باشد، کدام است؟

$$(۱) x^2 - 36x + 20 = 0$$

$$(۲) x^2 + 36x + 20 = 0$$

$$(۳) x^2 - 20x + 36 = 0$$

$$(۴) x^2 + 20x + 36 = 0$$

۶- اگر تابع $f(x) = \frac{ax+3}{x-2}$ بر وارون خود و تابع $g(x) = bx-3$ نیز بر وارون خود منطبق باشند، مقدار $(\frac{2g}{f+1}) \circ g(-6)$ کدام است؟

- (۱) $-\frac{3}{5}$ (۲) $-\frac{6}{5}$ (۳) $-\frac{5}{8}$ (۴) $-\frac{7}{10}$

۷- معادله $[\frac{x-1}{2}] = \frac{2x+1}{3}$ چند جواب دارد؟

- (۱) صفر (۲) ۲ (۳) ۴ (۴) ۶



۸- اگر $f(x) = \log_{\frac{1}{2}} \cos \frac{x}{4} + \log_{\frac{1}{2}} \cos \frac{x}{2} + \log_{\frac{1}{2}} \cos x + \log_{\frac{1}{2}} \cos 2x + \log_{\frac{1}{2}} \sin \frac{x}{4}$ ، مقدار $f(\frac{\pi}{16})$ کدام است؟

- (۱) ۴ (۲) $\frac{9}{2}$ (۳) ۵ (۴) $\frac{11}{2}$

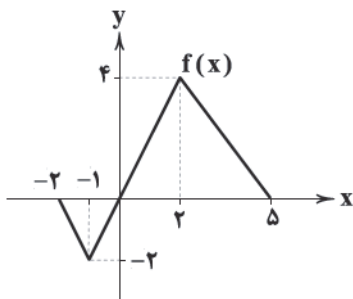
۹- اگر $f(x) = \frac{\sqrt{1+2x} - \sqrt{1+3x}}{\sqrt{1-\cos 2x}}$ ، حاصل $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x^3 - x)$ کدام است؟

- (۱) $\frac{5\sqrt{2}}{6}$ (۲) $-\frac{5\sqrt{2}}{6}$ (۳) $\frac{5\sqrt{2}}{12}$ (۴) $-\frac{5\sqrt{2}}{12}$

۱۰- اگر $g(x) = [\frac{6x+1}{3}] + [\frac{6x-2}{3}]$ ، تابع $f(x) = (9x^2 + 3x - 2)g(x)$ در بازه $(\frac{2}{3}, \frac{4}{3})$ در چند نقطه ناپیوسته است؟

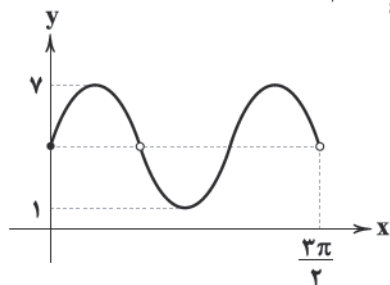
- (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴) بیشمار

۱۱- اگر نمودار تابع $f(x)$ به شکل زیر باشد، تابع $g(x) = -2f(2x-1) + 1$ در چه بازه‌ای اکیداً نزولی است؟



- (۱) $[0, \frac{3}{2}]$
(۲) $[0, 2]$
(۳) $[-1, 2]$
(۴) $[1, 2]$

۱۲- اگر قسمتی از نمودار تابع $f(x) = \frac{a \tan^2(bx) + c \tan(bx) + a}{1 + \tan^2(bx)}$ به صورت زیر باشد، مقدار $\frac{bc}{a}$ کدام است؟



- (۱) $-\frac{3}{2}$
(۲) $\frac{3}{2}$
(۳) $-\frac{5}{2}$
(۴) $\frac{5}{2}$

۱۳- جواب کلی معادله $\sin(x + \frac{7\pi}{5}) + \cos(x - \frac{\pi}{10}) = \sqrt{2}(\sin x + \cos x)$ کدام است؟

- (۱) $x = k\pi + \frac{5\pi}{19}$
(۲) $x = k\pi + \frac{7\pi}{30}$
(۳) $x = k\pi + \frac{7\pi}{30}$
(۴) $x = k\pi + \frac{7\pi}{40}$



۱۴- اگر خطوط $x=2$ و $y=-2$ تنها مجانب‌های قائم و افقی تابع $f(x) = \frac{ax^2 - bx}{x^2 + cx - 2}$ باشند، مقدار $f^{-1}(-4)$ کدام است؟

- (۱) -۲ (۲) ۲ (۳) -۴ (۴) ۴

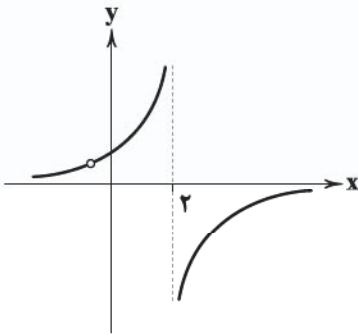
۱۵- اگر $f(x) = \begin{cases} |x^2 - 3x + 2| & x < 2 \\ x^3 + [-2x] & \text{اگر} \\ \frac{|x-2|}{x^2 - [x]} & x \geq 2 \end{cases}$ مقدار $\lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(2-3h) - f(2)}{h}$ کدام است؟

- (۱) $-\frac{3}{2}$ (۲) $\frac{1}{2}$ (۳) $\frac{3}{2}$ (۴) ناموجود

۱۶- اگر نقطه $(1, 2)$ اکسترمم تابع $f(x) = x^3 + ax + b$ باشد، شیب خط مماس در نقطه عطف تابع کدام است؟

- (۱) ۳ (۲) -۳ (۳) ۲ (۴) -۲

۱۷- اگر نمودار تابع $f(x) = \frac{-2x-2}{x^2+ax+b}$ به شکل زیر باشد، فاصله نقطه عطف تابع $g(x) = x^3 + 3ax^2 - bx + 1$ از مبدأ مختصات کدام است؟



- (۱) ۱ (۲) $\sqrt{2}$ (۳) $\sqrt{3}$ (۴) ۲

۱۸- برآورد فاصله‌ای با اطمینان ۹۵ درصد برای میانگین جامعه‌ای، بازه $(19, 19/8)$ است. اگر اختلاف انحراف معیار و اندازه نمونه برابر ۹۸ باشد،

اندازه نمونه مضرب کدام عدد است؟

- (۱) ۳۰ (۲) ۴۰ (۳) ۵۰ (۴) ۶۰

۱۹- اگر ۴۰ داده آماری را $\frac{3}{4}$ برابر کرده و سپس به هر کدام ۴ واحد اضافه کنیم، ضریب تغییرات نصف خواهد شد. میانگین اولیه چقدر است؟

- (۱) $\frac{A}{3}$ (۲) ۲ (۳) $\frac{A}{3}$ (۴) ۳

۲۰- در مجموعه متناهی A، اگر ۳ عضو به اعضای A اضافه کنیم، به تعداد زیرمجموعه‌های آن ۴۴۸ واحد اضافه می‌شود. مجموعه A چند افراز

۴ عضوی دارد؟

- (۱) ۴۵ (۲) ۵۵ (۳) ۶۵ (۴) ۷۵

محل انجام محاسبات



۲۱- گزاره $\sim p \Leftrightarrow (\sim p \wedge q)$ با چند تا از گزاره‌های زیر هم‌ارز است؟

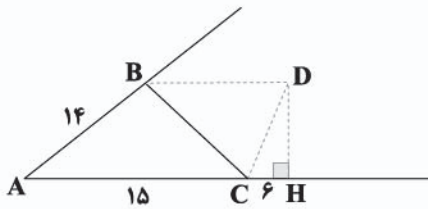
الف) $\sim p \Rightarrow \sim q$ ب) $\sim p \Rightarrow q$ ج) $q \Rightarrow p$ د) $\sim q \Rightarrow p$

۱ (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴)

۲۲- در پرتاب یک تاس احتمال ظاهر شدن هر وجه متناسب با مربع عدد روی آن وجه است. اگر این تاس را ۵ بار پرتاب کنیم، تقریباً با چه احتمالی هر ۵ بار آن عدد ۳ ظاهر می‌شود؟

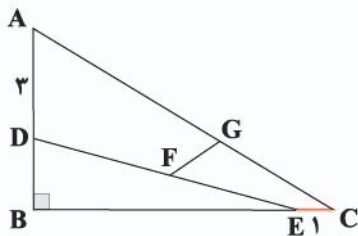
۱) $(\frac{1}{6})^5$ ۲) $(\frac{1}{8})^5$ ۳) $(\frac{1}{9})^5$ ۴) $(\frac{1}{10})^5$

۲۳- در شکل زیر نیمسازهای زوایای خارجی B و C یک‌دیگر را در نقطه D قطع کرده‌اند. اگر $AB=14$ ، $AC=15$ ، $CH=6$ باشد، اندازه مساحت مثلث ABC کدام است؟



۱) ۸۱
۲) ۸۴
۳) ۹۰
۴) ۹۶

۲۴- در شکل زیر $\frac{AG}{GC} = \frac{DF}{FE} = 2$ است. اندازه FG کدام است؟



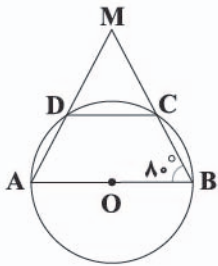
۱) $\frac{\sqrt{10}}{3}$
۲) $\frac{\sqrt{11}}{3}$
۳) $\frac{2\sqrt{3}}{3}$
۴) $\frac{\sqrt{13}}{3}$

۲۵- در دوزنقه ABCD، اگر $AB=1$ ، $CD=7$ باشد و نقاط M و N روی ساق‌های AD و BC به گونه‌ای هستند که $MN \parallel AB$ و مساحت دوزنقه‌های ABNM و NMDC با هم برابر باشند، طول MN کدام است؟

۱) ۵ ۲) $\frac{4}{5}$ ۳) ۴ ۴) $\frac{3}{5}$



۲۶- در دایره شکل زیر O مرکز دایره است و $AB = 2DC$ است. اندازه کمان DCB کدام است؟



۱۱۵ (۱)

۸۰ (۲)

۱۲۵ (۳)

۱۳۰ (۴)

۲۷- نقطه M درون یک مثلث متساوی الاضلاع است. اگر مجموع فواصل نقطه M از ۳ ضلع مثلث برابر $6\sqrt{3}$ باشد، در این مثلث فاصله مرکز

دایره محیطی تا هر یک از مراکز دایره‌های محاطی خارجی کدام است؟

 $9\sqrt{3}$ (۴) $8\sqrt{3}$ (۳) $7\sqrt{3}$ (۲) $6\sqrt{3}$ (۱)

۲۸- دو خط $d_1 \parallel d_2$ به فاصله ۱۲ واحد از هم مفروض هستند و نقاط A و B بین این دو خط به گونه‌ای قرار دارند که فاصله آن‌ها از d_1 به ترتیب

۸ و ۴ است، اگر تصویر A و B روی خط d_1 را P و Q بنامیم و $PQ = 9$ باشد، کم‌ترین محیط پنج ضلعی $ACBED$ که C روی خط d_1 و

نقاط D و E روی خط d_2 به گونه‌ای باشند که $DE = 4$ باشد، کدام است؟

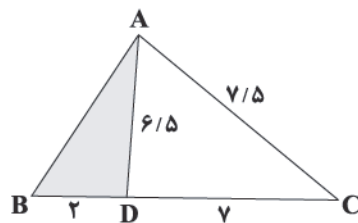
۳۲ (۴)

۳۰ (۳)

۲۸ (۲)

۲۴ (۱)

۲۹- در شکل زیر مساحت مثلث ABD کدام است؟



۴ (۱)

۵ (۲)

۶ (۳)

۸ (۴)

۳۰- اگر $A^2 = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$, $B^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $AB = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ باشد، ماتریس BA کدام است؟

 $\begin{bmatrix} 7 & -5 \\ -4 & 6 \end{bmatrix}$ (۴) $\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ -2 & 5 \end{bmatrix}$ (۳) $\begin{bmatrix} 6 & 7 \\ -4 & 5 \end{bmatrix}$ (۲) $\begin{bmatrix} 7 & 6 \\ -5 & -4 \end{bmatrix}$ (۱)

۳۱- اگر A و B دو ماتریس وارون‌پذیر از مرتبه ۲، $AB = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$ ، $A^{-1} + B^{-1} = I$ باشد، حاصل $|(A+B)^3|$ کدام است؟

-۱ (۴)

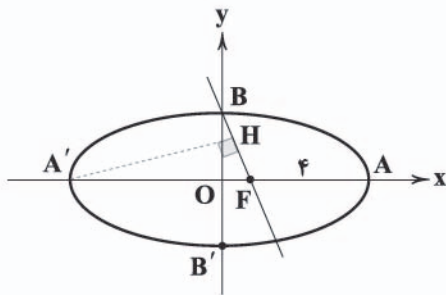
-۸ (۳)

۱ (۲)

۸ (۱)



۳۲- مبدأ مختصات مرکز یک بیضی است که طول قطر کوچک آن $4\sqrt{10}$ می باشد. اگر فاصله کانون از رأس ناکانونی ۴ باشد و از نقطه A' بر خط



عبوری از B و F عمود $A'H$ را رسم کنیم، طول BH کدام است؟

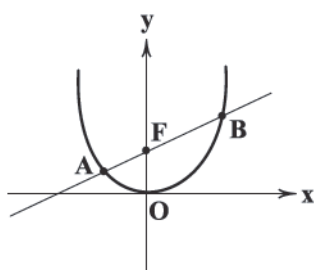
$\frac{17}{7}$ (۱)

$\frac{18}{7}$ (۲)

$\frac{19}{7}$ (۳)

$\frac{20}{7}$ (۴)

۳۳- رأس یک سهمی قائم المنطبق بر مبدأ مختصات است و یک خط که از کانون سهمی عبور می کند، سهمی را در ۲ نقطه A ، $B(6, 9)$ قطع



می کند. اگر فاصله نقطه B از خط هادی برابر ۱۰ باشد، مجموع طول و عرض نقطه A کدام است؟ ($a < 2$)

$-\frac{3}{4}$ (۱)

$-\frac{5}{9}$ (۲)

$-\frac{4}{5}$ (۳)

$-\frac{5}{4}$ (۴)

۳۴- اگر نقاط $A(3, -1, 0)$ ، $B(2, 1, 5)$ دو رأس یک متوازی الاضلاع و نقطه $O(1, 0, 2)$ محل تلاقی قطرهای آن باشد، مساحت

متوازی الاضلاع کدام است؟

$2\sqrt{74}$ (۴)

$2\sqrt{71}$ (۳)

$\sqrt{74}$ (۲)

$\sqrt{71}$ (۱)

۳۵- باقی مانده تقسیم عدد شش رقمی $342ab7$ بر ۹۹، عضو کلاس [۳۷] می باشد. $a+b$ کدام است؟

۱۲ (۴)

۱۱ (۳)

۱۰ (۲)

۹ (۱)

۳۶- کوچک ترین مقدار طبیعی دو رقمی n که به ازای آن معادله سیاله خطی $(4a+3)x + (3a-2)y = 5n+2$ برای هر مقدار صحیح a جواب

صحیح داشته باشد، کدام است؟

۲۳ (۴)

۲۰ (۳)

۱۹ (۲)

۱۸ (۱)

۳۷- گراف G ، یک گراف ۳ منتظم از مرتبه ۶ است. اگر گراف \bar{G} ناهمبند باشد، گراف G چند مجموعه احاطه گر مینیمال دارد؟

۱۲ (۴)

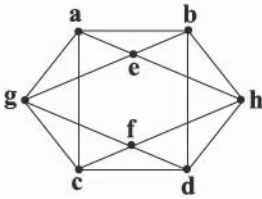
۱۱ (۳)

۱۰ (۲)

۹ (۱)



۳۸- با توجه به گراف مقابل چندتا از جملات زیر صحیح است؟



الف) عدد احاطه‌گری گراف برابر ۴ است.

ب) مجموعه $\{a, b, c, d\}$ یک مجموعه احاطه‌گر مینیمم است.

پ) مجموعه $\{g, h, e, f\}$ یک مجموعه احاطه‌گر مینیمال است ولی مینیمم نیست.

- (۱) صفر (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) ۳

۳۹- مدیر یک مدرسه می‌خواهد ۵ سکه بهار آزادی را به عنوان پاداش بین سه دانش‌آموز ممتاز A، B و C تقسیم کند. احتمال این‌که به

دانش‌آموز A حداقل ۲ سکه پاداش دهد، کدام است؟

- (۱) $\frac{7}{21}$ (۲) $\frac{8}{21}$ (۳) $\frac{3}{7}$ (۴) $\frac{10}{21}$

۴۰- در چند گراف ساده با رئوس a, b, c, d و e، هیچ‌یک از رأس‌های a, b و c تنها نیستند؟

- (۱) ۸۴۸ (۲) ۸۴۴ (۳) ۸۵۴ (۴) ۸۶۴

دفترچه شماره ۲

آزمون جامع ۲

پنجشنبه ۱۴۰۲/۰۴/۰۱



آزمون‌های سراسری گاج

گزینه درستی را انتخاب کنید.

سال تحصیلی ۱۴۰۲-۱۴۰۱

آزمون اختصاصی

پایه دوازدهم ریاضی

دوره دوم متوسطه

نام و نام خانوادگی:	شماره داوطلبی:
تعداد سوالاتی که باید پاسخ دهید: ۶۵	مدت پاسخگویی: ۷۵ دقیقه

عناوین مواد امتحانی آزمون اختصاصی گروه آزمایشی علوم ریاضی، تعداد سوالات و مدت پاسخگویی

ردیف	مواد امتحانی	تعداد سوال	وضعیت پاسخگویی	شماره سوال		مدت پاسخگویی
				از	تا	
۱	فیزیک	۳۵	اجباری	۴۱	۷۵	۴۵ دقیقه
۲	شیمی	۳۰	اجباری	۷۶	۱۰۵	۳۰ دقیقه



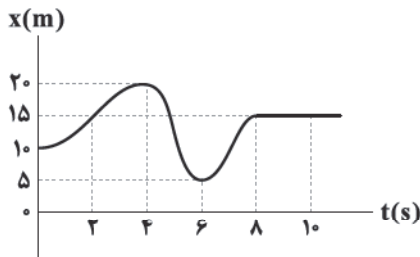
۴۱- متحرکی $\frac{1}{4}$ ابتدایی مسیر حرکتش را با سرعت ۲۷ و $\frac{3}{4}$ باقی مانده را با سرعت ۷ می‌پیماید. سرعت متوسط این متحرک در کل مسیر حرکتش چند برابر ۷ است؟

- (۱) $\frac{3}{2}$ (۲) $\frac{6}{5}$ (۳) $\frac{8}{7}$ (۴) $\frac{11}{9}$

۴۲- سرعت متحرکی که با شتاب ثابت روی خط راست حرکت می‌کند، پس از طی مسافت ۱۲ متر از $1 \frac{m}{s}$ به $7 \frac{m}{s}$ می‌رسد. متحرک با همین شتاب چند متر دیگر طی کند تا سرعت آن به $9 \frac{m}{s}$ برسد؟

- (۱) ۴ (۲) ۸ (۳) ۶ (۴) ۹

۴۳- نمودار مکان - زمان متحرکی که بر روی محور X حرکت می‌کند، مطابق شکل زیر است. در بازه زمانی $t=0$ تا $t=10s$ کدام گزینه در ارتباط با این متحرک صحیح است؟



(۱) سرعت متوسط متحرک برابر با $3/5 \frac{m}{s}$ و شتاب متوسط آن صفر است.

