

آزمون آزمایشی خیلی سبز

دانشگاه ریاضی

مرحله ششم

پایه دوازدهم

تاریخ برگزاری: ۲۷/مهر/۱۴۰۳

سال تحصیلی ۱۴۰۳-۰۴

دفترچه شماره یک

بودجه بندی دروس

هندسه

هندسه (۱)
فصل ۱
صفحه ۹ تا ۲۷
هندسه (۳)
فصل ۱ (درس ۱)
صفحه ۹ تا ۲۱

ریاضیات گسسته و آمار و احتمال

ریاضیات گسسته
فصل ۱ (درس ۱)
صفحه ۱ تا ۸

حسابان و ریاضیات پایه

ریاضی (۱)
فصل ۵
صفحه ۹۴ تا ۱۱۷
حسابان (۱)
فصل ۲
صفحه ۳۷ تا ۷۰
حسابان (۲)
فصل ۱ (درس ۱)
صفحه ۱ تا ۱۲

مدت پاسخگویی	تا شماره	از شماره	تعداد سؤال	مواد امتحانی
۷۵ دقیقه	۴۰	۱	۴۰	ریاضیات
۷۵ دقیقه		۴۰ سؤال		مجموع

اساتید، مشاوران و دانش آموزان گرامی:

نظرات، پیشنهادات، انتقادات و بازخوردهای خود نسبت به سؤالات این آزمون را می توانید از طریق آیدی @Kheilisabz_edit در همه پیام رسان ها با ما به اشتراک بگذارید.



حسابان و ریاضیات پایه

۱- تابع $f(x) = (2a-1)x + a - b$ ثابت و تابع $g(x) = (b-3)x + a + 2c$ همانی است. تابع خطی $y = (2f - g)(x)$ از کدام ربع دستگاه مختصات عبور نمی کند؟

- (۱) اول (۲) دوم (۳) سوم (۴) چهارم

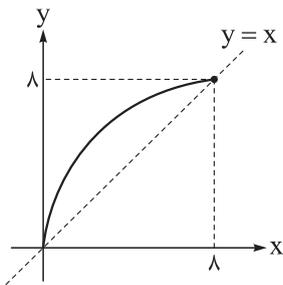
۲- تعداد جوابهای معادله $[6x^2] = 5x^2$ کدام است؟

- (۱) ۴ (۲) ۵ (۳) ۷ (۴) ۹

۳- اگر $f(x) = 4x + 2$ و $g(x) = 2x - 4$ باشد، توابع $(f+g)^{-1}$ و $f^{-1} - g^{-1}$ با کدام طول یکدیگر را قطع می کنند؟

- (۱) $-5/2$ (۲) $-4/8$ (۳) $-6/8$ (۴) $-7/6$

۴- نمودار تابع f با دامنه $[0, 8]$ در شکل زیر رسم شده است. دامنه تعریف تابع $g(x) = \sqrt{\frac{f(x)}{x - f^{-1}(2x)}}$ شامل چند عدد صحیح است؟



- (۱) ۲
(۲) ۳
(۳) ۴
(۴) ۵

۵- تابع $f(x) = x - 2 + 2\sqrt{1-x}$ با دامنه $(-\infty, 0]$ وارون تابع $g(x) = x - 2\sqrt{bx}$ است. مقدار $g(b)$ کدام است؟

- (۱) -۱ (۲) -۲ (۳) -۳ (۴) -۴

۶- به ازای کدام مقدار a ، نمودار وارون تابع $f(x) = 4x + 2\sqrt{x+3a}$ ، خط $3y - 2x = 1$ را در نقطه‌ای به عرض -1 قطع می کند؟

- (۱) $\frac{2}{3}$ (۲) $\frac{19}{4}$ (۳) $\frac{57}{4}$ (۴) $\frac{9}{4}$

۷- نمودار تابع $f(x) = \frac{mx+6}{x+m+3}$ نمودار وارون خودش را فقط در دو نقطه به طولهای α و β قطع می کند. حاصل $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta}$ کدام است؟

- (۱) $\frac{2}{m}$ (۲) $-\frac{1}{2}$ (۳) $\frac{1}{2}$ (۴) $\frac{m}{4}$

۸- نمودار تابع $f(x) = -\sqrt{2-\sqrt{4-x}}$ ، نمودار وارون خود را در چند نقطه قطع می کند؟

- (۱) هیچ (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) ۳

محل انجام محاسبات

۹- توابع f و $g(x) = 8 - 3x$ مفروض‌اند، به طوری که دامنه‌های دو تابع f و g به ترتیب $D_f = [-4, a]$ و $D_{f \circ g} = [-2, b]$ هستند. حاصل $a - b$ کدام است؟

- ۱۴ (۱) ۱۸ (۲) ۸ (۳) ۱۰ (۴)

۱۰- اگر $f(2-x) = \sqrt{2x+1}$ و $g(x+3) = \sqrt{4-2x}$ باشد، دامنه تعریف تابع $g \circ f$ شامل چند عدد صحیح است؟

- ۱۴ (۱) ۱۳ (۲) ۱۲ (۳) ۱۱ (۴)

۱۱- تابع چندجمله‌ای f و تابع $g(x) = (x-1)^2 + 2$ مفروض‌اند. اگر $(f \circ g)(x) = 3x^2 - 6x + 14$ باشد، مقدار $(f \circ f)(3)$ کدام است؟

- ۴۵ (۱) ۴۱ (۲) ۴۷ (۳) ۴۲ (۴)

۱۲- با کدام تبدیل‌ها می‌توانیم از نمودار تابع $y = \frac{4}{3}f\left(\frac{2}{3}x\right)$ به نمودار تابع $y = f(x)$ برسیم؟

- (۱) انقباض افقی و عمودی (۲) انقباض افقی و انقباض عمودی
(۳) انقباض افقی و عمودی (۴) انقباض افقی و انقباض عمودی

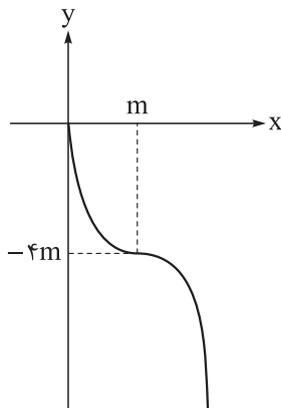
۱۳- نمودار تابع $y = g(x)$ را ۴ واحد به چپ انتقال می‌دهیم و طول نقاط آن را نصف می‌کنیم تا نمودار تابع f به دست آید. اگر $g(x) = f(ax + b)$ باشد، مقدار $b - a$ کدام است؟

- $-\frac{3}{2}$ (۱) $-\frac{5}{2}$ (۲) $\frac{3}{2}$ (۳) $-\frac{1}{2}$ (۴)

۱۴- وارون تابع $f(x) = \sqrt{x+1}$ را k واحد به راست انتقال می‌دهیم به طوری که نمودار تابع حاصل، نمودار تابع f را در نقطه‌ای به طول ۸ قطع کند. مقدار k کدام است؟

- ۴ (۱) -۸ (۲) ۶ (۳) ۲ (۴)

۱۵- نمودار تابع رسم‌شده در شکل زیر، صرفاً با انتقال و قرینه‌یابی، از روی نمودار تابع $y = x^3$ به دست آمده است. مقدار این تابع به ازای $x = 2m$ کدام است؟



- ۸ (۱)
-۱۶ (۲)
-۳۲ (۳)
-۶۴ (۴)

۱۶- نمودار تابع $y = \frac{1}{x+1}$ را ۲ واحد به چپ انتقال می‌دهیم و سپس نمودار حاصل را نسبت به خط $y = x$ قرینه می‌کنیم تا نمودار تابع f به دست آید. نمودار تابع $y = \frac{1}{x+1}$ را این بار ابتدا نسبت به خط $y = x$ قرینه می‌کنیم و سپس ۲ واحد به چپ انتقال می‌دهیم تا نمودار تابع g به دست آید. در این صورت مقدار $(f \circ g)(-3)$ کدام است؟

$$-\frac{8}{3} \quad (1) \quad -\frac{10}{3} \quad (2) \quad -\frac{5}{2} \quad (3) \quad -\frac{7}{2} \quad (4)$$

۱۷- نمودار تابع $g(x) = 3 - f\left(\frac{2+x}{3}\right)$ را نسبت به مبدأ مختصات قرینه می‌کنیم و نمودار وارون تابع حاصل را رسم می‌کنیم. ضابطه تابع مربوط به نمودار جدید کدام است؟ (تابع f با دامنه و برد \mathbb{R} ، وارون پذیر است.)

$$y = 2 + 3f^{-1}(x - 3) \quad (1) \quad y = 3 - 2f^{-1}(x + 3) \quad (2)$$

$$y = 2 - 3f^{-1}(x + 3) \quad (3) \quad y = 3 + 2f^{-1}(x - 3) \quad (4)$$

۱۸- اگر نقطه $A(-3, 4)$ واقع بر نمودار تابع $y = 2 + 4f^{-1}\left(\frac{x}{4} - 1\right)$ با نقطه A' واقع بر نمودار تابع $y = 3 - f\left(5 + \frac{x}{3}\right)$ متناظر باشد، مجموع طول و عرض نقطه A' کدام است؟

$$-8 \quad (1) \quad \frac{41}{2} \quad (2) \quad \frac{31}{2} \quad (3) \quad 11 \quad (4)$$

ریاضیات گسسته

۱۹- برای اثبات حکم حاصل ضرب دو عدد متوالی مضرب ۲ است، با روش در نظر گرفتن همه حالت‌ها، از کدام عبارت منطقی استفاده می‌شود؟

$$(p \wedge q) \Rightarrow \equiv (p \Rightarrow r) \wedge (q \Rightarrow r) \quad (۱)$$

$$\sim (p \vee q) \Rightarrow r \equiv (p \Rightarrow r) \wedge (q \Rightarrow r) \quad (۲)$$

$$\sim (p \vee q) \Rightarrow r \equiv (p \Rightarrow r) \vee (q \Rightarrow r) \quad (۳)$$

$$(p \vee q) \Rightarrow r \equiv (p \Rightarrow r) \wedge (q \Rightarrow r) \quad (۴)$$

۲۰- اگر x و y اعداد صحیح و $0 \leq x, y \leq 5$ باشند، از تساوی $(x+y)^2 = x^2 + y^2$ چند دسته جواب برای x و y پیدا می‌شود؟

۱۰ (۴)

۱۱ (۳)

۲۱ (۲)

۲۲ (۱)

۲۱- گزاره داده شده در کدام یک از گزینه‌های زیر مثال نقض دارد؟

(۱) حاصل جمع سه عدد زوج متوالی بر ۶ بخش پذیر است.

(۲) حاصل جمع سه عدد فرد متوالی در تقسیم بر ۶ باقی مانده‌ای برابر ۳ دارد.

(۳) حاصل ضرب هر سه عدد زوج متوالی بر ۴۸ بخش پذیر است.

(۴) حاصل ضرب هر سه عدد فرد متوالی بر ۱۵ بخش پذیر است.

۲۲- در اثبات نامساوی $5x^2 + y^2 + 1 \geq 3x + y + xy$ به روش اثبات بازگشتی، در پایان به کدام نامساوی بدیهی می‌رسیم؟

$$(2x-1)^2 + (2y-1)^2 + (x-y)^2 \geq 0 \quad (۱)$$

$$(3x-1)^2 + (y-1)^2 + (x-y)^2 \geq 0 \quad (۲)$$

$$(3x-1)^2 + (2y-1)^2 + (x-y)^2 \geq 0 \quad (۳)$$

$$(2x-1)^2 + (y-1)^2 + (x-y)^2 \geq 0 \quad (۴)$$

۲۳- a ، b و c هر سه عددهایی مثبت‌اند، به طوری که b گویا، $a+b$ گنگ و $a+c$ گویاست. در این صورت ab

..... و $b+c$

(۲) گنگ است - ممکن است گنگ یا گویا باشد

(۱) گنگ است - گنگ است

(۴) گنگ است - گویا است

(۳) ممکن است گنگ یا گویا باشد - گنگ است

محل انجام محاسبات

۲۴- اگر x و a مقادیر حقیقی غیرصفر باشند، به ازای چند مقدار x رابطه $\frac{1}{x+a} = \frac{1}{x} + \frac{1}{a}$ برقرار است؟

- (۱) صفر (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) بی شمار

۲۵- در اثبات حکم «به ازای هر دو عدد حقیقی ناصفر و هم علامت x و y داریم: $\frac{x}{y} + \frac{y}{x} \geq 2$ » به روش بازگشتی، به کدام

گزاره همیشه درست می‌رسیم؟

- (۱) $(x-y)^2 \geq 0$ (۲) $(x+y)^2 \geq 0$ (۳) $x^2 + y^2 \geq 0$ (۴) $(\frac{x}{y})^2 + (\frac{y}{x})^2 \geq 0$

۲۶- اگر n حاصل ضرب دو عدد طبیعی متوالی باشد، کدام گزینه قطعاً مربع کامل است؟

- (۱) $4n+1$ (۲) $2n+4$ (۳) $2n+5$ (۴) $4n+8$

۲۷- کدام گزینه، مثال نقضی برای حکم «برای هر عدد طبیعی بزرگ‌تر از ۱ مانند n ، عدد $2^n - 1$ اول است.» محسوب می‌شود؟

- (۱) ۷ (۲) ۹ (۳) ۳ (۴) ۵

۲۸- به ازای چند مقدار x از مجموعه $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ ، عبارت $\frac{x^2(x+1)^2}{4}$ عددی زوج است؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

هندسه

۲۹- اگر A, B, C ماتریس‌های مربعی هم‌مرتبه باشند، آن‌گاه کدام گزینه همواره درست است؟

$$(1) (AB)^T = A^T B^T$$

$$(2) AB = AC \Rightarrow B = C$$

$$(3) AB = BA$$

$$(4) (AB)C = A(BC)$$

۳۰- اگر $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 5 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & a & 1 \\ -4 & 5 & -2 \\ 1 & -2 & b \end{bmatrix}$ برابر ماتریس همانی باشد، آن‌گاه $a + b$ کدام است؟

$$(1) 2 \quad (2) -1 \quad (3) 1 \quad (4) -2$$

۳۱- اگر A و B دو ماتریس 2×2 باشند به طوری که $BA = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ ، آن‌گاه مجموع درایه‌های غیرواقعه بر قطر اصلی

ماتریس $A + B \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ -6 & -6 \end{bmatrix} A + B \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} 2B$ کدام است؟

$$(1) 10 \quad (2) 8 \quad (3) -6 \quad (4) -4$$

۳۲- اگر $A = [a_{ij}]_{3 \times 3}$ که در آن $a_{ij} = \begin{cases} -1 & ; |i-j| > 1 \\ 0 & ; |i-j| = 1 \\ 1 & ; |i-j| < 1 \end{cases}$ ، آن‌گاه مجموع درایه‌های ماتریس A^2 کدام است؟

$$(1) 1 \quad (2) 2 \quad (3) 3 \quad (4) \text{ صفر}$$

۳۳- اگر $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ ، آن‌گاه ماتریس $A^4 - A^3$ ، برابر با کدام است؟

$$(1) A - I \quad (2) 2(A + I)$$

$$(3) 2A + I \quad (4) 2A - I$$

۳۴- فرض کنید $A = [a_{ij}]_{3 \times 3} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & -2 \\ 3 & -2 & -3 \end{bmatrix}$ اگر $B = \begin{bmatrix} a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{22} & a_{32} & a_{13} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 9 & -8 \\ 3 & 4 & 5 \\ -2 & 0 & -6 \end{bmatrix}$

باشد، مجموع درایه‌های سطر دوم ماتریس B کدام است؟

$$(1) 156 \quad (2) 84 \quad (3) 17 \quad (4) -61$$

محل انجام محاسبات

۳۵- ماتریس‌های $B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 6 & 3 \end{bmatrix}$ و $C = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ -10 & -6 \end{bmatrix}$ مفروض‌اند. اگر $A(A-I) = BC - I$ باشد، ماتریس $A^{22} + A$ برابر کدام است؟

- (۱) CB (۲) $B - C$ (۳) I (۴) \bar{O}

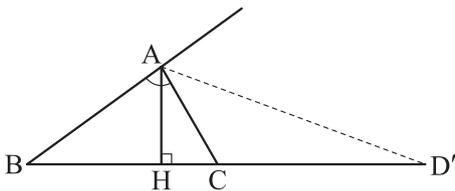
۳۶- خط d و نقطه A به فاصله ۲ از آن در یک صفحه قرار دارند. چند نقطه در این صفحه وجود دارد که از نقطه A به فاصله ۲ و از خط d به فاصله ۱ باشد؟

- (۱) هیچ (۲) یک (۳) دو (۴) چهار

۳۷- در مثلث قائم‌الزاویه ABC که $AC > AB$ ، از نقطه M وسط وتر BC ، خطی عمود بر آن رسم می‌کنیم تا ضلع AC را در N قطع کند. اگر $AN = MN$ ، آن‌گاه زاویه BNC چند برابر اندازه زاویه C است؟

- (۱) $2/5$ (۲) 3 (۳) $3/5$ (۴) 4

۳۸- مطابق شکل، $\hat{B} = 20^\circ$ و $\hat{B}AC = 120^\circ$ است. اگر AD' نیمساز زاویه خارجی A در مثلث ABC باشد، زاویه $\hat{H}AD'$ کدام است؟



- (۱) 60°
(۲) 70°
(۳) 75°
(۴) 80°

۳۹- نیمسازهای داخلی مثلث ABC در نقطه O هم‌رس هستند. اگر $AB > AC$ ، آن‌گاه کدام گزینه ممکن است نادرست باشد؟

- (۱) $BC > OA$ (۲) $BC > OC$ (۳) $BC > OB$ (۴) $OB > OC$

۴۰- در مثلثی که طول اضلاع آن اعداد طبیعی است، یک ضلع چهار برابر ضلع دیگر و طول ضلع سوم برابر ۲۹ است. مجموع کم‌ترین و بیشترین مقدار ممکن برای محیط این مثلث کدام است؟

- (۱) ۹۹ (۲) ۱۰۱ (۳) ۱۲۸ (۴) ۱۳۳

پاسخ‌نامه تشریحی آزمون را ساعت ۱۶ از صفحه شخصی خودتان در سایت آزمون خیلی سبز دریافت کنید.



azmoon.kheilisabz.com

آزمون آزمایشی خیلی سبز

دانشگاه ریاضی

مرحله ششم

پایه دوازدهم

تاریخ برگزاری: ۲۷/مهر/۱۴۰۳

سال تحصیلی ۱۴۰۳-۰۴

دفترچه شماره دو

بودجه بندی دروس

شیمی

شیمی (۱)
فصل ۱
صفحه ۱ تا ۴۴
شیمی (۳)
فصل ۱
(تا ابتدای رسانایی الکتریکی محلول ها
و قدرت اسیدی)
صفحه ۱ تا ۱۶

فیزیک

فیزیک (۱)
فصل ۱ و فصل ۲
صفحه ۱ تا ۵۲
فیزیک (۳)
فصل ۱ (تا ابتدای سقوط آزاد)
صفحه ۱ تا ۲۱

مدت پاسخگویی	تا شماره	از شماره	تعداد سؤال	مواد امتحانی
۸۰ دقیقه	۷۵	۴۱	۳۵	فیزیک
	۱۰۵	۷۶	۳۰	شیمی
۸۰ دقیقه	۶۵ سؤال			مجموع

اساتید، مشاوران و دانش آموزان گرامی:

نظرات، پیشنهادات، انتقادات و بازخوردهای خود نسبت به سؤالات این آزمون را می توانید از طریق آیدی @Kheilisabz_edit در همه پیام رسانی ها با ما به اشتراک بگذارید.

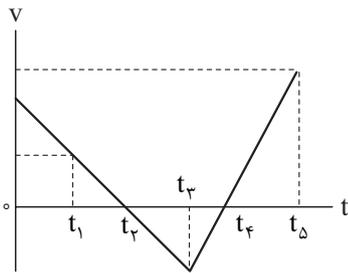
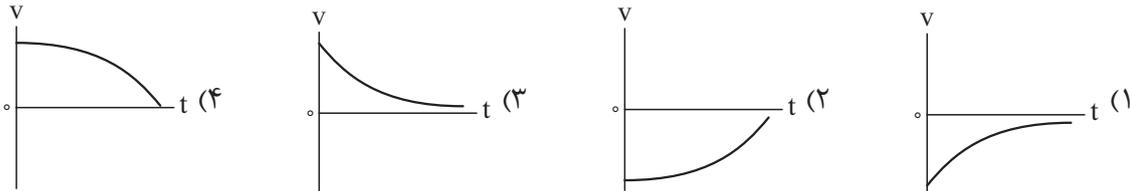


فیزیک دوازدهم

۴۱- متحرکی با سرعت ثابت در راستای محور X در حال حرکت است. اگر بردار مکان متحرک در دو لحظه $t_1 = 2s$ و $t_2 = 5s$ به ترتیب برابر $\vec{i}(9m)$ و $\vec{i}(-3m)$ باشد، معادله مکان - زمان متحرک در SI کدام است؟

$x = -4t + 17$ (۴) $x = -4t + 13$ (۳) $x = -2t + 17$ (۲) $x = -2t + 13$ (۱)

۴۲- جسمی در خلاف جهت محور X حرکت می کند. اندازه شتاب جسم در حال افزایش و تندی آن در حال کاهش است. نمودار سرعت - زمان این جسم به صورت کدام یک از شکل های زیر می تواند باشد؟

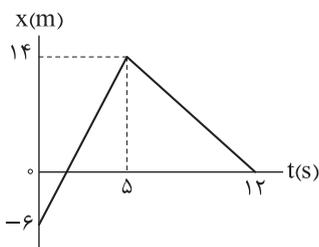


۴۳- نمودار سرعت - زمان متحرکی که در راستای محور X حرکت می کند، به شکل مقابل است. کدام یک از عبارات های زیر درباره این متحرک درست است؟
 الف) در بازه زمانی t_1 تا t_5 ، شتاب متوسط متحرک در جهت محور X است.
 ب) در بازه زمانی t_3 تا t_4 ، تندی متحرک در حال افزایش است.
 پ) در لحظه های t_2 و t_4 ، جهت بردار مکان متحرک تغییر می کند.

ت) اندازه شتاب متحرک در لحظه t_4 ، بزرگ تر از اندازه شتاب متوسط آن در بازه زمانی t_2 تا t_5 است.

(۱) الف و پ (۲) الف و ت (۳) ب و پ (۴) ب و ت

۴۴- نمودار مکان - زمان متحرکی که در راستای محور X حرکت می کند، به شکل زیر است. اگر در بازه زمانی $t_1 = 0$ تا t_2 ، تندی متوسط متحرک برابر 3 m/s باشد، در همین بازه زمانی شتاب متوسط متحرک بر حسب متر بر مربع ثانیه کدام است؟



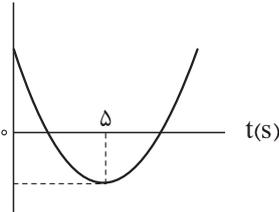
- (۱) $2\vec{i}$
 (۲) $-2\vec{i}$
 (۳) $6\vec{i}$
 (۴) $-6\vec{i}$

۴۵- معادله مکان - زمان متحرکی که در راستای محور X حرکت می کند، در SI به صورت $x = 2t^2 - 10t + 8$ است. در لحظه t_1 برای اولین بار جهت بردار مکان متحرک تغییر می کند و در لحظه t_2 جهت حرکت آن عوض می شود. سرعت متوسط متحرک در بازه زمانی t_1 تا t_2 چند متر بر ثانیه است؟

(۱) $3\vec{i}$ (۲) $-3\vec{i}$ (۳) $6\vec{i}$ (۴) $-6\vec{i}$

محل انجام محاسبات

۴۶- نمودار مکان - زمان متحرکی که در راستای محور x حرکت می کند، به شکل سهمی زیر است. به ترتیب از راست به چپ، متحرک چند ثانیه در حال نزدیک شدن به مبدأ مکان و چند ثانیه در حال نزدیک شدن به مکان اولیه خود است؟

 $x(m)$ 

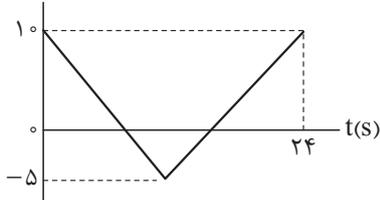
(۱) ۱۰، ۵

(۲) ۵، ۵

(۳) ۱۰، ۲/۵

(۴) ۵، ۲/۵

۴۷- نمودار سرعت - زمان متحرکی که در راستای محور x حرکت می کند، به شکل زیر است. این متحرک در مجموع، چند ثانیه در جهت محور x حرکت کرده است؟

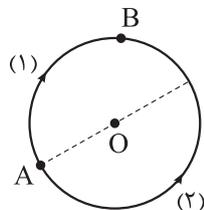
 $v(m/s)$ 

(۱) ۸

(۲) ۱۶

(۳) ۱۸

(۴) ۲۰



۴۸- در شکل مقابل، دو متحرک (۱) و (۲)، روی محیط دایره‌ای، با طی مسیرهای مشخص شده

از نقطه A به نقطه B می‌روند. کدام یک از عبارتهای زیر الزاماً درست است؟ (هر کدام از

متحرک‌ها یک بار به نقطه B می‌رسند.)

(۱) اندازه سرعت متوسط متحرک (۲) از اندازه سرعت متوسط متحرک (۱) بیشتر است.

(۲) تندی متوسط متحرک (۲) از تندی متوسط متحرک (۱) بیشتر است.

(۳) اگر تندی متوسط دو متحرک برابر باشد، اندازه سرعت متوسط متحرک (۲)، بیشتر از اندازه سرعت متوسط متحرک (۱) است.

(۴) اگر اندازه سرعت متوسط دو متحرک برابر باشد، تندی متوسط متحرک (۲)، بیشتر از تندی متوسط متحرک (۱) است.