(۲) تندی متوسط متحرک برابر با $0/5 \frac{m}{s}$ و شتاب متوسط آن $3/5 \frac{m}{s^2}$ است.

(۳) سرعت متوسط متحرک برابر با $3/5 \frac{m}{s}$ و شتاب متوسط آن $0/5 \frac{m}{s^2}$ است.

(۴) تندی متوسط متحرک برابر با $3/5 \frac{m}{s}$ و شتاب متوسط آن صفر است.

$${}_{90}^{24}\text{X} \rightarrow {}_{78}^{\text{A}}\text{Y} + m\alpha$$

۴۴- در واکنش هسته‌ای مقابل، تعداد نوترون‌های هسته Y کدام است؟

- (۱) ۱۳۸ (۲) ۱۴۰ (۳) ۲۱۶ (۴) ۲۱۸

۴۵- اگر در نیروگاهی هسته‌ای با بازده ۴۰ درصد، انرژی حاصل از تبدیل ۶ گرم ماده به انرژی، به عنوان انرژی ورودی نیروگاه در نظر گرفته شود، با

انرژی الکتریکی تولیدی توسط این نیروگاه چند لامپ ۲۰۰ W را می‌توان به مدت ۳۰ دقیقه روشن کرد؟ ($c = 3 \times 10^8 \frac{m}{s}$)

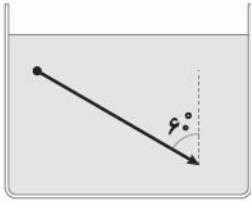
- (۱) 3×10^8 (۲) 6×10^8 (۳) 6×10^5 (۴) 3×10^5

۴۶- در اتم هیدروژن، اتمی در تراز $n = 5$ قرار دارد. پر انرژی‌ترین فوتونی که می‌تواند گسیل کند، چند ریدبرگ است؟

- (۱) $\frac{1}{16}$ (۲) $\frac{7}{14}$ (۳) $\frac{24}{25}$ (۴) $\frac{15}{16}$



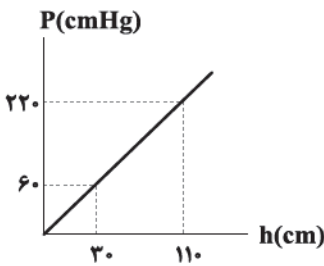
۴۷- جسمی درون مایعی با چگالی $5 \frac{g}{cm^3}$ با تندی $6 \frac{m}{s}$ در مسیری به شکل زیر پایین می‌رود. آهنگ افزایش فشار وارد بر آن چند



پاسکال بر ثانیه است؟ ($g = 10 \frac{N}{kg}$)

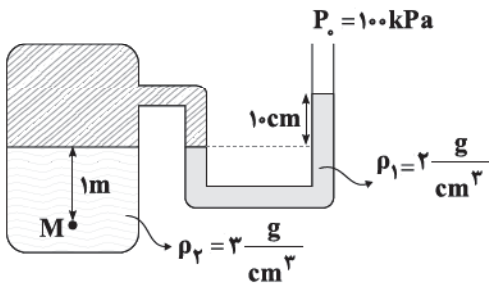
- ۱۵۰ (۱) ۱۵ (۲)
۱۵۰۰۰۰ (۳) ۱۵۰۰ (۴)

۴۸- با توجه به نمودار زیر، که مربوط به فشار کل بر حسب ارتفاع از سطح مایع می‌باشد، چگالی مایع چند برابر چگالی جیوه است؟ ($g = 10 \frac{m}{s^2}$)



- $\frac{1}{2}$ (۱)
۲ (۲)
۴ (۳)
 $\frac{1}{4}$ (۴)

۴۹- در شکل زیر، فشار در نقطه M چند کیلوپاسکال است؟ ($g = 10 \frac{m}{s^2}$)



- ۱۳۲۰۰۰ (۱)
۱۲۳۰۰۰ (۲)
۱۲۳ (۳)
۱۳۲ (۴)

۵۰- در یک ظرف، مقداری آب صفر درجه سلسیوس قرار دارد. اگر در اثر تبخیر سطحی، آب داخل ظرف منجمد شود و به یخ صفر درجه

سلسیوس تبدیل شود، چند درصد جرم آب در اثر تبخیر سطحی از ظرف خارج شده است؟ (اتلاف انرژی نداریم، $L_F = 80 \frac{cal}{g}$)

و ($L_V = 560 \frac{cal}{g}$)

- ۲۵ (۱) ۱۲/۵ (۲) ۷۵ (۳) ۷۸/۵ (۴)

۵۱- درون یک بادکنک کروی شکل، مقدار ۳۰ گرم گاز نیتروژن وجود دارد. اگر m گرم نیتروژن به نیتروژن موجود در بادکنک اضافه کنیم، در فشار

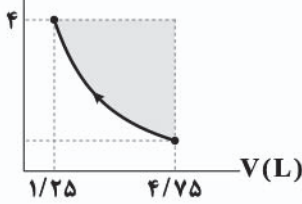
ثابت، شعاع بادکنک ۲۰ درصد و دمای مطلق آن ۴۴ درصد افزایش می‌یابد. m چند گرم است؟ (گاز نیتروژن را گاز کامل در نظر بگیرید.)

- ۲ (۱) ۴ (۲) ۴/۵ (۳) ۶ (۴)



۵۲- مطابق نمودار زیر، حجم گاز آرمانی را طی یک فرایند هم‌دما تغییر داده‌ایم. اگر اندازه مساحت قسمت هاشور خورده در شکل، 600 واحد SI باشد، در این صورت گاز ژول گرما

$P(\times 10^5 \text{ Pa})$



(۱) 800 - از دست داده است

(۲) 800 - دریافت کرده است

(۳) 1000 - از دست داده است

(۴) 1000 - دریافت کرده است

۵۳- اگر بار ذخیره شده در خازن تختی را 80 میکروکولن افزایش دهیم، اختلاف پتانسیل الکتریکی دو سر این خازن 6 برابر می‌شود. بار ثانویه این خازن چند میکروکولن است؟

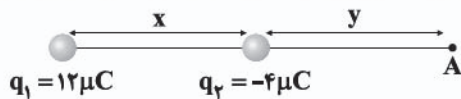
(۴) 96

(۳) 64

(۲) 32

(۱) 16

۵۴- در شکل زیر، برایند میدان‌های الکتریکی حاصل از دو بار در نقطه A، برابر \vec{E} است. اگر بار الکتریکی q_1 خنثی شود، میدان الکتریکی برایند در نقطه A برابر $4\vec{E}$ می‌شود. x چند برابر y است؟



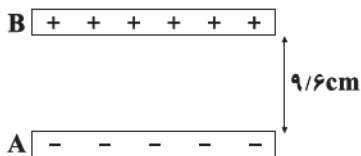
(۴) $\frac{5 - 2\sqrt{15}}{7}$

(۳) $\frac{5 + 2\sqrt{15}}{7}$

(۲) $\frac{5 - 2\sqrt{15}}{5}$

(۱) $\frac{-5 + 2\sqrt{15}}{5}$

۵۵- در شکل زیر، ذره‌ای با بار الکتریکی $q = -6/4 \times 10^{-19} \text{ C}$ و به جرم 4×10^{-20} کیلوگرم با شتاب ثابت از حال سکون و از مجاورت صفحه A حرکت کرده و در مدت زمان Δt به صفحه B می‌رسد. اگر از نیروی گرانشی در مقابل نیروی الکتریکی وارد شده از طرف میدان الکتریکی به ذره باردار، چشم‌پوشی کنیم و بزرگی میدان الکتریکی بین دو صفحه A و B، 250 نیوتون بر کولن باشد، Δt چند میلی‌ثانیه است؟



(۱) $\frac{2\sqrt{3}}{5}$

(۲) $\frac{2\sqrt{3}}{5} \times 10^{-2}$

(۳) $4\sqrt{3}$

(۴) $4/8 \times 10^{-5}$

۵۶- گلوله‌ای از بالای ساختمانی به ارتفاع h رها می‌شود و پس از طی مسافت 20 متر، انرژی جنبشی آن 2 برابر انرژی پتانسیل آن در همان نقطه می‌شود. ارتفاع h چند متر است؟ (از مقاومت هوا صرف‌نظر کنید و $g = 10 \frac{\text{N}}{\text{kg}}$)

(۴) 60

(۳) 50

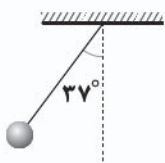
(۲) 40

(۱) 30



۵۷- مطابق شکل زیر، آونگی به طول L به اندازه 37° از وضعیت قائم خارج شده است. اگر آونگ از لحظه رها شدن تا لحظه بیشینه شدن تندی

آن، ۳۰ درصد انرژی اولیه خود را در اثر مقاومت هوا از دست بدهد، بیشینه تندی آن چند متر بر ثانیه است؟ ($\sin 37^\circ = 0.6$, $g = 10 \frac{N}{kg}$)



$$\sqrt{\frac{7}{40}} L \quad (2)$$

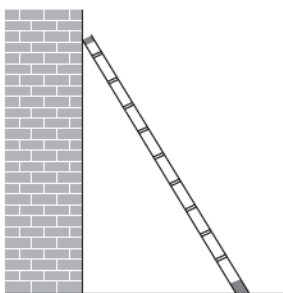
$$\sqrt{\frac{28}{10}} L \quad (1)$$

$$\sqrt{\frac{10}{28}} L \quad (4)$$

$$\sqrt{\frac{40}{7}} L \quad (3)$$

۵۸- در شکل زیر، اگر نردبان در آستانه سر خوردن قرار داشته باشد، نسبت اندازه نیرویی که از طرف دیوار قائم بدون اصطکاک به نردبان وارد

می‌شود، به اندازه نیرویی که سطح افقی دارای اصطکاک ($\mu_s = 1$) به نردبان وارد می‌کند، در کدام گزینه به درستی آمده است؟



$$1 \quad (1)$$

$$\sqrt{2} \quad (2)$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2} \quad (3)$$

$$\frac{1}{2} \quad (4)$$

۵۹- دو گلوله به جرم‌های $m_1 = 2 \text{ kg}$ و $m_2 = 4 \text{ kg}$ را از ارتفاع ۱۵ متری سطح زمین و از یک نقطه، هم‌زمان رها می‌کنیم. اگر نیروی مقاومت

هوا ثابت و یکسانی به اندازه 10 N به گلوله‌ها وارد شود، بیشترین فاصله دو گلوله از هم چند متر خواهد بود؟ ($g = 10 \frac{N}{kg}$)

$$10 \quad (4)$$

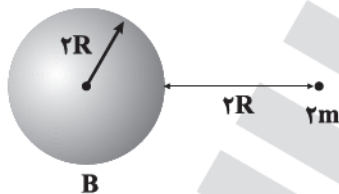
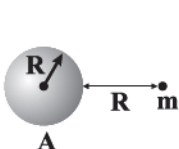
$$7/5 \quad (3)$$

$$5 \quad (2)$$

$$2/5 \quad (1)$$

۶۰- اگر چگالی سیاره B ، $1/5$ برابر چگالی سیاره A باشد، در شکل زیر، اندازه نیروی گرانشی وارد بر جرم $2m$ از طرف سیاره B ،

چند برابر اندازه نیروی گرانشی وارد بر جرم m از طرف سیاره A است؟



$$1 \quad (1)$$

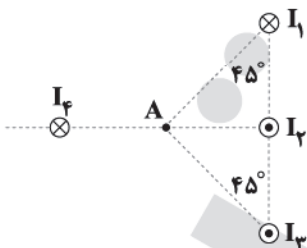
$$3 \quad (2)$$

$$6 \quad (3)$$

$$18 \quad (4)$$

۶۱- در شکل زیر، چهار سیم بلند و موازی نشان داده شده است که بر صفحه کاغذ عمودند و از آن‌ها جریان‌های برابر I می‌گذرد. اگر در نقطه A

یک عقربه مغناطیسی قرار دهیم، عقربه‌ها کدام جهت را نشان می‌دهد؟



$$\swarrow \quad (2)$$

$$\nearrow \quad (1)$$

$$\nwarrow \quad (4)$$

$$\searrow \quad (3)$$

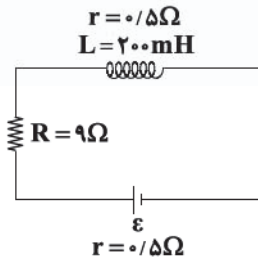


۶۲- معادله جریان متناوب گذرنده از مقاومت $R = \sqrt{2} \Omega$ در SI به صورت $I = 0.8 \sin(\Delta \pi t)$ است. در لحظه $t = \frac{1}{\Delta} s$ به ترتیب (از راست به

چپ) توان مصرفی و اختلاف پتانسیل الکتریکی دو سر این مقاومت چند واحد SI است؟

- (۱) $0.16 - 0.32\sqrt{2}$ (۲) $0.16 - 0.32$ (۳) $0.18 - 0.32\sqrt{2}$ (۴) $0.18 - 0.16$

۶۳- در مدار زیر، انرژی ذخیره شده در القاگر برابر با $400 mJ$ است. نیروی محرکه مولد چند ولت است؟



- (۱) ۲۰
(۲) ۱۰
(۳) ۱۵
(۴) ۵

۶۴- طول یک عقربه ساعت شمار، $\frac{3}{5}$ طول عقربه دقیقه شمار و طول عقربه دقیقه شمار، $\frac{4}{5}$ طول عقربه ثانیه شمار است. تندی نوک عقربه

ساعت شمار چند برابر تندی نوک عقربه ثانیه شمار است؟

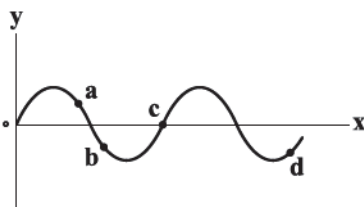
- (۱) $\frac{1}{16}$ (۲) $\frac{1}{25}$ (۳) $\frac{1}{96}$ (۴) $\frac{1}{150}$

۶۵- شنونده‌ای در فاصله r_1 از یک چشمه صوت قرار دارد. اگر شنونده به چشمه صوت نزدیک شود، شدت صوت و تراز شدت صوتی که می شنود به ترتیب

نسبت به حالت قبل ۴ و $\frac{1}{2}$ برابر می شود. شدت صوت اولیه‌ای که شنونده می شنود چند برابر شدت صوت مبنا بوده است؟ ($\log 2 = 0.3$)

- (۱) ۳ (۲) 10^3 (۳) ۶ (۴) 10^6

۶۶- شکل زیر، یک موج سینوسی را در یک لحظه نشان می دهد که در جهت محور x در حال انتشار است. چه تعداد از عبارتهای زیر صحیح است؟



(الف) نوع حرکت ذره a کندشونده است.

(ب) ذره c بیشترین انرژی جنبشی را دارد.

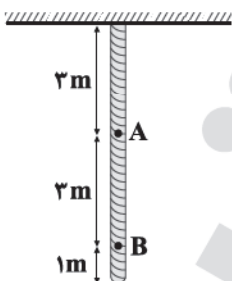
(ج) شتاب ذره b خلاف جهت محور y ها است.

(د) انرژی جنبشی ذره d در حال کاهش است.

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

۶۷- در شکل زیر، ریسمانی همگن از سقف آویزان است. اگر در این ریسمان، امواج عرضی ایجاد کنیم، تندی انتشار این امواج در نقطه A چند

برابر تندی انتشار این امواج در نقطه B است؟



- (۱) ۱
(۲) ۲
(۳) $\sqrt{2}$
(۴) ۴



۶۸- بسامد دو هماهنگ متوالی تار مرتعشی 625 Hz و 550 Hz است. اگر در طول تار ۳ گره ایجاد شود، بسامد ارتعاش تار چند هرتز است؟

- (۱) ۷۵ (۲) ۱۵۰ (۳) ۲۲۵ (۴) ۳۰۰

۶۹- طول موج نوری در آب با ضریب شکست $\frac{4}{3}$ برابر 900 nm است. بسامد این نور در شیشه با ضریب شکست $\frac{3}{2}$ چند تراهرتز است؟

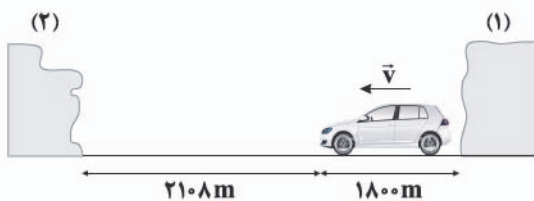
$$(c = 3 \times 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}})$$

- (۱) ۲۵۰ (۲) ۵۰۰ (۳) ۷۵۰ (۴) ۱۰۰۰

۷۰- مطابق شکل زیر، اتومبیلی با تندی ثابت $72 \frac{\text{km}}{\text{h}}$ روی جاده صاف و افقی، از مانع (۱) دور و به مانع (۲) نزدیک می‌شود. اگر اتومبیل

هنگامی که به فاصله ۲۱۰۰ متری از مانع (۲) می‌رسد، بوق بزند، اختلاف زمان رسیدن دو پژواک صدای بوق از دو مانع چند ثانیه خواهد بود؟

(تندی صوت در هوا برابر با $320 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ و از هر مانع تنها یک بار پژواک صورت گرفته است.)



(۱) ۰/۱

(۲) ۰/۴

(۳) ۱۲/۴

(۴) ۱۲

۷۱- اگر بیشینه تندی یک نوسانگر برابر با $\sqrt{0/4} \frac{\text{m}}{\text{s}}$ و طول پاره خط نوسان برابر با 2 cm باشد، بیشینه شتاب نوسانگر چند واحد است؟

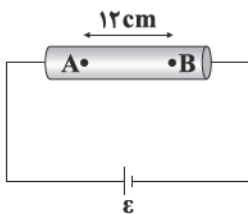
- (۱) ۰/۰۴ (۲) ۰/۴ (۳) ۴ (۴) ۴۰

۷۲- در آزمایش یانگ، بسامد نور آزمایش را ۴۰ درصد کاهش داده و آزمایش را به جای هوا در آب با ضریب شکست $\frac{4}{3}$ انجام می‌دهیم، ضخامت

نوارها چند درصد افزایش می‌یابد؟

- (۱) ۱۰ (۲) ۱۵ (۳) ۲۵ (۴) ۳۰

۷۳- مطابق شکل زیر، استوانه‌ای فلزی توپری را به اختلاف پتانسیل الکتریکی ۳۶ ولت متصل کرده‌ایم. اگر $V_B - V_A = 6\text{ V}$ و فاصله A تا B



برابر ۱۲ سانتی‌متر باشد، طول استوانه چند متر است؟

(۱) ۰/۹۶

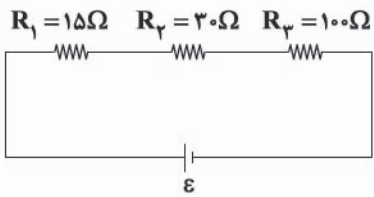
(۲) ۰/۱۸

(۳) ۰/۷۲

(۴) ۰/۳۶



۷۴- در مدار شکل زیر، اگر حداکثر اختلاف پتانسیل الکتریکی قابل تحمل هر مقاومت 80V باشد، حداکثر اختلاف پتانسیل الکتریکی کل مدار



باید چند ولت باشد تا هیچ کدام از مقاومت‌ها آسیب نبینند؟

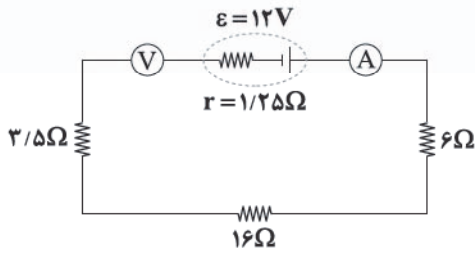
(۱) ۵۸

(۲) ۲۴۰

(۳) ۸۰

(۴) ۱۱۶

۷۵- در مدار شکل زیر، آمپرسنج ایده‌ال و ولت‌سنج ایده‌ال به ترتیب از راست به چپ چه عددی را در واحد SI نشان می‌دهند؟



(۱) صفر - ۱۲

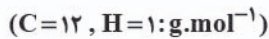
(۲) ۱۲ - صفر

(۳) $12 - \frac{48}{107}$

(۴) $\frac{504}{107} - \frac{48}{107}$



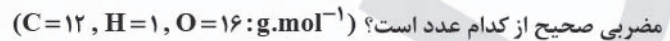
۷۹- شمار اتم‌ها در 0.13 گرم از مونومر سازنده پلی‌استیرن، چند برابر شمار یون‌های سازنده 0.08 مول از فراورده نامحلول واکنش زیر است؟



... → محلول کلسیم نیترات + محلول سدیم فسفات

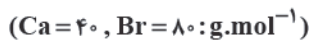
(۱) 0.25 (۲) 0.05 (۳) 0.5 (۴) 0.25

۸۰- یک هیدروکربن به جرم $25/3$ گرم بر اثر سوختن کامل، $84/7$ گرم کربن دی‌اکسید و $19/8$ گرم آب تولید می‌کند. جرم مولی این ترکیب آلی،



(۱) ۴۶ (۲) ۶۹ (۳) ۶۰ (۴) ۸۴

۸۱- چند گرم آب خالص را باید به 90 گرم محلول 5 درصد جرمی کلسیم برمید اضافه کنیم تا غلظت یون برمید به $2000 ppm$ برسد؟



(۱) 1710 (۲) 810 (۳) 1510 (۴) 710

۸۲- چه تعداد از عبارتهای زیر درست است؟

- برای ساخت محلول فرا سیرشده لیتیم سولفات از محلول سیرنشده آن، باید دما را به آهستگی افزایش داد.
- پدیده‌های اسمز و اسمز معکوس به طور خودبه‌خودی انجام شده و شرایط انجام آن‌ها متفاوت است.
- بیش از نیمی از آبی که بخش عمده جرم بدن را تشکیل می‌دهد درون یاخته‌ها جریان دارد.
- ممکن است نقطه جوش ترکیب ناقطبی A بیشتر از ترکیب قطبی B باشد.

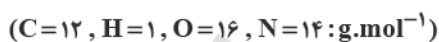
(۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

۸۳- چه تعداد از عبارتهای زیر درست است؟

- در مواد مولکولی با مولکول‌های قطبی برخلاف ناقطبی با افزایش جرم مولی، دمای جوش افزایش می‌یابد.
- گازها دارای مولکول‌های مجزا و فاقد برهم‌کنش هستند.
- برای تولید ترکیب یونی سدیم کربنات در صنعت، از نمک خوراکی استفاده می‌شود.
- استون در آب همانند اتانول در آب به طور نامحدود حل می‌شود و هرگز نمی‌توان از این دو ترکیب محلول آبی سیرشده تولید کرد.

(۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

۸۴- در محلولی از اوره در آب، درصد مولی اوره برابر 50% است. درصد جرمی اوره در این مخلوط به تقریب کدام است؟



(۱) ۴۴ (۲) ۵۵ (۳) ۶۶ (۴) ۷۷

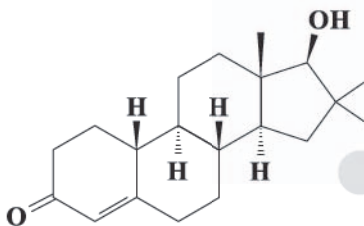


۸۵- محلولی از سرب (II) نیترات در دمای 25°C و به جرم 40g در دسترس است. اگر این محلول شامل $3/75$ گرم یون نیترات باشد، در همین دما، به تقریب چند گرم دیگر از نمک سرب (II) نیترات را می توان در این محلول حل کرد؟ (انحلال پذیری سرب (II) نیترات در

دمای 25°C برابر 60g در 100g آب است.) ($\text{Pb}=208, \text{N}=14, \text{O}=16: \text{g}\cdot\text{mol}^{-1}$)

- ۸ (۱) ۱۰ (۲) ۹ (۳) ۲ (۴)

۸۶- چه تعداد از عبارتهای زیر در ارتباط با ساختار زیر درست است؟



- در ساختار آن گروه عاملی اکسیژن دار موجود در ویتامین K دیده می شود.
- شماره اتمهای کربن آن برابر با شماره اتمهای هیدروژن ۳- اتیل - ۳- متیل هگزان است.
- شماره اتمهای هیدروژن آن برابر با شماره اتمهای هیدروژن ۳ و ۴- دی اتیل - ۵- متیل نونان است.
- شماره جفت الکترونهای ناپیوندی برابر با شماره جفت الکترونهای ناپیوندی مولکول بنزوئیک اسید است.

- ۱ (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴)

۸۷- مخلوطی از فلزهای آلومینیوم و منیزیم به جرم $19/8\text{g}$ با مقدار اضافی هیدروکلریک اسید واکنش داده و در نتیجه $2/1\text{g}$ گاز تولید می شود.

درصد خلوص منیزیم در مخلوط اولیه کدام است؟ ($\text{Al}=27, \text{Mg}=24, \text{H}=1: \text{g}\cdot\text{mol}^{-1}$)

- ۱۸/۱۸ (۱) ۲۲/۲۲ (۲) ۲۷/۲۷ (۳) ۳۶/۳۶ (۴)

۸۸- اگر $5/3$ گرم پارازایلین با مقدار کافی محلول غلیظ پتاسیم پرمنگنات واکنش دهد و سپس فراورده آلی این واکنش با مقدار کافی الکل چوب

وارد واکنش دیگر شود، چند گرم استر تولید می شود؟ (بازده هر کدام از واکنشها 60% است.) ($\text{C}=12, \text{H}=1, \text{O}=16: \text{g}\cdot\text{mol}^{-1}$)

- ۲/۸۸ (۱) ۴/۸ (۲) ۵/۸۲ (۳) ۳/۴۹ (۴)

۸۹- بر اثر اضافه کردن آب در حضور سولفوریک اسید به ۱- بوتن می توان ۱- بوتانول تولید کرد. به ازای مصرف $6/72$ گرم از ۱- بوتن در این

واکنش، چند کیلوژول گرما مبادله می شود؟ ($\text{C}=12, \text{H}=1: \text{g}\cdot\text{mol}^{-1}$)

- a) $4\text{C}(\text{s}) + 4\text{H}_2(\text{g}) \rightarrow \text{C}_4\text{H}_8(\text{g}) \quad \Delta\text{H} = -8\text{kJ}$
- b) $4\text{C}(\text{s}) + 5\text{H}_2(\text{g}) + \frac{1}{2}\text{O}_2(\text{g}) \rightarrow \text{C}_4\text{H}_{10}\text{O}(\text{l}) \quad \Delta\text{H} = -340\text{kJ}$
- c) $2\text{H}_2(\text{g}) + \text{O}_2(\text{g}) \rightarrow 2\text{H}_2\text{O}(\text{l}) \quad \Delta\text{H} = -572\text{kJ}$

- ۵/۵۲ (۴) ۷/۷۲ (۳) ۸/۸۲ (۲) ۹/۹۲ (۱)



۹۰- داده‌های جدول زیر مربوط به دو ماده از اجزای واکنش اکسایش آمونیاک در حضور اکسیژن است که طی آن، بخار آب و گاز نیتروژن مونوکسید تولید می‌شود. اگر سرعت متوسط واکنش در ۱۰ ثانیه دوم واکنش $3 \text{ mol} \cdot \text{min}^{-1}$ و در ثانیه ۲۰ام واکنش مجموع شمار مول‌های

فرآورده‌ها، $5/4$ مول بیشتر از شمار مول‌های آمونیاک باشد، حاصل عبارت $\frac{a+d}{b+c}$ به تقریب کدام است؟

t(s)	۰	۱۰	۲۰	۳۰
مول				
ماده (۱)	۱۰	a	b	۴/۴
ماده (۲)	۰	c	d	۸/۴

۱/۵۴ (۱)

۱/۴۶ (۲)

۱/۲۹ (۳)

۰/۹۱ (۴)

۹۱- با توجه به داده‌های جدول زیر اگر یک مول متانول گازی شکل به طور مستقیم از متان تولید شود چند کیلوژول گرما مبادله می‌شود؟

پیوند	C—H	C—O	O=O	O—H
$\Delta H(\text{kJ} \cdot \text{mol}^{-1})$	۴۱۵	۳۶۰	۴۹۵	۴۶۵

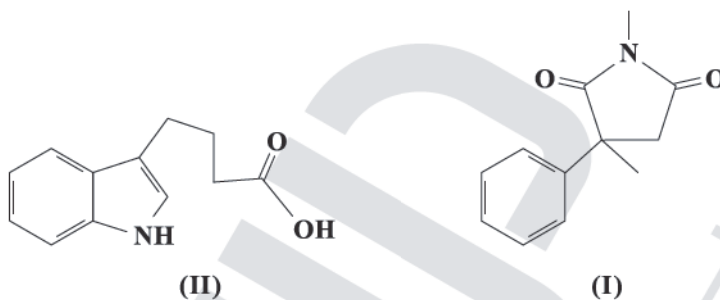
۱۶۲/۵ (۱)

۱۲۶/۵ (۲)

۴۱۰ (۳)

۳۷۴ (۴)

۹۲- چه تعداد از عبارت‌های زیر در ارتباط با ساختارهای (I) و (II) درست است؟



• فرمول مولکولی دو ساختار یکسان است.

• شمار جفت الکترون‌های پیوندی در ساختار (I) برابر با ۳۴ جفت الکترون است.

• شمار اتم‌های کربن ساختار (II) برابر با شمار اتم‌های کربن مولکول مالتوز است.

• ترکیب (II) را می‌توان برای تولید پلی‌آمیدها استفاده کرد.

• در ساختار (I) برخلاف ساختار (II) گروه عاملی آمیدی وجود دارد.

۵ (۴)

۴ (۳)

۳ (۲)

۲ (۱)

دفترچه شماره ۳

آزمون جامع ۲

پنجشنبه ۱۴۰۲/۰۴/۰۱



آزمون‌های سراسر گاج

گزینه درست را انتخاب کنید.

سال تحصیلی ۱۴۰۲-۱۴۰۱

پاسخ‌های تشریحی

پایه دوازدهم ریاضی

دوره دوم متوسطه

نام و نام خانوادگی:	شماره داوطلبی:
تعداد سؤالاتی که باید پاسخ دهید: ۱۰۵	مدت پاسخگویی: ۱۴۵ دقیقه

عناوین مواد امتحانی آزمون گروه آزمایشی علوم ریاضی، تعداد سؤالات و مدت پاسخگویی

ردیف	مواد امتحانی	تعداد سؤال	شماره سؤال		مدت پاسخگویی
			از	تا	
۱	ریاضیات	۴۰	۱	۴۰	۷۰ دقیقه
۲	فیزیک	۳۵	۴۱	۷۵	۴۵ دقیقه
۳	شیمی	۳۰	۷۶	۱۰۵	۳۰ دقیقه

آزمون‌های سراسر گاج

دروس	طراحان	ویراستاران علمی
ریاضیات	سیروس نصیری - محمدرضا سیاح علی ایمانی - مجید فرهمندپور	محدثه کارگرفرد - مهدی وارسته ندا فرهختی - مینا نظری
فیزیک	ارسلان رحمانی امیررضا خوینی‌ها رضا کریم‌زاده - حسین شهبازی مسعود قره‌خانی - شهاب نصیری	مروارید شاه‌حسینی سارا دانایی کجانی
شیمی	پویا الفتی - میلاد عزیزی	ایمان زارعی - رضیه قربانی



فروشگاه مرکزی گاج: تهران - خیابان انقلاب
نیش بازارچه کتاب

اطلاع‌رسانی و ثبت نام ۰۲۱-۶۴۲۰

نشانی اینترنتی www.gaj.ir

آماده‌سازی آزمون

مدیریت آزمون: ابوالفضل مزرعی

بازبینی و نظارت نهایی: سارا نظری

برنامه‌ریزی و هماهنگی: سارا نظری - مینا نظری

بازبینی دفترچه: بهاره سلیمی - عطیه خادمی

ویراستاران فنی: ساناز فلاحی - مروارید شاه‌حسینی - مریم پارسائیان - سپیده‌سادات شریفی - عاطفه دستخوش

سرپرست واحد فنی: سعیده قاسمی

صفحه‌آرا: فرهاد عبدی

طراح شکل: آرزو گلفر

حروف‌نگاران: مینا عباسی - مهناز کاظمی - فرزانه رجیبی - ربابه الطافی - حدیث فیض‌الهی - ملیکا کاشانی





ریاضیات

۱ ۳

بین دو عدد ۲ و ۱۶۲ به تعداد ۳ واسطه هندسی درج می‌کنیم. پس برای یافتن قدرنسبت داریم:

$$q^{3+1} = \frac{162}{2} \Rightarrow q^4 = 81 \Rightarrow \begin{cases} q=3 \\ q=-3 \end{cases}$$

اگر $q = -3$ باشد، جملات دنباله مثبت و منفی و نوسانی است و دنباله صعودی نیست پس $q = 3$ قابل قبول است و دنباله به صورت زیر است.

$$2, 6, 18, 54, 162$$

عدد ۶ واسطه اول و عدد ۵۴ واسطه سوم است و اگر این دو عدد دنباله حسابی بسازند، داریم:

$$d = 54 - 6 = 48$$

مجموع n جمله اول دنباله حسابی برابر است با:

$$S_n = \frac{n}{2}[2a_1 + (n-1)d]$$

بنابراین مجموع ۱۱ جمله اول این دنباله حسابی برابر است با:

$$S_{11} = \frac{11}{2}[2(6) + 10(48)] = 2706$$

۲ ۲

ابتدا مقدار x را به صورت زیر به دست می‌آوریم:

$$x = \frac{4\sqrt{3}}{(2+\sqrt{3})-\sqrt{7}} \times \frac{(2+\sqrt{3})+\sqrt{7}}{(2+\sqrt{3})+\sqrt{7}} - \sqrt{7}$$

$$= \frac{4\sqrt{3}(2+\sqrt{3}+\sqrt{7})}{4+2+4\sqrt{3}-7} - \sqrt{7} = 2 + \sqrt{3} + \sqrt{7} - \sqrt{7} = 2 + \sqrt{3}$$

از طرفی می‌دانیم $2 + \sqrt{3} = \frac{1}{2 - \sqrt{3}}$ بنابراین داریم:

$$\sqrt{\frac{x}{2-\sqrt{3}}} = \sqrt{\frac{2+\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}}} = \sqrt{(2+\sqrt{3})^2} = 2 + \sqrt{3}$$

۳ ۲

سهمی $f(x)$ در نقاط $x = -1$ و $x = 4$ محور طول‌ها را قطع می‌کند. بنابراین ضابطه آن را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$f(x) = a(x+1)(x-4)$$

تابع از نقطه $(0, -2)$ می‌گذرد و داریم:

$$f(0) = -2 \Rightarrow -4a = -2 \Rightarrow a = \frac{1}{2} \Rightarrow f(x) = \frac{1}{2}(x+1)(x-4)$$

$$\Rightarrow f(2x-1) = \frac{1}{2}(2x)(2x-5) = 2x^2 - 5x$$

حال ضابطه تابع $g(x)$ را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$g(x) = \sqrt{2x^2 - (2x^2 - 5x)} = \sqrt{x^2 + 5x}$$

برای تعیین دامنه تابع $g(x)$ داریم:

$$x^2 + 5x \geq 0 \Rightarrow x \leq -5 \text{ یا } x \geq 0$$

بنابراین اعداد صحیح $x = -4, x = -3, x = -2, x = -1$ در دامنه تعریف $g(x)$ قرار ندارند.