۴۹- در مسیری مستقیم، قطاری به طول 300 m با تندی ثابت 80 km/h از تونلی به طول 500 m عبور می کند. قطار

چند ثانیه به طور کامل درون تونل قرار دارد؟

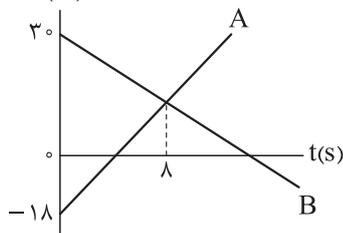
(۴) ۲۲/۵

(۳) ۱۸

(۲) ۱۳/۵

(۱) ۹

۵۰- نمودار مکان - زمان دو متحرک A و B که در راستای محور x حرکت می کنند، به شکل زیر است. در طی حرکت

 $x(m)$ 

دو متحرک، چند ثانیه فاصله آنها کم تر از 9 m است؟

(۱) ۱/۵

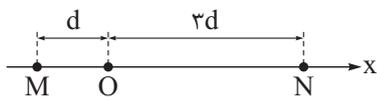
(۲) ۲/۵

(۳) ۳

(۴) ۵

محل انجام محاسبات

۵۱- در شکل زیر، دو متحرک (۱) و (۲) با سرعت‌های ثابت، در راستای محور x به سمت یکدیگر در حال حرکت هستند. در مبدأ زمان متحرک (۱) در نقطه M و متحرک (۲) در نقطه N قرار دارد. اگر دو متحرک در نقطه O از کنار یکدیگر عبور کنند، مدتی که طول می‌کشد تا متحرک (۱) از نقطه O به نقطه N برسد، چند برابر مدتی است که طول می‌کشد تا متحرک (۲) از نقطه O به نقطه M می‌رسد؟



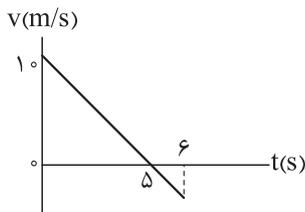
$$\frac{9}{4} \quad (2)$$

$$9 \quad (4)$$

$$\frac{3}{4} \quad (1)$$

$$3 \quad (3)$$

۵۲- نمودار سرعت - زمان متحرکی که در راستای محور x حرکت می‌کند، به شکل زیر است. اگر بردار مکان متحرک در لحظه $t = 6s$ برابر با $(18m)\vec{i}$ باشد، بردار مکان متحرک در مبدأ زمان بر حسب متر کدام است؟



$$8\vec{i} \quad (1)$$

$$6\vec{i} \quad (2)$$

$$-8\vec{i} \quad (3)$$

$$-6\vec{i} \quad (4)$$

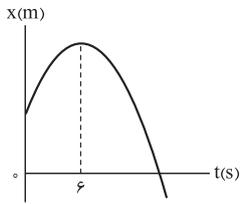
۵۳- سرعت متوسط متحرکی که با شتاب ثابت $1/2 \text{ m/s}^2$ در مسیری مستقیم حرکت می‌کند، در دو ثانیه سوم، برابر صفر است. سرعت متوسط این متحرک در ۵ ثانیه سوم چند متر بر ثانیه است؟

$$9 \quad (4) \quad 18 \quad (3) \quad 6 \quad (2) \quad 12 \quad (1)$$

۵۴- متحرکی در مبدأ زمان از مکان $x_0 = d$ ، با شتاب ثابت شروع به حرکت می‌کند. اگر تندی متحرک هنگام عبور از مکان $x_1 = 3d$ برابر 5 m/s باشد، تندی آن هنگام عبور از مکان $x_2 = 9d$ ، برابر چند متر بر ثانیه است؟

$$15 \quad (4) \quad 10 \quad (3) \quad 5\sqrt{6} \quad (2) \quad 5\sqrt{3} \quad (1)$$

۵۵- نمودار مکان - زمان متحرکی که با شتاب ثابت، در راستای محور x حرکت می‌کند، به شکل زیر است. اندازه سرعت متوسط متحرک در ۵ ثانیه دوم چند برابر تندی متوسط آن در ۴ ثانیه دوم است؟



$$\frac{15}{8} \quad (2)$$

$$\frac{3}{2} \quad (1)$$

$$\frac{17}{10} \quad (4)$$

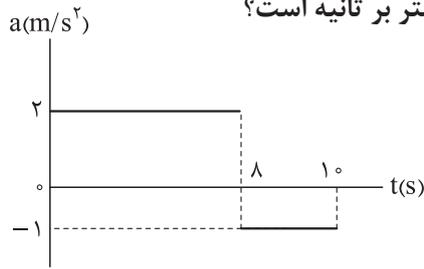
$$\frac{17}{8} \quad (3)$$

۵۶- متحرکی با شتاب ثابت در راستای محور x حرکت می‌کند. اگر در $8s$ اول، سرعت متوسط متحرک برابر $(8 \text{ m/s})\vec{i}$ و تندی متوسط آن برابر 10 m/s باشد، مسافت طی شده توسط متحرک در ۲ ثانیه سوم، چند متر است؟

$$32 \quad (4) \quad 24 \quad (3) \quad 16 \quad (2) \quad 8 \quad (1)$$

محل انجام محاسبات

۵۷- نمودار شتاب - زمان متحرکی که در راستای محور x حرکت می‌کند، به شکل زیر است. اگر سرعت متوسط متحرک در 10 s اول برابر $\bar{a} (13/4 \text{ m/s})$ باشد، تندی متحرک در لحظه $t = 5$ s چند متر بر ثانیه است؟



۴ (۱)

۸ (۲)

۱۰ (۳)

۱۴ (۴)

۵۸- یک خودروی پلیس در کنار جاده ایستاده است. موتورسواری با سرعت ثابت 108 km/h از کنار آن می‌گذرد. در همین لحظه، خودروی پلیس با شتاب ثابت 4 m/s^2 در همان جهت شروع به حرکت می‌کند. خودروی پلیس چند ثانیه پس از شروع حرکت خود، به موتورسوار می‌رسد؟

۲ (۴)

۲۲/۵ (۳)

۱۵ (۲)

۷/۵ (۱)

۵۹- خودرویی در یک مسیر مستقیم با شتاب ثابت 4 m/s^2 به حرکت در می‌آید و پس از مدتی با سرعت ثابت به حرکت خود ادامه می‌دهد. در نهایت با شتاب ثابتی به بزرگی 8 m/s^2 ، حرکتش کند شده و می‌ایستد. اگر کل زمان حرکت خودرو 20 s و مسافت طی شده توسط آن در این مدت برابر 325 m باشد، بیشترین تندی خودرو در حین این حرکت، چند کیلومتر بر ساعت است؟

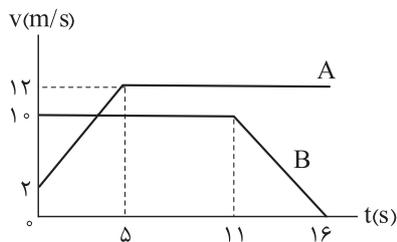
۹۰ (۴)

۷۲ (۳)

۲۵ (۲)

۲۰ (۱)

۶۰- نمودار سرعت - زمان دو متحرک A و B که در راستای محور x حرکت می‌کنند، به شکل زیر است. اگر دو متحرک در مبدأ زمان، در یک مکان قرار داشته باشند، در لحظه‌ای که دو متحرک به هم می‌رسند، اختلاف تندی آنها چند متر بر ثانیه است؟



۲ (۱)

۳ (۲)

۴ (۳)

۵ (۴)

فیزیک دهم

۶۱- در کدام گزینه، تعداد کمیت‌های اصلی و تعداد کمیت‌های برداری، برابر است؟

(۱) جریان الکتریکی، شار مغناطیسی، شتاب، تندی، دما

(۲) میدان الکتریکی، فشار، کار، انرژی، بار الکتریکی

(۳) میدان مغناطیسی، گرمای ویژه، جریان الکتریکی، نیرو، مقدار ماده

(۴) بار الکتریکی، شدت روشنایی، تکانه، نیروی محرکه الکتریکی، دما

محل انجام محاسبات

۶۲- دمای محیطی چند مرتبه توسط یک دماسنج اندازه‌گیری شده و مقدارهای به دست آمده، در جدول زیر ثبت شده است. به ترتیب دقت اندازه‌گیری این دماسنج کدام است و مقدار مناسب برای گزارش دمای این محیط، چند درجه سلسیوس است؟

شماره آزمایش	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸
دما (°C)	۲۵/۲	۲۵/۰	۲۴/۹	۲۵/۴	۲۰/۲	۲۵/۵	۲۹/۶	۲۵/۸

$$۲۵/۲،۱ \quad (۴)$$

$$۲۵/۳،۱ \quad (۳)$$

$$۲۵/۲،۰/۱(۲)$$

$$۲۵/۳،۰/۱(۱)$$

۶۳- استخری به ابعاد $۶m \times ۸m \times ۳m$ با آهنگ ثابت $۵ L/s$ در حال پر شدن است. پس از چند ساعت نصف حجم این استخر از آب پر می‌شود؟

$$۸ \quad (۴)$$

$$۶ \quad (۳)$$

$$۴ \quad (۲)$$

$$۲ \quad (۱)$$

۶۴- شعاع استوانه توپُر مسی A، ۲ برابر شعاع خارجی استوانه آلومینیمی B و شعاع داخلی استوانه B نصف شعاع خارجی آن است. اگر ارتفاع استوانه A، ۳ برابر ارتفاع استوانه B باشد، جرم استوانه A چند برابر جرم استوانه B است؟ (چگالی آلومینیم $\frac{۳}{۱۰}$ برابر چگالی مس است.)

$$\frac{۱۶۰}{۹} \quad (۴)$$

$$\frac{۴۰}{۳} \quad (۳)$$

$$\frac{۲۴}{۵} \quad (۲)$$

$$\frac{۱۶۰}{۳} \quad (۱)$$

۶۵- برای تولید یک آلیاژ به چگالی $۷/۲ g/cm^3$ ، فلز A با چگالی $۶ g/cm^3$ را با فلز B به چگالی $۸ g/cm^3$ مخلوط می‌کنیم. برای تهیه $۱۲۰kg$ از این آلیاژ، چند کیلوگرم فلز A نیاز داریم؟

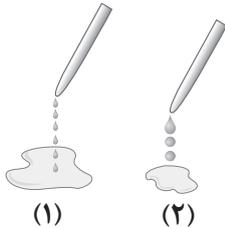
$$۸۰ \quad (۴)$$

$$۶۰ \quad (۳)$$

$$۴۰ \quad (۲)$$

$$۲۰ \quad (۱)$$

۶۶- در شکل زیر، قطره‌های روغن با دمای متفاوت از دهانه دو قطره‌چکان یکسان خارج می‌شوند. به ترتیب از راست به چپ، در کدام شکل دما و در کدام شکل نیروی هم‌چسبی بین مولکول‌های روغن بیشتر است؟



(۱)

(۲)

$$(۱)، (۱) \quad (۱)$$

$$(۲)، (۲) \quad (۲)$$

$$(۱)، (۲) \quad (۳)$$

$$(۲)، (۱) \quad (۴)$$

۶۷- یک لوله موئین که سطح داخل آن با روغن چرب شده است را به طور عمود در ظرف آبی فرو می‌بریم. کدام یک از موارد زیر درست است؟

(الف) سطح آب درون لوله برآمده است.

(ب) سطح آب در لوله، بالاتر از سطح آب درون ظرف است.

(پ) سطح آب درون لوله فرو رفته است.

(ت) سطح آب در لوله، پایین‌تر از سطح آب درون ظرف است.

$$(۴) \quad \text{پ و ت}$$

$$(۳) \quad \text{پ و ب}$$

$$(۲) \quad \text{الف و ت}$$

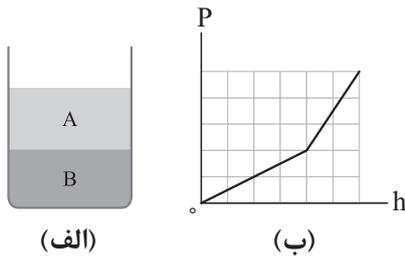
$$(۱) \quad \text{الف و ب}$$

محل انجام محاسبات

۶۸- در ظرفی که روی سطح افقی قرار دارد، تا ارتفاع 20 cm مایعی ریخته شده و فشار پیمانه‌ای در کف ظرف 4000 Pa است. اگر فشار هوا 1 bar باشد، فشار در فاصله 15 سانتی‌متری از کف ظرف چند کیلوپاسکال است؟

- ۱ (۱) ۳ (۲) 101 (۳) 103 (۴)

۶۹- در شکل (الف)، دو مایع مخلوط نشدنی A و B در ظرفی استوانه‌ای ریخته شده‌اند. اگر نمودار فشار پیمانه‌ای بر حسب عمق در این ظرف به شکل (ب) باشد، به ترتیب از راست به چپ، چگالی مایع A چند برابر چگالی مایع B، و جرم مایع A چند برابر جرم مایع B است؟

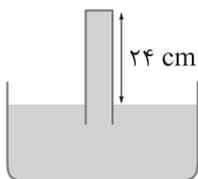


$\frac{3}{2}, \frac{1}{3}$ (۱)

$\frac{3}{2}, \frac{2}{3}$ (۲)

$\frac{2}{3}, \frac{2}{3}$ (۳)

$\frac{2}{3}, \frac{1}{3}$ (۴)



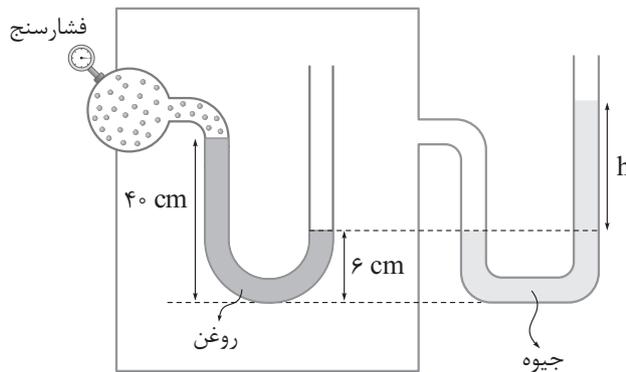
۷۰- در شکل مقابل، لوله به سطح مقطع 5 cm^2 به‌طور وارون در ظرف حاوی مایعی به چگالی $3/4\text{ g/cm}^3$ فرو رفته است. اگر فشار هوا برابر 66 cmHg باشد، اندازه نیرویی که مایع به انتهای لوله وارد می‌کند، چند نیوتون است؟ ($g = 10\text{ N/kg}$ و چگالی جیوه $13/6\text{ g/cm}^3$ است.)

$40/8$ (۲)

$4/08$ (۱)

$28/6$ (۴)

$2/86$ (۳)



۷۱- در شکل مقابل، اگر فشارسنج $4/08\text{ kPa}$ را نشان دهد، ارتفاع h چند سانتی‌متر است؟ (فشار هوا 100 kPa ، $g = 10\text{ N/kg}$ ، $0/6\text{ g/cm}^3 = \rho_{\text{روغن}}$ و $13/6\text{ g/cm}^3 = \rho_{\text{جیوه}}$ است.)

$4/5$ (۱)

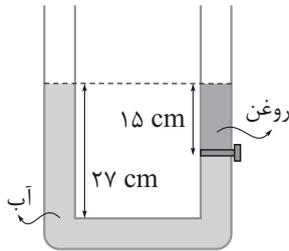
8 (۲)

3 (۳)

5 (۴)

محل انجام محاسبات

۷۲- در شکل زیر، آب و روغن، توسط شیر رابط از هم جدا شده‌اند. اگر شیر را باز کنیم، سطح آزاد آب چند سانتی‌متر و در چه جهتی جابه‌جا می‌شود؟ ($\rho_{\text{آب}} = 1000 \text{ kg/m}^3$ ، $\rho_{\text{روغن}} = 800 \text{ kg/m}^3$)

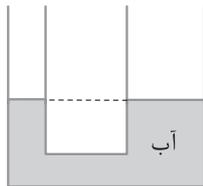


(۱) ۳، به سمت بالا

(۲) ۳، به سمت پایین

(۳) ۱/۵، به سمت بالا

(۴) ۱/۵، به سمت پایین



۷۳- سطح مقطع شاخه سمت راست و شاخه سمت چپ لوله U شکل مقابل، به ترتیب 4 cm^2 و 2 cm^2 است. اگر به شاخه سمت راست 400 g روغن و به شاخه سمت چپ 150 g نفت اضافه کنیم، اختلاف ارتفاع آب در دو شاخه به چند سانتی‌متر می‌رسد؟ (چگالی آب 1 g/cm^3 و چگالی نفت و روغن کم‌تر از چگالی آب است.)

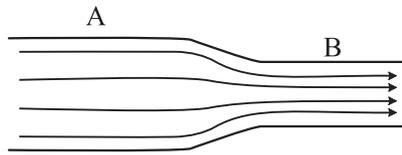
(۱) ۱۰

(۲) ۱۲/۵

(۳) ۲۰

(۴) ۲۵

۷۴- در شکل مقابل، شعاع مقطع لوله در قسمت A، ۲ برابر شعاع مقطع لوله در قسمت B است و شماره تراکم‌ناپذیری که حجم لوله را پُر کرده با تندی v از مقطع A وارد و با تندی v' از مقطع B خارج می‌شود. اگر این شماره با تندی v از مقطع B وارد شود، با تندی چند v' از مقطع A خارج می‌شود؟



(۱) ۱۶

(۲) ۴

(۳) ۱/۱۶

(۴) ۱/۴

۷۵- چند مورد از عبارتهای زیر درست است؟

(الف) در روزهایی که باد می‌وزد، ارتفاع موج‌های دریا و اقیانوس پایین‌تر از ارتفاع میانگین می‌شود.

(ب) بال هواپیما طوری طراحی می‌شود که تندی هوا در بالای بال کم‌تر از زیر آن باشد.

(پ) سطح مقطع باریکه عمودی آب خارج‌شده از شیر آب، با نزدیک شدن به سطح زمین بیشتر می‌شود.

(ت) با دمیدن به فضای بین دو نوار کاغذی سبک و نزدیک به هم، نوارها به هم نزدیک می‌شوند.

(۱) ۴ صفر

(۲) ۳

(۳) ۲

(۴) ۱

شیمی دوازدهم

۷۶- درستی یا نادرستی عبارتهای زیر به ترتیب در کدام گزینه آمده است؟

- بنزین را می توان آلکانی هشت کربنه در نظر گرفت که حلال مناسبی برای مولکولهای ید است.
- شاخص امید به زندگی، درصدی از افراد یک جامعه را نشان می دهد که به زندگی امیدوارند.
- افزودن آنزیم به صابون همانند استفاده از آب گرم به جای آب سرد در شست و شوی پارچه، سبب کاهش درصد لکه های باقی مانده روی آن می شود.

• کلوئید مخلوط ناهمگنی است که ذره های سازنده آن را درشت مولکول ها تشکیل می دهند.

(۱) درست - نادرست - درست - نادرست

(۲) درست - درست - درست - درست

(۳) نادرست - نادرست - نادرست - نادرست

(۴) نادرست - درست - نادرست - درست

۷۷- کدام موارد زیر درباره اوره درست است؟ ($O = ۱۶, N = ۱۴, C = ۱۲, H = ۱ : g.mol^{-1}$)

(الف) یک مولکول قطبی با فرمول شیمیایی $Co(NH_2)_2$ است.

(ب) در 30° گرم از آن، 14 گرم نیتروژن و 2 مول هیدروژن وجود دارد.

(پ) هنگام حل شدن در آب، توانایی تشکیل پیوند هیدروژنی با مولکول های آب را دارد.

(ت) شمار جفت الکترون های ناپیوندی آن نصف شمار این جفت الکترون ها در مولکول اتیلن گلیکول است.

(۱) الف - ب

(۲) ب - پ

(۳) پ - ت

(۴) ب - ت

۷۸- کدام مطلب درست است؟

(۱) نسبت شمار اتم های هیدروژن به شمار اتم های کربن در ساختار یک صابون با این نسبت در اتیلن گلیکول نمی تواند برابر باشد.

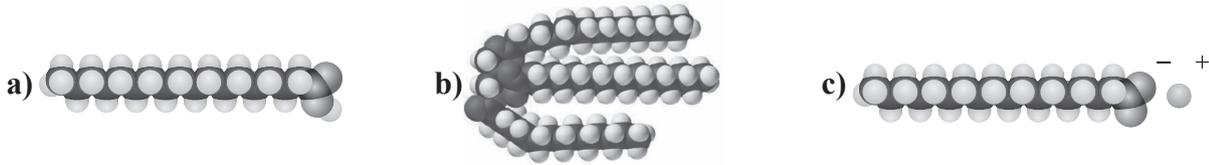
(۲) به دلیل قابل توجه بودن شمار گروه های عاملی کربوکسیل در ساختار مولکول های سازنده عسل، لکه عسل به راحتی با آب شسته می شود.

(۳) ذرات سازنده کلوئیدها برخلاف ذرات سازنده محلول ها پس از مدتی ته نشین می شوند.

(۴) با اضافه کردن صابون جامد به آب، یون های $-COO^-$ وارد آب شده و توسط مولکول های آب، آب پوشیده می شوند.

محل انجام محاسبات

۷۹- شکل‌های زیر مدل فضاپرکن سه ترکیب آلی را نشان می‌دهد. کدام موارد از مطالب زیر درباره آن‌ها درست است؟



الف) در واکنش با NaOH، می‌تواند به c تبدیل شود.

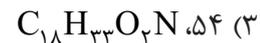
ب) نوع نیروی بین مولکولی b، مانند نیروی بین مولکولی غالب a است.

پ) مخلوط آب، روغن و c از نوع کلئید است.

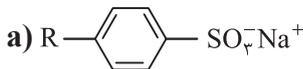
ت) با جایگزینی کاتیون c با کاتیون فلزی با شعاع بزرگ‌تر، نقطه ذوب آن افزایش می‌یابد.

۱) الف - ب - پ ۲) ب - ت ۳) الف - پ - ت ۴) ب - پ

۸۰- لینولئیک اسید از خانواده اسیدهای چرب «آمگا ۳» است که ۱۸ کربنی بوده و در ساختار آن ۳ پیوند دوگانه کربن-کربن وجود دارد. از سوختن کامل ۲/۰ مول از این اسید چرب، چند گرم آب تولید می‌شود و فرمول صابون مایع تولیدشده از آن کدام می‌تواند باشد؟ ($O = 16, H = 1: g.mol^{-1}$)



۸۱- کدام گزینه در مورد ترکیب‌های داده‌شده، درست است؟ (R و R' را زنجیر هیدروکربنی سیرشده در نظر بگیرید. $(K = 39, S = 32, O = 16, C = 12, H = 1: g.mol^{-1})$)



۱) اگر R و R' یکسان باشند، تفاوت جرم مولی دو ترکیب ۱۱۲ گرم خواهد بود.

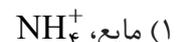
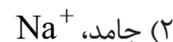
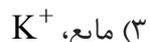
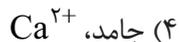
۲) تفاوت شمار جفت‌الکترون‌های ناپیوندی دو ترکیب، دو برابر تفاوت شمار پیوندهای دوگانه آن‌هاست.

۳) قدرت پاک‌کنندگی ترکیب b از a بیشتر است.

۴) قدرت پاک‌کنندگی a به شدت انجام واکنش آن با آلاینده‌ها بستگی دارد.

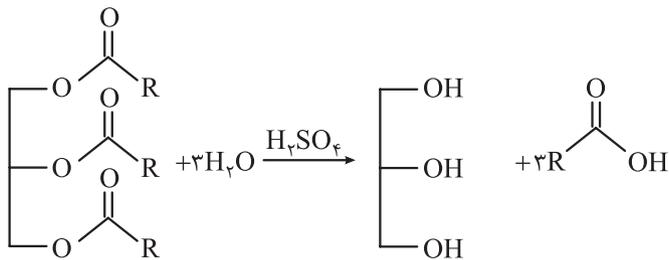
۸۲- اگر درصد جرمی کاتیون به‌کاررفته در یک صابون حاوی ۱۳ اتم کربن که زنجیر هیدروکربنی آن ۳ پیوند دوگانه دارد، برابر ۸ درصد باشد، حالت فیزیکی صابون و نماد کاتیون به‌کاررفته در ساختار آن کدام است؟

($Ca = 40, K = 39, Na = 23, N = 14, O = 16, C = 12, H = 1: g.mol^{-1}$)



محل انجام محاسبات

۸۳- استرهای سنگین با آب در محیط اسیدی واکنش می‌دهند و به اسیدهای چرب و گلیسرین تبدیل می‌شوند. با توجه به معادله این واکنش، کدام مطلب نادرست است؟



- (۱) فرمول مولکولی گلیسرین را می‌توان به صورت $\text{C}_3\text{H}_8(\text{OH})_3$ نشان داد.
- (۲) اگر واکنش‌دهنده آلی، چربی کوهان شتر باشد، طی این واکنش، اسید چرب $\text{CH}_3(\text{CH}_2)_{16}\text{COOH}$ تولید می‌شود.
- (۳) اگر واکنش‌دهنده آلی، روغن زیتون باشد، فرمول مولکولی اسید چرب تولیدشده $\text{C}_{18}\text{H}_{34}\text{O}_2$ است.
- (۴) اگر در این واکنش ۳ مول اسید چرب $\text{CH}_3(\text{CH}_2)_{10}\text{COOH}$ تولید شود، فرمول استر بلندزنجیر اولیه به صورت $\text{C}_{39}\text{H}_{72}\text{O}_6$ است.
- ۸۴- کدام مورد نادرست است؟

- (۱) در فرایند پاک شدن لکه چربی روی پارچه توسط آب و صابون، سطح خارجی صابون و قطره چربی دارای بار منفی است.
- (۲) از برخی از صابون‌های سنتی برای چرب کردن سطح سنگ‌ها در تنور نانوائی استفاده می‌شود.
- (۳) اگر درصد پلی‌استر در پارچه‌های A و B به ترتیب برابر ۴۰ و ۶۰ باشد، چسبندگی لکه چربی روی پارچه A بیشتر است.
- (۴) صابون مراغه افزودنی شیمیایی ندارد و برای شست‌وشوی موهای چرب مناسب است.

۸۵- با توجه به مطالب کتاب درسی و جدول داده‌شده، چند مورد از موارد زیر درست است؟

نقش	ماده افزودنی به صابون یا شوینده
از بین بردن قارچ‌های پوستی	A
افزایش قدرت پاک‌کنندگی	X
خاصیت میکروب‌کشی	D

- عنصر مؤثر در ماده A در ساختار پاک‌کننده‌های غیرصابونی نیز وجود دارد.
- منظور از ماده X همان نمک‌های منیزیم است.
- عنصر مؤثر در ماده D در دوره سوم جدول دوره‌ای قرار دارد.
- نقش اصلی ماده X، جلوگیری از تشکیل رسوب و ایجاد لکه است.

۱ (۴)

۲ (۳)

۳ (۲)

۴ (۱)

محل انجام محاسبات

شیمی دهم

۹۱- اگر تفاوت شمار نوترون‌ها و نصف الکترون‌ها در یون X^{3+} ، $\frac{2}{3}$ برابر شمار پروتون‌های آن باشد، کدام اتم را می‌توان ایزوتوپ X در نظر گرفت؟



۹۲- درستی یا نادرستی مطالب زیر به ترتیب در کدام گزینه آمده است؟

- رادیوایزوتوپ فسفر، جزء رادیوایزوتوپ‌هایی است که در ایران تولید می‌شود.
- تکنسیم شناخته‌شده‌ترین فلز پرتوزاست و در تصویربرداری پزشکی کاربرد دارد.
- فراوان‌ترین ایزوتوپ اورانیم، ${}^{235}U$ است که به عنوان سوخت راکتورهای اتمی استفاده می‌شود.
- با وجود پیشرفت در علم شیمی و فیزیک، انسان هنوز نمی‌تواند عنصرهای دیگر را به طلا تبدیل کند.

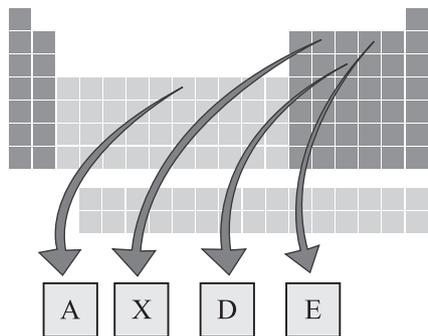
(۲) درست - نادرست - نادرست - نادرست

(۱) درست - درست - نادرست - نادرست

(۴) نادرست - درست - درست - درست

(۳) نادرست - نادرست - درست - درست

۹۳- با توجه به جدول زیر، هر یک از توضیحات داده‌شده را به ترتیب به کدام عنصرها می‌توان نسبت داد؟ (نماد عنصرها فرضی است.)



• تفاوت شماره دوره و گروه آن در جدول برابر ۱۲ است.

• تفاوت عدد اتمی آن با شمار کل عنصرهای شناخته‌شده، برابر با شمار عنصرهای طبیعی است.

• با عنصری که اتم آن ۱۶ الکترون دارد، خواص شیمیایی مشابهی دارد.

(۴) A, E, D

(۳) E, D, X

(۲) X, A, D

(۱) E, A, X

۹۴- چند مورد از مطالب زیر درباره ایزوتوپ‌های ساختگی هیدروژن درست است؟

• سبک‌ترین آن‌ها نیم‌عمری در حدود ۱۲ سال دارد.