۴ ۳

اگر f تابع ثابت باشد، این مقدار ثابت را k فرض می‌کنیم و داریم:

$$f(3x-1) = f(2x) = f(x) = k$$

$$\frac{k-2k}{k-3} = 5 \Rightarrow 5k - 15 = -k \Rightarrow k = \frac{5}{4}$$

بنابراین می‌توان نوشت:

از طرفی g تابعی همانی است و داریم:

$$\begin{cases} g(x^2-1) = x^2-1 \\ g(x+1) = x+1 \end{cases}$$

پس معادله به صورت زیر خواهد بود:

$$x^2-1-(x+1) = 4\left(\frac{5}{4}\right) \Rightarrow x^2-x-2=1$$

$$\Rightarrow x^2-x-12=0 \Rightarrow x_1 x_2 = \frac{c}{a} = -12$$

۳ ۵

α و β ریشه‌های معادله $x^2 - 3x + 1 = 0$ هستند بنابراین داریم:

$$S = \alpha + \beta = -\frac{b}{a} = 3, P = \alpha\beta = \frac{c}{a} = 1$$

از طرفی α و β ریشه‌ها هستند، پس:

$$\alpha^2 - 3\alpha + 1 = 0$$

$$\beta^2 - 3\beta + 1 = 0$$

از آنجایی که $\alpha\beta = 1$ بنابراین داریم $\beta = \frac{1}{\alpha}$ یعنی $\beta^3 = \frac{1}{\alpha^3}$ بنابراین:

$$\alpha^3 + \frac{1}{\alpha^3} = \alpha^3 + \beta^3 = S^3 - 3PS = 27 - 9 = 18$$

$$\beta^2 - 3\beta + 1 = 0 \Rightarrow 3\beta - 1 = \beta^2$$

از طرفی داریم:

و می‌توان نوشت:

$$\sqrt{2\alpha^2(6\beta-2)} = \sqrt{4\alpha^2(3\beta-1)} = \sqrt{4\alpha^2\beta^2} = \sqrt{4(1)^2} = 2$$

بنابراین می‌خواهیم معادله‌ای را بنویسیم که ریشه‌هایش ۱۸ و ۲ باشند و داریم:

$$S_{\text{جدید}} = 18 + 2 = 20$$

$$P_{\text{جدید}} = 18 \times 2 = 36$$

معادله جدید به صورت $x^2 - Sx + P = 0$ خواهد بود و داریم:

$$x^2 - 20x + 36 = 0$$

۶ ۲

نکته ۱: تابع $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ وقتی بر وارون خود منطبق است

که $a = -d$ بنابراین اگر $f(x) = \frac{ax+3}{x-2}$ بر وارون خود منطبق باشد داریم:

$$a = 2$$

نکته ۲: خط $y = mx + h$ با شرط $h \neq 0$ وقتی بر وارون خود منطبق است

که $m = -1$ باشد، بنابراین اگر تابع $g(x) = bx - 3$ بر وارون خود منطبق باشد، داریم:

$$b = -1$$

بنابراین توابع $f(x)$ و $g(x)$ به صورت زیر هستند:

$$f(x) = \frac{2x+3}{x-2}$$

$$g(x) = -x-3$$

بنابراین داریم:

$$g(-6) = -(-6) - 3 = 3$$

$$\left(\frac{2g}{f+1}\right) \circ g(-6) = \left(\frac{2g}{f+1}\right)(3) = \frac{2g(3)}{f(3)+1} = \frac{-12}{9+1} = -\frac{6}{5}$$

عبارت $\frac{2x+1}{3}$ باید عددی صحیح باشد پس آن را k فرض

می‌کنیم ($k \in \mathbb{Z}$) و داریم:

$$\frac{2x+1}{3} = k \Rightarrow 2x = 3k - 1 \Rightarrow x = \frac{3k-1}{2}$$

بنابراین معادله به صورت زیر خواهد شد:

$$\left[\frac{3k-1}{2}\right] = k \Rightarrow \left[\frac{3k-3}{4}\right] = k$$

$$\Rightarrow k \leq \frac{3k-3}{4} < k+1 \Rightarrow 0 \leq \frac{3k-3}{4} - k < 1$$

$$\Rightarrow 0 \leq \frac{-k-3}{4} < 1 \Rightarrow 0 \leq -k-3 < 4$$

$$\Rightarrow 3 \leq -k < 7 \Rightarrow -7 < k \leq -3$$



۱۰ ابتدا تابع $g(x)$ را به صورت زیر ساده تر می‌کنیم.

$$g(x) = [2x + \frac{1}{3}] + [2x - \frac{2}{3}] = [2x + \frac{1}{3}] + [2x + \frac{1}{3} - 1]$$

$$= [2x + \frac{1}{3}] + [2x + \frac{1}{3}] - 1 = 2[2x + \frac{1}{3}] - 1$$

بنابراین تابع $g(x)$ در نقاطی ناپیوسته است که عبارت داخل براکت

یعنی $2x + \frac{1}{3}$ عدد صحیح شود. برای یافتن این نقاط داریم:

$$-\frac{4}{3} < x < \frac{2}{3} \Rightarrow -\frac{1}{3} < 2x < \frac{4}{3} \Rightarrow -\frac{1}{3} < 2x + \frac{1}{3} < \frac{5}{3}$$

در این بازه مقادیر صحیح برای عبارت $2x + \frac{1}{3}$ به صورت زیر است:

$$2x + \frac{1}{3} = -2 \Rightarrow x = -\frac{7}{6}$$

$$2x + \frac{1}{3} = -1 \Rightarrow x = -\frac{2}{3}$$

$$2x + \frac{1}{3} = 0 \Rightarrow x = -\frac{1}{6}$$

$$2x + \frac{1}{3} = 1 \Rightarrow x = \frac{1}{3}$$

از بین این ۴ عدد، اعداد $x = -\frac{2}{3}$ و $x = \frac{1}{3}$ عبارت $9x^2 + 2x - 2$ را برابر صفر

می‌کنند، بنابراین در این ۲ عدد تابع $f(x)$ پیوسته است. پس تابع $f(x)$ فقط

در نقاط $x = -\frac{1}{6}$ و $x = -\frac{1}{3}$ ناپیوسته است.

۱۱ در تابع $g(x) = -2f(2x-1) + 1$ به دلیل ضریب (-2)

وضعیت یکنوایی تابع $g(x)$ برعکس وضعیت تابع $f(x)$ است. یعنی در بازه‌ای که

تابع $f(x)$ اکیداً صعودی است در بازه نظیر آن در $g(x)$ تابع اکیداً نزولی است.

تابع $f(x)$ در بازه $[-1, 2]$ اکیداً صعودی است. این بازه در تابع $g(x)$

تبدیل به بازه مقابل خواهد شد. $[-\frac{1}{3}, \frac{2}{3}] = [0, \frac{2}{3}]$

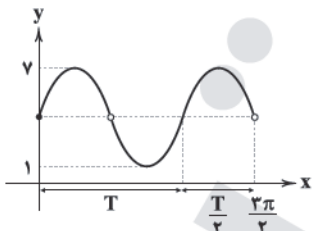
بنابراین تابع $g(x)$ در بازه $[0, \frac{2}{3}]$ اکیداً نزولی است.

۱۲ ابتدا ضابطه تابع را با استفاده از اتحاد $\sin 2\alpha = \frac{2 \tan \alpha}{1 + \tan^2 \alpha}$

ساده می‌کنیم.

$$f(x) = \frac{c \tan(bx)}{1 + \tan^2(bx)} + \frac{a(\tan^2(bx) + 1)}{1 + \tan^2(bx)} = \frac{c}{2} \sin(2bx) + a$$

از روی نمودار داریم:



$$T + \frac{T}{2} = \frac{2T}{2} = \frac{2\pi}{2} \\ \Rightarrow T = \pi$$

با استفاده از ضابطه تابع می‌توان نوشت:

$$T = \frac{2\pi}{|2b|} = \pi \Rightarrow |b| = 1 \Rightarrow b = \pm 1$$

$$\begin{cases} \min f(x) = 1 \Rightarrow -|\frac{c}{2}| + a = 1 \\ \max f(x) = 7 \Rightarrow |\frac{c}{2}| + a = 7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 4 \\ |\frac{c}{2}| = 3 \Rightarrow |c| = 6 \Rightarrow c = \pm 6 \end{cases}$$

k باید عددی صحیح باشد پس داریم:

$$k = -6 \Rightarrow \frac{2x+1}{3} = -6 \Rightarrow x = -\frac{19}{2}$$

$$k = -5 \Rightarrow \frac{2x+1}{3} = -5 \Rightarrow x = -8$$

$$k = -4 \Rightarrow \frac{2x+1}{3} = -4 \Rightarrow x = -\frac{13}{2}$$

$$k = -3 \Rightarrow \frac{2x+1}{3} = -3 \Rightarrow x = -5$$

بنابراین معادله دارای ۴ جواب است.

۸ از قانون $\log_c a + \log_c b = \log_c(ab)$ داریم:

$$f(x) = \log_{\frac{1}{2}} (\sin \frac{x}{4} \cos \frac{x}{4} \cos \frac{x}{2} \cos x \cos 2x)$$

از اتحاد $\sin \alpha \cos \alpha = \frac{1}{2} \sin 2\alpha$ داریم:

$$\sin \frac{x}{4} \cos \frac{x}{4} \cos \frac{x}{2} \cos x \cos 2x = \frac{1}{2} \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} \cos x \cos 2x$$

$$= \frac{1}{4} \sin x \cos x \cos 2x = \frac{1}{8} \sin 2x \cos 2x = \frac{1}{16} \sin 4x$$

بنابراین داریم:

$$f(x) = \log_{\frac{1}{2}} (\frac{1}{16} \sin 4x) \Rightarrow f(\frac{\pi}{16}) = \log_{\frac{1}{2}} (\frac{1}{16} \sin \frac{\pi}{4})$$

$$= \log_{\frac{1}{2}} (\frac{\sqrt{2}}{32}) = \log_{\frac{1}{2}} (2^{\frac{1}{2}} \times 2^{-5}) = \log_{\frac{1}{2}} 2^{-\frac{9}{2}} = \frac{-\frac{9}{2}}{-1} \log_2 2 = \frac{9}{2}$$

۹ وقتی $x \rightarrow 0^+$ عبارت $x^3 - x$ از مقادیر کم‌تر از صفر به صفر

نزدیک می‌شود. یعنی:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x^3 - x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sqrt{1+2x} - \sqrt{1+3x}}{\sqrt{1-\cos 2x}}$$

از هم‌ارزی $1 - \cos u \sim \frac{u^2}{2}$ داریم:

$$\sqrt{1-\cos 2x} \sim \sqrt{2x^2} \sim \sqrt{2}|x| \sim -\sqrt{2}x$$

حال برای $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sqrt{1+2x} - \sqrt{1+3x}}{-\sqrt{2}x}$ دو روش زیر را داریم:

روش اول:

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sqrt{1+2x} - 1 + 1 - \sqrt{1+3x}}{-\sqrt{2}x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sqrt{1+2x} - 1}{-\sqrt{2}x} + \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1 - \sqrt{1+3x}}{-\sqrt{2}x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{(\sqrt{1+2x} - 1)(\sqrt{1+2x} + 1)}{(-\sqrt{2}x) \times 2} + \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{(1 - \sqrt{1+3x})(1 + \sqrt{1+3x})}{(-\sqrt{2}x) \times 2}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{2x}{-2\sqrt{2}x} + \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-3x}{-2\sqrt{2}x} = \frac{-\sqrt{2}}{2} + \frac{3\sqrt{2}}{4} = \frac{5\sqrt{2}}{4}$$

روش دوم: از هم‌ارزی $\sqrt{1 \pm u} \sim 1 \pm \frac{u}{2}$ داریم:

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1 + \frac{2}{2}x - (1 + \frac{3}{2}x)}{-\sqrt{2}x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-\frac{1}{2}x}{-\sqrt{2}x} = \frac{5\sqrt{2}}{4}$$



۱ ۱۵

$$\lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(2-3h) - f(2)}{h} = -3f'_+(2)$$

برای یافتن مشتق راست در $x=2$ ابتدا پیوستگی راست را بررسی می‌کنیم:

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{|x-2|}{x^2 - [x]} = 0 \\ f(2) = 0 \end{cases}$$

بنابراین $f(x)$ در $x=2$ پیوستگی راست دارد.

حال مشتق راست را محاسبه می‌کنیم:

$$\begin{aligned} x \rightarrow 2^+ \Rightarrow f(x) = \frac{x-2}{x^2-2} \Rightarrow f'_+(x) &= \frac{x^2-2-2x(x-2)}{(x^2-2)^2} \\ &= \frac{-x^2+4x-2}{(x^2-2)^2} \Rightarrow f'_+(2) = \frac{-4+8-2}{4} = \frac{1}{4} \end{aligned}$$

تذکره: برای یافتن مشتق تابع $f(x) = \frac{x-2}{x^2-2}$ می‌توانیم فقط از عامل صفر

کننده یعنی $x-2$ مشتق بگیریم. یعنی:

$$\begin{aligned} f(x) = \frac{x-2}{x^2-2} \Rightarrow f'_+(2) &= \frac{1}{x^2-2} \Big|_{x=2} = \frac{1}{2} \\ \Rightarrow -3f'_+(2) &= -\frac{3}{2} \end{aligned}$$

۱۶ اگر نقطه (m, n) اکسترمم نسبی تابع مشتق پذیر $f(x)$ باشد داریم:

$$\begin{cases} f(m) = n \\ f'(m) = 0 \end{cases}$$

بنابراین برای تابع $f(x)$ خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} f(x) = x^3 + ax + b \Rightarrow f'(x) &= 3x^2 + a \\ f(1) = 2 \Rightarrow 1 + a + b = 2 \Rightarrow a + b &= 1 \quad (1) \\ f'(1) = 0 \Rightarrow 3 + a = 0 \Rightarrow a = -3 \xrightarrow{(1)} b &= 4 \end{aligned}$$

ضابطه تابع $f(x)$ مشخص است و نقطه عطف آن را به دست می‌آوریم:

$$f''(x) = 6x = 0 \Rightarrow x = 0$$

برای یافتن شیب مماس در نقطه عطف، طول نقطه عطف را در مشتق اول قرار

$$f'(x) = 3x^2 + a = 3x^2 - 3 \Rightarrow f'(0) = -3 \quad \text{می‌دهیم:}$$

۱۷ تابع $f(x)$ در محدوده $x < 0$ در یک نقطه تعریف نشده است

(نقطه توخالی) یعنی طول این نقطه ریشه مشترک صورت و مخرج کسر است. پس

$x = -1$ که ریشه صورت کسر است باید ریشه مخرج کسر هم باشد. بنابراین داریم:

$$(-1)^2 + a(-1) + b = 0 \Rightarrow -a + b = -1 \quad (1)$$

از طرفی $x = 2$ مجانب قائم تابع است و ریشه مخرج کسر است.

$$2^2 + a(2) + b = 0 \Rightarrow 2a + b = -4 \quad (2)$$

$$(1), (2) \Rightarrow \begin{cases} -a + b = -1 \\ 2a + b = -4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = -2 \end{cases}$$

بنابراین تابع $g(x)$ به صورت زیر است و داریم:

$$\begin{aligned} g(x) = x^3 - 3x^2 + 2x + 1 \Rightarrow g'(x) &= 3x^2 - 6x + 2 \\ \Rightarrow g''(x) = 6x - 6 \Rightarrow x = 1 \Rightarrow g(1) &= 1 \end{aligned}$$

یعنی نقطه $(1, 1)$ نقطه عطف تابع $g(x)$ است و فاصله این نقطه از مبدأ

$$\sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$$

مختصات برابر است با:

تابع سینوس در $x=0$ شروع صعودی دارد، پس داریم:

$$\frac{c}{2} + \frac{bc}{a} > 0 \Rightarrow bc > 0 \Rightarrow \begin{cases} b=1 \Rightarrow c=6 \\ b=-1 \Rightarrow c=-6 \end{cases} \Rightarrow bc = 6$$

بنابراین مقدار $\frac{bc}{a}$ برابر است با:

$$\frac{bc}{a} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$$

توجه کنید که تابع به صورت $f(x) = 3\sin 2x + 4$ تبدیل و در نقاط $k\pi + \frac{\pi}{2}$

تعریف نمی‌شود و دوره تناوب را بدون در نظر گرفتن حفره محاسبه می‌کنیم.

۱۲ اگر زاویه $\alpha = x + \frac{2\pi}{5}$ و $\beta = x - \frac{\pi}{5}$ باشد، داریم:

$$\alpha - \beta = \frac{\pi}{5} \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{5} + \beta \Rightarrow \sin \alpha = \sin\left(\frac{\pi}{5} + \beta\right) = \cos \beta$$

$$\Rightarrow \sin\left(x + \frac{2\pi}{5}\right) = \cos\left(x - \frac{\pi}{5}\right)$$

از طرفی $\sin x + \cos x = \sqrt{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$ خواهیم داشت:

$$\sin\left(x + \frac{2\pi}{5}\right) + \sin\left(x + \frac{\pi}{5}\right) = \sqrt{2} \times \sqrt{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$$

$$\Rightarrow 2 \sin\left(x + \frac{3\pi}{10}\right) = 2 \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x + \frac{3\pi}{10} = 2k\pi + x + \frac{\pi}{4} \\ x + \frac{3\pi}{10} = 2k\pi + \pi - \left(x + \frac{\pi}{4}\right) \end{cases} \Rightarrow \text{جواب ندارد}$$

$$\Rightarrow 2x - 2k\pi + \pi - \frac{\pi}{4} - \frac{3\pi}{10} = 0 \Rightarrow 2x - 2k\pi + \frac{7\pi}{20} = 0$$

$$\Rightarrow x = k\pi + \frac{7\pi}{40}$$

$$\Rightarrow x = k\pi + \frac{7\pi}{40}$$

۱۴ اگر خط $x=2$ تنها مجانب قائم تابع $f(x)$ باشد، یکی از دو

حالت زیر را داریم:

حالت (۱): مخرج که ریشه مضاعف $x=2$ داشته باشد یعنی:

$$\text{مخرج} = (x-2)^2 = x^2 - 4x + 4$$

مخرج کسر در این حالت نمی‌تواند قرار بگیرد پس حالت ۱ برقرار نیست.

حالت (۲): مخرج کسر دارای دو ریشه باشد که یکی از آن‌ها با صورت کسر

ساده شود. در این حالت داریم:

$$x^2 + c(2) - 2 = 0 \Rightarrow c = -1 \Rightarrow \text{مخرج} = x^2 - x - 2$$

$$\Rightarrow \text{مخرج} = (x-2)(x+1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = -1 \end{cases}$$

پس $x = -1$ باید ریشه صورت کسر هم باشد و داریم:

$$a(-1)^2 - b(-1) = 0 \Rightarrow a + b = 0 \quad (1)$$

از طرفی $y = -2$ مجانب افقی تابع $f(x)$ است.

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{ax^2}{x^2} = a = -2 \xrightarrow{(1)} b = 2$$

پس تابع $f(x)$ به شکل زیر خواهد بود:

$$f(x) = \frac{-2x^2 - 2x}{(x-2)(x+1)} = \frac{-2x}{x-2}$$

برای یافتن $f^{-1}(-4)$ داریم:

$$\frac{-2x}{x-2} = -4 \Rightarrow 2x = 4x - 8 \Rightarrow x = 4 \Rightarrow f^{-1}(-4) = 4$$



$$D \Rightarrow AQ = AH \Rightarrow AB + BQ = AC + CH$$

$$\Rightarrow 14 + BQ = 15 + 6 \Rightarrow BQ = 7$$

$$\begin{cases} B \text{ روی نیمساز خارجی } D \Rightarrow BQ = BM = 7 \\ C \text{ روی نیمساز خارجی } D \Rightarrow CH = CM = 6 \end{cases}$$

$$\Rightarrow BM + MC = 7 + 6 \Rightarrow BC = 13$$

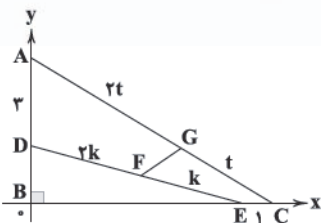
به کمک قضیه هرون مساحت مثلث را محاسبه می‌کنیم.

$$2P = 14 + 15 + 13 = 42 \Rightarrow P = 21$$

$$S = \sqrt{P(P-a)(P-b)(P-c)} = \sqrt{21 \times 8 \times 7 \times 6} = 84$$

مثلت ABC را روی محور مختصات به گونه‌ای که نقطه B

روی مبدأ باشد در نظر می‌گیریم در این صورت $C(x+1, 0)$, $E(x, 0)$, $A(0, y+3)$, $D(0, y)$ است.



$$\overline{DF} = 2\overline{FE} \Rightarrow F - D = 2E - 2F \Rightarrow 3F = 2E + D$$

$$\Rightarrow 2F = (2x, y) \Rightarrow F = \left(\frac{2}{3}x, \frac{1}{3}y\right)$$

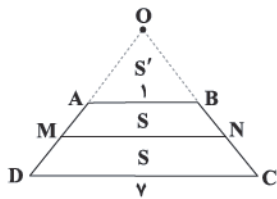
$$\overline{AG} = 2\overline{GC} \Rightarrow G - A = 2C - 2G \Rightarrow 3G = 2C + A$$

$$\Rightarrow 2G = (2x+2, y+3) \Rightarrow G = \left(\frac{2}{3}x + \frac{2}{3}, \frac{1}{3}y + 1\right)$$

$$FG = \sqrt{(x_G - x_F)^2 + (y_G - y_F)^2} = \sqrt{\left(\frac{2}{3}\right)^2 + (1)^2} = \sqrt{\frac{13}{9}}$$

$$\Rightarrow FG = \frac{\sqrt{13}}{3}$$

روش اول: اگر $MN = x$ باشد: ۱ ۲۵



$$AB \parallel DC \Rightarrow \triangle OAB \sim \triangle ODC \Rightarrow \frac{S_{OAB}}{S_{ODC}} = \left(\frac{AB}{DC}\right)^2$$

$$\Rightarrow \frac{S'}{S' + 2S} = \frac{1}{49} \Rightarrow 49S' = S' + 2S \Rightarrow 48S' = 2S \Rightarrow S = 24S'$$

$$AB \parallel MN \Rightarrow \triangle AOB \sim \triangle OMN \Rightarrow \frac{S_{AOB}}{S_{OMN}} = \left(\frac{AB}{MN}\right)^2$$

$$\Rightarrow \frac{S'}{S + S'} = \frac{1}{x^2} \Rightarrow \frac{S'}{24S' + S'} = \frac{1}{x^2} \Rightarrow x^2 = 25 \Rightarrow x = 5$$

روش دوم:

اگر پاره خط MN موازی قاعده‌های دوزنقه ABCD باشد و دوزنقه را به دو

دوزنقه هم‌مساحت تقسیم کند $MN = \sqrt{\frac{AB^2 + CD^2}{2}}$ است.

$$MN = \sqrt{\frac{(1)^2 + (7)^2}{2}} = \sqrt{25} = 5$$

$$\left(\bar{x} - \frac{2\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{x} + \frac{2\sigma}{\sqrt{n}}\right) = (19, 19/8)$$

۳ ۱۸

$$\Rightarrow \begin{cases} \bar{x} - \frac{2\sigma}{\sqrt{n}} = 19 \\ \bar{x} + \frac{2\sigma}{\sqrt{n}} = 19/8 \end{cases} \Rightarrow 2\bar{x} = 38/8 \Rightarrow \bar{x} = 19/4$$

$$\Rightarrow 19/4 + \frac{2\sigma}{\sqrt{n}} = 19/8 \Rightarrow \frac{2\sigma}{\sqrt{n}} = -\frac{4}{8}$$

$$\Rightarrow \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{2}{10} = \frac{1}{5} \Rightarrow \sqrt{n} = 5\sigma \Rightarrow n = 25\sigma^2$$

$$n - \sigma = 98 \Rightarrow 25\sigma^2 - \sigma - 98 = 0$$

$$\Rightarrow \sigma = 2 \Rightarrow n = 100$$

$$y = \frac{3}{2}x + 4 \Rightarrow \bar{y} = \frac{3}{2}\bar{x} + 4$$

۱ ۱۹

$$\sigma_y = \frac{3}{2}\sigma_x \Rightarrow CV_{\text{جدید}} = \frac{1}{2}CV_{\text{قدیم}}$$

$$\Rightarrow \frac{\sigma_y}{\bar{y}} = \frac{1}{2} \frac{\sigma_x}{\bar{x}} \Rightarrow \frac{\frac{3}{2}\sigma_x}{\frac{3}{2}\bar{x} + 4} = \frac{1}{2} \frac{\sigma_x}{\bar{x}}$$

$$\Rightarrow \frac{3}{\frac{3}{2}\bar{x} + 4} = \frac{1}{\bar{x}} \Rightarrow 2\bar{x} = \frac{3}{2}\bar{x} + 4 \Rightarrow \frac{1}{2}\bar{x} = 4 \Rightarrow \bar{x} = 8$$

$$3^{n+2} - 3^n = 448 \Rightarrow 3^n(8-1) = 448$$

۳ ۲۰

$$\Rightarrow 3^n = 64 \Rightarrow n = 6$$

تعداد افزایندهای ۴ عضوی آن برابر است با:

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= 20 + 45 = 65$$

۲ ۲۱

$$(\sim p \wedge q) \Leftrightarrow \sim p \equiv [(\sim p \wedge q) \Rightarrow \sim p] \wedge [\sim p \Rightarrow (\sim p \wedge q)]$$

$$\equiv T \wedge [\sim p \Rightarrow (\sim p \wedge q)]$$

$$\equiv \sim p \Rightarrow \sim p \wedge q$$

$$\equiv p \vee (\sim p \wedge q) \equiv p \vee q$$

گزاره $p \vee q$ با دو گزاره $\sim q \Rightarrow p$, $\sim p \Rightarrow q$ هم‌ارز است.

۴ ۲۲

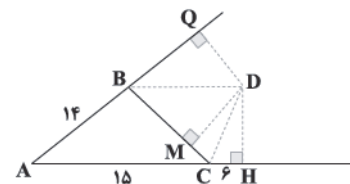
x	۱	۲	۳	۴	۵	۶
P(x)	x	۴x	۹x	۱۶x	۲۵x	۳۶x

$$P(3) = \frac{9 \times 3}{3 + 4 \times 3 + 9 \times 3 + 16 \times 3 + 25 \times 3 + 36 \times 3} = \frac{9}{91} \sim \frac{1}{10} \Rightarrow P = \left(\frac{1}{10}\right)^5$$

۲ ۲۳

نکته: هر نقطه روی نیمساز یک زاویه از ۲ ضلع آن زاویه به یک فاصله است و نیمساز داخلی هر زاویه با دو نیمساز خارجی مثلث هم‌مساحت.

از نقطه D به امتداد AB و ضلع BC عمودی رسم می‌کنیم.





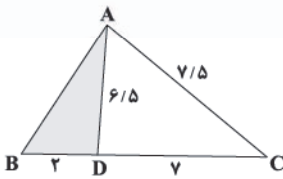
نقطه B را با برداری موازی d_p به طول ۴ انتقال می‌دهیم تا به نقطه B'' برسیم و بازتاب نقطه A نسبت به خط d_p را A' می‌نامیم و A' را به B'' وصل می‌کنیم تا d_p را در D قطع کند و روی خط d_p ، $DE=4$ را جدا می‌کنیم، مسیر ADEBC جواب مسئله است.

$$\Delta A'FB'' : A'B''^2 = A'F^2 + B''F^2 = (9-4)^2 + (4+4)^2 = 25 + 144 = 169 \Rightarrow A'B'' = 13 \Rightarrow AD + EB = 13$$

$$\text{محیط } \Delta = \underbrace{AC}_{15} + \underbrace{CB}_{13} + \underbrace{BE}_{4} + \underbrace{AD}_{4} + \underbrace{DE}_{4} = 32$$

مساحت مثلث ADC را به کمک قضیه هرون محاسبه می‌کنیم. ۳ ۲۹

$$2P = 6/5 + 7 + 7/5 = 21 \Rightarrow P = \frac{21}{2} = 10.5$$



$$S_{ADC} = \sqrt{P(P-AC)(P-AD)(P-DC)} = \sqrt{10.5 \times 3 \times 3/5 \times 4} = 21$$

$$\frac{S_{ABD}}{S_{ADC}} = \frac{BD}{DC} \Rightarrow \frac{S_{ABD}}{21} = \frac{2}{5} \Rightarrow S_{ABD} = 6$$

$$BA = \underbrace{(B^T \cdot B^{-1})}_B \cdot \underbrace{(A^{-1} \cdot A^T)}_A = B^T (B^{-1} A^{-1}) A^T$$

$$= B^T \cdot (AB)^{-1} \cdot A^T \quad \text{۱ ۳۰}$$

معکوس ماتریس AB را محاسبه می‌کنیم.

$$|AB| = -4 + 6 = 2 \Rightarrow (AB)^{-1} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ -3 & -1 \end{bmatrix}$$

$$BA = B^T \cdot (AB)^{-1} \cdot A^T = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ -3 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 14 & 12 \\ -10 & -8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 6 \\ -5 & -4 \end{bmatrix}$$

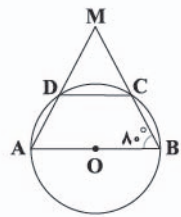
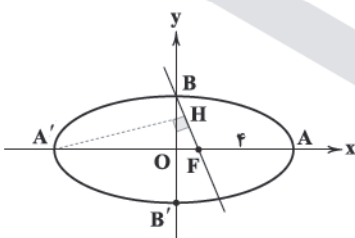
نکته: اگر A و B دو ماتریس مربعی باشند، جمع قطر اصلی ماتریس‌های AB و BA با هم برابرند و تنها گزینه (۱) چنین شرایطی را دارد. ۱ ۳۱

$$A^{-1} + B^{-1} = I \Rightarrow A(A^{-1} + B^{-1}) = AI \Rightarrow I + AB^{-1} = A$$

$$\Rightarrow (I + AB^{-1})B = AB \Rightarrow B + A(B^{-1}B) = AB$$

$$\Rightarrow B + A = AB \Rightarrow |B + A| = |AB| = 8 - 6 = 2$$

$$\Rightarrow |(B + A)^T| = 2^T = 8 \quad \text{۳ ۲۲}$$



$$\begin{cases} AB = 2CD \\ AB = 2R \end{cases} \Rightarrow CD = R \Rightarrow \widehat{CD} = 60^\circ$$

$$\widehat{B} = \frac{\widehat{ADC}}{2} \Rightarrow 80^\circ = \frac{\widehat{AD} + \widehat{DC}}{2} \Rightarrow 160^\circ = \widehat{AD} + 60^\circ$$

$$\Rightarrow \widehat{AD} = 100^\circ$$

$$\widehat{AD} + \widehat{DC} + \widehat{BC} = 180^\circ \Rightarrow 60^\circ + 100^\circ + \widehat{BC} = 180^\circ \Rightarrow \widehat{BC} = 20^\circ$$

$$\widehat{DCB} = \widehat{DC} + \widehat{BC} = 60^\circ + 20^\circ = 80^\circ$$

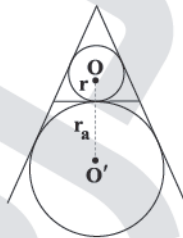
۳ ۲۷

نکته ۱: فاصله هر نقطه دلخواه درون مثلث متساوی‌الاضلاع به ضلع a از ۳ ضلع مثلث $\frac{\sqrt{3}}{2}a$ است.

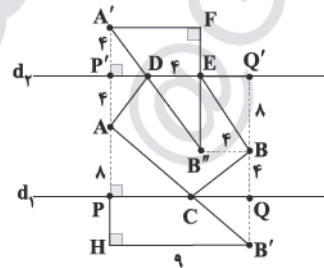
نکته ۲: در مثلث متساوی‌الاضلاع به ضلع a، دو دایره محاطی داخلی و محیطی هم‌مرکز هستند و دایره محاطی داخلی با تمام دایره‌های محاطی خارجی، مماس برون هستند و شعاع دایره محاطی داخلی $\frac{\sqrt{3}}{6}a$ و شعاع دایره محاطی خارجی $\frac{\sqrt{3}}{2}a$ است.

$$\frac{\sqrt{3}}{2}a = 6\sqrt{3} \Rightarrow a = 12$$

$$OO' = r + r_a = \frac{\sqrt{3}}{6}a + \frac{\sqrt{3}}{2}a = 2\sqrt{3} + 6\sqrt{3} = 8\sqrt{3}$$



۴ ۲۸



ابتدا بازتاب نقطه B نسبت به d_1 (یعنی B') به دست می‌آوریم و B' را به A وصل می‌کنیم تا d_1 را در C قطع کند، $B'H$ را موازی PQ رسم می‌کنیم. با توجه به طولی بودن بازتاب داریم:

$$AB' = AC + B'C$$

$$\Delta AHB' : AB'^2 = AH^2 + HB'^2 = (4+4)^2 + 9^2 = 144 + 81 = 225$$

$$AB' = 15 \Rightarrow AC + CB = 15$$



۳۵ نکته: برای محاسبه باقی مانده تقسیم بر ۹۹ کافی است از سمت راست دو رقم، دو رقم جدا کرده و با هم جمع کنیم و حاصل را بر ۹۹ تقسیم کنیم.

$$\begin{aligned} 342ab7 \equiv 7 + 2a + 34 \equiv 37 \pmod{99} \\ \Rightarrow 10b + 7 + 20 + a + 34 \equiv 37 \pmod{99} \Rightarrow 10b + a + 61 \equiv 37 \pmod{99} \\ \Rightarrow 10b + a \equiv -24 \pmod{99} \Rightarrow 10b + a \equiv -24 + 99 \pmod{99} \Rightarrow 10b + a \equiv 75 \pmod{99} \\ \Rightarrow \overline{ba} = 75 \Rightarrow \begin{cases} b = 7 \\ a = 5 \end{cases} \Rightarrow a + b = 12 \end{aligned}$$

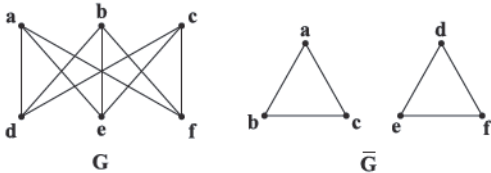
۳۶ نکته: شرط این که معادله $ax + by = c$ در اعداد صحیح جواب داشته باشد آن است که $(a, b) | c$ بنابراین: $(4a + 3, 3a - 2) | 5n + 2$
 $(4a + 3, 3a - 2) = d \Rightarrow \begin{cases} d | 4a + 3 \\ d | 3a - 2 \end{cases}$

تفاضل را می شمارد $\rightarrow d | 3(4a + 3) - 4(3a - 2) \Rightarrow d | 17 \Rightarrow d = 1$ یا 17
 از طرفی می دانیم که ۱ هر عددی را عاد می کند. بنابراین: $17 | 5n + 2$
 $17 | 5n + 2 \Rightarrow 5n \equiv -2 \pmod{17} \Rightarrow 5n \equiv 15 \pmod{17} \Rightarrow 5n \equiv -2 + 17 \pmod{17} \Rightarrow 5n \equiv 15 \pmod{17}$

$\xrightarrow{\div 5} n \equiv 3 \pmod{17} \Rightarrow n = 17k + 3$
 $(5, 17) = 1$

$\xrightarrow{k=1} n = 20$ کم ترین مقدار دو رقمی n

۳۷ نکته: تنها گراف ۳ منتظم مرتبه ۶ که گراف مکمل آن ناهمبند است به صورت زیر است.



تنها مجموعه های ۲ عضوی از رئوس گراف G که یک عضو آن a یا b یا c و عضو دیگر آن d یا e یا f باشند احاطه گر مینیمال ۲ عضوی است ($3 \times 3 = 9$) و دو مجموعه $\{a, b, c\}$, $\{d, e, f\}$ ، مجموعه های احاطه گر مینیمال ۳ عضوی هستند بنابراین ۱۱ مجموعه احاطه گر مینیمال دارد.

۱ بررسی جملات:

(الف) عدد احاطه گری گراف برابر ۲ است، زیرا مجموعه $\{e, f\}$ یک مجموعه احاطه گر مینیمم است که ۲ عضو دارد. (نادرست)

(ب) مجموعه $\{a, b, c, d\}$ ، مجموعه احاطه گر مینیمم نیست. زیرا مجموعه احاطه گر مینیمم دو عضوی وجود دارد. (نادرست)

(پ) نادرست است.

بنابراین هر سه جمله نادرست است.

۳۹ نکته: تعداد کل راه های پاداش دهی از حل معادله $x_1 \geq 0$ و $x_1 + x_2 + x_3 = 5$ به دست می آید پس $n(S) = \binom{3+5-1}{3-1} = 21$. اگر

A پیشامد این باشد که دانش آموز A حداقل ۲ سکه دریافت کند، آن گاه تعداد راه های ممکن از حل معادله $x_1 \geq 2$ و $x_1 + x_2 + x_3 = 5$ حاصل می شود. بنابراین:

$\xrightarrow{\text{توزیع بین ۳ نفر}} n(A) = \binom{3+3-1}{3-1} = 10$

$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{10}{21}$

$BB' = 4\sqrt{10} \Rightarrow 2b = 4\sqrt{10} \Rightarrow b = 2\sqrt{10}$
 $AF = 4 \Rightarrow a - c = 4 \Rightarrow a = c + 4$
 $a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow (c+4)^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow 16 + 8c + c^2 = 40 + c^2$
 $\Rightarrow 8c = 24 \Rightarrow c = 3, a = 7$
 در این صورت $A'(-7, 0), F(3, 0), B(0, 2\sqrt{10})$ است.

$m_{BF} = \frac{2\sqrt{10} - 0}{0 - 3} = -\frac{2}{3}\sqrt{10}$
 BF معادله خط: $y - 2\sqrt{10} = -\frac{2}{3}\sqrt{10}(x - 0)$
 $\Rightarrow 3y + 2\sqrt{10}x - 6\sqrt{10} = 0$

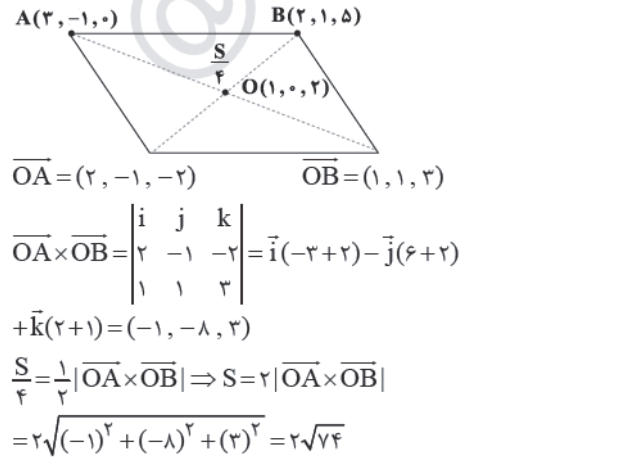
$A'H = \frac{|14\sqrt{10} + 6\sqrt{10}|}{\sqrt{9+40}} = \frac{20\sqrt{10}}{7}$
 $\Delta AFH: AF^2 = A'H^2 + FH^2 \Rightarrow 10 = \frac{4000}{49} + FH^2$
 $\Rightarrow FH^2 = \frac{900}{49} \Rightarrow FH = \frac{30}{7}$
 $BF = a = 7$
 $BH = BF - FH = 7 - \frac{30}{7} = \frac{19}{7}$

۳۳ نکته: مختصات کانون سهمی به صورت $F(0, a)$ است و فاصله هر نقطه روی سهمی از کانون برابر فاصله آن نقطه تا خط هادی است.