• ناپایدارترین آن‌ها در هسته خود ۷ نوترون دارد.

• با افزایش شمار نوترون‌های آن‌ها، نیم‌عمر آن‌ها به طور منظم کاهش می‌یابد.

• در همه آن‌ها، نسبت عدد جرمی به عدد اتمی بزرگ‌تر از ۳ است.

(۴) ۴

(۳) ۳

(۲) ۲

(۱) ۱

محل انجام محاسبات

۹۵- در نمونه‌ای 500 اتمی شامل ایزوتوپ‌های طبیعی منیزیم (24Mg)، شمار نوترون‌ها، 155 واحد بیشتر از شمار پروتون‌هاست. اگر درصد فراوانی سبک‌ترین ایزوتوپ در این نمونه برابر 80% باشد، درصد فراوانی سنگین‌ترین ایزوتوپ و جرم اتمی میانگین منیزیم در این نمونه به ترتیب کدام است؟

- (۱) $24/32 - 12$ (۲) $24/29 - 11$
 (۳) $24/31 - 11$ (۴) $24/28 - 12$

۹۶- کدام گزینه درست است؟ ($\text{Fe} = 56, \text{Ar} = 40, \text{H} = 1: \text{g.mol}^{-1}$)

- (۱) اغلب در یک نمونه طبیعی از عنصری معین، هیچ دو اتمی جرم یکسانی ندارند.
 (۲) جرم اتمی کربن 12 به تقریب برابر با 12 amu بوده و جرم اتمی فراوان‌ترین ایزوتوپ هیدروژن کمی بیشتر از 1 amu است.
 (۳) شمار اتم‌های موجود در 14 گرم گاز آرگون، با شمار اتم‌های موجود در $19/6$ گرم آهن برابر است.
 (۴) در یک نمونه یک گرمی از گاز هیدروژن، به اندازه N_A مولکول وجود دارد.

۹۷- درون ظرفی به جرم 620 گرم تعدادی گوی آلومینیمی مشابه به قطر 1 cm می‌ریزیم و آن را روی ترازو قرار می‌دهیم. اگر ترازو عدد $814/4$ گرم را نشان دهد، چند گوی کروی شکل در این ظرف وجود دارد و هر گوی شامل چند مول الکترون ظرفیتی است؟ (جرم هر سانتی‌متر مکعب از این گوی‌ها را $2/7$ گرم در نظر بگیرید، $\text{Al} = 27 \text{ g.mol}^{-1}$ و $\pi = 3$)

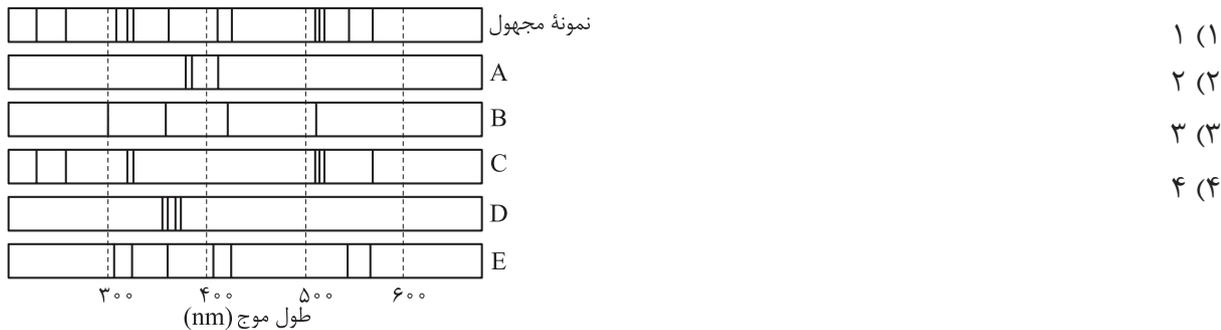
- (۱) $0/21 - 138$ (۲) $0/15 - 138$
 (۳) $0/21 - 144$ (۴) $0/15 - 144$

۹۸- کدام موارد از مطالب زیر درست است؟

- (الف) زاویه انحراف پرتوهای مرئی هنگام عبور از منشور، با طول موج آن‌ها رابطه عکس دارد.
 (ب) امواج حاصل از کنترل تلویزیون، نوعی از پرتوهای الکترومغناطیس با طول موج کوتاه‌تر از 400 نانومتر هستند.
 (پ) رنگ شعله فلز سدیم مشابه رنگ پرتو حاصل از انتقال الکترونی $n = 4 \rightarrow n = 2$ در اتم هیدروژن است.
 (ت) نام پرتوهای فرابنفش نشان می‌دهد که این پرتوها طول موج بلندتری نسبت به نور بنفش دارند.

- (۱) الف - ت (۲) فقط الف
 (۳) ب - پ (۴) الف - ب - ت

۹۹- با توجه به طیف‌های داده‌شده، چه تعداد از عنصرهای داده‌شده در نمونه مجهول وجود دارد؟



محل انجام محاسبات

۱۰۰- کدام موارد از مطالب زیر درست است؟

- (الف) الکترون‌های موجود در هر لایه فقط در محدوده معینی از آن لایه، احتمال حضور دارند.
 (ب) در مدل کوانتومی برخلاف مدل اتمی بور، انرژی دادوستد شده هنگام انتقال الکترون‌ها در اتم، گسسته است.
 (پ) با کاهش فاصله از هسته اتم، انرژی الکترون‌ها کاهش می‌یابد.
 (ت) انرژی لایه‌های الکترونی پیرامون هسته هر اتم به عدد اتمی آن وابسته است.
- (۱) الف - ب (۲) پ - ت (۳) الف - پ (۴) ب - ت

۱۰۱- کدام گزینه نادرست است؟

- (۱) حداکثر گنجایش الکترونی پنجمین نوع زیرلایه یک اتم، با مجموع شمار عنصرهای دوره دوم و سوم جدول تناوبی برابر است.
 (۲) الکترونی با عدد کوانتومی فرعی برابر ۳ می‌تواند در لایه الکترونی پنجم قرار داشته باشد.
 (۳) نسبت حداکثر گنجایش الکترونی لایه‌ای با عدد کوانتومی اصلی n به شمار زیرلایه‌های موجود در آن لایه برابر $2n$ است.
 (۴) اگر در زیرلایه‌ای با عدد کوانتومی $l = 2$ و $n = 4$ ، ۵ الکترون قرار گیرد، این زیرلایه نیمه پر محسوب می‌شود.
- ۱۰۲- مجموع اعداد کوانتومی اصلی و فرعی ($n + l$) زیرلایه‌های A و B به ترتیب برابر ۵ و ۶ است. کدام مطلب درباره این دو زیرلایه به یقین درست است؟

- (۱) A در اتم عنصرهای دوره پنجم و B در اتم عنصرهای دوره ششم جدول تناوبی از الکترون اشغال می‌شود.
 (۲) گنجایش الکترونی لایه‌ای که B در آن قرار دارد، بیشتر از گنجایش الکترونی لایه‌ای است که A در آن قرار دارد.
 (۳) در آرایش الکترونی هیچ‌یک از عنصرهای دوره سوم جدول دوره‌ای زیرلایه A یا B وجود ندارد.
 (۴) گنجایش الکترونی هر دو زیرلایه، از گنجایش الکترونی زیرلایه‌ای با $n + l = 4$ بیشتر است.
- ۱۰۳- با توجه به آرایش الکترونی فشرده اتم‌های داده شده، کدام موارد از مطالب زیر درست است؟

اتم	M	X	Z
آرایش الکترونی فشرده	$[\text{Kr}] 5s^2$	$[\text{Ar}] 3d^{10} 4s^2 4p^4$	$[\text{Ar}] 3d^5 4s^1$

- (الف) تفاوت شماره دوره و گروه عنصر M در جدول دوره‌ای برابر ۳ است.
 (ب) عنصر X به دسته p و عنصرهای M و Z به دسته s جدول دوره‌ای تعلق دارند.
 (پ) در آرایش الکترونی اتم Z مانند اتم A، دو زیرلایه نیمه پر وجود دارد.
 (ت) گاز نجیب به کاررفته در آرایش الکترونی فشرده اتم D، همانند هیچ‌یک از گازهای نجیب استفاده شده در جدول نیست.

(۲) الف - ت

(۱) الف - پ

(۴) ب - ت

(۳) ب - پ

محل انجام محاسبات

۱۰۴- با توجه به جدول زیر که مربوط به برخی از عناصر اصلی (دسته s یا p) چهار دوره اول جدول تناوبی است، کدام گزینه نادرست است؟

آرایش الکترون - نقطه‌ای	E	D	X	B	A
شمار الکترون با $l = 0$	۲	۸	۷	۶	۴

(۱) نسبت شمار کاتیون به شمار آنیون در ترکیب یونی تشکیل شده از عناصر B و X برابر ۲ است.

(۲) آخرین زیرلایه اشغال شده در آرایش الکترونی عنصر D دارای ۲ الکترون است.

(۳) فرمول شیمیایی ترکیب دوتایی هیدروژن دار عنصرهای A و B به صورت AH_4 و H_2B است.

(۴) تفاوت شماره گروه عناصر X و D در جدول دوره‌ای برابر ۱۲ است.

۱۰۵- اگر برای تشکیل هر گرم از فسفید فلز M از گروه اول جدول دوره‌ای (از عنصرهای سازنده خود)، $1/806 \times 10^{22}$ الکترون مبادله شود، فلز M کدام است؟ ($P = 31 \text{ g.mol}^{-1}$)



پاسخ‌نامه تشریحی آزمون را ساعت ۱۶ از صفحه شخصی خودتان در سایت آزمون خیلی سبز دریافت کنید.



azmoon.kheylisabz.com

محل انجام محاسبات

پاسخ نامہ آزمون آزمائشی خیلی سبز



مرحله ششم

پایہ دوازدهم

تاریخ برگزاری: ۲۷/مهر/۱۴۰۳

سال تحصیلی ۱۴۰۳-۰۴

نام درس	طراحان به ترتیب حروف الفبا
حسابان	حسین شفیع زاده - مهرداد کیوان
آمار و احتمال	علیرضا شریف خطیبی - عطا صادقی - حمید گلزاری - سروش موئینی
هندسه	محمد رضا حسینی فرد - محمد طاهر شعاعی - کیوان صارمی - محسن میراسلامی - حسین هاشمی طاهری
فیزیک	محسن توانا - علیرضا جباری - رضا سبزمیدانی - محمد جواد سورچی نوید شاهی - علیرضا عبداللہی - علیرضا گوئے - حامد نبی منصور
شیمی	مهدی براتی - هومن زندگی - علی طہانی - یاسر عبداللہی

نام درس	مسئول درس	گزینشگر	مؤلف پاسخ نامہ	کارشناسان علمی	ویراستاران به ترتیب حروف الفبا
حسابان	حسین شفیع زاده مهرداد کیوان	حسین شفیع زاده مهرداد کیوان	عادل حسینی	عادل حسینی سجاد داوطلب محمد سجاد نقیہ	شمیم پهلوان شریف ماهان فنی فر ابوالفضل ناصری
آمار و احتمال	حمید گلزاری	حمید گلزاری	الما احسانیان	امیر حسین ابومحبوب مریم نظری	ماهان فنی فر علیرضا کاظمی بقا ابوالفضل ناصری
هندسه	حمید گلزاری	حمید گلزاری	الما احسانیان	امیر حسین ابومحبوب	زہرا جالینوسی فرزانه خاکپاش ابوالفضل ناصری
فیزیک	رضا سبزمیدانی	نوید شاهی	امین امینی علیرضا جباری محمد جواد سورچی	امین امینی	مهدی بابائی مدیا عیدی علیرضا گوئے احسان محمدی امیر محمودی انزلی مهدی یوسفی
شیمی	یاسر عبداللہی	یاسر عبداللہی	یاسر عبداللہی محدثہ ملک پور	محمد مرادی حمید ذبحی	مہسا خاکی احسان رحیمی امیر رضا نوری

سرپرست محتوایی: فاطمہ آقاچانیپور



آزمون آزمائشی خلی سبز

منیژه حق دوست - راضیہ سادات خلدی نسب
زہرا صفری - مہدیہ غنی فرد
زہرا فرہادی مہر - مریم مسلمی زادہ
ساعده نمازی - مریم نوری نیا

ویراستاران فنی

مونا آندستا
سارا گنجی آزادپور

رسم شکل

سحر ازلی تاش - فاطمہ بخششی
مریم حسین زادہ - سپیدہ سخایی
مائدہ صبری - نیلوفر فرخجستہ
مہدیہ گل پور - لیلا نعمت پور

صفحہ آرائی



حسابان و ریاضیات پایه

تابع $f(x) = (2a-1)x + a - b$ ثابت و تابع $g(x) = (b-3)x + a + 2c$ همانی است. تابع خطی $y = (2f - g)(x)$ از کدام ربع دستگاه مختصات عبور نمی کند؟

$$y = x$$

در ضابطه اش هیچ x ای ندارد.

دوم (۲)

اول (۱)

چهارم (۴)

سوم (۳)

تعاریف ساده تابع ثابت و تابع همانی رو دنبال کن، دقت کن که به c احتیاجی نداری.

 Hint

 Box

تابع چندجمله‌ای، تابع خطی، تابع همانی و تابع ثابت

تابع چندجمله‌ای: هر تابع را که نمایش جبری آن، یک چندجمله‌ای جبری از یک متغیر باشد، تابع چندجمله‌ای می‌نامند:

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 \quad ; \quad a_n \neq 0$$

هر تابعی را که بتوان ضابطه آن را به شکل $f(x) = ax + b$ یا $y = ax + b$ نوشت یک تابع خطی می‌نامند. a شیب خط و b عرض از مبدأ آن است. طول از مبدأ نیز برابر $-\frac{b}{a}$ است. معمولاً دامنه و برد تابع خطی \mathbb{R} است، اما اگر دامنه، بازه $[x_1, x_2]$ باشد برد، یکی از بازه‌های $[f(x_1), f(x_2)]$ یا $[f(x_2), f(x_1)]$ است.

تابع همانی: اگر در یک تابع، هر عضو از دامنه، دقیقاً به همان عضو از برد نظیر شود، تابع همانی است. ضابطه تابع همانی $f(x) = x$ است. تابع ثابت: تابعی که برد آن فقط شامل یک عضو باشد، تابع ثابت می‌نامند. ضابطه تابع ثابت $f(x) = k$ است.

گام اول: تابع f ثابت است، پس ضابطه آن باید فقط یک عدد حقیقی باشد یا به بیان دیگر ضریب x باید صفر باشد:

$$\Rightarrow 2a - 1 = 0 \Rightarrow a = \frac{1}{2}$$

گام دوم: از قبل می‌دانیم که ضابطه g به صورت $g(x) = x$ است. اما برای تکمیل ضابطه تابع f و در نتیجه به دست آوردن ضابطه تابع $2f - g$ به مقدار b نیاز داریم:

$$\Rightarrow b - 3 = 1 \Rightarrow b = 4$$

گام سوم: حال هر دو ضابطه را داریم:

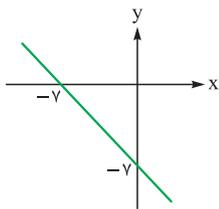
$$f(x) = a - b = \frac{1}{2} - 4 = -\frac{7}{2}$$

$$g(x) = x$$

پس ضابطه تابع $2f - g$ به صورت زیر است:

$$y = (2f - g)(x) = 2f(x) - g(x) = 2\left(-\frac{7}{2}\right) - x = -7 - x$$

گام چهارم: نمودار این تابع را رسم می‌کنیم و می‌بینیم که از ربع اول دستگاه مختصات نمی‌گذرد:


 پاسخ خیلی تشریحی

$5x^2$ عددی صحیح است.

تعداد جواب‌های معادله $[6x^2] = 5x^2$ کدام است؟

۹ (۴)

۷ (۳)

۵ (۲)

۴ (۱)

۲



$6x^2$ رو به $x^2 + 5x^2$ تبدیل کن. $5x^2$ صحیح نیست؟

Hint

دروس Box

جزء صحیح یک عدد: جزء صحیح یک عدد صحیح برابر خود آن عدد و جزء صحیح هر عدد غیر صحیح، برابر اولین عدد صحیح سمت چپ آن عدد (کوچک‌تر از آن) بر روی محور اعداد است و برای عدد حقیقی a آن را با نماد $[a]$ نمایش می‌دهیم.

جزء صحیح یک عدد حقیقی را بزرگ‌ترین عدد صحیحی در نظر می‌گیریم که کوچک‌تر از یا مساوی با خود آن عدد است. هر عدد حقیقی بین دو عدد صحیح متوالی یا مساوی با یکی از آن‌هاست، پس برای هر عدد حقیقی x ، عدد صحیح n وجود دارد به طوری که:

$$n \leq x < n+1 \leftarrow \frac{n \in \mathbb{Z}}{[x] = n}$$

ویژگی‌های جزء صحیح یک عدد:

نامساوی‌های جزء صحیح	تساوی‌های جزء صحیح
(۱) $[x] \leq k \xrightarrow{k \in \mathbb{Z}} x < k+1$	(۱) $[x] = k \xrightarrow{k \in \mathbb{Z}} k \leq x < k+1$
(۲) $[x] < a \xrightarrow{a \notin \mathbb{Z}} x < [a]+1$	(۲) $x \in \mathbb{Z} \Rightarrow [x] = x$
(۳) $[x] \geq k \xrightarrow{k \in \mathbb{Z}} x \geq k$	(۳) $[x] + [-x] = \begin{cases} 0 & ; x \in \mathbb{Z} \\ -1 & ; x \notin \mathbb{Z} \end{cases}$
(۴) $[x] > a \xrightarrow{a \notin \mathbb{Z}} x \geq [a]+1$	(۴) $[x+k] = [x]+k, \quad k \in \mathbb{Z}$
(۵) $[x] \leq x < [x]+1, \quad x \in \mathbb{R}$	(۵) $[kx] = \sum_{i=0}^{k-1} [x + \frac{i}{k}], \quad k \in \mathbb{Z}$
(۶) $0 \leq x - [x] < 1, \quad x \in \mathbb{R}$	در حالت خاص: $[2x] = [x] + [x + \frac{1}{2}]$

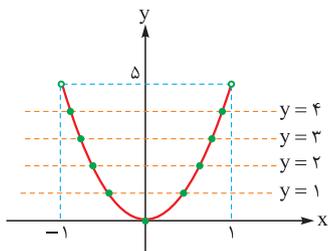
گام اول: حاصل برکت که یک عدد صحیح است، برابر $5x^2$ شده است، این یعنی $5x^2$ عدد صحیح است. حال اگر $6x^2$ را به یک $5x^2$ و یک x^2 بشکنیم و معادله را به صورت زیر بازنویسی کنیم:

$$[\underbrace{5x^2}_{\text{عدد صحیح}} + x^2] = 5x^2$$

طبق ویژگی‌های برکت در درس‌نامه، عدد صحیح $5x^2$ از برکت بیرون می‌آید:

$$\Rightarrow 5x^2 + [x^2] = 5x^2 \Rightarrow [x^2] = 0 \xrightarrow{\text{تعریف جزء صحیح}} 0 \leq x^2 < 1 \Rightarrow -1 < x < 1$$

گام دوم: اما همه اعضای بازه $(-1, 1)$ جواب معادله نیستند، بلکه آن‌هایی قابل قبول‌اند که به ازای آن‌ها $5x^2$ عددی صحیح شود. برای این کار نمودار تابع $y = 5x^2$ را با دامنه $(-1, 1)$ رسم می‌کنیم:



با توجه به شکل می‌بینیم که در ۹ نقطه مشخص شده، مقدار تابع $y = 5x^2$ عددی صحیح است، در نتیجه معادله اصلی صورت سؤال ۹ جواب دارد.



۳

اگر $f(x) = 4x + 2$ و $g(x) = 2x - 4$ باشد، توابع $(f + g)^{-1}$ و $f^{-1} - g^{-1}$ با کدام طول یکدیگر را قطع می‌کنند؟

- (۱) $-5/2$ (۲) $-4/8$
 (۳) $-6/8$ (۴) $-7/6$



Hint فقط خط و وارون تابع خطی داری.

درسی Box

۱) اعمال جبری روی توابع

روی دو تابع حقیقی f و g می‌توان اعمال جبری را انجام داد، یعنی جمع (تفریق) و ضرب (تقسیم). تنها نکته، مربوط به دامنه تابع نهایی است.

اگر f و g دو تابع به ترتیب با دامنه‌های D_f و D_g باشند، آن‌گاه:

$$(۱) (f + g)(x) = f(x) + g(x) \quad , \quad D_{f+g} = D_f \cap D_g$$

$$(۲) (f - g)(x) = f(x) - g(x) \quad , \quad D_{f-g} = D_f \cap D_g$$

$$(۳) (f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x) \quad , \quad D_{f \cdot g} = D_f \cap D_g$$

$$(۴) \left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} \quad , \quad D_{\frac{f}{g}} = (D_f \cap D_g) - \{x \mid g(x) = 0\}$$

بعد از به دست آوردن دامنه، ضابطه تابع نهایی از همان عملیات جبری بین ضابطه‌ها به دست می‌آید.

۲) محاسبه ضابطه تابع وارون

در حالت کلی برای یافتن ضابطه وارون تابع یک‌به‌یک $y = f(x)$ به ترتیب زیر عمل می‌کنیم:

(۱) برد تابع f را می‌یابیم: این برد، دامنه تابع f^{-1} است.

(۲) از معادله $y = f(x)$ ، x را برحسب y می‌یابیم.

(۳) در رابطه به دست آمده، x و y را با هم تعویض می‌کنیم.

مثال‌های خاص:

در تابع خطی و غیر ثابت $f(x) = ax + b$ ، ضابطه تابع وارون $f^{-1}(x) = \frac{x-b}{a}$ است. بنابراین وارون تابع خطی و غیر ثابت، خود یک تابع خطی است؛ ضمناً شیب‌های دو خط معکوس هم هستند.

وارون تابع هموگرافیک $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$ به صورت $f^{-1}(x) = \frac{-dx+b}{cx-a}$ است.

وارون تابع $f(x) = a(x-\alpha)^r + \beta$ به صورت $f^{-1}(x) = \sqrt[r]{\frac{x-\beta}{a}}$ است.

$$y = (f + g)(x) = f(x) + g(x) = 4x + 2 + 2x - 4 = 6x - 2$$

گام اول: ابتدا ضابطه تابع $f + g$ را می‌سازیم: ✓ پاسخ خیلی تشریحی

دقت کنید که چون دامنه تابع خطی همواره \mathbb{R} است، در کل این مسئله محدودیتی برای دامنه توابع نداریم.

$$y = 6x - 2 \xrightarrow{\text{وارون}} y = \frac{x+2}{6}$$

گام دوم: حال طبق درس‌نامه (۲)، وارون تابع $f + g$ را به دست می‌آوریم:

گام سوم: وارون توابع f و g و ضابطه تابع $f^{-1} - g^{-1}$ را نیز به دست می‌آوریم:

$$\left. \begin{aligned} f(x) = 4x + 2 &\xrightarrow{\text{وارون}} f^{-1}(x) = \frac{x-2}{4} \\ g(x) = 2x - 4 &\xrightarrow{\text{وارون}} g^{-1}(x) = \frac{x+4}{2} \end{aligned} \right\} \Rightarrow y = (f^{-1} - g^{-1})(x) = f^{-1}(x) - g^{-1}(x)$$

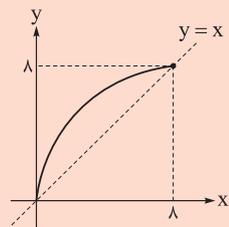
$$= \frac{x-2}{4} - \frac{x+4}{2} = -\frac{x+10}{4}$$

گام چهارم: و در نهایت نمودارهای دو تابع را قطع می‌دهیم، یعنی معادله حاصل از تساوی ضابطه‌های آن‌ها را حل می‌کنیم:

$$\frac{(f+g)^{-1}(x) = (f^{-1} - g^{-1})(x)}{6} \rightarrow \frac{x+2}{6} = -\frac{x+10}{4}$$

$$\Rightarrow 4x + 8 = -6x - 60 \Rightarrow 10x = -68 \Rightarrow x = -6/8$$

نمودار تابع f با دامنه $[0, 8]$ در شکل مقابل رسم شده است. دامنه تعریف تابع $g(x) = \sqrt{\frac{f(x)}{x - f^{-1}(2x)}}$ شامل چند عدد صحیح است؟



۲ (۱)

۳ (۲)

۴ (۳)

۵ (۴)

۴



Hint بپرداز به مخرج کسر.

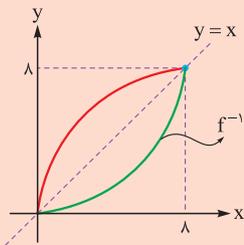
پاسخ خیلی تشریحی **گام اول:** دامنه تابع g محدوده‌ای از x است که به ازای آن‌ها کسر $\frac{f(x)}{x - f^{-1}(2x)}$ نامنفی باشد:

$$\Rightarrow \frac{f(x)}{x - f^{-1}(2x)} \geq 0$$

با توجه به نمودار، برد تابع f بازه $[0, 8]$ است. پس صورت کسر بالا همواره نامنفی است، در نتیجه مخرج کسر باید مثبت باشد:

$$\Rightarrow x - f^{-1}(2x) > 0 \Rightarrow f^{-1}(2x) < x$$

گام دوم: می‌دانیم برای رسم نمودار وارون هر تابع، نمودار آن را نسبت به خط $y = x$ قرینه می‌کنیم. در این سؤال نمودار f^{-1} را رسم می‌کنیم:



گام سوم: مجموعه جواب‌های نامعادله $f^{-1}(x) < x$ حدودی از x است که به ازای آن‌ها نمودار تابع f^{-1} زیر خط $y = x$ است. با توجه به شکل گام قبلی، این حدود بازه $(0, 8)$ است.

حال برای این که نمودار تابع $y = f^{-1}(2x)$ زیر خط $y = x$ قرار بگیرد، لازم است $2x$ در بازه $(0, 8)$ باشد:

$$\Rightarrow 0 < 2x < 8 \Rightarrow 0 < x < 4$$

پس دامنه تابع g بازه $(0, 4)$ است که شامل سه عدد صحیح است.



تابع $f(x) = x - 2 + 2\sqrt{1-x}$ با دامنه $(-\infty, 0]$ وارون تابع $g(x) = x - 2\sqrt{bx}$ است. مقدار $g(b)$ کدام است؟

-۴ (۴)

-۳ (۳)

-۲ (۲)

-۱ (۱)



عددگذاری کن و از ویژگی مهم « $f(\alpha) = \beta \Leftrightarrow f^{-1}(\beta) = \alpha$ » استفاده کن.



$$D_{f^{-1}} = R_f \text{ و } R_{f^{-1}} = D_f$$

اگر تابع f وارون پذیر باشد داریم:

$$f(a) = b \Leftrightarrow f^{-1}(b) = a$$

از طرفی اگر نقطه $A(a, b) \in f$ ، آن گاه $A'(b, a) \in f^{-1}$ است، به بیان دیگر:

نکات مهم وارون تابع:

الف) وارون یک تابع الزاماً یک تابع نیست.

ب) اگر f تابعی یک به یک باشد، وارون آن خود یک تابع است و برعکس.

پ) اگر f تابعی یک به یک باشد، وارون پذیر است و برعکس.

ت) وارون، یکنوایی را حفظ می کند.

ث) بعضی از توابع در کل دامنه خود وارون پذیر نیستند، اما در بخشی از آن وارون پذیرند. پس با محدود کردن (تحدید) دامنه می توان این گونه توابع را به تابعی وارون پذیر تبدیل کرد.

گام اول: بدیهی است که مقدار b را نیاز داریم. برای محاسبه آن کافی است در ضابطه تابع g مقدار $x = -1$ را جای گذاری کنیم:

$$g(-1) = -1 - 2\sqrt{-b}$$

گام دوم: f و g وارون یکدیگرند، پس $g(-1)$ یعنی یک x خاص که به ازای آن مقدار تابع f برابر -1 شود:

$$\Rightarrow f(x) = x - 2 + 2\sqrt{1-x} = -1$$

گام سوم: معادله گنگ را حل می کنیم:

$$\Rightarrow 2\sqrt{1-x} = 1-x = (\sqrt{1-x})^2 \Rightarrow \begin{cases} \sqrt{1-x} = 0 \Rightarrow x = 1 \text{ عضو دامنه نیست.} \\ \sqrt{1-x} = 2 \Rightarrow x = -3 \end{cases}$$

پس چون $f(-3) = -1$ است، نتیجه می گیریم $g(-1) = -3$ است.

گام چهارم: در تساوی گام اول، به جای $g(-1)$ مقدار -3 را جای گذاری می کنیم:

$$-3 = -1 - 2\sqrt{-b} \Rightarrow 2\sqrt{-b} = 2 \Rightarrow \sqrt{-b} = 1 \Rightarrow b = -1$$

گام پنجم: خواسته سؤال را حساب می کنیم؛ الان مقدار b و ضابطه تابع g را داریم:

$$g(x) = x - 2\sqrt{-x} \xrightarrow{b=-1} g(b) = g(-1) = -3$$

گام اول: در این روش ضابطه تابع وارون f را به صورت مستقیم به دست می آوریم و با ضابطه تابع g مقایسه می کنیم. برای این

کار باید ضابطه تابع f را به شکل مربع کامل بنویسیم:

$$f(x) = -(1-x) + 2\sqrt{1-x} - 1 = -(\sqrt{1-x})^2 + 2\sqrt{1-x} - 1$$

$$\Rightarrow f(x) = -((\sqrt{1-x})^2 - 2\sqrt{1-x} + 1) = -(\sqrt{1-x} - 1)^2; x \leq 0$$

به سادگی حدود y به صورت $y \leq 0$ به دست می آید.

گام دوم: ضابطه f^{-1} را پیدا می کنیم:

$$y = -(\sqrt{1-x} - 1)^2 \Rightarrow -y = (\sqrt{1-x} - 1)^2 \xrightarrow{\text{ریشه گیری}} \pm\sqrt{-y} = \sqrt{1-x} - 1$$

$$\Rightarrow \sqrt{-y} = \sqrt{1-x} - 1$$

سمت راست مثبت است، پس سمت چپ هم باید مثبت باشد:

$$\Rightarrow 1 + \sqrt{-y} = \sqrt{1-x} \xrightarrow{\text{توان } 2} 1 - y + 2\sqrt{-y} = 1 - x \Rightarrow x = y - 2\sqrt{-y}$$

$$f^{-1}(x) = x - 2\sqrt{-x}; x \leq 0$$

جای x و y را عوض می کنیم:

$$g(b) = g(-1) = -1 - 2 = -3$$

گام سوم: با مقایسه این ضابطه با ضابطه تابع g می بینیم که $b = -1$ است و داریم:



به ازای کدام مقدار a ، نمودار وارون تابع $f(x) = 4x + 2\sqrt{x+3a}$ ، خط $3y - 2x = 1$ را در نقطه‌ای به عرض -1 قطع می‌کند؟

$$\frac{9}{4} (4)$$

$$\frac{57}{4} (3)$$

$$\frac{19}{4} (2)$$

$$\frac{2}{3} (1)$$

6



کافیه مختصات نقطه تقاطع رو به دست بیاری.

Hint

گام اول: طول نقطه تقاطع را با توجه به معادله خط به دست می‌آوریم: **پاسخ خیلی تشریحی**

$$3(-1) - 2x = 1 \Rightarrow 2x = -4 \Rightarrow x = -2$$

گام دوم: پس مختصات نقطه تقاطع به صورت $(-2, -1)$ است و این نقطه در ضابطه تابع f^{-1} صدق می‌کند:

$$f^{-1}(-2) = -1 \Rightarrow f(-1) = -2$$

گام سوم: در ضابطه تابع f به جای x عدد -1 را قرار می‌دهیم:

$$f(-1) = -4 + 2\sqrt{-1+3a} = -2$$

$$\Rightarrow \sqrt{3a-1} = 1 \Rightarrow 3a-1=1 \Rightarrow a = \frac{2}{3}$$



نمودار تابع $f(x) = \frac{mx+6}{x+m+3}$ نمودار وارون خودش را فقط در دو نقطه به طول‌های α و β قطع می‌کند. حاصل $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta}$ کدام است؟

Y

$$\frac{m}{4} \quad (4)$$

$$\frac{1}{4} \quad (3)$$

$$-\frac{1}{4} \quad (2)$$

$$\frac{2}{m} \quad (1)$$



Hint با خط $y = x$ قطع بده.

پاسخ خیلی تشریحی ✓ گام اول:

تابع هموگرافیک $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ که در آن $a+d \neq 0$ است، اگر وارون خود را قطع کند، نقاط تقاطع قطعاً روی خط $y = x$ هستند.



پس طبق نکته، بهتر است معادله $f(x) = x$ را حل کنیم:

$$\frac{mx+6}{x+m+3} = x \Rightarrow x^2 + (m+3)x = mx+6 \Rightarrow x^2 + 3x - 6 = 0$$

گام دوم: جواب‌های معادله بالا، α و β هستند و در این معادله درجه دوم داریم:

$$S = \alpha + \beta = -3, \quad P = \alpha\beta = -6$$

گام سوم: خواسته سؤال را حساب می‌کنیم:

$$\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = \frac{\alpha + \beta}{\alpha\beta} = \frac{S}{P} = \frac{-3}{-6} = \frac{1}{2}$$

نمودار تابع $f(x) = -\sqrt{2-\sqrt{4-x}}$ ، نمودار وارون خود را در چند نقطه قطع می کند؟

(۱) هیچ

(۲) ۱

(۳) ۲

(۴) ۳

مشاوره یکی از سوالات کنکور تیر امسال در رشته ریاضی را برایتان شبیه سازی کرده ایم تا با یادگیری این سؤال بتوانید هم به سؤال کنکور سراسری و هم به این تیپ مسائل مسلط شوید.

Hint

پاسخ خیلی تشریحی

معادله حل نکن، بلکه به دامنه و برد تابع توجه کن.

گام اول: به دست آوردن ضابطه تابع f^{-1} و بعد از آن حل معادله $f(x) = f^{-1}(x)$ کاری بسیار وقت گیر، دشوار و برای این سؤال غیرمنطقی است. پس چاره چیست؟ می رویم سراغ دامنه و برد تابع f که ببینیم آیا اصلاً امکان برخورد دارند یا نه؟ ابتدا دامنه را حساب می کنیم:

$$D_f : \begin{cases} 4-x \geq 0 \Rightarrow x \leq 4 \\ 2-\sqrt{4-x} \geq 0 \Rightarrow \sqrt{4-x} \leq 2 \xrightarrow{\text{توان}^2} 4-x \leq 4 \Rightarrow x \geq 0 \end{cases}$$

پس دامنه تابع f و در نتیجه برد تابع f^{-1} بازه $[0, 4]$ است.

$$D_f = R_{f^{-1}} = [0, 4]$$

گام دوم: حال برد تابع f را حساب می کنیم:

$$0 \leq x \leq 4 \Rightarrow 0 \leq 4-x \leq 4 \Rightarrow 0 \leq \sqrt{4-x} \leq 2$$

$$\Rightarrow 0 \leq 2-\sqrt{4-x} \leq 2 \Rightarrow -\sqrt{2} \leq -\sqrt{2-\sqrt{4-x}} \leq 0$$

این یعنی برد تابع f که همان دامنه تابع f^{-1} است، بازه $[-\sqrt{2}, 0]$ است.

گام سوم: دامنه تابع f بازه $[0, 4]$ و دامنه تابع f^{-1} بازه $[-\sqrt{2}, 0]$ است، این یعنی نمودارهای f و f^{-1} در صورت امکان فقط در $x=0$ با هم برخورد می کنند. حال این نقطه را چک می کنیم:

$$f(0) = -\sqrt{2-\sqrt{4}} = 0 \Rightarrow f^{-1}(0) = 0$$

پس تنها نقطه برخورد مبدأ مختصات است.

$$f^{-1}(x) = x^2(4-x^2) \quad ; \quad -\sqrt{2} \leq x \leq 0$$

پس باید معادله $\sqrt{2-\sqrt{4-x}} = x^2(x^2-4)$ را حل کنیم.

البته این نکته هم وجود دارد که چون تابع f و در نتیجه تابع f^{-1} اکیداً نزولی هستند و هر دو از مبدأ مختصات می گذرند، کافی است معادله $f^{-1}(x) = -x$ را حل کنیم.

تیزبازی



۹

توابع f و $g(x) = 8 - 3x$ مفروض‌اند، به طوری که دامنه‌های دو تابع f و fg به ترتیب $D_f = [-4, a]$ و $D_{fg} = [-2, b]$ هستند. حاصل $a - b$ کدام است؟

۱۰ (۴)

۸ (۳)

۱۸ (۲)

۱۴ (۱)



کافی‌ه تعریف D_{fg} رو بنویسی. D_g که برابر \mathbb{R} هستش، پس به نامعادله ساده حل کن و تمام.

Hint

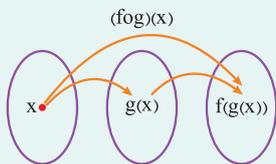
درتس Box

ترکیب توابع

فرض کنید f و g دو تابع باشند، ترکیب دو تابع f و g به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$(fg)(x) = f(g(x))$$

شرط تشکیل این تابع آن است که اشتراک برد تابع g و دامنه تابع f تهی نباشد، در این صورت دامنه تابع fg ، زیرمجموعه دامنه تابع g خواهد بود و برد تابع fg نیز زیرمجموعه برد تابع f خواهد بود و می‌نویسیم:



$$D_{fg} = \{x \in D_g \mid g(x) \in D_f\}$$

نماد fg به این معنی است که در ضابطه تابع f به جای x قرار دهیم $g(x)$.

الف) دامنه تابع fg زیرمجموعه دامنه تابع g (تابع داخلی) است.

ب) برد تابع fg زیرمجموعه برد تابع f (تابع بیرونی) است.



پاسخ خیلی تشریحی ✓

$$D_g = \mathbb{R}$$

گام اول: دامنه تابع خطی g ، کل اعداد حقیقی است:

و تعریف D_{fg} را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$D_{fg} = \{x \in D_g \mid g(x) \in D_f\} = \{x \in \mathbb{R} \mid (8 - 3x) \in [-4, a]\}$$

گام دوم: نامعادله تعریف بالا را حل می‌کنیم:

$$-4 \leq 8 - 3x \leq a \xrightarrow{\times(-1)} -a \leq 3x - 8 \leq 4 \xrightarrow{+8} 8 - a \leq 3x \leq 12 \xrightarrow{\div 3} \frac{8-a}{3} \leq x \leq 4$$

گام سوم: این یعنی ما براساس تعریف، دامنه تابع fg را بازه $[\frac{8-a}{3}, 4]$ به دست آورده‌ایم. پس طبق فرض سؤال، این بازه باید مساوی بازه $[-2, b]$ باشد:

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{8-a}{3} = -2 \Rightarrow 8-a = -6 \Rightarrow a = 14 \\ b = 4 \end{cases}$$

گام چهارم: مطلوب مسئله برابر است با:

$$a - b = 14 - 4 = 10$$

۱۰ اگر $f(2-x) = \sqrt{2x+1}$ و $g(x+3) = \sqrt{4-2x}$ باشد، دامنهٔ تعریف تابع $g \circ f$ شامل چند عدد صحیح است؟

۱۱ (۴)

۱۲ (۳)

۱۳ (۲)

۱۴ (۱)

حدود X زیر رادیکال‌ها رو به دست بیارین، بعد حدود عبارت داخل پرانتزها رو، بعد از اون تعریف $D_{g \circ f}$ رو بنویسین.

Hint

یافتن ضابطه

درس‌Box

در سؤالات رایج ترکیب توابع، دو ضابطه از سه ضابطه $f(x)$ ، $g(x)$ و $(f \circ g)(x)$ معلوم است و ضابطهٔ سوم را از ما می‌خواهند. جدول زیر روش‌های به دست آوردن ضابطهٔ سوم را به صورت خلاصه شرح می‌دهد:

ضابطه‌ها	$f(x)$	$g(x)$	$(f \circ g)(x)$
روش	*	*	به جای X که در ضابطهٔ $f(x)$ می‌بینیم، ضابطهٔ $g(x)$ را قرار دهیم.
	ضابطهٔ $g(x)$ را مساوی متغیر t قرار می‌دهیم و X را برحسب t به دست می‌آوریم (همان ضابطهٔ $(g^{-1}(x))$ و سپس در ضابطهٔ $(f \circ g)(x)$ جای‌گذاری می‌کنیم.	*	*
	*	به جای هر X ضابطهٔ $f(x)$ عبارت $g(x)$ را قرار می‌دهیم. عبارت حاصل باید با ضابطهٔ $(f \circ g)(x)$ برابر باشد. در این شرایط معادله‌ای باید حل کنیم که متغیر جدید آن $g(x)$ است.	*

پاسخ خیلی تشریحی ✓ گام اول: با دو تابع رادیکالی با فرجهٔ زوج مواجه هستیم و این توابع زمانی قابل تعریف هستند که عبارت‌های زیر رادیکال نامنفی باشند:

$$\sqrt{2x+1} : 2x+1 \geq 0 \Rightarrow x \geq -\frac{1}{2}$$

$$\sqrt{4-2x} : 4-2x \geq 0 \Rightarrow x \leq 2$$

گام دوم: با توجه به حدود X ، حدود عبارت‌های داخل پرانتزی را که ورودی‌های دو تابع هستند، به دست می‌آوریم:

$$f : x \geq -\frac{1}{2} \Rightarrow -x \leq \frac{1}{2} \Rightarrow 2-x \leq \frac{5}{2} \Rightarrow D_f = (-\infty, \frac{5}{2}]$$

$$g : x \leq 2 \Rightarrow x+3 \leq 5 \Rightarrow D_g = (-\infty, 5]$$

گام سوم: برای محاسبهٔ دامنهٔ تابع $g \circ f$ به ضابطهٔ تابع f نیز نیاز داریم. طبق جدول ارائه‌شده در درس‌Box سؤال قبل عمل می‌کنیم:

$$f(2-x) = \sqrt{2x+1} \xrightarrow[x=2-t]{2-x=t} f(t) = \sqrt{2(2-t)+1} = \sqrt{5-2t}$$

پس ضابطهٔ تابع f به صورت $f(x) = \sqrt{5-2x}$ است.

گام چهارم: در این گام مطلوب مسئله، یعنی دامنهٔ تابع $g \circ f$ را حساب می‌کنیم:

$$D_{g \circ f} = \{x \in D_f \mid f(x) \in D_g\} = \underbrace{\left\{x \leq \frac{5}{2}\right\}}_{D_f} \mid \underbrace{\left\{\sqrt{5-2x} \leq 5\right\}}_{f(x) \in D_g}$$

نامساوی داخل تعریف را حل می‌کنیم:

$$\sqrt{5-2x} \leq 5 \xrightarrow{\text{توان } 2} 5-2x \leq 25 \Rightarrow 2x \geq -20 \Rightarrow x \geq -10$$

پس تعریف $D_{g \circ f}$ به شکل زیر تغییر می‌کند:

$$D_{g \circ f} = \left\{x \leq \frac{5}{2} \mid x \geq -10\right\} = [-10, \frac{5}{2}]$$

این بازه شامل $13 = 1 - (-10) + 1 = 2 - (-10) + 1 = 13$ عدد صحیح -10 ، -9 ، -8 ، -7 ، -6 ، -5 ، -4 ، -3 ، -2 تا 2 است.



تابع چندجمله‌ای f و تابع $g(x) = (x-1)^2 + 2$ مفروض‌اند. اگر $(fog)(x) = 3x^2 - 6x + 14$ باشد، مقدار $(fof)(3)$ کدام است؟

۴۲ (۴)

۴۷ (۳)

۴۱ (۲)

۴۵ (۱)

۱۱



بین f از درجه چند؟ بعدش fog رو بساز، یعنی به جای هر x ضابطه f ، کل $g(x)$ رو بذاری.



Hint

گام اول: تابع g و هم‌چنین تابع fog چندجمله‌ای‌های درجه دوم هستند، این یعنی تابع f یک چندجمله‌ای با درجه حداکثر ۱ است.

پاسخ خیلی تشریحی ✓

اگر تابع f چندجمله‌ای درجه m و تابع g چندجمله‌ای درجه n باشد، توابع fog و gof چندجمله‌ای درجه mn هستند.



نکته

گام دوم: پس ضابطه تابع f را به صورت $f(x) = ax + b$ در نظر می‌گیریم:

$$(fog)(x) = f(g(x)) = a g(x) + b = a(x^2 - 2x + 3) + b$$

$$\Rightarrow (fog)(x) = ax^2 - 2ax + 3a + b \quad (x-1)^2 + 2$$

این ضابطه باید با ضابطه مفروض صورت سؤال متحد باشد. پس داریم:

$$ax^2 - 2ax + 3a + b \equiv 3x^2 - 6x + 14 \Rightarrow \begin{cases} a = 3 \\ -2a = -6 \Rightarrow a = 3 \\ 3a + b = 14 \xrightarrow{a=3} b = 5 \end{cases}$$

گام سوم: در نتیجه ضابطه تابع f را به صورت $f(x) = 3x + 5$ پیدا کردیم. حالا خواسته سؤال را حساب می‌کنیم:

$$(fof)(3) = f(\underbrace{f(3)}_{3(3)+5}) = f(14) = 3(14) + 5 = 47$$

با کدام تبدیل‌ها می‌توانیم از نمودار تابع $y = \frac{4}{3}f(\frac{2}{3}x)$ به نمودار تابع $y = f(x)$ برسیم؟

(۲) انقباض افقی و انقباض عمودی

(۱) انقباض افقی و عمودی

(۴) انقباض افقی و انقباض عمودی

(۳) انقباض افقی و عمودی

انقباض و انبساط

درس‌نویس Box

نوع انتقال	تابع خواسته شده	نمودار	روش ترسیم	ویژگی‌ها
انبساط و انقباض عمودی	$y = kf(x), k > 1$ انبساط عمودی		عرض نقاط در k ضرب می‌شود	نقطه $A(x_0, y_0)$ روی تابع f به نقطه $A'(x_0, ky_0)$ روی تابع kf تبدیل می‌شود. در انقباض و انقباض عمودی، دامنه تابع ثابت است ولی برد تابع تغییر می‌کند. اگر دامنه و برد تابع f به ترتیب بازه‌های $[a, b]$ و $[c, d]$ باشند، آن‌گاه: $D_{kf} = D_f = [a, b]$ $R_{kf} = [kc, kd]$
	$y = kf(x), 0 < k < 1$ انقباض عمودی			نقطه $A(x_0, y_0)$ روی تابع f به نقطه $A'(\frac{x_0}{k}, y_0)$ روی تابع $y = f(kx)$ تبدیل می‌شود. در انقباض و انقباض افقی، برد تابع ثابت است ولی دامنه تابع تغییر می‌کند. $D_{y=f(kx)} = [\frac{a}{k}, \frac{b}{k}]$ $R_{y=f(kx)} = R_f$
انبساط و انقباض افقی	$y = f(kx), k > 1$ انقباض افقی		طول نقاط بر k تقسیم می‌شود.	نقطه $A(x_0, y_0)$ روی تابع f به نقطه $A'(\frac{x_0}{k}, y_0)$ روی تابع $y = f(kx)$ تبدیل می‌شود. در انقباض و انقباض افقی، برد تابع ثابت است ولی دامنه تابع تغییر می‌کند. $D_{y=f(kx)} = [\frac{a}{k}, \frac{b}{k}]$ $R_{y=f(kx)} = R_f$
	$y = f(kx), 0 < k < 1$ انبساط افقی			

پاسخ خیلی تشریحی ✓ اگر فرض کنیم $g(x) = \frac{4}{3}f(\frac{2}{3}x)$ باشد، آن‌گاه $f(x) = \frac{3}{4}g(\frac{3}{2}x)$ خواهد بود. در نتیجه برای تبدیل نمودار تابع g به نمودار

تابع f باید x ‌های تابع g را به $\frac{3}{2}x$ تبدیل کنیم که معنای انقباض افقی است و همچنین کل ضابطه تابع را در $\frac{3}{4}$ ضرب کنیم که به معنای انقباض عمودی است.



نمودار تابع $y = g(x)$ را ۴ واحد به چپ انتقال می‌دهیم و طول نقاط آن را نصف می‌کنیم تا نمودار تابع f به دست آید. اگر $g(x) = f(ax + b)$ باشد، مقدار $b - a$ کدام است؟

۱۳

$-\frac{1}{4} (4)$

$\frac{3}{4} (3)$

$-\frac{5}{4} (2)$

$-\frac{3}{4} (1)$



بین چه جوری f به g تبدیل می‌شه، تبدیلاتی رو که گفته عکس کن.

Hint

انتقال

درس‌Box

نوع انتقال	تابع	توضیح	نمودار	ویژگی
افقی	$y = f(x - c)$	نمودار تابع f را c واحد به راست انتقال می‌دهیم.		نقطه $A(x_0, y_0)$ روی نمودار تابع f به نقطه $A'(x_0 + c, y_0)$ روی نمودار تابع $y = f(x - c)$ تبدیل می‌شود. برد تابع ثابت است ولی دامنه تغییر می‌کند.
	$y = f(x + c)$	نمودار تابع f را c واحد به چپ انتقال می‌دهیم.		نقطه $A(x_0, y_0)$ روی نمودار تابع f به نقطه $A'(x_0 - c, y_0)$ روی نمودار تابع $y = f(x + c)$ تبدیل می‌شود. برد تابع ثابت است ولی دامنه تغییر می‌کند.
عمودی	$y = f(x) + c$	نمودار تابع f را c واحد به بالا انتقال می‌دهیم.		نقطه $A(x_0, y_0)$ روی نمودار تابع f به نقطه $A'(x_0, y_0 + c)$ روی نمودار تابع $y = f(x) + c$ تبدیل می‌شود. دامنه تابع ثابت است ولی برد تغییر می‌کند.
	$y = f(x) - c$	نمودار تابع f را c واحد به پایین انتقال می‌دهیم.		نقطه $A(x_0, y_0)$ روی نمودار تابع f به نقطه $A'(x_0, y_0 - c)$ روی نمودار تابع $y = f(x) - c$ تبدیل می‌شود. دامنه تابع ثابت است ولی برد تغییر می‌کند.

گام اول: با توجه به تساوی $g(x) = f(ax + b)$ ، باید نمودار تابع f را به نمودار تابع g تبدیل کنیم. ✓ پاسخ خیلی تشریحی

گام دوم: برای این کار تبدیلات گفته شده را در مسیر عکس انجام می‌دهیم:

$$y = g(x) \xrightarrow{x \rightarrow x+4 \text{ واحد به چپ}} y = g(x+4) \xrightarrow{x \rightarrow 2x \text{ طول نقاط تقسیم بر 2}} f(x) = g(2x+4)$$

$$y = f(x) \xrightarrow{x \rightarrow \frac{x}{2} \text{ ضرب طول نقاط در 2}} y = f\left(\frac{x}{2}\right) \xrightarrow{x \rightarrow x-4 \text{ واحد به راست}} g(x) = f\left(\frac{x-4}{2}\right) = f\left(\frac{x}{2} - 2\right)$$

گام سوم: این یعنی $a = \frac{1}{2}$ ، $b = -2$ و در نتیجه $b - a = -\frac{5}{2}$ است.

۱۴

وارون تابع $f(x) = \sqrt{x+1}$ را k واحد به راست انتقال می‌دهیم به طوری که نمودار تابع حاصل، نمودار تابع f را در نقطه‌ای به طول ۸

$$y = f^{-1}(x - k)$$

قطع کند. مقدار k کدام است؟

۲ (۴)

۶ (۳)

-۸ (۲)

۴ (۱)



Hint یه معادله گنگ ساده باید حل کنی.

پاسخ خیلی تشریحی ✓ گام اول: ابتدا انتقال یافته نمودار تابع f^{-1} را به دست می‌آوریم:

$$y = f^{-1}(x) \xrightarrow[\text{واحد به راست}]{x \rightarrow x-k} y = f^{-1}(x - k)$$

گام دوم: دو ضابطه را به ازای $x = 8$ با هم مساوی می‌گیریم:

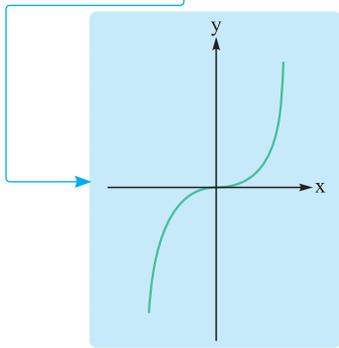
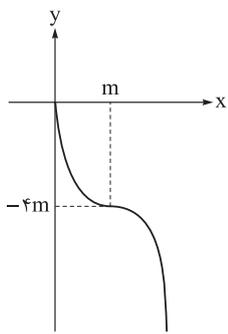
$$f^{-1}(x - k) = \sqrt{x+1} \xrightarrow{x=8} f^{-1}(8 - k) = \sqrt{9} = 3$$

گام سوم: طبق ویژگی‌های وارون توابع، به این تساوی می‌رسیم که $f(3) = 8 - k$ است:

$$f(3) = \sqrt{3+1} = 8 - k \Rightarrow 2 = 8 - k \Rightarrow k = 6$$

۱۵

نمودار تابع رسم شده در شکل مقابل، صرفاً با انتقال و قرینه‌یابی، از روی نمودار تابع $y = x^3$ به دست آمده است. مقدار این تابع به ازای $x = 2m$ کدام است؟



کدام است؟

-۸ (۱)

-۱۶ (۲)

-۳۲ (۳)

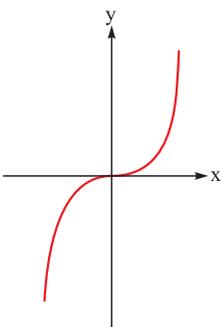
-۶۴ (۴)



انتقال به راست و انتقال به پایین داری، به مبدأ مختصات هم فکر کن تا m به دست بیاد.

Hint

پاسخ خیلی تشریحی ✓ گام اول: نمودار تابع $y = x^3$ به صورت زیر است:



پس اگر قرار باشد که نمودار صورت سؤال، صرفاً با انتقال و قرینه‌یابی از روی نمودار بالا به دست آمده باشد، باید به گونه‌ی زیر عمل کنیم:

$$y = x^3 \xrightarrow[y \rightarrow -y]{\text{قرینه نسبت به محور } x \text{ ها}} y = -x^3 \xrightarrow[m \text{ واحد به راست}]{\text{واحد به پایین } 4m} y = -(x-m)^3 - 4m$$

گام دوم: پس نمودار صورت سؤال مربوط به تابع $y = -(x-m)^3 - 4m$ است که از مبدأ مختصات می‌گذرد، پس مختصات

نقطه $(0, 0)$ را در آن قرار می‌دهیم تا مقدار m به دست آید:

$$0 = -(-m)^3 - 4m \Rightarrow m^3 - 4m = m(m^2 - 4) = m(m+2)(m-2) = 0 \Rightarrow m = 0, \pm 2$$

حواسمان هست که m مثبت است، پس مقدار $m = 2$ قابل قبول است.