$BF = 10 \Rightarrow \sqrt{(6-0)^2 + (9-a)^2} = 10$
 $\Rightarrow (9-a)^2 = 64 \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ a = 17 \end{cases}$
 بنابراین $F(0, 1)$ است.

$m_{BF} = \frac{9-1}{6-0} = \frac{8}{6} = \frac{4}{3}$
 $\begin{cases} y - 1 = \frac{4}{3}(x - 0) \Rightarrow y = \frac{4}{3}x + 1 \Rightarrow x^2 = \frac{16}{3}x + 4 \\ \text{معادله سهمی: } x^2 = 4y \end{cases}$
 $\Rightarrow 3x^2 - 16x - 12 = 0 \Rightarrow (x-6)(3x+2) = 0$
 $\Rightarrow \begin{cases} x = 6 \text{ قی } \\ x = -\frac{2}{3} \Rightarrow y = \frac{4}{3}(-\frac{2}{3}) + 1 = \frac{1}{9} \end{cases}$
 پس: $A(-\frac{2}{3}, \frac{1}{9}) \Rightarrow x_A + y_A = -\frac{2}{3} + \frac{1}{9} = -\frac{5}{9}$

۳۴ نکته: قطرهای متوازی الاضلاع آن را به چهار مثلث هم مساحت تقسیم می کند که مساحت هر مثلث $\frac{1}{4}$ مساحت متوازی الاضلاع است.





شیب خط مماس بر نمودار مکان - زمان نشان دهنده سرعت متحرک است. چون شیب مماس در لحظات $t=0$ و $t=10$ s، افقی است، پس $v=0$ است، پس شتاب متوسط هم $a_{av} = \frac{\Delta v}{\Delta t} = 0$ است.

می‌دانیم که ذره آلفا همان هسته هلیوم دو بار مثبت $({}^4_2\text{He}^{2+})$ است، بنابراین با موازنه اعداد جرمی و اتمی در دو طرف واکنش داریم:

$$90 = 78 + 2m \Rightarrow 2m = 90 - 78 = 12 \Rightarrow m = \frac{12}{2} = 6 \Rightarrow m = 6$$

$$240 = A + 4m \xrightarrow{m=6} A = 240 - 24 \Rightarrow A = 216$$

$$N = A - Z \xrightarrow{A=216, Z=78} N = 216 - 78 = 138 \quad \text{بنابراین:}$$

ابتدا انرژی حاصل از تبدیل ۶ گرم ماده به انرژی را محاسبه می‌کنیم.

$$E_{\text{ورودی}} = mc^2 = 6 \times 10^{-3} \times (3 \times 10^8)^2$$

$$\Rightarrow E_{\text{ورودی}} = 6 \times 10^{-3} \times 9 \times 10^{16} = 5/4 \times 10^{14} \text{ J}$$

با توجه به تعریف بازده (Ra) می‌توان نوشت:

$$Ra = \frac{E_{\text{خروجی}}}{E_{\text{ورودی}}} = \frac{nPt}{E_{\text{ورودی}}} \quad Ra = 40\%, P = 200 \text{ W}$$

$$t = 30 \text{ min}, E_{\text{ورودی}} = 5/4 \times 10^{14} \text{ J}$$

$$\frac{40}{100} = \frac{n \times 200 \times 30 \times 60}{5/4 \times 10^{14}} \Rightarrow n = 6 \times 10^8$$

پرانرژی‌ترین فوتونی که می‌تواند گسیل کند، حالتی است که

الکترون به لایه $n'=1$ برود، بنابراین:

$$\Delta E = -E_R \left(\frac{1}{n_1} - \frac{1}{n_2} \right) = -E_R \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{5} \right) = -\frac{24}{25} E_R$$

برای محاسبه آهنگ تغییر فشار، میزان تغییر فشار را در یک

مدت معین به دست می‌آوریم. برای راحتی کار، مدت زمان را یک ثانیه در نظر می‌گیریم. بنابراین جسم در این مدت، 6 m پایین می‌رود.

از طرفی برای محاسبه تغییرات فشار، باید Δh را داشته باشیم، بنابراین به کمک روابط مثلثاتی، Δh را محاسبه می‌کنیم.

$$\Delta h = L \cos \alpha = 6 \times \cos 60^\circ = 3 \text{ m}$$

در ادامه تغییرات فشار را محاسبه می‌کنیم:

$$\Delta P = \rho g \Delta h = 5000 \times 10 \times 3 = 150000 \text{ Pa}$$

بنابراین آهنگ تغییرات فشار برابر است با:

$$\text{آهنگ تغییر فشار} = \frac{\Delta P}{\Delta t} = \frac{150000}{1} = 150000 \frac{\text{Pa}}{\text{s}}$$

ابتدا اختلاف فشار بین دو نقطه را بر حسب سانتی‌متر جیوه

$$\Delta P = P_2 - P_1 = 220 - 60 = 160 \text{ cmHg} \quad \text{محاسبه می‌کنیم:}$$

در ادامه این فشار را به پاسکال تبدیل می‌کنیم:

$$\Delta P = \rho g \Delta h = \rho_{\text{جیوه}} \times 10 \times \frac{160}{100} = 16 \rho_{\text{جیوه}} \quad (*)$$

در آخر به کمک رابطه اختلاف فشار، نسبت چگالی‌ها را محاسبه می‌کنیم:

$$\Delta P = \rho_{\text{مایع}} g \Delta h_{\text{مایع}}$$

$$\xrightarrow{(*)} 16 \rho_{\text{جیوه}} = \rho_{\text{مایع}} \times 10 \times \left(\frac{110 - 30}{100} \right) \Rightarrow 16 \rho_{\text{جیوه}} = 8 \rho_{\text{مایع}}$$

$$\Rightarrow \frac{\rho_{\text{مایع}}}{\rho_{\text{جیوه}}} = \frac{16}{8} = 2$$

$$|S| = \text{تعداد کل گراف‌ها} = {}^5_2 = 10$$

تعداد گراف‌هایی که در آن‌ها رأس a تنها باشد $|A| =$

$$= {}^4_2 = 6 = |B| = |C|$$

تعداد گراف‌هایی که در آن‌ها رأس‌های a, b تنها باشند $|A \cap B| =$

$$= {}^3_2 = 3 = |A \cap C| = |B \cap C|$$

تعداد گراف‌هایی که در آن‌ها رأس‌های a, b, c تنها باشند $|A \cap B \cap C| =$

$$|A \cap B \cap C| = |S| - |A| - |B| - |C| + |A \cap B| + |B \cap C| + |A \cap C| - |A \cap B \cap C|$$

$$= 10 - 3 \times 6 + 3 \times 3 - 3 = 154$$

فیزیک

اگر طول کل مسیر را x در نظر بگیریم، می‌توان نوشت:

$$v = \frac{\Delta x}{\Delta t} \Rightarrow \Delta t = \frac{\Delta x}{v} \Rightarrow \begin{cases} t_1 = \frac{x}{2v} \Rightarrow t_1 = \frac{x}{2v} \\ t_2 = \frac{x}{v} \Rightarrow t_2 = \frac{2x}{v} = \frac{6x}{3v} \end{cases}$$

بنابراین کل مدت زمان حرکت برابر است با:

$$\Delta t_{\text{کل}} = t_1 + t_2 \Rightarrow \frac{x}{2v} + \frac{6x}{3v} = \frac{5x}{2v}$$

سرعت متوسط متحرک در کل مسیر حرکتش برابر است با:

$$v_{\text{av}} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x}{\frac{5x}{2v}} \Rightarrow v_{\text{av}} = \frac{2}{5} v$$

با توجه به معادله سرعت - جابه‌جایی در حرکت با شتاب ثابت داریم:

$$v_1^2 - v_0^2 = 2a\Delta x_1$$

$$\Rightarrow v^2 - 0^2 = 2 \times a \times 12 \Rightarrow a = \frac{v^2}{24} = 2 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

دوباره همین رابطه را برای سرعت v تا $9 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ می‌نویسیم، بنابراین:

$$v_2^2 - v_1^2 = 2a\Delta x_2 \Rightarrow 9^2 - v^2 = 2 \times 2 \times \Delta x_2 \Rightarrow 81 - 49 = 4\Delta x_2$$

$$\Rightarrow 32 = 4\Delta x_2 \Rightarrow \Delta x_2 = \frac{32}{4} = 8 \text{ m}$$

سرعت متوسط متحرک را به کمک رابطه $v_{\text{av}} = \frac{\Delta x}{\Delta t}$ به دست می‌آوریم:

$$v_{\text{av}} = \frac{\Delta x}{\Delta t} \Rightarrow v_{\text{av}} = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1}$$

$$\xrightarrow{x_1=10 \text{ m}, x_2=15 \text{ m}, t_1=0, t_2=10 \text{ s}} v_{\text{av}} = \frac{15 - 10}{10 - 0} = 0.5 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

متحرک از مکان $x=10 \text{ m}$ شروع به حرکت کرده و تا مکان $x=20 \text{ m}$ بالا رفته، یعنی 10 m را طی کرده، سپس از مکان $x=20 \text{ m}$ تا مکان $x=5 \text{ m}$ پایین آمده و 15 m طی کرده و از مکان $x=5 \text{ m}$ به مکان $x=15 \text{ m}$ رفته، یعنی 10 m بالا رفته. پس کل مسافت طی شده برابر است با:

$$l = 10 + 15 + 10 = 35 \text{ m}$$

$$s_{\text{av}} = \frac{l}{\Delta t} = \frac{35}{10} = 3.5 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

و تندی متوسط برابر است با:



۵۴ ۱ اگر بار الکتریکی q_1 خنثی شود، فقط بار الکتریکی q_2 باقی می ماند و در نتیجه میدان الکتریکی حاصل از بار q_2 در نقطه A برابر $4E$ می باشد و میدان الکتریکی حاصل از بار q_1 در نقطه A برابر است با:

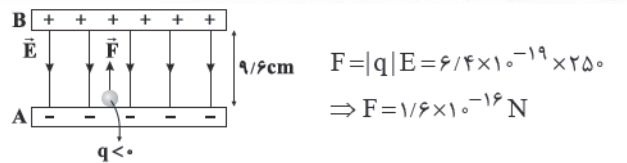
$$\vec{E}_1 + \vec{E}_2 = \vec{E} \Rightarrow \vec{E}_1 + (-4\vec{E}) = \vec{E} \Rightarrow \vec{E}_1 = 5\vec{E}$$

به کمک رابطه $E = k \frac{|q|}{r^2}$ و نوشتن یک تناسب ساده، نسبت $\frac{x}{y}$ را به دست می آوریم:

$$E = k \frac{|q|}{r^2} \Rightarrow \frac{E_2}{E_1} = \frac{|q_2|}{|q_1|} \times \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2 \Rightarrow \frac{4E}{5E} = \frac{4}{12} \times \left(\frac{x+y}{y}\right)^2$$

$$\Rightarrow \frac{4}{5} = \frac{1}{3} \times \left(\frac{x+y}{y}\right)^2 \Rightarrow \frac{12}{5} = \left(\frac{x+y}{y}\right)^2 \xrightarrow{\text{از طرفین جذر می گیریم}}$$

$$\frac{\sqrt{12}}{\sqrt{5}} = \frac{x+y}{y} \Rightarrow \sqrt{12}y = \sqrt{5}x + \sqrt{5}y \Rightarrow \frac{x}{y} = \frac{-\sqrt{5} + \sqrt{12}}{\sqrt{5}}$$



با توجه به قانون دوم نیوتون داریم:

$$F_{\text{net}} = ma \Rightarrow 1/6 \times 10^{-16} = 4 \times 10^{-20} \times a \Rightarrow a = \frac{1/6 \times 10^{-16}}{4 \times 10^{-20}}$$

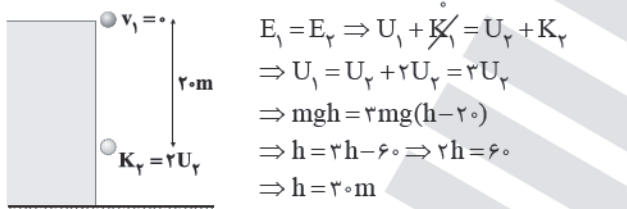
$$\Rightarrow a = 4000 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

چون نیروی خالص، ثابت است، بنابراین شتاب حرکت ثابت است، در نتیجه داریم:

$$\Delta y = \frac{1}{2}at^2 + v_0t = 9/6 \times 10^{-2} = \frac{1}{2} \times 4000 \times t^2 + 0$$

$$\Rightarrow t^2 = \frac{9/6 \times 10^{-2}}{2000} = 48 \times 10^{-6} \Rightarrow t = 4\sqrt{3} \times 10^{-3} \text{ s} = 4\sqrt{3} \text{ ms}$$

۵۶ ۱ با استفاده از قانون پایستگی انرژی مکانیکی داریم:



۵۷ ۱ با توجه به قضیه کار و انرژی درونی داریم:



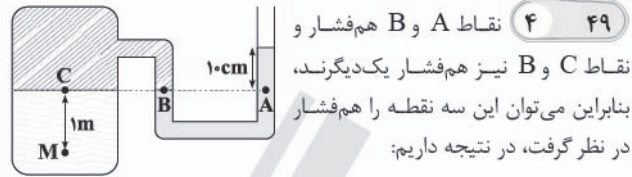
$$E_2 - E_1 = W_{fD} \xrightarrow{W_{fD} = -0/3 E_1} E_2 - E_1 = -0/3 E_1$$

$$\Rightarrow E_2 = 0/7 E_1 \Rightarrow \cancel{U_2} + K_2 = 0/7 (U_1 + \cancel{K_1})$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}mv_2^2 = 0/7 mgh$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} \times v_2^2 = 0/7 \times 10 \times (L - 0/8L)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}v_2^2 = 1/4L \Rightarrow v_2^2 = \frac{2L}{10} \Rightarrow v_2 = \sqrt{\frac{2L}{10}} \frac{\text{m}}{\text{s}}$$



$$P_A = P_B = P_C$$

بنابراین:

$$P_C = P_A = \rho_1 gh_1 + P_0 = 2000 \times 10 \times \frac{1}{100} + 10^5 = 102000 \text{ Pa}$$

به کمک فشار در نقطه C، فشار نقطه M را محاسبه می کنیم:

$$P_M = \rho_2 gh_2 + P_C = 3000 \times 10 \times 1 + 102000 = 132000 \text{ Pa} = 132 \text{ kPa}$$

۵۰ ۲ مقدار گرمای مورد نیاز برای تبخیر سطحی آب برابر با گرمایی است که آب باید از دست بدهد تا منجمد شود.

m: جرم اولیه آب
 m' : جرم آب تبخیر شده
 $Q_V = Q_F \Rightarrow m' L_V = (m - m') L_F$
 $\Rightarrow m' \times 560 = (m - m') \times 80 \Rightarrow m - m' = 7m' \Rightarrow m = 8m'$
 $\Rightarrow m' = \frac{1}{8}m$

بنابراین درصد جرم آبی که در اثر تبخیر سطحی از ظرف خارج شده است، برابر است با:

$$\frac{1}{8} \times 100 = 12.5\%$$

۵۱ ۴ با توجه به قانون گاز کامل داریم:

$$PV = nRT$$

$$\Rightarrow \frac{P_2 V_2}{P_1 V_1} = \frac{n_2}{n_1} \times \frac{T_2}{T_1} \xrightarrow{\text{تایید: } P} \frac{4}{3} \frac{\pi r_2^3}{\pi r_1^3} = \frac{n_2}{n_1} \times 1/44$$

$$\Rightarrow (1/2)^3 = \frac{n_2}{n_1} \times 1/44$$

$$\Rightarrow \frac{n_2}{n_1} = 1/2 \xrightarrow{n = \frac{m}{M}} \frac{m_2}{m_1} = 1/2 \Rightarrow \frac{m_2}{30} = 1/2 \Rightarrow m_2 = 36 \text{ g}$$

$$\Delta m = 36 - 30 = 6 \text{ g}$$

بنابراین:

۵۲ ۱ در نمودار P-V، مساحت محصور بین نمودار و محور افقی برابر

کار انجام شده توسط گاز است، بنابراین مساحت مستطیل را محاسبه و قسمت

هاشورخوردہ را کم می کنیم: $|W| = (4 \times 10^5 \times 3/5 \times 10^{-3}) - 600 = 800 \text{ J}$

همان طور که می دانیم در فرایند هم دما، $\Delta U = 0$ است، بنابراین $Q = -W$ می باشد. از طرفی به علت تراکمی بودن فرایند، $W > 0$ و در نتیجه $Q < 0$ است، پس گاز ۸۰۰ J گرما از دست داده است.

۵۳ ۴ طبق رابطه ظرفیت خازن $(C = \frac{Q}{V})$ ، بدیهی است که بار

ذخیره شده در خازن و اختلاف پتانسیل دو سر آن رابطه مستقیمی با هم دارند. وقتی اختلاف پتانسیل الکتریکی دو سر خازنی، ۶ برابر شده است، بنابر نکته

گفته شده، بار خازن نیز باید ۶ برابر شده باشد، بنابراین:

$$Q_2 = 6Q_1 \Rightarrow \Delta Q = Q_2 - Q_1 = 6Q_1 - Q_1 = 5Q_1$$

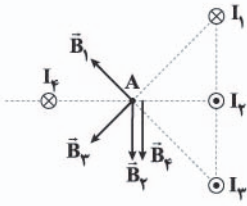
می دانیم تغییرات بار ۸۰ میکروکولن بوده است، بنابراین:

$$\Delta Q = 5Q_1 \xrightarrow{\Delta Q = 80 \mu\text{C}} 5Q_1 = 80 \Rightarrow Q_1 = 16 \mu\text{C}$$

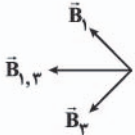
$$\xrightarrow{Q_2 = 6Q_1} Q_2 = 6 \times 16 = 96 \mu\text{C}$$



۶۱ | با استفاده از قاعده دست راست، جهت میدان مغناطیسی حاصل از سیم‌ها را رسم می‌کنیم:



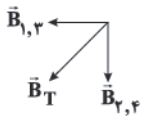
بردارهای \vec{B}_1 و \vec{B}_2 بر هم عمودند، پس برابند آن‌ها به شکل زیر است:



بردارهای \vec{B}_1 و \vec{B}_2 هم‌راستا و هم‌جهت هستند، پس برابند آن‌ها به شکل زیر است:



در نهایت برابند و جهت میدان مغناطیسی به شکل زیر است:



پس عقربه مغناطیسی در نقطه A هم جهت با بردار \vec{B}_T قرار می‌گیرد.