گام سوم: ضابطه‌ی تابع مورد نظر $y = -(x-2)^3 - 8$ است و مقدار آن به ازای $x = 2m = 4$ برابر است با:

$$y = -(4-2)^3 - 8 = -8 - 8 = -16$$

۱۶

نمودار تابع $y = \frac{1}{x+1}$ را ۲ واحد به چپ انتقال می‌دهیم و سپس نمودار حاصل را نسبت به خط $y = x$ قرینه می‌کنیم تا نمودار تابع

f به دست آید. نمودار تابع $y = \frac{1}{x+1}$ را این بار ابتدا نسبت به خط $y = x$ قرینه می‌کنیم و سپس ۲ واحد به چپ انتقال می‌دهیم تا

تابع وارون

نمودار تابع g به دست آید. در این صورت مقدار $(f \circ g)(-3)$ کدام است؟

$$-\frac{10}{3} \quad (2)$$

$$-\frac{8}{3} \quad (1)$$

$$-\frac{7}{3} \quad (4)$$

$$-\frac{5}{3} \quad (3)$$



پاسخ خیلی تشریحی ✓ گام اول: روی نمودار تابع $y = \frac{1}{x+1}$ دو تبدیل متفاوت بیان شده در صورت سؤال را اعمال می‌کنیم:

$$y = \frac{1}{x+1} \xrightarrow{\substack{\text{۲ واحد به چپ} \\ x \rightarrow x+2}} y = \frac{1}{x+3} \xrightarrow{\text{وارون هموگرافیک}} f(x) = \frac{-3x+1}{x}$$

$$y = \frac{1}{x+1} \xrightarrow{\text{وارون هموگرافیک}} y = \frac{-x+1}{x} \xrightarrow{\substack{\text{۲ واحد به چپ} \\ x \rightarrow x+2}} g(x) = \frac{-x-1}{x+2}$$

گام دوم: $(f \circ g)(-3)$ را حساب می‌کنیم:

$$(f \circ g)(-3) = f(g(-3)) = f\left(\frac{-3-1}{-3+2}\right) = f(-2) = \frac{-3(-2)+1}{-2} = -\frac{7}{2}$$



۱۷

نمودار تابع $g(x) = 3 - f\left(\frac{2+x}{3}\right)$ را نسبت به مبدأ مختصات قرینه می‌کنیم و نمودار وارون تابع حاصل را رسم می‌کنیم. ضابطه تابع

مربوط به نمودار جدید کدام است؟ (تابع f با دامنه و برد \mathbb{R} ، وارون پذیر است.) $y = -g(-x)$

$$y = 3 - 2f^{-1}(x + 3) \quad (1) \quad y = 2 + 3f^{-1}(x - 3)$$

$$y = 3 + 2f^{-1}(x - 3) \quad (2) \quad y = 2 - 3f^{-1}(x + 3) \quad (3)$$

انعکاس (قرینه‌یابی)

درس‌Box

تابع خواسته شده	نمودار	روش ترسیم	ویژگی‌ها
$y = -f(x)$		کافی است قرینه تابع $y = f(x)$ را نسبت به محور x ها رسم کنیم.	نقطه $A(x_0, y_0)$ روی تابع f به نقطه $A'(x_0, -y_0)$ روی تابع $y = -f(x)$ تبدیل می‌شود. دامنه ثابت است ولی برد تغییر می‌کند.
$y = f(-x)$		کافی است قرینه تابع $y = f(x)$ را نسبت به محور y ها رسم کنیم.	نقطه $A(x_0, y_0)$ روی تابع f به نقطه $A'(-x_0, y_0)$ روی تابع $y = f(-x)$ تبدیل می‌شود. برد ثابت است ولی دامنه تغییر می‌کند.
$y = -f(-x)$		کافی است قرینه تابع $y = f(x)$ را نسبت به مبدأ مختصات رسم کنیم.	نقطه $A(x_0, y_0)$ روی تابع f به نقطه $A'(-x_0, -y_0)$ روی تابع $y = -f(-x)$ تبدیل می‌شود. دامنه و برد هر دو تغییر می‌کنند.

پاسخ خیلی تشریحی ✓ گام اول: کافی است تبدیل لازم را روی نمودار تابع g اعمال کنیم:

$$g(x) = 3 - f\left(\frac{2+x}{3}\right) \xrightarrow{\text{قرینه نسبت به مبدأ}} y = -g(-x) = -3 + f\left(\frac{2-x}{3}\right)$$

گام دوم: حال باید ضابطه وارون تابع $y = -3 + f\left(\frac{2-x}{3}\right)$ را به دست آوریم. کافی است x را برحسب y به دست آوریم و سپس جای آن‌ها را عوض کنیم:

$$y + 3 = f\left(\frac{2-x}{3}\right) \Rightarrow f^{-1}(y+3) = \frac{2-x}{3} \Rightarrow x = 2 - 3f^{-1}(y+3) \xrightarrow{\text{تعویض جای } x \text{ و } y} y = 2 - 3f^{-1}(x+3)$$

۱۸

اگر نقطه $A(-3, 4)$ واقع بر نمودار تابع $y = 2 + 4f^{-1}\left(\frac{x}{4} - 1\right)$ با نقطه A' واقع بر نمودار تابع $y = 3 - f\left(5 + \frac{x}{3}\right)$ متناظر باشد، مجموع طول و عرض نقطه A' کدام است؟

۱۱ (۴)

 $\frac{31}{2}$ (۳) $\frac{41}{2}$ (۲)

-۸ (۱)



مختصات دو نقطه رو تو ضابطه‌هاشون جای گذاری کن، جفتشون باید به تساوی یکسان بهت بدن.

Hint

گام اول: مختصات نقطه A را در ضابطه مربوطه‌اش جای گذاری می‌کنیم:

$$A(-3, 4): 4 = 2 + 4f^{-1}\left(\frac{-3}{4} - 1\right) \Rightarrow f^{-1}\left(-\frac{5}{4}\right) = \frac{1}{4} \xrightarrow{\text{ویژگی‌های وارون}} f\left(\frac{1}{4}\right) = -\frac{5}{4}$$

گام دوم: مختصات نقطه A' را به صورت $A'(\alpha, \beta)$ در نظر می‌گیریم و آن را در ضابطه تابع دوم جای گذاری می‌کنیم:

$$\beta = 3 - f\left(5 + \frac{\alpha}{3}\right) \Rightarrow f\left(5 + \frac{\alpha}{3}\right) = 3 - \beta$$

گام سوم: برای تناظر نقاط A و A' ، دو تساوی به دست آمده باید یکسان باشند:

$$\Rightarrow \begin{cases} 5 + \frac{\alpha}{3} = \frac{1}{4} \Rightarrow \frac{\alpha}{3} = -\frac{9}{4} \Rightarrow \alpha = -\frac{27}{4} \\ 3 - \beta = -\frac{5}{4} \Rightarrow \beta = \frac{11}{4} \end{cases}$$

مجموع طول و عرض نقطه A' برابر $\alpha + \beta = \frac{-16}{4} = -4$ است.

پاسخ خیلی تشریحی

ریاضیات گسسته و آمار و احتمال

۱۹

برای اثبات حکم حاصل ضرب دو عدد متوالی مضرب ۲ است، با روش در نظر گرفتن همه حالت‌ها، از کدام عبارت منطقی استفاده می‌شود؟

$$(p \wedge q) \Rightarrow (p \Rightarrow r) \wedge (q \Rightarrow r) \quad (۱)$$

$$\sim (p \vee q) \Rightarrow r \equiv (p \Rightarrow r) \wedge (q \Rightarrow r) \quad (۲)$$

$$\sim (p \vee q) \Rightarrow r \equiv (p \Rightarrow r) \vee (q \Rightarrow r) \quad (۳)$$

$$(p \vee q) \Rightarrow r \equiv (p \Rightarrow r) \wedge (q \Rightarrow r) \quad (۴)$$

مشاوره هر یک از روش‌های مختلف اثبات یک گزاره از منطق خاصی پیروی می‌کند که باید به هر کدام مسلط باشید.



Hint

گزاره را اثبات کن و سعی کن تشخیص بدهی در این اثبات از چه منطقی در ریاضی استفاده کردی.

درس‌Box

اثبات با در نظر گرفتن تمام حالات

وقتی تعداد حالت‌ها محدود است، می‌توانیم تمام حالت‌ها را بررسی کنیم و نشان دهیم حکم در همه حالت‌ها درست است. مثلاً برای بررسی حکم درباره زوج یا فرد بودن اعداد کافی است یک بار برای اعداد زوج و یک بار برای اعداد فرد، حکم را ثابت کنیم و آن وقت با اطمینان بگوییم حکم برای تمام اعداد صحیح درست است.

برای اثبات به روش بالا از درستی هم‌ارزی $p \vee q \Rightarrow r \equiv (p \Rightarrow r) \wedge (q \Rightarrow r)$ استفاده می‌کنیم؛ مثلاً می‌خواهیم ثابت کنیم عدد n چه زوج (p) یا چه فرد (q) باشد، حکم r نتیجه می‌شود. این مثل این است که ثابت کنیم هم از p به r می‌رسیم و هم از q به r .



برای اثبات این حکم از روش اثبات با در نظر گرفتن همه حالت‌ها استفاده می‌کنیم. طبق حکم $n(n+1)$ باید همواره زوج باشد؛ بنابراین برای اثبات آن یک بار n را زوج و یک بار فرد در نظر گرفته و حاصل $n(n+1)$ را به ازای هر کدام به دست می‌آوریم.

$$\left\{ \begin{array}{l} n = 2q \Rightarrow n(n+1) = \overbrace{2q(2q+1)}^k = 2k \\ \vee \\ n = 2q+1 \Rightarrow n(n+1) = (2q+1)(2q+2) = 2 \underbrace{(2q+1)(q+1)}_{k'} = 2k' \end{array} \right.$$

پس برای n های زوج یا n های فرد گزاره صحیح بودن حکم اثبات می‌شود؛ بنابراین در هر کدام از حالت‌ها حکم صحیح است.

و هم‌چنین طبق درس‌Box می‌دانیم که:

در روش اثبات با در نظر گرفتن همه حالت‌ها از منطق زیر استفاده می‌شود.

$$(p \vee q) \Rightarrow r \equiv (p \Rightarrow r) \wedge (q \Rightarrow r)$$

پاسخ خیلی تشریحی

۲۰ اگر x و y اعداد صحیح و $-5 \leq x, y \leq 5$ باشند، از تساوی $(x+y)^2 = x^2 + y^2$ چند دسته جواب برای x و y پیدا می‌شود؟

۱۰ (۴)

۱۱ (۳)

۲۱ (۲)

۲۲ (۱)



با توجه به روابط ریاضی، حالت‌های ممکن را به دست بیاور. حواست به حالت‌های تکراری باشد.



پاسخ خیلی تشریحی ✓

گام اول (محاسبه xy): می‌دانیم حاصل $(x+y)^2$ برابر است با $x^2 + y^2 + 2xy$ و طبق فرض مسئله داریم؛ $x^2 + y^2 = (x+y)^2$ ، بنابراین داریم:

$$(x+y)^2 = x^2 + y^2 \Rightarrow x^2 + y^2 + 2xy = x^2 + y^2 \Rightarrow 2xy = 0 \Rightarrow xy = 0$$

گام دوم (محاسبه تعداد حالت‌ها):

$xy = 0$ بنابراین $x = 0$ یا $y = 0$ است. از طرفی چون x و y فقط باید اعداد صحیحی از -5 تا 5 باشند اگر $x = 0$ باشد، y می‌تواند هر عدد صحیحی در بازه $[-5, 5]$ باشد و اگر $y = 0$ باشد، x می‌تواند هر عدد صحیحی در بازه $[-5, 5]$ باشد.

$$\begin{cases} x = 0 \Rightarrow -5 \leq y \leq 5 \\ \text{یا} \\ y = 0 \Rightarrow -5 \leq x \leq 5 \end{cases}$$

پس به ازای $x = 0$ یازده دسته‌جواب و برای $y = 0$ هم یازده دسته‌جواب داریم، اما چون $x = 0$ و $y = 0$ در هر دو مشترک هستند، در کل $21 = (11+11) - 1$ دسته‌جواب داریم.

۲۱

گزاره داده شده در کدام یک از گزینه‌های زیر مثال نقض دارد؟

- (۱) حاصل جمع سه عدد زوج متوالی بر ۶ بخش پذیر است.
- (۲) حاصل جمع سه عدد فرد متوالی در تقسیم بر ۶ باقی مانده‌ای برابر ۳ دارد.
- (۳) حاصل ضرب هر سه عدد زوج متوالی بر ۴۸ بخش پذیر است.
- (۴) حاصل ضرب هر سه عدد فرد متوالی بر ۱۵ بخش پذیر است.



سعی کن درستی گزاره‌ها را اثبات کنی. برای هر کدام که درستی آن قابل اثبات نبود دنبال مثال نقض بگرد.

Hint

گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم:

پاسخ خیلی تشریحی

گزینه (۱): سه عدد زوج متوالی به صورت $2k, 2k+2$ و $2k+4$ هستند که مجموع آن‌ها $6k+6$ می‌شود که مضرب ۶ است.

گزینه (۲): سه عدد فرد متوالی به صورت $2k+1, 2k+3$ و $2k+5$ هستند؛ بنابراین حاصل جمع آن‌ها $6k+9$ است که برابر با $3(2k+3)$ است، پس باقی‌مانده آن در تقسیم بر ۶ برابر ۳ است.

گزینه (۳): سه عدد زوج متوالی به صورت $2k, 2k+2$ و $2k+4$ هستند که حاصل ضرب آن‌ها به صورت زیر است:

$$2k(2k+2)(2k+4) = 2k \times 2(k+1) \times 2(k+2) = 8k(k+1)(k+2)$$

از طرفی می‌دانیم حاصل ضرب ۳ عدد متوالی همواره بر ۶ بخش پذیر است، پس حاصل عبارت بالا همواره بر $48 = 8 \times 6$ بخش پذیر است.

گزینه (۴): مثال نقض این گزاره اعداد ۹، ۱۱ و ۱۳ هستند که عامل ۵ در آن‌ها وجود ندارد.

در اثبات نامساوی $5x^2 + y^2 + 1 \geq 3x + y + xy$ به روش اثبات بازگشتی، در پایان به کدام نامساوی بدیهی می‌رسیم؟

$$(2x-1)^2 + (2y-1)^2 + (x-y)^2 \geq 0 \quad (1)$$

$$(3x-1)^2 + (y-1)^2 + (x-y)^2 \geq 0 \quad (2)$$

$$(3x-1)^2 + (2y-1)^2 + (x-y)^2 \geq 0 \quad (3)$$

$$(2x-1)^2 + (y-1)^2 + (x-y)^2 \geq 0 \quad (4)$$

مشاوره در اثبات بازگشتی معمولاً با تبدیل عبارت به مربع کامل به یک گزاره بدیهی می‌رسیم.

اثبات بازگشتی

درس‌Box

از این روش معمولاً برای اثبات نامساوی‌ها استفاده می‌شود. اثبات را از خود حکم شروع می‌کنیم؛ یعنی حکم را به عنوان فرض در نظر می‌گیریم. بعد عبارت را با طی مراحل ریاضی ساده می‌کنیم تا به رابطه‌ای درست یا بدیهی برسیم. این طوری:

رابطه درست $\Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow$ حکم

بعد می‌گوییم چون گزاره‌ها هم‌ارز هستند، حکم هم باید درست باشد. فقط حواستان باشد که برای هم‌ارز شدن گزاره‌ها باید مراحل طی شده برگشت پذیر باشند؛ مثلاً برای اثبات رابطه $a + \frac{1}{a} \geq 2$ برای عدد مثبت a داریم:

$$a + \frac{1}{a} \geq 2 \xleftarrow{\text{چون } a > 0 \text{ جهت نامساوی عوض نمی‌شود.}} \xrightarrow{\text{اتحاد مربع}} (a-1)^2 \geq 0 \xleftarrow{\text{همه به طرف چپ}} a^2 - 2a + 1 \geq 0 \xleftarrow{\text{همه به طرف چپ}} a^2 + 1 \geq 2a$$

برای اثبات به روش بازگشتی، حکم را ساده می‌کنیم تا به یک رابطه درست برسیم. ✓ پاسخ خیلی تشریحی

$$5x^2 + y^2 + 1 \geq 3x + y + xy \xrightarrow{-x^2} 4x^2 + y^2 + 1 \geq 2x + y + xy \Rightarrow 4x^2 + y^2 + 2 - 6x - 2y - 2xy \geq 0$$

به جای $4x^2$ ، x^2 و $9x^2 + x^2$ ، به جای $2y^2$ ، $y^2 + y^2$ و به جای 1 ، $1 + 1$ را جای گذاری می‌کنیم تا بتوانیم با استفاده از اتحادها عبارت را به صورت ۳ تا مربع کامل بنویسیم.

$$9x^2 - 6x + 1 + y^2 - 2y + 1 + x^2 + y^2 - 2xy \geq 0 \Rightarrow (3x-1)^2 + (y-1)^2 + (x-y)^2 \geq 0$$

مجموع ۳، عبارت مربع کامل، همواره بزرگ‌تر یا مساوی صفر است، پس این عبارت، عبارت بدیهی‌ای است که از حکم نتیجه می‌شود.

..... $b + c$ و ab گویاست. در این صورت $a + c$ گنگ و $a + b$ گنگ یا b گویا، به طوری که b گویا، $a + b$ گنگ و $a + c$ گویاست. در این صورت ab $b + c$

(۲) گنگ است - ممکن است گنگ یا گویا باشد

(۱) گنگ است - گنگ است

(۴) گنگ است - گویا است

(۳) ممکن است گنگ یا گویا باشد - گنگ است

۲۳

مشاوره گنگ یا گویا بودن جمع و تفریق و حاصل ضرب اعداد گنگ و گویا از مباحث مهم بخش گزاره‌هاست.

در این Box

گنگ و گویا بودن جمع و تفریق و ضرب اعداد

شکل اعداد	عملیات	ضرب	جمع و تفریق (نوع اثبات)
هر دو گویا		گویا (اثبات مستقیم)	گویا (اثبات مستقیم)
یکی گویا و یکی گنگ		ضرب گویای صفر در گنگ = گویا (صفر) ضرب گویای ناصفر در گنگ = گنگ (برهان خلف)	گنگ (برهان خلف)
هر دو گنگ		ممکن است گویا یا گنگ باشد.	ممکن است گویا یا گنگ باشد.

گام اول (به دست آوردن گنگ یا گویا بودن a و c):

جمع و تفریق یک عدد گویا و یک عدد گنگ همواره گنگ است، پس a گنگ است، چون $a + b$ گنگ و b گویاست. $a + c$ نیز گویاست، پس به دلیل مشابه c نیز عددی گنگ است.

گام دوم (به دست آوردن خواسته سؤال):

حاصل ضرب عدد گویای ناصفر در عددی گنگ، گنگ است، پس ab گنگ و $b + c$ نیز به دلیلی که در گام اول گفتیم گنگ است.

پاسخ خیلی تشریحی ✓

اگر x و a مقادیر حقیقی غیر صفر باشند، به ازای چند مقدار x رابطه $\frac{1}{x+a} = \frac{1}{x} + \frac{1}{a}$ برقرار است؟

۲۴

- (۱) صفر
(۲) ۲
(۳) ۳
(۴) بی شمار



 Hint

 پاسخ خیلی تشریحی

معادله را بر حسب x حل کن و تعداد جواب‌های قابل قبول برای این معادله را به دست بیاور.

گام اول (ساده کردن معادله):

عبارت را تا حد امکان ساده می‌کنیم:

$$\frac{1}{x+a} = \frac{1}{x} + \frac{1}{a} \Rightarrow \frac{1}{x+a} = \frac{x+a}{ax} \Rightarrow (x+a)^2 = ax \Rightarrow x^2 + 2ax + a^2 = ax \Rightarrow x^2 + ax + a^2 = 0$$

گام دوم (به دست آوردن جواب‌ها):

حال معادله را بر حسب x حل می‌کنیم. بدین منظور ابتدا دلتای معادله را محاسبه می‌کنیم:

$$\Delta = a^2 - 4(1)(a^2) = a^2 - 4a^2 = -3a^2 < 0 \Rightarrow \text{معادله ریشه ندارد.}$$

دقت کنید چون $a \neq 0$ ، پس $a^2 > 0$ ، بنابراین $-3a^2 < 0$ ، پس Δ منفی است و معادله ریشه ندارد.

پس گزینه (۱) پاسخ است.

۲۵

در اثبات حکم «به ازای هر دو عدد حقیقی ناصفر و هم علامت x و y داریم: $\frac{x}{y} + \frac{y}{x} \geq 2$ » به روش بازگشتی، به کدام گزاره همیشه درست می‌رسیم؟

$$(x + y)^2 \geq 0 \quad (2)$$

$$(x - y)^2 \geq 0 \quad (1)$$

$$\left(\frac{x}{y}\right)^2 + \left(\frac{y}{x}\right)^2 \geq 0 \quad (4)$$

$$x^2 + y^2 \geq 0 \quad (3)$$

اگر گزاره مرکب دوشرطی $p \Leftrightarrow q$ درست باشد، گزاره‌های p و q هم‌ارز هستند.

 نکته

برای اثبات درستی یک گزاره، گزاره‌های هم‌ارز با آن را در نظر می‌گیریم و به کمک قوانین ریاضی به گزاره اصلی می‌رسیم. معمولاً این کار به جهت ساده‌تر شدن اثبات استفاده می‌شود که به آن روش بازگشتی می‌گوییم. در روش بازگشتی، خود عبارت حکم را ساده می‌کنیم تا به یک عبارت همیشه درست و هم‌ارز با آن برسیم، در این صورت همه مراحل بازگشت پذیر هستند.

 نکته

باید سعی کنیم عبارت را به یک عبارت همواره درست، مثل یک عبارت مربع کامل نامنفی تبدیل کنیم، بنابراین طرفین را در xy ضرب می‌کنیم تا مخرج کسرها از بین بروند و عبارت به مربع کامل تبدیل شود.

 پاسخ خیلی تشریحی ✓

$$\frac{x}{y} + \frac{y}{x} \geq 2 \xrightarrow{\times xy} x^2 + y^2 \geq 2xy \Leftrightarrow x^2 - 2xy + y^2 \geq 0 \Leftrightarrow (x - y)^2 \geq 0$$

۲۶ اگر n حاصل ضرب دو عدد طبیعی متوالی باشد، کدام گزینه قطعاً مربع کامل است؟

$$2n + 4 \quad (2)$$

$$4n + 1 \quad (1)$$

$$4n + 8 \quad (4)$$

$$2n + 5 \quad (3)$$

پاسخ خیلی تشریحی ✓

گزینه (۱): پاسخ صحیح است و اثبات آن به صورت زیر است:

$$n = k(k+1) \Rightarrow 4n + 1 = 4k(k+1) + 1 = 4k^2 + 4k + 1 = (2k+1)^2$$

حاصل ضرب دو عدد طبیعی متوالی

مثال نقض برای گزینه‌های دیگر:

$$\text{گزینه (۲): } n = 1 \times 2 = 2 \Rightarrow 2n + 4 = 2(2) + 4 = 8 \quad \times$$

$$\text{گزینه (۳): } n = 2 \times 3 = 6 \Rightarrow 2n + 5 = 2(6) + 5 = 17 \quad \times$$

$$\text{گزینه (۴): } n = 2 \times 3 = 6 \Rightarrow 4n + 8 = 4(6) + 8 = 32 \quad \times$$

کدام گزینه، مثال نقضی برای حکم «برای هر عدد طبیعی بزرگتر از ۱ مانند n ، عدد $2^n - 1$ اول است.» محسوب می‌شود؟

۵ (۴)

۳ (۳)

۹ (۲)

۷ (۱)

۲۷



درستی حکم را برای هر کدام از گزینه‌ها بررسی کن تا مثال نقض را پیدا کنی.

 **Hint**

پاسخ خیلی تشریحی ✓ می‌دانیم که مثال نقض، روشی در استدلال است که برای رد کردن یک حکم کلی به کار می‌رود، پس برای این سؤال عددی قابل قبول

است که به ازای آن، عبارت $2^n - 1$ غیر اول باشد، پس هر یک از گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم:

(۱) گزینه (۱): $n = 7 \Rightarrow 2^7 - 1 = 128 - 1 = 127$ اول ✗

(۲) گزینه (۲): $n = 9 \Rightarrow 2^9 - 1 = 512 - 1 = 511 = 7 \times 73$ غیر اول ✗

(۳) گزینه (۳): $n = 3 \Rightarrow 2^3 - 1 = 8 - 1 = 7$ اول ✗

(۴) گزینه (۴): $n = 5 \Rightarrow 2^5 - 1 = 32 - 1 = 31$ اول ✗



به ازای چند مقدار x از مجموعه $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ ، عبارت $\frac{x^2(x+1)^2}{4}$ عددی زوج است؟

۴ (۴)

۳ (۳)

۲ (۲)

۱ (۱)

پاسخ خیلی تشریحی ✓ هر یک از اعداد را بررسی می‌کنیم:

$$x = 1 \Rightarrow \frac{1 \times 4}{4} = 1 \quad \times$$

$$x = 2 \Rightarrow \frac{4 \times 9}{4} = 9 \quad \times$$

$$x = 3 \Rightarrow \frac{9 \times 16}{4} = 36 \quad \checkmark$$

$$x = 4 \Rightarrow \frac{16 \times 25}{4} = 100 \quad \checkmark$$

$$x = 5 \Rightarrow \frac{25 \times 36}{4} = 225 \quad \times$$

$$x = 6 \Rightarrow \frac{36 \times 49}{4} = 441 \quad \times$$

پس به ازای دو مقدار ۳ و ۴ عبارت زوج است؛ بنابراین گزینه (۲) پاسخ است.

می‌توانیم با تحلیل نیز، این سؤال را حل کنیم. $\frac{x^2(x+1)^2}{4}$ باید مضرب ۲ باشد، پس $x^2(x+1)^2 = 4k$ در نتیجه $(x(x+1))^2 = 4k$ است، یعنی مربع حاصل ضرب ۲ عدد متوالی باید حداقل ۳ عامل ۲ داشته باشد، پس خود عدد یا عدد بعدی آن باید حداقل دو عامل ۲ داشته باشند که مربع آن‌ها بتواند مضرب ۸ باشد؛ یعنی مثلاً ۴ چون 2×2 است می‌تواند قابل قبول باشد، اما ۶ چون 2×3 است و فقط یک عامل ۲ دارد قابل قبول نیست.

$$\frac{x^2(x+1)^2}{4} = 2k \Rightarrow x^2(x+1)^2 = 4k \Rightarrow (x(x+1))^2 = 4k \Rightarrow \begin{cases} x = 4q \xrightarrow{q=1} x = 4 \\ \text{یا} \\ x+1 = 4q \xrightarrow{q=1} x = 3 \end{cases}$$

هندسیه

۲۹

اگر A, B, C و C ماتریس‌های مربعی هم‌مرتبه باشند، آن‌گاه کدام گزینه همواره درست است؟

$$AB = AC \Rightarrow B = C \quad (۲)$$

$$(AB)^T = A^T B^T \quad (۱)$$

$$(AB)C = A(BC) \quad (۴)$$

$$AB = BA \quad (۳)$$



درسی Box

اگر A, B, C سه ماتریس و r و s دو عدد حقیقی باشند به طوری که ضرب‌های ماتریسی بین آن‌ها قابل انجام باشد، آن‌گاه:

$$(rA) \times (sB) = (rs)A \times B = A \times (rs)B = (rs)(A \times B) \quad (۱)$$

(۲) در حالت کلی ضرب ماتریس‌ها خاصیت جابه‌جایی ندارد، یعنی $A \times B \neq B \times A$ ، مگر در حالت‌های خاص.

$$A \times (B \times C) = (A \times B) \times C$$

(۳) خاصیت شرکت‌پذیری:

(۴) خاصیت توزیع‌پذیری (از راست و چپ):

$$A \times (B + C) = A \times B + A \times C \quad , \quad (B + C) \times A = B \times A + C \times A$$

(۵) اگر $A = B$ ، آن‌گاه:

$$A \times C = B \times C \quad , \quad C \times A = C \times B$$

اما دقت کنید که از $A \times C = B \times C$ یا $C \times A = C \times B$ نمی‌توان نتیجه گرفت که $A = B$ ، یعنی ضرب ماتریس‌ها فاقد خاصیت حذفی است.(۶) ممکن است $A \times B = \bar{O}$ ولی A و B هیچ‌کدام ماتریس صفر نباشند.

گزینه (۴) بیان‌کننده خاصیت شرکت‌پذیری ماتریس‌هاست؛ بنابراین در حالت کلی همواره صحیح است، اما در مورد صحیح بودن گزینه‌های دیگر نمی‌توان حکم کلی داد.

به نادرستی گزینه‌های (۲) و (۳) و درستی گزینه (۴) در درس‌باکس اشاره شد، در مورد گزینه (۱) دقت کنید که در حالت کلی $(AB)^T = ABAB$ می‌باشد و تساوی $(AB)^T = A^T B^T$ زمانی برقرار است که $AB = BA$ باشد.

پاسخ خیلی تشریحی ✓

اگر $\begin{bmatrix} 4 & a & 1 \\ -4 & 5 & -2 \\ 1 & -2 & b \end{bmatrix}$ برابر ماتریس همانی باشد، آن گاه $a + b$ کدام است؟

۳۰

۲ (۱) -۱ (۲) ۱ (۳) -۲ (۴)



درتس Box

(۱) ماتریس واحد (همانی)، نوعی ماتریس اسکالر است که درایه‌های واقع بر قطر اصلی آن، همگی ۱ هستند، ماتریس همانی از

$$I_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

مرتبه n با I_n نشان داده می‌شود، مثلاً

(۲) دو ماتریس زمانی با هم برابرند که درایه‌های آن‌ها نظیربه‌نظیر با هم برابر باشند.

(۳) درایه سطر i ام و ستون j ام ماتریس AB از ضرب سطر i ام ماتریس A در ستون j ام ماتریس B به دست می‌آید.

گام اول (محاسبه حاصل ضرب ماتریس‌ها): ماتریس‌ها را در هم ضرب می‌کنیم و سطر اول ماتریس حاصل ضرب را به دست می‌آوریم. ✓ پاسخ خیلی تشریحی

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 5 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & a & 1 \\ -4 & 5 & -2 \\ 1 & -2 & b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & a+3 & b-1 \\ 0 & 2a+7 & 4b-4 \\ 0 & 3a+9 & 8b-7 \end{bmatrix}$$

گام دوم (محاسبه a و b):

از برابر قراردادن حاصل ضرب دو ماتریس که در گام اول به دست آوریم، با ماتریس همانی، داریم:

$$\begin{bmatrix} 1 & a+3 & b-1 \\ 0 & 2a+7 & 4b-4 \\ 0 & 3a+9 & 8b-7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} a+3=0 \Rightarrow a=-3 \\ b-1=0 \Rightarrow b=1 \end{cases} \Rightarrow a+b=-2$$



۳۱

اگر A و B دو ماتریس 2×2 باشند به طوری که $BA = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ ، آن گاه مجموع درایه‌های غیرواقعی بر قطر اصلی ماتریس

$$A + B \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ -6 & -6 \end{bmatrix} A$$

کدام است؟ $2B \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$

-۴ (۴)

-۶ (۳)

۸ (۲)

۱۰ (۱)

مشاوره این سؤال، مشابه یکی از سؤالات کنکور اردیبهشت ۱۴۰۳ طراحی شده است.

دربس Box

ماتریس همانی (واحد) عضو خنثی در عمل ضرب ماتریس‌های مربعی است. اگر A یک ماتریس مربعی و I ماتریس همانی هم‌مرتبه آن باشد، آن گاه داریم:

$$A \times I = I \times A = A$$

پاسخ خیلی تشریحی ✓ گام اول (استفاده از خواص ضرب ماتریس‌ها برای ساده‌سازی عبارت): ابتدا توجه کنید که:

$$2B \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} A = B \times 2 \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} A = B \begin{bmatrix} 2 & -4 \\ 6 & 8 \end{bmatrix} A$$

از B (از چپ) و از A (از راست) فاکتور می‌گیریم. پس باید حاصل ماتریس زیر را به دست آوریم:

$$B \begin{bmatrix} 2 & -4 \\ 6 & 8 \end{bmatrix} A + B \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ -6 & -6 \end{bmatrix} A = B \left(\begin{bmatrix} 2 & -4 \\ 6 & 8 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ -6 & -6 \end{bmatrix} \right) A = B \underbrace{\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}}_{2I} A$$

گام دوم (محاسبه ماتریس حاصل): طبق چیزی که در گام اول به دست آوردیم ماتریس مطلوب برابر زیر است و بنا بر خواص ضرب ماتریس‌ها داریم:

$$B \times 2I \times A = 2BA = 2 \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 8 \end{bmatrix}$$

$$4 + 6 = 10$$

و مجموع درایه‌های غیرواقعی بر قطر اصلی آن برابر است با:

$$اگر A = [a_{ij}]_{3 \times 3} که در آن \begin{cases} -1 & ; |i-j| > 1 \\ 0 & ; |i-j| = 1 \\ 1 & ; |i-j| < 1 \end{cases} ، آن گاه مجموع درایه‌های ماتریس A^2 کدام است؟$$

۴) صفر

۳) ۳

۲) ۲

۱) ۱

مشاوره این سؤال، مشابه یکی از سؤالات امتحان نهایی خرداد ۱۴۰۳ طراحی شده است.

درس‌Box

نمایش ماتریس‌ها:

در حالت کلی اگر ماتریسی مانند A دارای m سطر و n ستون باشد، می‌نویسیم $A_{m \times n}$ و می‌خوانیم که ماتریس، یک ماتریس $m \times n$ (در m) است.

اعداد داخل هر ماتریس، درایه‌های ماتریس نام دارند. به منظور مشخص کردن جایگاه هر درایه در ماتریس، از دو «اندیس» استفاده می‌کنیم. اندیس سمت چپ جای سطر و اندیس سمت راست جای ستون درایه را نشان می‌دهد.

در هر ماتریس، عدد جای گرفته در محل سطر i ام و ستون j ام را با a_{ij} نمایش می‌دهند، و به آن درایه سطر i ام و ستون j ام می‌گویند:

ستون j ام

$$\begin{matrix} \rightarrow \text{سطر } i\text{ام} & \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mj} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \\ & \end{matrix}_{m \times n}$$

اگر A یک ماتریس $m \times n$ و a_{ij} درایه‌ای از این ماتریس باشد، مسلم است که i و j در محدوده زیر تغییر می‌کنند:

$$\begin{cases} 1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n \end{cases}$$

پاسخ خیلی تشریحی ✓ **گام اول (یافتن ماتریس A):** طبق روابطی که برای درایه‌های ماتریس A در صورت سؤال گفته شد، ماتریس A را می‌نویسیم. این

ماتریس دارای سه سطر و سه ستون است و نمایش آن به صورت زیر است:

$$A_{3 \times 3} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

طبق الگویی که برای تعریف هر درایه ماتریس معین شده، ماتریس A به صورت زیر است:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

گام دوم (محاسبه A^2): ماتریس A را به دست آورده‌ایم، حالا آن را در خودش ضرب می‌کنیم و ماتریس A^2 را به دست می‌آوریم.

$$A^2 = A \times A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

گام سوم (محاسبه خواسته سؤال): مجموع درایه‌های ماتریس A^2 را به دست می‌آوریم.

$$2 + (-2) + 1 + (-2) + 2 = 1$$

۳۳ اگر $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ ، آن گاه ماتریس $A^4 - A^3$ ، برابر با کدام است؟

$$2(A+I) \quad (2)$$

$$2A - I \quad (4)$$

$$A - I \quad (1)$$

$$2A + I \quad (3)$$

مشاوره یادگرفتن رابطه کیلی همیلتون که در درس باکس آن را گفته‌ایم، در حل بعضی از سؤال‌ها خیلی کمک‌مان می‌کند، حتماً این رابطه را یاد بگیرید.

درباره Box

رابطه کیلی همیلتون

هر ماتریس 2×2 مانند $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ در معادله روبه‌رو صدق می‌کند:

$$A^2 - (a+d)A + (ad-bc)I = \bar{O}$$

به این معادله، معادله کیلی - همیلتون یا معادله مشخصه ماتریس می‌گویند. حفظ کردن این معادله خالی از لطف نیست. هرگاه A^2, A^3, A^4, \dots را برحسب A و I خواستند از این معادله استفاده کنید.

این سؤال را به ۲ روش می‌توانیم حل کنیم، روش اول به توان رساندن ماتریس A و محاسبه ماتریس A^4 و A^3 است و روش دوم استفاده از معادله کیلی همیلتون برای یافتن ماتریس A^2 است.

گام اول (محاسبه ماتریس A^4 و A^3): ابتدا ماتریس A^2 را محاسبه می‌کنیم و پس از آن A^3 و A^4 را به دست می‌آوریم.

$$A^2 = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$A^4 = A^2 \times A^2 = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & -4 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$$

$$A^3 = A^2 \times A = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & -3 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

گام دوم (محاسبه خواسته سؤال):

$$A^4 - A^3 = \begin{bmatrix} -3 & -4 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -2 & -3 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

با توجه به گزینه‌ها، حاصل $A^4 - A^3$ برابر $(A-I)$ است، زیرا:

$$A - I = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

گام اول (محاسبه A^2, A^3, A^4 با استفاده از معادله کیلی همیلتون):

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \Rightarrow A^2 = (a+d)A - (ad-bc)I \xrightarrow{\text{در این سؤال}} A^2 = 2A - I$$

$$\xrightarrow{\times A} A^3 = 2A^2 - A \xrightarrow{\times A} A^4 = 2A^3 - A^2$$

گام دوم (محاسبه خواسته سؤال): حالا عبارت خواسته سؤال را با استفاده از روابط به دست آمده در گام اول به دست می‌آوریم. در مرحله اول A^4 ، در مرحله دوم A^3 و در مرحله آخر A^2 را جای‌گذاری می‌کنیم.

$$A^4 - A^3 = (2A^3 - A^2) - A^3 = A^3 - A^2 = (2A^2 - A) - A^2 = A^2 - A = (2A - I) - A = A - I$$

پاسخ خیلی تشریحی

په‌چور دیگه

$$B = \begin{bmatrix} a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{32} & a_{33} & a_{13} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 9 & -8 \\ 3 & 4 & 5 \\ -2 & 0 & -6 \end{bmatrix} \text{ اگر } A = [a_{ij}]_{3 \times 3} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & -2 \\ 3 & -2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \log 2 & -2 & 0 \\ 3 & 1 & -1 \\ -\log 5 & -1 & 2 \end{bmatrix} \text{ فرض کنید}$$

۳۴

باشد، مجموع درایه‌های سطر دوم ماتریس B کدام است؟

-۶۱ (۴)

۱۷ (۳)

۸۴ (۲)

۱۵۶ (۱)

مشاوره برای حل این سؤال، علاوه بر ویژگی‌های ماتریس‌ها، باید ویژگی‌های لگاریتم را هم بدانید. سابقه طرح چنین سؤال‌هایی را در کنکور هم داریم.

درس‌Box

(۱) می‌دانیم اگر $a, b, c \in \mathbb{R}^+, c \neq 1$ ، آن‌گاه $\log_c ab = \log_c a + \log_c b$ ؛ بنابراین $\log 5 + \log 2 = \log 10 = 1$.

(۲) فرض کنید A, B, C ماتریس‌هایی باشند، به طوری که $C = AB$ ، آن‌گاه:

(الف) درایه سطر i ام و ستون j ام ماتریس C از ضرب سطر i ام A در ستون j ام B به دست می‌آید.

(ب) سطر i ام ماتریس C برابر است با حاصل ضرب سطر i ام ماتریس A در ماتریس B .

(پ) ستون j ام ماتریس C برابر است با حاصل ضرب ماتریس A در ستون j ام ماتریس B .

گام اول (تحلیل سؤال): مطلوب سؤال مجموع درایه‌های سطر دوم ماتریس B است؛ بنابراین طبق درس باکس باید حاصل ضرب

$$\begin{bmatrix} a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{32} & a_{33} & a_{13} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 9 & -8 \\ 3 & 4 & 5 \\ -2 & 0 & -6 \end{bmatrix} \text{ را در ماتریس } \begin{bmatrix} -1 & 9 & -8 \\ 3 & 4 & 5 \\ -2 & 0 & -6 \end{bmatrix} \text{ به دست بیاوریم.}$$

$$\text{گام دوم (محاسبه ستون اول ماتریس A): سطر دوم ماتریس } \begin{bmatrix} a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{32} & a_{33} & a_{13} \end{bmatrix} \text{ در واقع ستون اول ماتریس A است و برای}$$

$$\text{به دست آوردن آن، ماتریس } \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & -2 \\ 3 & -2 & -3 \end{bmatrix} \text{ را در ستون اول } \begin{bmatrix} \log 2 & -2 & 0 \\ 3 & 1 & -1 \\ -\log 5 & -1 & 2 \end{bmatrix} \text{ ضرب می‌کنیم.}$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & -2 \\ 3 & -2 & -3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \log 2 \\ 3 \\ -\log 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 11 \\ -3 \end{bmatrix}$$

گام سوم (محاسبه سطر دوم ماتریس B): سطر دوم ماتریس B را به صورت زیر به دست می‌آوریم:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -1 & 9 & -8 \\ 3 & 4 & 5 \\ -2 & 0 & -6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 11 & -3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -1 & 9 & -8 \\ 3 & 4 & 5 \\ -2 & 0 & -6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 38 & 53 & 65 \end{bmatrix}$$

$$38 + 53 + 65 = 156$$

و بنابراین مجموع درایه‌های سطر دوم این ماتریس برابر است با:



ماتریس‌های $C = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ -10 & -6 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 6 & 3 \end{bmatrix}$ مفروض‌اند. اگر $A(A-I) = BC - I$ باشد، ماتریس $A^{22} + A$ برابر کدام است؟ ۲۵

 \bar{O} (۴)

I (۳)

 $B - C$ (۲)

CB (۱)



درسی Box

(۱) به ماتریسی که همه درایه‌های آن صفر باشد، ماتریس صفر گفته می‌شود. ماتریس صفر در هر ماتریس دیگری ضرب شود، حاصل آن یک ماتریس صفر می‌شود.

(۲) ماتریس I به هر توانی که برسد، برابر I است.

(۳) برای ماتریس دلخواه مربعی A و ماتریس I (هم مرتبه با A)، اتحادهای جبری برقرار است، مثلاً:

$$(A+I)(A^n - A + I) = A^n + I^n = A^n + I$$

پاسخ خیلی تشریحی ✓ گام اول (محاسبه ماتریس BC):

$$BC = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 6 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ -10 & -6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \bar{O}$$

گام دوم (محاسبه ماتریس A^3): ماتریس BC را به دست آوردیم. حالا از فرض مسئله استفاده می‌کنیم تا ماتریس A^3 را به دست بیاوریم.

$$A(A-I) = BC - I \Rightarrow A^2 - A = \bar{O} - I$$

$$\Rightarrow A^2 - A + I = \bar{O}$$

دو طرف تساوی را از چپ در $A+I$ ضرب می‌کنیم تا ماتریس A^3 را بسازیم:

$$(A+I)(A^2 - A + I) = (A+I)\bar{O}$$

$$A^3 + I = \bar{O} \Rightarrow A^3 = -I$$

گام سوم (محاسبه خواسته سؤال):

$$A^{22} = A \times A^{21} = A(A^3)^7 = A \times (-I)^7$$

$$= A \times (-1)^7 I^7 = -A$$

$$A^{22} + A = -A + A = \bar{O}$$

بنابراین خواسته سؤال برابر است با:

خط d و نقطه A به فاصله ۲ از آن در یک صفحه قرار دارند. چند نقطه در این صفحه وجود دارد که از نقطه A به فاصله ۲ و از خط d به فاصله ۱ باشد؟

(۴) چهار

(۳) دو

(۲) یک

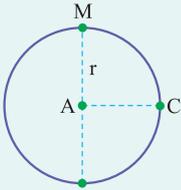
(۱) هیچ



درس‌Box

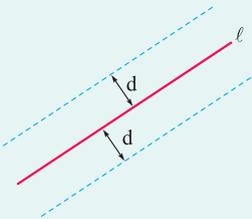
مجموعه نقاط با فاصله ثابت از یک نقطه:

مجموعه نقاطی از صفحه که از نقطه ثابت A به فاصله r باشند، روی دایره‌ای به مرکز A و شعاع r قرار می‌گیرند. پس برای ترسیم مجموعه نقاطی مانند M که در ویژگی $AM = r$ صدق می‌کنند، باید دایره‌ای به مرکز A و شعاع r رسم کنیم.

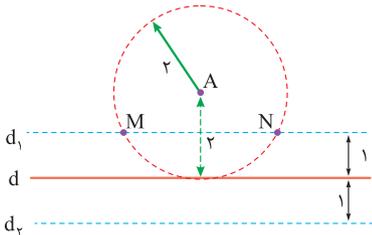


مجموعه نقاط با فاصله ثابت از یک خط:

نقاطی از صفحه که به فاصله d از خط l قرار داشته باشند، روی دو خط موازی l و در دو طرف آن هستند:



پاسخ خیلی تشریحی ✓ گام اول (رسم شکل): تمام نقاطی از صفحه که از نقطه A به فاصله ۲ باشند روی دایره‌ای به مرکز A و شعاع ۲ واقع هستند و تمام نقاطی از صفحه که از خط d به فاصله ۱ هستند، دو خط موازی با آن و در طرفین آن یعنی $d_۱$ و $d_۲$ هستند. بنابراین شکل مورد نظر به صورت مقابل است:



گام دوم (پیدا کردن نقاط برخورد): با توجه به شکل متوجه می‌شویم که دایره و دو خط موازی $d_۱$ و $d_۲$ در ۲ نقطه مشترک‌اند. پس دو نقطه وجود دارد که از نقطه A به فاصله ۲ و از خط d به فاصله ۱ باشد.

۳۷

در مثلث قائم‌الزاویه ABC که $AC > AB$ ، از نقطه M وسط وتر BC ، خطی عمود بر آن رسم می‌کنیم تا ضلع AC را در N قطع کند. اگر $AN = MN$ ، آن‌گاه زاویه BNC چند برابر اندازه زاویه C است؟

۴ (۴)

۳ / ۵ (۳)

۳ (۲)

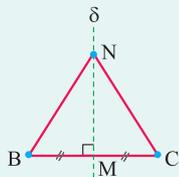
۲ / ۵ (۱)



MN عمود منصف BC و BN نیمساز زاویه B است.

Hint

درجس Box



(۱) هر نقطه روی عمود منصف یک پاره‌خط، از دو سر آن پاره‌خط به یک فاصله است و بالعکس؛ یعنی اگر در شکل مقابل خط δ عمود منصف BC باشد، آن‌گاه:

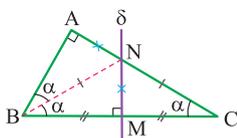
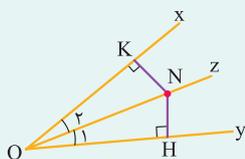
$$N \in \delta \Leftrightarrow NB = NC$$

(۲) هر نقطه واقع بر نیمساز یک زاویه، از دو ضلع آن زاویه به یک فاصله است و بالعکس؛ یعنی در شکل مقابل، داریم:

$$\hat{O}_1 = \hat{O}_2 \Leftrightarrow NH = NK$$

آن‌گاه:

(۳) مجموعه زاویه‌های داخلی هر مثلث، 180° است.



گام اول (رسم شکل مناسب و تحلیل سؤال): مطابق شکل، خط δ عمود منصف BC است،

پس $NB = NC$ ، یعنی مثلث NBC مثلث متساوی‌الساقین است، پس در نظر می‌گیریم $\hat{NBC} = \hat{C} = \alpha$.

گام دوم (استفاده از خاصیت نیمساز):

طبق فرض سؤال $NM = AN$ ، پس N بر نیمساز زاویه A واقع است، پس $\hat{ABN} = \hat{NBC} = \alpha$ ، در نتیجه $\hat{ABC} = 2\alpha$.

گام سوم (یافتن پاسخ سؤال):

در مثلث ABC ، داریم:

$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180^\circ \Rightarrow 90^\circ + 2\alpha + \alpha = 180^\circ \Rightarrow \alpha = 30^\circ$$

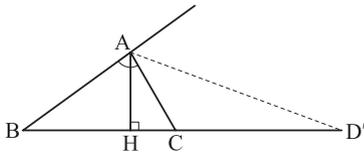
حالا اگر مجموع زاویه‌های داخلی مثلث NBC را برابر با 180° قرار دهیم، داریم:

$$\hat{BNC} + \alpha + \alpha = 180^\circ \xrightarrow{\alpha=30^\circ} \hat{BNC} = 120^\circ$$

$$\frac{\hat{BNC}}{\hat{C}} = \frac{120^\circ}{30^\circ} = 4 \text{ پس:}$$

پاسخ خیلی تشریحی ✓

مطابق شکل، $\hat{B} = 2^\circ$ و $\hat{BAC} = 12^\circ$ است. اگر AD' نیمساز زاویه خارجی A در مثلث ABC باشد، زاویه \hat{HAD}' کدام است؟



۶۰° (۱)

۷۰° (۲)

۷۵° (۳)

۸۰° (۴)

۳۸

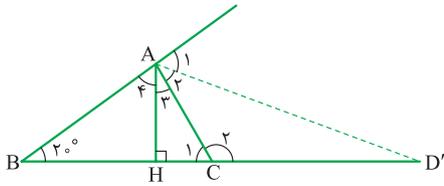


مجموع زاویه‌های داخلی هر مثلث 180° است.

درتس Box

پاسخ خیلی تشریحی ✓ خواسته سؤال زاویه \hat{HAD}' یعنی $\hat{A}_p + \hat{A}_1$ است؛ پس ابتدا \hat{A}_p و سپس \hat{A}_1 را به دست می‌آوریم.

گام اول (محاسبه \hat{A}_1): $\hat{A}_p + \hat{A}_1$ زاویه خارجی \hat{BAC} است. پس داریم:



$$\underbrace{\hat{BAC}}_{12^\circ} + \hat{A}_1 + \hat{A}_p = 180^\circ \Rightarrow \hat{A}_1 + \hat{A}_p = 180^\circ - 12^\circ \Rightarrow \hat{A}_1 + \hat{A}_p = 168^\circ$$

از طرفی طبق فرض می‌دانیم AD' نیمساز است، پس $\hat{A}_1 = \hat{A}_p = \frac{168^\circ}{2} = 84^\circ$.

گام دوم (محاسبه \hat{A}_p): برای محاسبه زاویه \hat{A}_p ابتدا باید زاویه \hat{C}_1 را به دست بیاوریم. در مثلث ABC زوایای \hat{A} و \hat{B} به ترتیب 12° و 2° هستند، پس زاویه \hat{C}_1 برابر است با:

$$\underbrace{\hat{BAC}}_{12^\circ} + \underbrace{\hat{B}}_{2^\circ} + \hat{C}_1 = 180^\circ \Rightarrow \hat{C}_1 = 180^\circ - 14^\circ = 166^\circ$$

هم‌چنین در مثلث HAC ، $\hat{H} = 90^\circ$ و $\hat{C}_1 = 166^\circ$. حالا \hat{A}_p را به دست می‌آوریم:

$$\hat{A}_p = 180^\circ - (90^\circ + 166^\circ) = 24^\circ$$

$$\hat{HAD}' = \hat{A}_p + \hat{A}_1 = 24^\circ + 84^\circ = 108^\circ$$

گام سوم (محاسبه \hat{HAD}'):

نیمسازهای داخلی مثلث ABC در نقطه O هم‌رس هستند. اگر $AB > AC$ ، آن‌گاه کدام گزینه ممکن است نادرست باشد؟

$$BC > OC \quad (۲)$$

$$BC > OA \quad (۱)$$

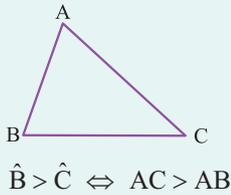
$$OB > OC \quad (۴)$$

$$BC > OB \quad (۳)$$

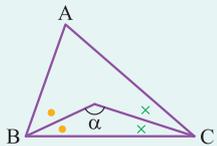
در درس Box

قضیه ضلع برتر و زاویه برتر

(۱) در مثلث ABC اگر $\hat{B} > \hat{C}$ ، آن‌گاه $AC > AB$ و بالعکس.

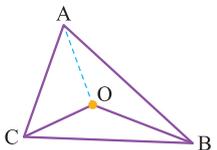


(۲) در مثلث ABC ، زاویه منفرجه بین نیمسازهای دو زاویه B و C برابر است با:



$$\alpha = 90^\circ + \frac{\hat{A}}{2}$$

شکل مناسب را رسم می‌کنیم. طبق درس باکس داریم: **پاسخ خیلی تشریحی ✓**



$$AB > AC \Rightarrow \hat{C} > \hat{B} \Rightarrow \frac{\hat{C}}{2} > \frac{\hat{B}}{2} \xrightarrow{\triangle OBC} OB > OC$$

از طرفی می‌دانیم در مثلث BOC ، زاویه \hat{BOC} برابر است با $90^\circ + \frac{\hat{A}}{2}$ ، پس این زاویه قطعاً منفرجه است؛ پس از دو زاویه دیگر این مثلث بزرگ‌تر است و داریم:

$$BC > OB \quad \text{و} \quad BC > OC$$

پس گزینه‌های (۲)، (۳) و (۴) همواره صحیح هستند، ولی نامساوی گزینه (۱) با توجه به شکل مثلث ممکن است درست یا نادرست باشد.



۴۰

در مثلثی که طول اضلاع آن اعداد طبیعی است، یک ضلع چهار برابر ضلع دیگر و طول ضلع سوم برابر ۲۹ است. مجموع کم‌ترین و بیشترین مقدار ممکن برای محیط این مثلث کدام است؟

۱۳۳ (۴)

۱۲۸ (۳)

۱۰۱ (۲)

۹۹ (۱)



نامساوی مثلثی

درس‌Box

$$|b - c| < a < b + c$$

طول هر ضلع مثلث، از مجموع طول‌های دو ضلع دیگر کم‌تر و از قدرمطلق تفاضل طول‌های دو ضلع دیگر بیشتر است.