۶۲ | جریان عبوری از مقاومت در لحظه $t = \frac{1}{5} s$ برابر است با:

$$I = 0.8 \sin(\Delta\pi \times \frac{1}{5}) = 0.8 \sin(\frac{\pi}{5}) = 0.8 \times \frac{\sqrt{2}}{2} = 0.4\sqrt{2} A$$

بنابراین توان مصرفی در مقاومت در این لحظه برابر است با:

$$P = RI^2 = \sqrt{2} \times (0.4\sqrt{2})^2 = \sqrt{2} \times \frac{16}{100} \times 2 = 0.32\sqrt{2} W$$

اختلاف پتانسیل الکتریکی دو سر این مقاومت در این لحظه برابر است با:

$$V = IR = 0.4\sqrt{2} \times \sqrt{2} = 0.8 V$$

۶۳ | با توجه به رابطه انرژی ذخیره شده در القاگر داریم:

$$U = \frac{1}{2} LI^2 \Rightarrow 400 \times 10^{-3} = \frac{1}{2} \times 200 \times 10^{-3} \times I^2 \Rightarrow I = 2 A$$

با توجه به رابطه $I = \frac{\epsilon}{R_{eq} + r}$ داریم:

$$2 = \frac{\epsilon}{9 + 0.5 + 0.5} \Rightarrow \epsilon = 20 V$$

۶۴ | ابتدا رابطه بین طول عقربه ثانیه‌شمار و ساعت‌شمار را

به دست می‌آوریم:

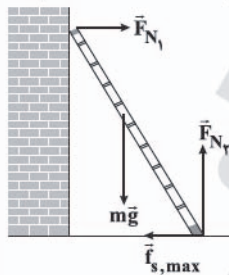
$$\begin{cases} L_{ساعت} = \frac{3}{5} L_{دقیقه} \\ L_{دقیقه} = \frac{4}{5} L_{ثانیه} \end{cases} \Rightarrow L_{ساعت} = \frac{3}{5} \times \frac{4}{5} L_{ثانیه} = \frac{12}{25} L_{ثانیه}$$

سپس با استفاده از رابطه $v = L \times \frac{2\pi}{T}$ نسبت تند‌ی‌ها را محاسبه می‌کنیم:

$$\frac{v_{ساعت}}{v_{ثانیه}} = \frac{L_{ساعت}}{L_{ثانیه}} \times \frac{T_{ثانیه}}{T_{ساعت}} = \frac{12}{25} \times \frac{60}{3600 \times 12} = \frac{1}{1500}$$

۵۸ | اگر نیرویی که دیوار قائم به نردبان وارد می‌کند را F_{N1} بنامیم، می‌توان نوشت:

$$F_{N1} = f_{s,max} = \mu_s F_{N2} = \mu_s mg$$



اگر نیرویی که سطح افقی به نردبان وارد می‌کند را R بنامیم، خواهیم داشت:

$$R = \sqrt{F_{N2}^2 + (\mu_s F_{N2})^2} \xrightarrow{F_{N2} = mg} R = mg \sqrt{1 + \mu_s^2}$$

در نهایت می‌توان نوشت:

$$\frac{F_{N1}}{R} = \frac{\mu_s mg}{mg \sqrt{1 + \mu_s^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

۵۹ | قانون دوم نیوتون را برای هر دو گلوله به صورت جداگانه می‌نویسیم:

$$m_1 g - f_D = m_1 a_1 \xrightarrow{m_1 = 2kg} 2 \times 10 - 10 = 2a_1 \Rightarrow 10 = 2a_1 \Rightarrow a_1 = 5 \frac{m}{s^2}$$

$$m_2 g - f_D = m_2 a_2 \xrightarrow{m_2 = 4kg} 4 \times 10 - 10 = 4a_2 \Rightarrow 30 = 4a_2 \Rightarrow a_2 = 7.5 \frac{m}{s^2}$$

بیشترین فاصله بین دو گلوله زمانی رخ می‌دهد که گلوله دوم به زمین برسد، در نتیجه می‌توان نوشت:

$$h = \frac{1}{2} a_2 t^2 \xrightarrow{h = 15m} 15 = \frac{1}{2} \times 7.5 \times t^2 \Rightarrow 30 = 7.5 t^2$$

$$\Rightarrow t^2 = \frac{30}{7.5} = 4 \Rightarrow t = \sqrt{4} = 2s$$

در این لحظه داریم:

$$|\Delta y_1| = \frac{1}{2} a_1 t^2 \Rightarrow |\Delta y_1| = \frac{1}{2} \times 5 \times 2^2 \Rightarrow |\Delta y_1| = 10m$$

بنابراین در این لحظه فاصله بین دو گلوله برابر است با:

$$d = h - |\Delta y_1| = 15 - 10 = 5m$$

۶۰ | ابتدا نسبت جرم سیاره‌ها را به دست می‌آوریم:

$$M = \rho V = \rho \left(\frac{4}{3} \pi R^3 \right) \Rightarrow \frac{M_B}{M_A} = \frac{\rho_B}{\rho_A} \times \left(\frac{R_B}{R_A} \right)^3 \Rightarrow \frac{M_B}{M_A} = (1/5) \times \left(\frac{2R}{R} \right)^3 = 12$$

حال نسبت اندازه نیروهای گرانشی را محاسبه می‌کنیم:

$$F = \frac{GmM}{r^2} \Rightarrow \frac{F_B}{F_A} = \frac{m_B}{m_A} \times \frac{M_B}{M_A} \times \left(\frac{r_A}{r_B} \right)^2 \Rightarrow \frac{F_B}{F_A} = 2 \times 12 \times \left(\frac{1}{2} \right)^2 = 2 \times 12 \times \frac{1}{4} = 6 \Rightarrow \frac{F_B}{F_A} = 6$$



۶۵ ۲ شدت صوت ۴ برابر شده است، بنابراین:

$$\frac{I_2}{I_1} = 4 = 2^2$$

تراز شدت صوت ۱/۲ برابر شده است، بنابراین:

$$\Delta\beta = \beta_2 - \beta_1 \xrightarrow{\beta_2 = 1/2\beta_1} \Delta\beta = 1/2\beta_1 - \beta_1 = -1/2\beta_1$$

با توجه به رابطه تراز شدت صوت داریم:

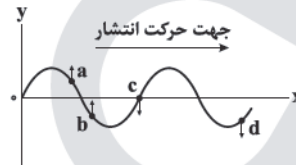
$$\Delta\beta = \log \frac{I_2}{I_1} \xrightarrow{\Delta\beta = -1/2\beta_1, \frac{I_2}{I_1} = 2^2} -1/2\beta_1 = \log 2^2$$

$$\Rightarrow -1/2\beta_1 = 2 \log 2 \xrightarrow{\log 2 = 0.3} -1/2\beta_1 = 2 \times 0.3 \Rightarrow \beta_1 = \frac{0.6}{0.5} = 1.2 \text{ B}$$

به کمک رابطه تراز شدت صوت داریم:

$$\beta_1 = \log \frac{I_1}{I_0} \xrightarrow{\beta_1 = 1.2 \text{ B}} 1.2 = \log \frac{I_1}{I_0} \Rightarrow \frac{I_1}{I_0} = 10^{1.2} = 15.85$$

۶۶ ۳ ابتدا با توجه به جهت انتشار موج و با توجه به قبل هر نقطه، جهت نوسان هر نقطه را تعیین می‌کنیم.



بررسی عبارتها:

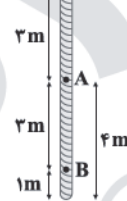
(الف) حرکت ذره a کندشونده است، زیرا در حال دور شدن از وضع تعادل (محور x) است. (✓)

(ب) ذره c در نقطه تعادل قرار دارد و دارای بیشترین انرژی جنبشی است. (✓)

(ج) ذره b در حال نزدیک شدن به نقطه تعادل است، پس شتاب آن در جهت حرکت آن، یعنی به سمت بالا است و در نتیجه در جهت محور yها است. (✗)

(د) ذره d در حال دور شدن از نقطه تعادل است، پس انرژی جنبشی آن در حال کاهش است. (✓)

۶۷ ۲ مطابق شکل زیر، در نقطه B،



جرمی به اندازه ۱m از طناب آویزان نگه داشته شده است، ولی در نقطه A جرمی به اندازه ۴m از طناب آویزان نگه داشته شده است، بنابراین اندازه نیروی کشش در نقطه A، برابر اندازه نیروی کشش در نقطه B است ($F_A = 4F_B$).

چون جرم واحد طول (چگالی خطی جرم) در کل طناب، ثابت است. طبق

رابطه $v = \sqrt{\frac{F}{\mu}}$ ، رابطه بین تندی در دو نقطه را به دست می‌آوریم:

$$\frac{v_A}{v_B} = \sqrt{\frac{F_A}{F_B}} \xrightarrow{F_A = 4F_B} \frac{v_A}{v_B} = \sqrt{\frac{4F_B}{F_B}} = \sqrt{4} = 2$$

۶۸ ۲ با توجه به این که $f_1 = f_{n+1} - f_n$ است، ابتدا بسامد هماهنگ

اول را محاسبه می‌کنیم:

$$f_1 = 625 - 550 = 75 \text{ Hz}$$

از طرفی بسامد هماهنگ n ام برابر با $f_n = n f_1$ است و هنگامی که ۳-گره در تار ایجاد می‌شود، هماهنگ دوم در تار ایجاد می‌شود، بنابراین:

$$f_2 = 2f_1 = 2 \times 75 = 150 \text{ Hz}$$

۶۹ ۱ ابتدا تندی نور در آب را به دست می‌آوریم:

$$n = \frac{c}{v} \Rightarrow n_{\text{آب}} = \frac{c}{v_{\text{آب}}} \Rightarrow \frac{4}{3} = \frac{3 \times 10^8}{v_{\text{آب}}}$$

$$\Rightarrow v_{\text{آب}} = \frac{9}{4} \times 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

حال بسامد نور را در آب محاسبه می‌کنیم.

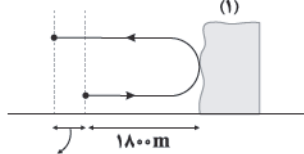
$$\lambda_{\text{آب}} = \frac{v_{\text{آب}}}{f_{\text{آب}}} \Rightarrow f_{\text{آب}} = \frac{\frac{9}{4} \times 10^8}{\frac{1}{4} \times 10^{-7}} = \frac{9}{1} \times 10^{15} = 9 \times 10^{15} \text{ Hz}$$

$$\Rightarrow f_{\text{آب}} = 9 \text{ THz}$$

با توجه به این که بسامد نور از ویژگی‌های چشمه نور است، بنابراین بسامد این نور در آب و شیشه یکسان است.

۷۰ ۲ در مدتی که اتومبیل بوق را به صدا در می‌آورد تا زمانی که صدای پژواک از صخره (۱) را بشنود، صوت مسیری مطابق شکل زیر را طی می‌کند. اگر این

زمان Δt_1 باشد، داریم:

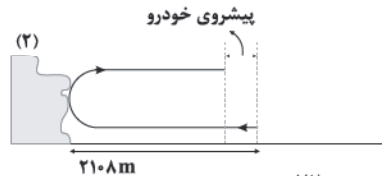


پیشروی خودرو

پیشروی خودرو + مسافت موج صوتی

$$\Rightarrow l = 3600 + \frac{v}{f} \times \Delta t_1 = 3600 + 20t_1$$

صدای پژواک از صخره (۲) از لحظه بوق زدن تا لحظه رسیدن به اتومبیل مسیر زیر را طی می‌کند.



پیشروی خودرو

$$2108 \text{ m}$$

از طرفی با توجه به رابطه مسافت ($l = v\Delta t$) داریم:

$$3600 + 20t_1 = 320t_1 \Rightarrow 300t_1 = 3600 \Rightarrow t_1 = 12 \text{ s}$$

$$4216 - 20t_2 = 320t_2 \Rightarrow 340t_2 = 4216 \Rightarrow t_2 = 12.4 \text{ s}$$

$$t_2 - t_1 = 12.4 - 12 = 0.4 \text{ s}$$

بنابراین:

۷۱ ۴ با توجه به رابطه شتاب بیشینه نوسانگر داریم:

$$a_{\text{max}} = A\omega^2 \xrightarrow{v_{\text{max}} = A\omega} a_{\text{max}} = \frac{v_{\text{max}}^2}{A}$$

$$\frac{v_{\text{max}} = \sqrt{0.4} \frac{\text{m}}{\text{s}}}{A = 1 \text{ cm}} \rightarrow a_{\text{max}} = \frac{0.4}{1 \times 10^{-2}} = 40 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

۷۲ ۳ از طرفی می‌دانیم ضخامت نوارها (W) متناسب با طول موج

نور خروجی است:

$$\frac{W_{\text{آب}}}{W_{\text{هوآ}}} = \frac{\lambda_{\text{آب}}}{\lambda_{\text{هوآ}}} \xrightarrow{\lambda = \frac{v}{f}} \frac{\lambda_{\text{آب}}}{\lambda_{\text{هوآ}}} = \frac{v_{\text{آب}}}{v_{\text{هوآ}}} \times \frac{f_{\text{هوآ}}}{f_{\text{آب}}}$$

$$\frac{v_{\text{آب}}}{v_{\text{هوآ}}} = \frac{n_{\text{هوآ}}}{n_{\text{آب}}} \rightarrow \frac{\lambda_{\text{آب}}}{\lambda_{\text{هوآ}}} = \frac{n_{\text{هوآ}}}{n_{\text{آب}}} \times \frac{f_{\text{هوآ}}}{f_{\text{آب}}} = \frac{1}{\frac{4}{3}} \times \frac{1}{0.6}$$

$$\Rightarrow \frac{\lambda_{\text{آب}}}{\lambda_{\text{هوآ}}} = \frac{3}{4} \times \frac{1}{0.6} = \frac{5}{4}$$

بنابراین ضخامت نوارها ۲۵ درصد افزایش می‌یابد.



۷۷ ۲

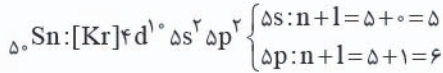
به جز عبارت آخر، سایر عبارتها درست هستند.
شیمی دانها با تعریف amu موفق شدند جرم اتمی دیگر عنصرها و ذره‌های
زیراتمی را اندازه‌گیری کنند.

۷۸ ۴

هر چهار عبارت پیشنهاد شده درست هستند.
عنصرهای A و X به ترتیب فلزهای Ca و Sn هستند.

بررسی عبارتها:

• برای ${}_{50}\text{Sn}$ مجموع $n+l$ الکترون‌های ظرفیت دو عدد ۵ و ۶ است:



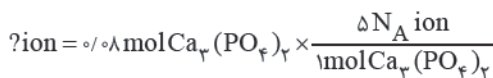
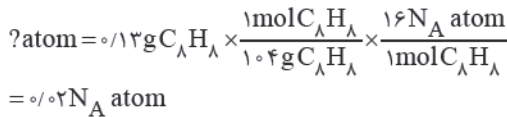
• فلز قلیایی خاکی Ca واکنش پذیرتر از فلز Sn است.
• تمامی فلزها تمایل به تشکیل کاتیون دارند، کاتیون فلز کلسیم برخلاف قلع،
قاعده هشت تایی را رعایت می‌کند.

• فلزهای Ca و Sn به ترتیب در دوره‌های چهارم و پنجم جدول جای دارند.
• منظور از مونومر سازنده پلی‌استیرن همان استیرن

۷۹ ۲

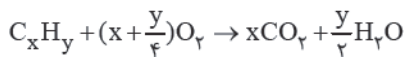
(C_8H_8) است.

• فرآورده نامحلول واکنش مورد نظر کلسیم فسفات ($\text{Ca}_3(\text{PO}_4)_2$) است.

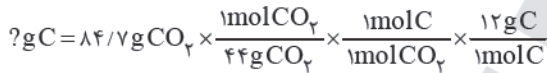


$$= 0.4 \text{N}_A \text{ ion}$$

$$\frac{0.02 \text{N}_A}{0.4 \text{N}_A} = 0.05$$



۸۰ ۱



$$= 23.1 \text{g C}$$

$$? \text{g H} = 25.3 - 23.1 = 2.2 \text{g H}$$

$$? \text{mol C} = 23.1 \text{g C} \times \frac{1 \text{mol}}{12 \text{g C}} = 1.925 \text{mol C}$$

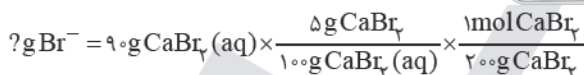
$$? \text{mol H} = 2.2 \text{g H} \times \frac{1 \text{mol}}{1 \text{g H}} = 2.2 \text{mol H}$$

$$\frac{y}{x} = \frac{2.2}{1.925} = \frac{8 \times 0.275}{7 \times 0.275} = \frac{8}{7}$$

فرمول مولکولی هیدروکربن مضر بی از C_7H_8 خواهد بود و جرم مولی آن نیز
مضر بی از $92 = (8 \times 1) + (7 \times 12)$ گرم بر مول است.

۸۱ ۱

ابتدا جرم یون برمید در محلول اولیه را حساب می‌کنیم:



$$\times \frac{2 \text{mol Br}^-}{1 \text{mol CaBr}_2} \times \frac{80 \text{g Br}^-}{1 \text{mol Br}^-} = 3.6 \text{g Br}^-$$

$$\text{ppm} = \frac{\text{جرم حل شونده}}{\text{جرم محلول}} \times 10^6 \Rightarrow 2000 = \frac{3.6 \text{g Br}^-}{x \text{g محلول}} \times 10^6$$

$$\Rightarrow x = 1800 \text{g محلول}$$

$$\text{جرم آب اضافه شده} = 1800 - 90 = 1710 \text{g H}_2\text{O}$$

۷۲ ۳

ابتدا با استفاده از رابطه محاسبه مقاومت بر حسب اختلاف
پتانسیل الکتریکی و جریان الکتریکی، مقاومت الکتریکی حد فاصل A تا B را
محاسبه می‌کنیم:

$$R_{BA} = \frac{V_{AB}}{I} = \frac{6}{I} \quad (1)$$

می‌دانیم همان جریانی که از حدفاصل A تا B عبور می‌کند، از کل استوانه نیز
می‌گذرد، بنابراین:

$$R_{\text{کل}} = \frac{V_{\text{کل}}}{I} = \frac{36}{I} \quad (2)$$

چون سطح مقطع استوانه ثابت است، پس مقاومت الکتریکی هر قسمت از استوانه با
طول آن متناسب است، بنابراین به کمک روابط (۱) و (۲) می‌توان نوشت:

$$\frac{R_{BA}}{R_{\text{کل}}} = \frac{L_{BA}}{L_{\text{کل}}} \Rightarrow \frac{\frac{6}{I}}{\frac{36}{I}} = \frac{12}{L_{\text{کل}}} \Rightarrow \frac{1}{6} = \frac{12}{L_{\text{کل}}} \Rightarrow L_{\text{کل}} = 12 \times 6$$

$$\Rightarrow L_{\text{کل}} = 72 \text{cm} = 0.72 \text{m}$$

۷۴ ۴

می‌دانیم در مقاومت‌های متوالی، بیشترین اختلاف پتانسیل
الکتریکی مربوط به بیشترین مقاومت است.