گام اول (محاسبه مقادیر ممکن برای اضلاع اول و دوم): اگر طول یک ضلع این مثلث را x را بگیریم، طول اضلاع این مثلث x ، $4x$ و 29 است، بنابراین طبق قضیه نامساوی مثلثی داریم:

$$|4x - x| < 29 < 4x + x \xrightarrow{x > 0} 3x < 29 < 5x \Rightarrow \begin{cases} 3x < 29 \Rightarrow x < \frac{29}{3} \\ 29 < 5x \Rightarrow x > \frac{29}{5} \end{cases} \xrightarrow{\text{اشتراک}} \frac{29}{5} < x < \frac{29}{3}$$

با توجه به آن که $\frac{29}{5} = 5/8$ و $\frac{29}{3} = 9/67$ ، برای x که در صورت سؤال گفته شده عددی طبیعی است، می‌توان 6 ، 7 ، 8 و 9

را در نظر گرفت.

گام دوم (محاسبه کم‌ترین و بیشترین مقدار برای محیط):

$$\left. \begin{array}{l} \text{کم‌ترین محیط: } x = 6 \Rightarrow 6 + 24 + 29 = 59 \\ \text{بیشترین محیط: } x = 9 \Rightarrow 9 + 36 + 29 = 74 \end{array} \right\} \Rightarrow \text{مجموع} = 133$$



فیزیک دوازدهم

۴۱

متحرکی با سرعت ثابت در راستای محور x در حال حرکت است. اگر بردار مکان متحرک در دو لحظه $t_1 = 2s$ و $t_2 = 5s$ به ترتیب برابر $(9m)\vec{i}$ و $(-3m)\vec{i}$ باشد، معادله مکان - زمان متحرک در SI کدام است؟

$$x = -2t + 17 \quad (2)$$

$$x = -4t + 17 \quad (4)$$

$$x = -2t + 13 \quad (1)$$

$$x = -4t + 13 \quad (3)$$

مشاوره این تست، مشابه یکی از سوالات کنکور تجربی در نوبت اول ۱۴۰۳ است. فکر نکنید که همه سوالات کنکور باید عجیب و غریب یا سخت باشند.

درسی Box

(۱) رابطه سرعت متوسط در حرکت روی محور x به صورت زیر است:

$$v_{av} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1}$$

v_{av} : سرعت متوسط (m/s)

Δx : جابه‌جایی (m)

x_1 : مکان متحرک در لحظه t_1 (m)

x_2 : مکان متحرک در لحظه t_2 (m)

در حرکت با سرعت ثابت، سرعت لحظه‌ای (v) و سرعت متوسط (v_{av}) برابر هستند.

$$x = vt + x_0$$

(۲) معادله مکان - زمان در حرکت با سرعت ثابت به صورت روبه‌رو است:

x : مکان متحرک در لحظه t (m)

x_0 : مکان اولیه یا مکان متحرک در لحظه $t = 0$ (m)

v : سرعت متحرک (m/s)

t : زمان (s)



پاسخ خیلی تشریحی ✓ گام اول: با استفاده از رابطه سرعت متوسط، سرعت متحرک را به دست می‌آوریم:

$$v = v_{av} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} = \frac{-3m - 9m}{5s - 2s} = \frac{-12m}{3s} = -4 \text{ m/s}$$

گام دوم: زمان و مکان متحرک در یکی از لحظه‌های داده شده را در معادله مکان - زمان حرکت با سرعت ثابت قرار می‌دهیم و مکان اولیه (x_0) را حساب می‌کنیم:

$$x = vt + x_0 \quad \xrightarrow[x_1=9m, t_1=2s]{v=-4 \text{ m/s}} \quad 9 = -4 \times 2 + x_0 \Rightarrow x_0 = 17m$$

بنابراین معادله مکان - زمان در SI به صورت $x = -4t + 17$ بوده و گزینه (۴) درست است.

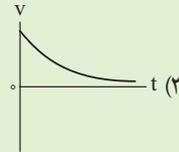
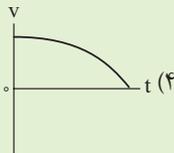
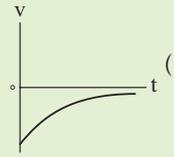
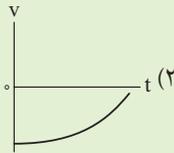
در معادله مکان - زمان، با جای‌گذاری لحظه $t_1 = 2s$ باید $x_1 = 9m$ و با جای‌گذاری $t_2 = 5s$ باید $x_2 = -3m$ به دست آید که این اتفاق فقط با معادله بیان شده در گزینه (۴) حاصل می‌شود.



۴۲

جسمی در خلاف جهت محور X حرکت می‌کند. اندازه شتاب جسم در حال افزایش و تندی آن در حال کاهش است. نمودار سرعت - زمان

این جسم به صورت کدام یک از شکل‌های زیر می‌تواند باشد؟



مشاوره در تمام کنکورهای ریاضی و تجربی سه سال اخیر، حداقل یکی از تست‌های فیزیک از نمودارهای حرکت‌شناسی مطرح شده است. ویژگی‌های هر یک از این نمودارها را به خوبی یاد بگیرید.

درسی Box

(۱) اگر حرکت متحرک در جهت محور X باشد، سرعت آن مثبت است و اگر حرکت متحرک در خلاف جهت محور X باشد، سرعت آن منفی است.

(۲) شتاب در هر لحظه دلخواه t ، برابر شیب خط مماس بر نمودار سرعت - زمان در آن لحظه است.

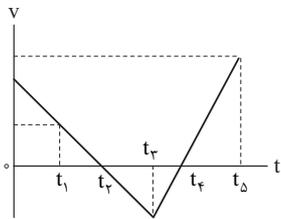
گام اول: از آن جا که جسم در خلاف جهت محور X حرکت می‌کند، سرعت آن منفی است. یعنی باید نمودار سرعت - زمان در زیر محور t قرار گیرد؛ بنابراین گزینه‌های (۳) و (۴) رد می‌شوند.

گام دوم: اندازه شتاب جسم، با قدرمطلق شیب خط مماس بر نمودار سرعت - زمان برابر است. شیب خط مماس بر نمودار در گزینه (۱) در حال کاهش و در گزینه (۲) در حال افزایش است؛ بنابراین گزینه (۲) درست است.

وقتی تندی در حال کاهش است، نمودار $v-t$ به طرف محور t نزدیک می‌شود. این موضوع در هر چهار گزینه وجود دارد.



نکته



نمودار سرعت - زمان متحرکی که در راستای محور X حرکت می کند، به شکل مقابل است.

کدامیک از عبارتهای زیر درباره این متحرک درست است؟

(الف) در بازه زمانی t_1 تا t_5 ، شتاب متوسط متحرک در جهت محور X است.

(ب) در بازه زمانی t_3 تا t_4 ، تندی متحرک در حال افزایش است.

(پ) در لحظه های t_4 و t_5 ، جهت بردار مکان متحرک تغییر می کند.

(ت) اندازه شتاب متحرک در لحظه t_4 ، بزرگتر از اندازه شتاب متوسط آن در بازه زمانی t_1 تا t_5 است.

(۲) الف و ت

(۱) الف و پ

(۴) ب و ت

(۳) ب و پ

۴۳

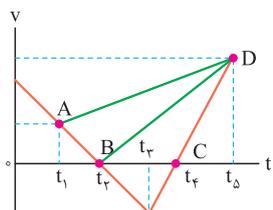


درس Box

(۱) شتاب متوسط بین دو لحظه، برابر شیب خطی است که نمودار سرعت - زمان را در آن دو لحظه قطع می کند.

(۲) هرگاه نمودار سرعت - زمان محور t را قطع کند و امتداد یابد، یعنی سرعت متحرک صفر شده و جهت حرکت عوض می شود.

(۳) بردار مکان متحرک در لحظه ای تغییر می کند که متحرک از مبدأ مکان ($X = 0$) بگذرد، یعنی علامت مکان (X) عوض شود.



درستی یا نادرستی موارد «الف» تا «ت» را به ترتیب بررسی می کنیم:

عبارت «الف»: شیب پاره خط AD شتاب متوسط متحرک در بازه زمانی t_1 تا t_5

را نشان می دهد. مطابق شکل، شیب این پاره خط مثبت است. یعنی شتاب متوسط

متحرک در بازه زمانی فوق، در جهت محور X بوده و مورد «الف» درست است.

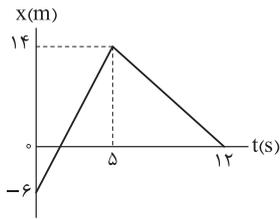
عبارت «ب»: در بازه زمانی t_3 تا t_4 ، نمودار سرعت - زمان به محور t نزدیک می شود، پس تندی در حال کاهش بوده و مورد «ب» نادرست است.

عبارت «پ»: در لحظه های t_4 و t_5 ، سرعت متحرک صفر شده و جهت حرکت عوض می شود، اما الزاماً متحرک از مبدأ مکان نمی گذرد؛ بنابراین الزاماً جهت بردار مکان تغییر نمی کند و مورد «پ» نادرست است.

عبارت «ت»: اندازه شتاب متحرک در لحظه t_4 با شیب پاره خط CD برابر است. اندازه شتاب متوسط در بازه زمانی t_3 تا t_5 نیز برابر با شیب پاره خط BD است. با توجه به نمودار، شیب پاره خط CD از شیب پاره خط BD بزرگتر بوده و مورد «ت» درست است.

پاسخ خیلی تشریحی

نمودار مکان - زمان متحرکی که در راستای محور x حرکت می کند، به شکل زیر است. اگر در بازه زمانی $t_1 = 0$ تا t_2 ، تندی متوسط متحرک برابر 3 m/s باشد، در همین بازه زمانی شتاب متوسط متحرک بر حسب متر بر مربع ثانیه کدام است؟



$$1) \quad 0.2 \vec{i}$$

$$2) \quad -0.2 \vec{i}$$

$$3) \quad 0.6 \vec{i}$$

$$4) \quad -0.6 \vec{i}$$

۴۴



ابتدا مشخص کنید که t_2 در کدام یک از بازه های زمانی 0 s تا 5 s و 5 s تا 12 s قرار دارد و مقدار t_2 را حساب کنید. سپس سرعت متحرک در هر یک از دو بازه زمانی فوق را پیدا کنید و با استفاده از آن ها، شتاب متوسط در بازه زمانی t_1 تا t_2 را به دست آورید.

Hint

۱) شرط تساوی تندی متوسط و اندازه سرعت متوسط در یک بازه زمانی معین آن است که مسافت و جابه جایی در آن بازه، برابر باشند؛ یعنی متحرک فقط در یک جهت حرکت کند.

درس Box

۲) وقتی سرعت متحرک ثابت است، سرعت لحظه ای و سرعت متوسط آن برابرند.

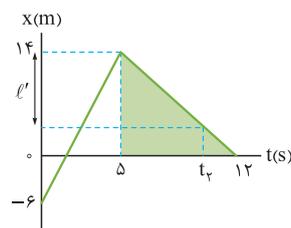
گام اول: در بازه زمانی 0 s تا 5 s سرعت متحرک (v_1) ثابت است و داریم:

$$v_{av} = \frac{\Delta x}{\Delta t} \Rightarrow v_1 = \frac{14 - (-6)}{5 - 0} = \frac{20}{5} = 4 \text{ m/s}$$

از طرفی چون در بازه زمانی فوق، تغییر جهت نداریم، تندی متوسط و سرعت متوسط برابر هستند:

$$s_{av} = v_{av} = v_1 = 4 \text{ m/s}$$

بنابراین تندی متوسط در بازه زمانی 0 s تا 5 s نمی تواند 3 m/s باشد. به عبارت دیگر، لحظه t_2 در بازه زمانی 5 s تا 12 s قرار می گیرد.



گام دوم: با استفاده از تشابه مثلث ها و رابطه تالس، مسافت طی شده توسط متحرک در بازه زمانی 5 s تا t_2 (l') را بر حسب t_2 حساب می کنیم:

$$\frac{l'}{14} = \frac{t_2 - 5}{12 - 5} \Rightarrow \frac{l'}{14} = \frac{t_2 - 5}{7} \Rightarrow l' = 2t_2 - 10$$

گام سوم: رابطه تندی متوسط متحرک در بازه زمانی t_1 تا t_2 را می نویسیم و از آن جا t_2 را به دست می آوریم:

$$s_{av} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{(14 - (-6)) + l'}{t_2 - t_1} \xrightarrow{s_{av} = 3 \text{ m/s}, t_1 = 0} 3 = \frac{20 + 2t_2 - 10}{t_2} \Rightarrow 3t_2 = 10 + 2t_2 \Rightarrow t_2 = 10 \text{ s}$$

گام چهارم: سرعت متحرک در لحظه $t_2 = 10 \text{ s}$ همان سرعت متوسط در بازه زمانی 5 s تا 12 s است، یعنی داریم:

$$v_{av} = \frac{\Delta x}{\Delta t} \Rightarrow v_2 = \frac{0 - 14}{12 - 5} = -2 \text{ m/s}$$

گام پنجم: شتاب متوسط در بازه زمانی t_1 تا t_2 را پیدا می کنیم:

$$a_{av} = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1} = \frac{-2 - 4}{10 - 0} = -0.6 \text{ m/s}^2 \Rightarrow \vec{a}_{av} = -(0.6 \text{ m/s}^2) \vec{i}$$



۴۵

معادله مکان - زمان متحرکی که در راستای محور X حرکت می کند، در SI به صورت $x = 2t^2 - 10t + 8$ است. در لحظه t_1 برای اولین بار جهت بردار مکان متحرک تغییر می کند و در لحظه t_2 جهت حرکت آن عوض می شود. سرعت متوسط متحرک در بازه زمانی t_1 تا t_2 چند متر بر ثانیه است؟

$$\begin{array}{ll} 3\vec{i} \text{ (۱)} & -3\vec{i} \text{ (۲)} \\ 6\vec{i} \text{ (۳)} & -6\vec{i} \text{ (۴)} \end{array}$$



Hint

بر اساس $x_1 = 0$ لحظه t_1 را به دست آورید. سپس بر اساس $v_2 = 0$ لحظه t_2 را حساب کنید و در این لحظه مکان متحرک (x_2) را پیدا کنید. اکنون می توانید سرعت متوسط در بازه زمانی t_1 تا t_2 را به دست آورید.

درسی Box

(۱) جهت بردار مکان متحرک هنگامی تغییر می کند که از مبدأ مکان ($x = 0$) بگذرد و جهت حرکت هنگامی تغییر می کند که سرعت متحرک در آن لحظه صفر شود ($v = 0$).

(۲) معادلات مکان - زمان و سرعت - زمان در حرکت با شتاب ثابت روی محور X به صورت روبه رو است: $x = \frac{1}{2}at^2 + v_0t + x_0$
 X: مکان متحرک در لحظه t (m)

a: شتاب (m/s^2)

t: زمان (s)

v_0 : سرعت اولیه (m/s)

x_0 : مکان متحرک در لحظه $t = 0$ (m)

$$v = at + v_0$$

v: سرعت متحرک (m/s)

v_0 : سرعت اولیه یا سرعت متحرک در لحظه $t = 0$ (m/s)

گام اول: مکان متحرک را برابر با صفر قرار می دهیم و لحظه ای را به دست می آوریم که متحرک از مبدأ مکان عبور می کند: ✓ پاسخ خیلی تشریحی

$$x = 2t^2 - 10t + 8 \xrightarrow{x=x_1=0} 0 = 2t^2 - 10t + 8 \Rightarrow 0 = t^2 - 5t + 4$$

$$\Rightarrow (t-1)(t-4) = 0 \Rightarrow \begin{cases} t_1 = 1s: \text{ لحظه ای که اولین بار جهت بردار مکان تغییر می کند} \\ t'_1 = 4s: \text{ لحظه ای که دومین بار جهت بردار مکان تغییر می کند} \end{cases}$$

گام دوم: معادله سرعت متحرک را به دست می آوریم:

$$\begin{cases} x = \frac{1}{2}at^2 + v_0t + x_0 \\ x = 2t^2 - 10t + 8 \end{cases} \Rightarrow \frac{1}{2}a = 2 \Rightarrow a = 4 m/s^2, v_0 = -10 m/s$$

حالا می توانیم سرعت متحرک را برابر با صفر قرار دهیم و لحظه t_2 را پیدا کنیم:

$$v = 4t - 10 \xrightarrow{v=0, t=t_2} 0 = 4t_2 - 10 \Rightarrow t_2 = \frac{10}{4} = 2.5 s$$

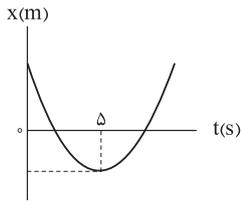
گام سوم: مکان متحرک در لحظه t_2 را حساب می کنیم:

$$x = 2t^2 - 10t + 8 \xrightarrow[t=x_2]{t=t_2=2.5} x_2 = 2(2.5)^2 - 10 \times 2.5 + 8 \Rightarrow x_2 = 12.5 - 25 + 8 \Rightarrow x_2 = -4.5 m$$

گام چهارم: اکنون می توانیم سرعت متوسط متحرک در بازه زمانی t_1 تا t_2 را به دست آوریم:

$$v_{av} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} = \frac{-4.5 - 0}{2.5 - 1} = -\frac{4.5}{1.5} = -3 m/s \Rightarrow \vec{v}_{av} = -(3 m/s)\vec{i}$$

نمودار مکان - زمان متحرکی که در راستای محور X حرکت می کند، به شکل سهمی زیر است. به ترتیب از راست به چپ، متحرک چند ثانیه در حال نزدیک شدن به مبدأ مکان و چند ثانیه در حال نزدیک شدن به مکان اولیه خود است؟



(۱) ۱۰، ۵

(۲) ۵، ۵

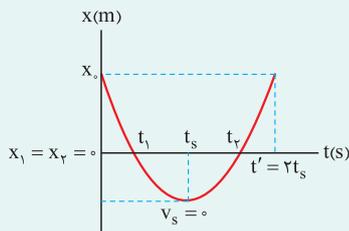
(۳) ۱۰، ۲/۵

(۴) ۵، ۲/۵

مشاوره هر چه پایه ریاضی قوی تری داشته باشید، در حل تستهای فیزیک موفق تر خواهید بود.

درس Box

(۱) در حرکت با شتاب ثابت روی خط راست، نمودار مکان - زمان متحرک به صورت یک سهمی است. در زوج لحظه‌هایی که نسبت به زمان رأس سهمی (t_s) تقارن دارند، متحرک دارای مکان‌های یکسان و تندی‌های یکسان است.

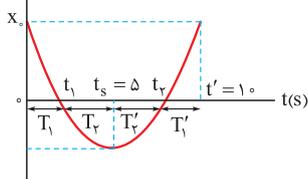


$$t_s = \frac{t_1 + t_2}{2}$$

$$t_s = \frac{0 + t'}{2} \Rightarrow t' = 2t_s$$

(۲) وقتی نمودار مکان - زمان به محور t ($x = 0$) نزدیک می‌شود، یعنی متحرک در حال نزدیک شدن به مبدأ مکان است.

گام اول: لحظه $t = 5s$ مربوط به رأس سهمی است و با توجه به تقارن موجود در شکل سهمی، متحرک در لحظه $t' = 2 \times 5 = 10s$ به مکان اولیه خود برمی‌گردد. همچنین $T_1 = T_1'$ و $T_2 = T_2'$ است.



گام دوم: متحرک در بازه‌های زمانی T_1 و T_1' در حال نزدیک شدن به مبدأ مکان ($x = 0$) است.

$$T_1 + T_1' = T_2 + T_2' = 5s$$

بنابراین گزینه‌های (۳) و (۴) رد می‌شوند.

گام سوم: متحرک در لحظه $t_s = 5s$ متوقف شده و از این لحظه تا لحظه $t' = 10s$ به سوی مکان اولیه خود حرکت می‌کند.

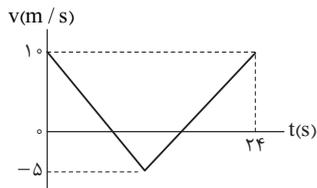
$$t' - t_s = 10 - 5 = 5s$$

بنابراین گزینه (۲) درست است.

نمودار سرعت - زمان متحرکی که در راستای محور X حرکت می کند، به شکل زیر است. این متحرک در مجموع، چند ثانیه در جهت

۴۷

محور X حرکت کرده است؟



۸ (۱)

۱۶ (۲)

۱۸ (۳)

۲۰ (۴)

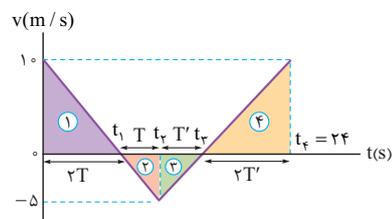
مشاوره رابطه تالس و نوشتن

نسبت تشابه بین مثلثها در حل بسیاری از تستهای مربوط به حرکت شناسی که به صورت نموداری مطرح می شوند، کاربرد دارد.



در هر بازه زمانی که سرعت متحرک مثبت است، متحرک در جهت محور X حرکت می کند. همچنین در هر بازه زمانی که سرعت متحرک منفی است، متحرک در خلاف جهت محور X حرکت می کند.

درس Box



گام اول: بازه زمانی t_1 تا t_2 را با T و بازه زمانی t_2 تا t_3 را با T' نشان می دهیم. بر این اساس، رابطه تالس بین دو مثلث متشابه (۱) و (۲) را می نویسیم:

پاسخ خیلی تشریحی

$$\frac{10}{5} = \frac{t_1 - 0}{t_2 - t_1} \Rightarrow \frac{2}{1} = \frac{t_1}{T} \Rightarrow t_1 = 2T$$

همچنین برای دو مثلث متشابه (۳) و (۴) داریم:

$$\frac{10}{5} = \frac{t_4 - t_3}{t_3 - t_2} \Rightarrow \frac{2}{1} = \frac{t_4 - t_3}{T'}$$

$$\Rightarrow t_4 - t_3 = 2T'$$

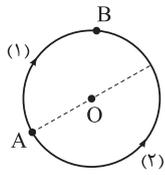
گام دوم: با توجه به نمودار فوق می توان نوشت:

$$2T + T + T' + 2T' = 24 \Rightarrow 2T + 2T' = 24 \Rightarrow T + T' = 8 \text{ s}$$

در این بازه زمانی ۸s، سرعت متحرک منفی است و متحرک در خلاف جهت محور X حرکت می کند. اما در بقیه زمان حرکت، سرعت مثبت است و متحرک در جهت محور X حرکت می کند:

$$2T + 2T' = 2(T + T') = 2 \times 8 = 16 \text{ s}$$

در شکل مقابل، دو متحرک (۱) و (۲)، روی محیط دایره‌ای، با طی مسیرهای مشخص شده از نقطه A به نقطه B می‌روند. کدام یک از عبارت‌های



زیر الزاماً درست است؟ (هر کدام از متحرک‌ها یک بار به نقطه B می‌رسند.)

(۱) اندازه سرعت متوسط متحرک (۲) از اندازه سرعت متوسط متحرک (۱) بیشتر است.

(۲) تندی متوسط متحرک (۲) از تندی متوسط متحرک (۱) بیشتر است.

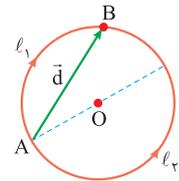
(۳) اگر تندی متوسط دو متحرک برابر باشد، اندازه سرعت متوسط متحرک (۲)، بیشتر از اندازه سرعت متوسط متحرک (۱) است.

(۴) اگر اندازه سرعت متوسط دو متحرک برابر باشد، تندی متوسط متحرک (۲)، بیشتر از تندی متوسط متحرک (۱) است.

مشاوره مشابه این تست در کنکورهای سراسری سال‌های اخیر مطرح نشده است؛ پس می‌تواند به عنوان یک تست با ایده‌ای جدید، قابل توجه باشد.



پاسخ خیلی تشریحی ✓



با توجه به شکل مقابل، مسافت طی شده در مسیر ۲ (l_2) از مسافت طی شده در مسیر ۱ (l_1)

بزرگ‌تر است. اما جابه‌جایی از A تا B در هر دو مسیر، یکسان است. ($d_1 = d_2 = d$)

اکنون می‌توانیم عبارت‌های داده شده را به ترتیب بررسی کنیم که کدام یک الزاماً درست است:

(۱) خیر. جابه‌جایی در هر دو مسیر یکسان است ($d_1 = d_2 = d$)، اما راجع به Δt چیزی نمی‌دانیم؛ پس نمی‌توان اندازه سرعت

متوسط دو متحرک را مقایسه کرد.

$$v_{av} = \frac{d}{\Delta t}$$

(۲) خیر. می‌دانیم ($l_2 > l_1$) است؛ اما در رابطه $s_{av} = \frac{l}{\Delta t}$ ، اطلاعی از بازه زمانی حرکت (Δt) هر یک از آن‌ها نداریم و نمی‌توان

تندی متوسط دو متحرک را با هم مقایسه کرد.

(۳) خیر.

$$s_{av} = \frac{l}{\Delta t} : \begin{cases} s_{av,1} = s_{av,2} \\ l_2 > l_1 \end{cases} \Rightarrow \Delta t_2 > \Delta t_1$$

$$v_{av} = \frac{d}{\Delta t} : \begin{cases} d_1 = d_2 \\ \Delta t_2 > \Delta t_1 \end{cases} \Rightarrow v_{av,2} < v_{av,1}$$

(۴) بله.

$$v_{av} = \frac{d}{\Delta t} : \begin{cases} v_{av,1} = v_{av,2} \\ d_1 = d_2 \end{cases} \Rightarrow \Delta t_1 = \Delta t_2$$

$$s_{av} = \frac{l}{\Delta t} : \begin{cases} l_2 > l_1 \\ \Delta t_1 = \Delta t_2 \end{cases} \Rightarrow s_{av,2} > s_{av,1}$$

۴۹

در مسیری مستقیم، قطاری به طول 300 m با تندی ثابت 80 km/h از تونلی به طول 500 m عبور می‌کند. قطار چند ثانیه به طور کامل درون تونل قرار دارد؟

۱۳/۵ (۲)

۹ (۱)

۲۲/۵ (۴)

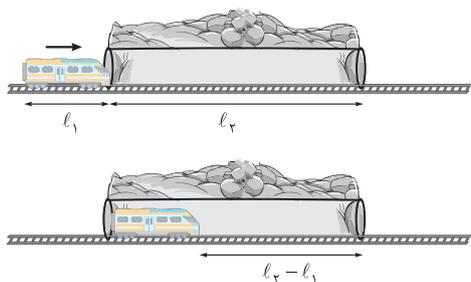
۱۸ (۳)

در مواردی که طول متحرک قابل ملاحظه باشد، به طوری که در سؤال مطرح شود، باید یک نقطه از آن متحرک، مثلاً ابتدا یا انتهای آن را مینا قرار داده و براساس آن محاسبات را انجام دهیم.

گام اول: قطار با تندی ثابت و در مسیری مستقیم حرکت می‌کند؛ بنابراین تندی و سرعت آن برابرند. این سرعت را برحسب m/s می‌نویسیم:

$$v = 80\text{ km/h} = \frac{80}{3.6} = \frac{800}{36} = \frac{200}{9}\text{ m/s}$$

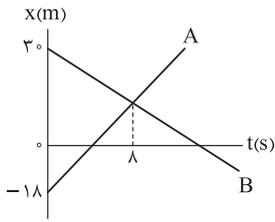
گام دوم: مطابق شکل زیر، طول قطار را با l_1 و طول تونل را با l_2 نشان می‌دهیم. در این صورت، زمانی که قطار به طور کامل درون تونل قرار دارد، مسافت $l_2 - l_1$ را می‌پیماید:



$$l_2 - l_1 = v\Delta t \quad \xrightarrow[l_2=500\text{m}, l_1=300\text{m}]{v=\frac{200}{9}\text{ m/s}} \quad 500 - 300 = \frac{200}{9}\Delta t \Rightarrow \Delta t = 9\text{ s}$$

نمودار مکان - زمان دو متحرک A و B که در راستای محور x حرکت می‌کنند، به شکل زیر است. در طی حرکت دو متحرک، چند ثانیه

فاصله آن‌ها کم‌تر از ۹m است؟



۱/۵ (۱)

۲/۵ (۲)

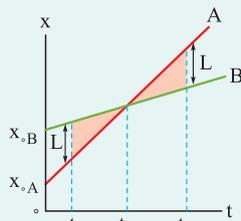
۳ (۳)

۵ (۴)

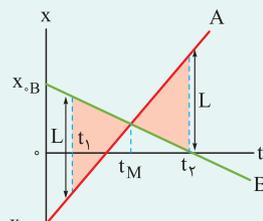
مشاوره این تست، مشابه یکی از سؤال‌های کنکور رشته ریاضی در تیرماه ۱۴۰۱ است.