با اعمال اختلاف پتانسیل الکتریکی 80V روی مقاومت $R_3 = 100 \Omega$ ،
جریان گذرنده از مقاومت‌ها را حساب می‌کنیم.

$$V = RI \Rightarrow \frac{V=80 \text{V}}{R_3=100 \Omega} \rightarrow 80 = 100 \cdot I \Rightarrow I = \frac{80}{100} = 0.8 \text{A}$$

اختلاف پتانسیل الکتریکی مقاومت‌های R_1 و R_2 را نیز به ازای
جریان $I = 0.8 \text{A}$ محاسبه می‌کنیم:

$$V = RI \Rightarrow \begin{cases} V_1 = R_1 I = 15 \times 0.8 = 12 \text{V} \\ V_2 = R_2 I = 30 \times 0.8 = 24 \text{V} \end{cases}$$

حداکثر اختلاف پتانسیل الکتریکی کل مدار برابر حاصل جمع حداکثر اختلاف
پتانسیل الکتریکی تمام مقاومت‌ها است، بنابراین:

$$V_T = V_1 + V_2 + V_3 = 12 + 24 + 80 = 116 \text{V}$$

۷۵ ۱

چون ولت‌سنج ایده‌آل که به صورت متوالی در مدار قرار گرفته

است، دارای مقاومت بی‌نهایت است، پس هیچ جریانی در مدار برقرار نخواهد شد و
بنابراین آمپرسنج ایده‌آل عدد صفر را نشان خواهد داد. (ردگزینه‌های (۳) و (۴))

بدین ترتیب، عددی که ولت‌سنج نشان می‌دهد نیز برابر با نیروی محرکه
الکتریکی باتری خواهد شد و طبق داده‌های سؤال، $\varepsilon = 12 \text{V}$ است، پس
ولت‌سنج ایده‌آل عدد 12V را نشان می‌دهد.

شیمی

۷۶ ۱

هر چهار عبارت پیشنهاد شده درست هستند.

عنصرهای A، X، D و E به ترتیب ${}_{13}\text{Al}$ ، ${}_{8}\text{O}$ ، ${}_{31}\text{Ga}$ و ${}_{34}\text{Se}$ هستند.

بررسی عبارتها:

• Al و Ga در گروه سیزدهم جدول دوره‌ای جای دارند.

• تفاوت عدد اتمی O و Se برابر با ۲۶ بوده که برابر با عدد اتمی نخستین
عنصر گروه هشتم جدول دوره‌ای است.

• O و Se دو نافلز و هم‌گروه بوده و در نافلزهای هم‌گروه با افزایش عدد
اتم، واکنش پذیری کاهش می‌یابد.

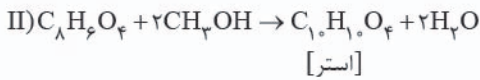
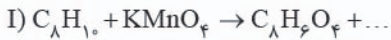
• در ترکیب یونی Al_2O_3 ، نسبت شمار آنیون‌ها به شمار کاتیون‌ها برابر $\frac{3}{2}$ است.



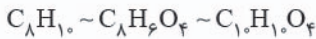
$$a=12x \rightarrow \frac{19/8-12x}{9} = 2/1-x$$

$$\Rightarrow x = 0/3 \text{ g H}_p \Rightarrow a = 12(0/3) = 3/6 \text{ g Mg}$$

$$\% \text{Mg} = \frac{3/6 \text{ g}}{19/8 \text{ g}} \times 100 = 11/18$$

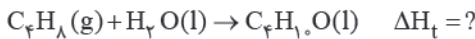


مطابق معادله‌های بالا می‌توان تناسب زیر را نتیجه گرفت:



$$\frac{5/3 \text{ g} \times \frac{60}{100} \times \frac{60}{100}}{1 \times 106} = \frac{x \text{ g}}{1 \times 194} \Rightarrow x = 3/492 \text{ g}$$

معادله واکنش هدف به صورت زیر است:



برای رسیدن به واکنش هدف، باید تغییرات زیر را بر روی واکنش‌های کمکی اعمال کرد:

✓ واکنش a را وارونه کرد.

✓ واکنش c را وارونه و ضرایب آن را در $\frac{1}{4}$ ضرب کرد.

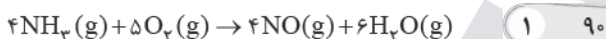
✓ واکنش b را به همان صورت نوشت.

سپس این سه واکنش را با هم جمع کرد.

$$\Delta H_t = -\Delta H_a - \frac{1}{4}\Delta H_c + \Delta H_b = -(-1) - \frac{1}{4}(-572)$$

$$+ (-340) = -46 \text{ kJ}$$

$$? \text{ kJ} = 6/72 \text{ g } C_4H_8 \times \frac{1 \text{ mol } C_4H_8}{56 \text{ g } C_4H_8} \times \frac{46 \text{ kJ}}{1 \text{ mol } C_4H_8} = 5/52 \text{ kJ}$$



واضح است که ماده (۱) واکنش‌دهنده و ماده (۲) فراورده است. از آن‌جا که تغییرات مول ماده (۱) در ۳۰ ثانیه برابر با ۵/۶ و برای ماده (۲) برابر با ۸/۴ است می‌توان نتیجه گرفت که ضریب فراورده (۲)، ۱/۵ برابر ضرایب واکنش‌دهنده (۱) است. یعنی ماده‌های (۱) و (۲) به ترتیب NH_3 و H_2O هستند.



$$10 - 4x \quad A - 5x \quad 4x \quad 6x$$

$$\Rightarrow 120 \text{ م}^3: (4x + 6x) - 5/4 = 10 - 4x$$

$$\Rightarrow x = 1/1 \text{ mol} \Rightarrow b = 10 - 4(1/1) = 5/6, d = 6(1/1) = 6/6$$

$$10: \bar{R}_{NH_3} = 4: \bar{R}_{\text{واکنش}} \Rightarrow 4(3) = \frac{a-b}{60} \Rightarrow a-b=2$$

$$\Rightarrow a = 5/6 + 2 = 7/6$$

$$\bar{R}_{H_2O} = 6\bar{R}_{\text{واکنش}}$$

$$\Rightarrow 6(3) = \frac{d-c}{60} \Rightarrow d-c=3 \Rightarrow c = 6/6 - 3 = 3/6$$

$$\frac{a+d}{b+c} = \frac{7/6+6/6}{5/6+3/6} = 1/54$$

۳ ۸۲ به جز عبارت دوم، سایر عبارتها درست هستند.

اسمز معکوس یک پدیده غیرخودبه‌خودی است و به طور طبیعی انجام نمی‌شود.

۲ ۸۳ عبارتهای سوم و چهارم درست هستند.

بررسی عبارتهاک نادرست:

• در مواد مولکولی با مولکول‌های قطبی همانند مولکول‌های ناقطبی با افزایش جرم مولی، دمای جوش افزایش می‌یابد.

• گازها دارای مولکول‌های مجزا با کم‌ترین برهم‌کنش‌ها هستند.

۴ ۸۴ فرض می‌کنیم مخلوط مورد نظر در مجموع شامل ۱۰۰ مول

اوره و آب است. مطابق داده‌های سؤال، شمار مول‌های اوره در این مخلوط برابر ۵۰ است. واضح است که شمار مول‌های آب نیز برابر با ۵۰ خواهد بود.

$$? \text{ g } CO(NH_2)_2 = 50 \text{ mol} \times \frac{60 \text{ g}}{1 \text{ mol}} = 3000 \text{ g } CO(NH_2)_2$$

$$? \text{ g } H_2O = 50 \text{ mol} \times \frac{18 \text{ g}}{1 \text{ mol}} = 900 \text{ g } H_2O$$

$$\text{درصد جرمی اوره} = \frac{3000 \text{ g}}{(3000+900) \text{ g}} \times 100 = 77\%$$

۱ ۸۵ ابتدا از روی جرم یون NO_3^- ، جرم نمک موجود در محلول را

به دست می‌آوریم:

$$? \text{ g } Pb(NO_3)_2 = 3/75 \text{ g } NO_3^- \times \frac{1 \text{ mol } NO_3^-}{62 \text{ g } NO_3^-} \times \frac{1 \text{ mol } Pb(NO_3)_2}{2 \text{ mol } NO_3^-}$$

$$\times \frac{332 \text{ g } Pb(NO_3)_2}{1 \text{ mol } Pb(NO_3)_2} = 10 \text{ g } Pb(NO_3)_2$$

$$\text{جرم آب موجود در محلول} = 40 - 10 = 30 \text{ g } H_2O$$

اکنون حساب می‌کنیم این مقدار آب $25^\circ C$ توانایی حل کردن چند گرم نمک را دارد:

$$? \text{ g } Pb(NO_3)_2 = 30 \text{ g } H_2O \times \frac{60 \text{ g } Pb(NO_3)_2}{100 \text{ g } H_2O} = 18 \text{ g } Pb(NO_3)_2$$

$$18 - 10 = 8 \text{ g } Pb(NO_3)_2 \text{ جرم نمکی که می‌توان اضافه کرد}$$

۴ ۸۶ هر چهار عبارت پیشنهادشده درست هستند.

بررسی عبارتها:

• در ترکیب مورد نظر همانند ویتامین K گروه عاملی کربونیل ($C=O$) دیده می‌شود.

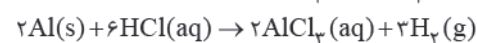
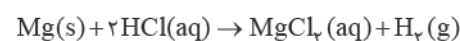
• فرمول مولکولی این ترکیب به صورت $C_7H_{10}O$ است:

✓ فرمول مولکولی ۳-اتیل - ۳-متیل هگزان به صورت C_9H_{20} است و

فرمول مولکولی ۳، ۴-دی اتیل - ۵-متیل نونان به صورت $C_{14}H_{30}$ است.

• در این ترکیب همانند بنزوئیک اسید ($C_7H_6O_2$)، چهار جفت الکترون ناپیوندی وجود دارد.

۱ ۸۷



اگر جرم منیزیم را برحسب گرم با a نشان دهیم، می‌توان نوشت:

$$\frac{a}{1 \times 24} = \frac{x}{1 \times 2} \Rightarrow a = 12x$$

$$\frac{(19/8 - a)}{2 \times 27} = \frac{(2/1 - x)}{3 \times 2} \Rightarrow \frac{19/8 - a}{9} = 2/1 - x$$



$$[H^+] = \frac{10^{-14}}{[OH^-]} = \frac{10^{-14}}{\frac{1}{8} \times 10^{-3}} = 8 \times 10^{-11}$$

$$\frac{[OH^-]}{[H^+]} = \frac{\frac{1}{8} \times 10^{-3}}{8 \times 10^{-11}} = \frac{1}{8} \times 10^8 = 1.25 \times 10^7$$

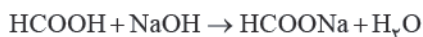
برای این که pH محلول مورد نظر از ۱۰/۱ به ۹/۵ برسد باید ۰/۶ واحد کاهش یابد. به این ترتیب حجم محلول باید $10^{0.6}$ مرتبه افزایش یابد.
 $10^{0.6} = (10^{0.3})^2 = 2^2 = 4$

۹۶ ۳

$$K_a = \frac{\alpha^2 \cdot M}{1-\alpha} \Rightarrow K_a = \frac{\alpha(\alpha \cdot M)}{1-\alpha} \Rightarrow 2 \times 10^{-4} = \frac{\alpha(8 \times 10^{-4})}{1-\alpha}$$

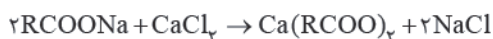
$$\Rightarrow 4\alpha = 1-\alpha \Rightarrow 1=5\alpha \Rightarrow \alpha=0.2$$

$$[H^+] = \alpha M \Rightarrow 8 \times 10^{-4} = 0.2M \Rightarrow M = 4 \times 10^{-2} \text{ mol.L}^{-1}$$



$$\frac{0.004 \times 1/2}{1} = \frac{x}{1 \times 40} \Rightarrow x = 0.192 \text{ g} \equiv 192 \text{ mg}$$

۹۷ ۱



$$\frac{\text{جرم سدیم کلرید}}{\text{جرم مولی} \times \text{ضریب}} = \frac{\text{جرم کلسیم کلرید}}{\text{جرم مولی} \times \text{ضریب}}$$

$$\Rightarrow \frac{x \text{ g CaCl}_2}{1 \times 111} = \frac{35/1 \text{ g NaCl}}{2 \times 58/5} \Rightarrow x = 33/3 \text{ g CaCl}_2$$

$$\text{ppm} = \frac{\text{جرم کلسیم کلرید}}{\text{جرم محلول}} \times 10^6 \Rightarrow \text{ppm} = \frac{33/3 \text{ g}}{12000} \times 10^6 = 2775$$

۹۸ ۲

عبارت‌های اول و دوم درست هستند.

تولید صنعتی فلز سدیم، برقکافت سدیم کلرید مذاب است:



بررسی عبارت‌هاک نادرست:

• یون Na^+ شعاع کوچک‌تری دارد و در کاتد، کاهش یافته و تبدیل به فلز Na می‌شود.

• اطراف الکترود آند که به قطب مثبت باتری وصل است، حباب‌های گاز Cl_2 مشاهده می‌شود.

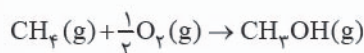
۹۹ ۴

معادله موازنه‌شده واکنش کلی سلول $Ag-M$ به صورت زیر است:



$$\frac{6/566 \text{ g M}}{1 \times x} = \frac{(\frac{2}{100} \times 1 \text{ mol.L}^{-1}) Ag^+ \times 0.5 \text{ L}}{3} \Rightarrow x = 197 \text{ g.mol}^{-1}$$

در سلول گالوانی استاندارد، غلظت اولیه هر کدام از الکترولیت‌ها 1 mol.L^{-1} است. از طرفی در سلول مورد نظر، فلزهای Ag و M به ترتیب نقش آند و کاتد را دارند.



۹۱ ۱

$$\Delta H = \left[\text{مجموع آنتالپی پیوندهای تشکیل شده} \right] - \left[\text{مجموع آنتالپی پیوندهای شکسته شده} \right]$$

$$\Delta H = [4\Delta H(C-H) + \frac{1}{2}\Delta H(O=O)] - [3\Delta H(C-H) + \Delta H(C-H)]$$

$$+\Delta H(C-O) + \Delta H(O-H) = [415 + \frac{1}{2}(495)] - [(360) + (465)] = -162/5 \text{ kJ}$$

۹۲ ۴

تمامی عبارت‌های پیشنهادشده درست هستند.

بررسی عبارت‌ها:

• فرمول مولکولی هر کدام از دو ترکیب به صورت $C_{13}H_{13}NO_2$ است.

• در هر کدام از ساختارها، ۳۴ جفت الکترون پیوندی وجود دارد:

$$\frac{12(4) + 13(1) + 1(3) + 2(2)}{2} = 34$$

• شمار اتم‌های کربن هر کدام از ساختارها همانند مولکول مالتوز ($C_{12}H_{22}O_{11}$) برابر با ۱۲ اتم کربن است.

• ترکیب (II) دارای گروه‌های عاملی آمینی و اسیدی بوده و برای تولید پلی‌آمیدها مناسب است.

• در ساختار (I) برخلاف ساختار (II)، گروه عاملی آمیدی ($C-N$) وجود دارد.



۹۳ ۲

عبارت‌های اول و دوم نادرست هستند.

بررسی عبارت‌هاک نادرست:

• برای شرکت کردن در واکنش‌های تولید پلی‌استر و پلی‌آمید، وجود پیوند $C=C$ ضروری نیست.

• از واکنش ۳ مول الکل تک‌عاملی با یک مول کربوکسیلیک اسید سه‌عاملی، یک مول استر سه‌عاملی تولید می‌شود.

۹۴ ۳

به‌جز عبارت آخر، سایر عبارت‌ها درست هستند.

پلیمرهای A و B به ترتیب تفلون ($(C_2F_4)_n$) و پلی‌وینیل کلرید ($(C_2H_3Cl)_n$) هستند.

$$\%C_A = \frac{2(12)}{2(12) + 4(19)} \times 100 = 24\%$$

$$\%C_B = \frac{2(12)}{2(12) + 3 + 35/5} \times 100 = 38/4\%$$

$$\frac{\%C_A}{\%C_B} = 0.625$$

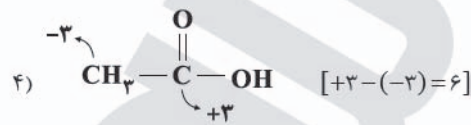
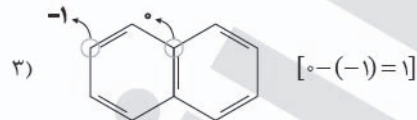
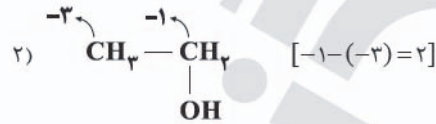
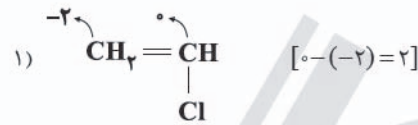
۹۵ ۲

$$pH = 10/1 \Rightarrow [OH^-] = 10^{-(10/1-14)} = 10^{-3/9} = 10^{-30/9}$$

$$= 10^{-10/3} \times \frac{1}{10^{0/9}} = 10^{-3} \times \frac{1}{(10^{0/3})^3} = \frac{1}{8} \times 10^{-3}$$



بررسی گزینه‌ها: ۴ ۱۰۰



عبارت‌های سوم و چهارم درست‌اند. ۲ ۱۰۱

بررسی عبارت‌هاک نادرست:

- فلز روی نمی‌تواند وانادیم (V) را به فلز وانادیم کاهش دهد.
- در TiO_2 که یک رنگدانه معدنی سفید، عدد کوئوردیناسیون کاتیون، دو برابر عدد کوئوردیناسیون آنیون است.

به جز عبارت آخر، سایر عبارت‌ها درست هستند. ۳ ۱۰۲

دوده همه طول موج‌های مرئی را جذب می‌کند.

به جز عبارت آخر، سایر عبارت‌ها درست هستند. ۳ ۱۰۳

در دمای اتاق واکنش میان گازهای H_2 و N_2 حتی در حضور کاتالیزگر یا جرقه پیش نمی‌رود.

به جز عبارت سوم، سایر عبارت‌ها درست هستند. فلز آهن جزو ۳ ۱۰۴

مواد خام طبقه‌بندی نمی‌شود.

حجم ظرف در مقدار K بی‌تأثیر است. بنابراین محاسبه‌ها را بر ۳ ۱۰۵

مبنای مول انجام می‌دهیم:



مول اولیه	۴	۴	۰
مول تعادلی	۴-x	۴-x	2x

$$K = \frac{[\text{NO}]^2}{[\text{N}_2][\text{O}_2]} \Rightarrow 196 = \frac{(2x)^2}{(4-x)(4-x)} \Rightarrow \sqrt{196} = \frac{2x}{4-x}$$

$$\Rightarrow 56 - 14x = 2x \Rightarrow 56 = 16x \Rightarrow x = 3.5$$

در صورتی که تمام ۴ مول از هر کدام از واکنش‌دهنده‌ها مصرف شود، بازده فرایند ۱۰۰٪ خواهد بود. با توجه به مصرف ۳/۵ مول از هر کدام از واکنش‌دهنده‌ها بازده درصدی به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$\text{بازده درصدی} = \frac{3.5}{4} \times 100 = 87.5\%$$