درس‌Box

هرگاه دو متحرک، A و B با سرعت‌های ثابت v_A و v_B روی محور x به گونه‌ای حرکت کنند که ابتدا به یکدیگر نزدیک و سپس از هم دور شوند، در لحظه‌ای مانند t_M از کنار یکدیگر می‌گذرند. اگر در بازه زمانی t_1 تا t_2 فاصله دو متحرک کم‌تر از L باشد، با توجه به هم‌نهشتی دو مثلث رنگی، در هر یک از نمودارهای زیر می‌توان نوشت:



(الف)



(ب)

$$t_M = \frac{t_1 + t_2}{2}$$

گام اول: دو متحرک، ۸s پس از شروع حرکت و با سرعت ثابت به هم می‌رسند. رابطه بین جابه‌جایی و سرعت را به صورت نسبی

بین دو متحرک A و B می‌نویسیم:

$$\Delta x_{AB} = v_{AB} \Delta t \Rightarrow 30 - (-18) = v_{AB} \times 8 \Rightarrow v_{AB} = \frac{48}{8} = 6 \text{ m/s}$$

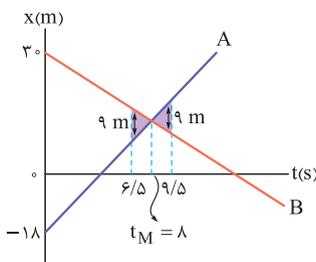
یعنی سرعت متحرک A نسبت به متحرک B، ۶ متر بر ثانیه است.

گام دوم: اکنون بازه زمانی‌ای را پیدا می‌کنیم که در آن جابه‌جایی نسبی دو متحرک A و B برابر با ۹m باشد:

$$\Delta x'_{AB} = v_{AB} \times \Delta t' \Rightarrow 9 = 6 \times \Delta t' \Rightarrow \Delta t' = \frac{9}{6} = 1.5 \text{ s}$$

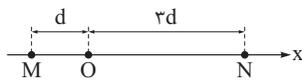
گام دوم: با توجه به هم‌نهشت بودن دو مثلث رنگی در نمودار زیر، ۱/۵s قبل از به هم رسیدن و هم‌چنین ۱/۵s بعد از به هم

رسیدن دو متحرک، یعنی در بازه زمانی ۶/۵s تا ۹/۵s، فاصله دو متحرک کم‌تر از ۹m است. ($9/5 - 6/5 = 3s$)



۵۱

در شکل زیر، دو متحرک (۱) و (۲) با سرعت‌های ثابت، در راستای محور x به سمت یکدیگر در حال حرکت هستند. در مبدأ زمان متحرک (۱) در نقطه M و متحرک (۲) در نقطه N قرار دارد. اگر دو متحرک در نقطه O از کنار یکدیگر عبور کنند، مدتی که طول می‌کشد تا متحرک (۱) از نقطه O به نقطه N برسد، چند برابر مدتی است که طول می‌کشد تا متحرک (۲) از نقطه O به نقطه M می‌رسد؟



$$\frac{3}{4} \quad (1)$$

$$\frac{9}{4} \quad (2)$$

$$3 \quad (3)$$

$$9 \quad (4)$$

مشاوره مشابه این تست در کنکورهای سال‌های دور مطرح شده است. در چند سال اخیر هم در یکی از کنکورهای خارج از کشور، مشابه این سؤال داده شده بود. کلاً سؤالی است که در عین سادگی، بسیاری از داوطلبان را به چالش می‌کشد.

Hint

ابتدا معادله جابه‌جایی را برای هر یک از دو متحرک تا لحظه رسیدن به نقطه O بنویسید و رابطه‌ای بین تندیهای آن‌ها (v_1 و v_2) به دست آورید. سپس نسبت زمان خواسته‌شده بعد از عبور متحرک‌ها از نقطه O ، را حساب کنید.

گام اول: از لحظه شروع حرکت تا لحظه t که هر دو متحرک به نقطه O می‌رسند، رابطه تندیهای هر متحرک را نوشته و نسبت این تندیهای را به دست می‌آوریم:

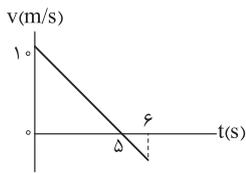
$$\frac{v_2}{v_1} = \frac{\frac{rd}{t}}{\frac{d}{t}} = 3$$

گام دوم: بعد از عبور متحرک‌ها از نقطه O ، زمان رسیدن متحرک اول از O تا N را با Δt_1 نشان می‌دهیم. هم‌چنین زمان رسیدن متحرک دوم از O تا M را با Δt_2 نشان می‌دهیم و نسبت $\frac{\Delta t_1}{\Delta t_2}$ را به دست می‌آوریم:

$$\frac{\Delta t_1}{\Delta t_2} = \frac{\frac{rd}{v_1}}{\frac{d}{v_2}} = \frac{rv_2}{v_1} \xrightarrow{\frac{v_2}{v_1}=3} \frac{\Delta t_1}{\Delta t_2} = 3 \times 3 = 9$$

۵۲

نمودار سرعت - زمان متحرکی که در راستای محور x حرکت می کند، به شکل زیر است. اگر بردار مکان متحرک در لحظه $t = 6s$ برابر با $(18m)\vec{i}$ باشد، بردار مکان متحرک در مبدأ زمان برحسب متر کدام است؟



$$18\vec{i} \quad (1)$$

$$6\vec{i} \quad (2)$$

$$-18\vec{i} \quad (3)$$

$$-6\vec{i} \quad (4)$$



ابتدا با استفاده از نمودار سرعت - زمان، شتاب حرکت را حساب کنید. سپس معادله مکان - زمان متحرک را بنویسید و با جای گذاری مقادیر معلوم، مکان اولیه متحرک (x_0) را پیدا کنید.

Hint

گام اول: نمودار سرعت - زمان داده شده به صورت یک خط شیبدار است؛ بنابراین شتاب حرکت ثابت بوده و شتاب لحظه‌ای با شتاب متوسط برابر است:

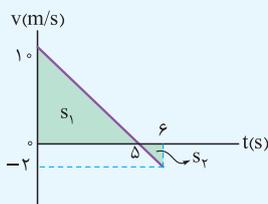
$$a = a_{av} = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{0 - 10}{6 - 0} = -2 \text{ m/s}^2$$

گام دوم: نقطه شروع نمودار سرعت - زمان روی محور v ، سرعت اولیه (v_0) را نشان می دهد که در این جا 10 m/s است. اکنون می توانیم معادله مکان - زمان در حرکت با شتاب ثابت را بنویسیم و از آن جا مکان متحرک در مبدأ زمان (x_0) را پیدا کنیم:

$$x = \frac{1}{2}at^2 + v_0t + x_0 \xrightarrow[t=6s, x=18m]{a=-2 \text{ m/s}^2, v_0=10 \text{ m/s}} 18 = \frac{1}{2}(-2)6^2 + 10 \times 6 + x_0 \Rightarrow 18 = -36 + 60 + x_0 \Rightarrow x_0 = -6 \text{ m}$$

بنابراین بردار مکان متحرک در مبدأ زمان برحسب متر برابر با $-6\vec{i}$ خواهد بود.

په چور دیگه



مساحت سطح محصور بین نمودار سرعت زمان و محور زمان برابر جابه جایی متحرک است؛ بنابراین:

$$\Delta x = S_1 + S_2 = \left[\frac{1}{2}(\Delta \times 10) - \frac{1}{2}(1 \times 2) \right]$$

$$= 25 - 1 = 24 \text{ m}$$

$$\Rightarrow \Delta \vec{r} = (24 \text{ m})\vec{i}$$

$$\Rightarrow \vec{r}_6 - \vec{r}_0 = (24 \text{ m})\vec{i} \xrightarrow{\vec{r}_6 = (18 \text{ m})\vec{i}} (18 \text{ m})\vec{i} - \vec{r}_0 = (24 \text{ m})\vec{i}$$

$$\Rightarrow \vec{r}_0 = (-6 \text{ m})\vec{i}$$

۵۳

سرعت متوسط متحرکی که با شتاب ثابت $1/2 \text{ m/s}^2$ در مسیری مستقیم حرکت می‌کند، در دو ثانیه سوم، برابر صفر است. سرعت متوسط این متحرک در ۵ ثانیه سوم چند متر بر ثانیه است؟

۹ (۴)

۱۸ (۳)

۶ (۲)

۱۲ (۱)



Hint

با استفاده از معادله سرعت - زمان در حرکت با شتاب ثابت، ابتدا سرعت اولیه متحرک (v_0) را به دست آورید. سپس سرعت متحرک در لحظه‌های $t_1 = 5 \text{ s}$ و $t_2 = 15 \text{ s}$ را محاسبه کرده و به کمک رابطه $v_{av} = \frac{v_1 + v_2}{2}$ سرعت متوسط در بازه زمانی t_1 تا t_2 را پیدا کنید.

(۱) اگر متحرکی با شتاب ثابت روی خط راست حرکت کند و در یک بازه زمانی معین، جابه‌جایی آن صفر باشد (به محل اولیه خود برگردد)، دقیقاً در وسط این بازه زمانی، سرعت متحرک صفر شده و تغییر جهت می‌دهد.



(۲) اگر متحرکی با شتاب ثابت روی خط راست حرکت کند و سرعت آن از v_1 به v_2 برسد، سرعت متوسط آن علاوه بر رابطه $v_{av} = \frac{\Delta x}{\Delta t}$ از رابطه زیر نیز به دست می‌آید:

$$v_{av} = \frac{v_1 + v_2}{2}$$

گام اول: سرعت متحرک در دو ثانیه سوم صفر است؛ بنابراین در لحظه $t_s = 5 \text{ s}$ سرعت متحرک صفر است. ✓ پاسخ خیلی تشریحی

$$t_s = \frac{t_1 + t_2}{2} = \frac{4 + 6}{2} = 5 \text{ s}$$

با استفاده از معادله سرعت - زمان، سرعت اولیه (v_0) را حساب می‌کنیم:

$$v = at + v_0 \xrightarrow{v=v_s=0, a=1/2 \text{ m/s}^2, t=t_s=5 \text{ s}} 0 = 1/2 \times 5 + v_0 \Rightarrow v_0 = -6 \text{ m/s}$$

گام دوم: ۵ ثانیه سوم حرکت یعنی از لحظه $t_1 = 10 \text{ s}$ تا $t_2 = 15 \text{ s}$. سرعت متحرک در هر یک از این دو لحظه را پیدا می‌کنیم:

$$v_1 = at_1 + v_0 \xrightarrow{a=1/2 \text{ m/s}^2, t_1=10 \text{ s}, v_0=-6 \text{ m/s}} v_1 = 1/2 \times 10 - 6 = 6 \text{ m/s}$$

$$v_2 = at_2 + v_0 \xrightarrow{a=1/2 \text{ m/s}^2, t_2=15 \text{ s}, v_0=-6 \text{ m/s}} v_2 = 1/2 \times 15 - 6 = 12 \text{ m/s}$$

گام سوم: اکنون می‌توانیم سرعت متوسط متحرک در بازه زمانی 10 s تا 15 s را به دست آوریم:

$$v_{av} = \frac{v_1 + v_2}{2} = \frac{6 + 12}{2} = 9 \text{ m/s}$$



۵۴

متحرکی در مبدأ زمان از مکان $x_0 = d$ ، با شتاب ثابت شروع به حرکت می‌کند. اگر تندی متحرک هنگام عبور از مکان $x_1 = 3d$ برابر

شروع به حرکت می‌کند: $v_0 = 0$

5 m/s باشد، تندی آن هنگام عبور از مکان $x_2 = 9d$ ، برابر چند متر بر ثانیه است؟

$$5\sqrt{6} \quad (2)$$

$$5\sqrt{3} \quad (1)$$

$$15 \quad (4)$$

$$10 \quad (3)$$

درس‌Box

معادله سرعت - جابه‌جایی یا رابطه مستقل از زمان در حرکت با شتاب ثابت روی محور X به صورت زیر به کار می‌رود:

$$v^2 - v_0^2 = 2a\Delta x$$

$$\Delta x = x - x_0$$

v_0 : سرعت متحرک در مکان x_0 یعنی سرعت اولیه (m/s)

v : سرعت متحرک در مکان x (m/s)

a : شتاب حرکت (m/s^2)

Δx : جابه‌جایی (m)

گام اول: رابطه مستقل از زمان در حرکت با شتاب ثابت را یک بار بین دو مکان x_0 و x_1 و بار دیگر بین دو مکان x_0 و x_2 می‌نویسیم:

$$v_1^2 - v_0^2 = 2a(x_1 - x_0) \xrightarrow{x_1=3d, x_0=d} v_1^2 = 2a(3d - d) \Rightarrow v_1^2 = 4ad$$

$$v_2^2 - v_0^2 = 2a(x_2 - x_0) \xrightarrow{x_2=9d, x_0=d} v_2^2 = 2a(9d - d) \Rightarrow v_2^2 = 16ad$$

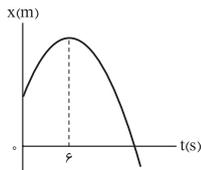
گام دوم: رابطه‌های به دست آمده در گام اول را بر هم تقسیم می‌کنیم و مقدار v_2 را به دست می‌آوریم:

$$\frac{v_1^2}{v_2^2} = \frac{4ad}{16ad} = \frac{1}{4} \Rightarrow \frac{v_1}{v_2} = \frac{1}{2} \xrightarrow{v_1=5 \text{ m/s}} \frac{5}{v_2} = \frac{1}{2} \Rightarrow v_2 = 10 \text{ m/s}$$

پاسخ خیلی تشریحی ✓

نمودار مکان - زمان متحرکی که با شتاب ثابت، در راستای محور x حرکت می کند، به شکل زیر است. اندازه سرعت متوسط متحرک در

۵ ثانیه دوم چند برابر تندی متوسط آن در ۴ ثانیه دوم است؟



$$\frac{3}{2} \quad (1)$$

$$\frac{15}{8} \quad (2)$$

$$\frac{17}{8} \quad (3)$$

$$\frac{17}{10} \quad (4)$$

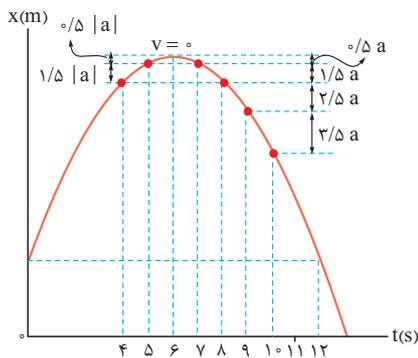
۵۵

مشاوره در حل بعضی از سؤالهای حرکت شناسی مانند این تست، شاید در ابتدا به نظر برسد که اطلاعات سؤال برای حل آن کافی نیست. اما با کمی دقت و تجربه می توان تکنیکهای ریاضی و فیزیک را با هم ترکیب کرد و با حذف برخی کمیتها به جواب رسید.

درسی Box

وقتی متحرکی از حال سکون با شتاب ثابت a روی خط راست به حرکت در آید، جابه جاییهای آن در ثانیههای متوالی، یک دنباله عددی تشکیل می دهند که قدرنسبت آن، شتاب متحرک است. جابه جایی در ثانیه اول این حرکت همان جمله اول دنباله است که به صورت زیر به دست می آید:

$$\Delta x = \frac{1}{2} at^2 + v_0 t \xrightarrow[v_0=0]{t=1s} \Delta x_1 = \frac{1}{2} a(1)^2 = \frac{1}{2} a$$



گام اول: شیب خط مماس بر نمودار مکان - زمان داده شده در لحظه $t = 6s$ صفر است. یعنی سرعت متحرک در این لحظه صفر است. این لحظه خاص مربوط به رأس سهمی است و در طرفین آن تقارن وجود دارد.

گام دوم: ۵ ثانیه دوم یعنی از $t_1 = 5s$ تا $t_2 = 10s$ و چهار ثانیه دوم یعنی از $t'_1 = 4s$ تا $t'_2 = 8s$. اکنون می توانیم نسبت اندازه سرعت متوسط متحرک در ۵ ثانیه دوم ($|v_{av}|$) به تندی متوسط آن در چهار ثانیه دوم (s_{av}) را به دست آوریم (توجه داشته باشید که در این جا $a < 0$ است):

$$\frac{|v_{av}|}{s_{av}} = \frac{|\Delta x|}{t_2 - t_1} = \frac{|\frac{1}{2} a + \frac{1}{2} a + \frac{1}{2} a + \frac{3}{2} a + \frac{5}{2} a|}{10 - 5} = \frac{|\frac{7}{2} a|}{5}$$

$$\Rightarrow \frac{|v_{av}|}{s_{av}} = \frac{\frac{7}{2} |a|}{5} = \frac{7/2}{5} = \frac{7}{10}$$

پاسخ خیلی تشریحی



۵۶

متحرکی با شتاب ثابت در راستای محور X حرکت می‌کند. اگر در ۸s اول، سرعت متوسط متحرک برابر $(8 \text{ m/s})\vec{i}$ و تندی متوسط آن برابر 10 m/s باشد، مسافت طی شده توسط متحرک در ۲ ثانیه سوم، چند متر است؟

۳۲ (۴)

۲۴ (۳)

۱۶ (۲)

۸ (۱)

درسی Box

(۱) در حرکت با شتاب ثابت روی محور X، رابطه مستقل از سرعت اولیه به صورت زیر است:

$$\Delta x = -\frac{1}{2}at^2 + vt$$

Δx : جابه‌جایی (m)

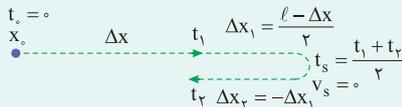
a: شتاب (m/s^2)

t: زمان (s)

v: سرعت متحرک در لحظه t (m/s)

(۲) در حرکت با شتاب ثابت روی محور X، وقتی در یک بازه زمانی معین، اندازه سرعت متوسط با تندی متوسط برابر نباشد، یعنی اندازه جابه‌جایی با مسافت برابر نیست؛ بنابراین سرعت متحرک در یک لحظه مانند t_s برابر صفر شده و در این لحظه جهت حرکت تغییر کرده است.

اگر از لحظه شروع حرکت ($t_0 = 0$) تا لحظه t_p جابه‌جایی متحرک را با Δx و مسافت طی شده را با ℓ نمایش دهیم، داریم:

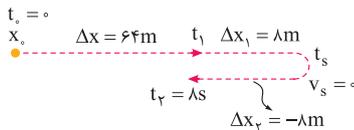


گام اول: جابه‌جایی و مسافت طی شده در ۸ ثانیه اول حرکت را به دست می‌آوریم: ✓ پاسخ خیلی تشریحی

$$v_{av} = \frac{\Delta x}{\Delta t} \Rightarrow 8 = \frac{\Delta x}{8} \Rightarrow \Delta x = 64 \text{ m}$$

$$s_{av} = \frac{\ell}{\Delta t} \Rightarrow 10 = \frac{\ell}{8} \Rightarrow \ell = 80 \text{ m}$$

اندازه جابه‌جایی با مسافت برابر نیست و مسیر حرکت به صورت زیر است:



گام دوم: رابطه مستقل از سرعت اولیه را در بازه زمانی $t_0 = 0$ تا t_s می‌نویسیم:

$$\Delta x + \Delta x_1 = -\frac{1}{2}a(t_s - t_0)^2 + v_s(t_s - t_0) \xrightarrow[t_0=0, v_s=0]{\Delta x=64\text{m}, \Delta x_1=8\text{m}} 64 + 8 = -\frac{1}{2}at_s^2 \Rightarrow -144 = at_s^2$$

گام سوم: معادله جابه‌جایی بر حسب زمان را در بازه زمانی t_s تا t_p می‌نویسیم:

$$\Delta x_2 = \frac{1}{2}a(t_p - t_s)^2 + v_s(t_p - t_s) \xrightarrow[t_p=8\text{s}, v_s=0]{\Delta x_2=-8\text{m}} -8 = \frac{1}{2}a(8 - t_s)^2 \Rightarrow -16 = a(8 - t_s)^2$$

گام چهارم: روابط به دست آمده در گام‌های دوم و سوم را بر هم تقسیم می‌کنیم تا مقدار t_s و از آنجا t_1 را به دست آوریم:

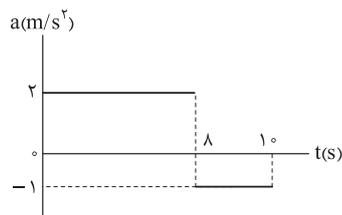
$$\frac{-144}{-16} = \frac{at_s^2}{a(8 - t_s)^2} \Rightarrow 9 = \frac{t_s^2}{(8 - t_s)^2} \Rightarrow 3 = \frac{t_s}{8 - t_s} \Rightarrow 24 - 3t_s = t_s \Rightarrow 24 = 4t_s \Rightarrow t_s = 6\text{s}$$

$$t_s = \frac{t_1 + t_2}{2} \Rightarrow 6 = \frac{t_1 + 8}{2} \Rightarrow t_1 = 4\text{s}$$

دو ثانیه سوم یعنی بازه زمانی $t_1 = 4\text{s}$ تا $t_s = 6\text{s}$ ؛ در این بازه زمانی مسافت طی شده با Δx_1 برابر بوده و 8m است.

۵۷

نمودار شتاب - زمان متحرکی که در راستای محور X حرکت می‌کند، به شکل زیر است. اگر سرعت متوسط متحرک در ۱۰ s اول برابر $\bar{v} = (13/4 \text{ m/s})$ باشد، تندی متحرک در لحظه $t = 5 \text{ s}$ چند متر بر ثانیه است؟



۴ (۱)

۸ (۲)

۱۰ (۳)

۱۴ (۴)



در نمودار شتاب - زمان، مساحت سطح بین نمودار و محور زمان در هر بازه زمانی، برابر با تغییر سرعت (Δv) در آن بازه است.

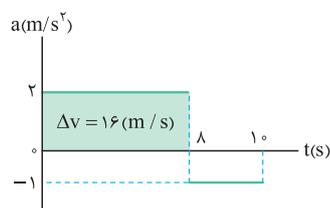
درسی Box

پاسخ خیلی تشریحی ✓ گام اول: جابه‌جایی (Δx) در ۱۰ ثانیه اول را به دست می‌آوریم:

$$v_{av} = \frac{\Delta x}{\Delta t} \Rightarrow 13/4 = \frac{\Delta x}{10} \Rightarrow \Delta x = 134 \text{ m}$$

بخشی از این جابه‌جایی مربوط به ۸ ثانیه اول (Δx_1) و بقیه آن مربوط به بازه زمانی ۸ s تا ۱۰ s (Δx_2) است.

$$\Delta x = \Delta x_1 + \Delta x_2$$



گام دوم: Δx_1 و Δx_2 را به کمک معادله جابه‌جایی - زمان حساب می‌کنیم. باید

توجه داشت که سرعت متحرک در لحظه $t = 8 \text{ s}$ برابر است با سرعت اولیه v_0 به

اضافه 16 m/s که از مساحت سطح زیر نمودار شتاب - زمان به دست می‌آید.

$$\Delta x_1 = \frac{1}{2} a_1 t_1^2 + v_0 t_1 \xrightarrow{a_1 = 2 \text{ m/s}^2, t_1 = 8 \text{ s}} \Delta x_1 = \frac{1}{2} \times 2 \times 8^2 + v_0 \times 8 \Rightarrow \Delta x_1 = 64 + 8v_0$$

$$\Delta x_2 = \frac{1}{2} a_2 t_2^2 + (v_0 + 16) t_2 \xrightarrow{a_2 = -1 \text{ m/s}^2, t_2 = 10 - 8 = 2 \text{ s}} \Delta x_2 = \frac{1}{2} (-1) 2^2 + (v_0 + 16) \times 2 \Rightarrow \Delta x_2 = -2 + 2v_0 + 32 = 2v_0 + 30$$

$$\Delta x = \Delta x_1 + \Delta x_2 \Rightarrow 134 = 64 + 8v_0 + 2v_0 + 30 \Rightarrow 40 = 10v_0 \Rightarrow v_0 = 4 \text{ m/s}$$

گام سوم: در ۸ ثانیه اول این حرکت، سرعت همواره بزرگ‌تر از صفر است و تغییر جهت نداریم؛ بنابراین در لحظه $t = 5 \text{ s}$ تندی و سرعت متحرک برابر هستند.

$$v = at + v_0 \xrightarrow{t=5 \text{ s}, a=2 \text{ m/s}^2} v = 2 \times 5 + 4 = 14 \text{ m/s}$$



یک خودروی پلیس در کنار جاده ایستاده است. موتورسواری با سرعت ثابت 108 km/h از کنار آن می‌گذرد. در همین لحظه، خودروی پلیس با شتاب ثابت 4 m/s^2 در همان جهت شروع به حرکت می‌کند. خودروی پلیس چند ثانیه پس از شروع حرکت خود، به موتورسوار می‌رسد؟

$$15 \quad (2)$$

$$7/5 \quad (1)$$

$$2 \quad (4)$$

$$22/5 \quad (3)$$

۵۸

مشاوره این تست مشابه یکی از تمرین‌های دوره‌ای آخر فصل یک از کتاب درسی فیزیک ۳ است. تمرین‌های کتاب درسی را جدی بگیرید.



معادله مکان خودروی پلیس و هم‌چنین موتورسوار را بنویسید و مساوی با هم قرار دهید.

هرگاه دو متحرک در لحظه‌ای به هم برسند، می‌توان در آن لحظه، معادله مکان - زمان آن‌ها را مساوی با هم قرار داد و مجهول مورد نظر را به دست آورد.

معادله مکان - زمان خودروی پلیس و موتورسوار را می‌نویسیم. برای این منظور، مبدأ مکان را محل شروع حرکت خودروی پلیس در نظر می‌گیریم. توجه داشته باشید که حرکت موتورسوار با سرعت ثابت، اما حرکت خودروی پلیس با شتاب ثابت است.

$$x_1 = x_2 \Rightarrow vt + x_0 = \frac{1}{2}at^2 + v_0t + x_0 \xrightarrow{\substack{x_0= \\ v_0=}} vt = \frac{1}{2}at^2 \xrightarrow{\substack{v=108 \div 3.6 = 30 \text{ m/s} \\ a=4 \text{ m/s}^2}} 30t = \frac{1}{2} \times 4t^2 \Rightarrow 30t = 2t^2 \Rightarrow t = 15 \text{ s}$$

Hint

درس‌Box

پاسخ خیلی تشریحی



۵۹

خودرویی در یک مسیر مستقیم با شتاب ثابت 4 m/s^2 به حرکت در می‌آید و پس از مدتی با سرعت ثابت به حرکت خود ادامه می‌دهد. در نهایت با شتاب ثابتی به بزرگی 8 m/s^2 حرکتش کند شده و می‌ایستد. اگر کل زمان حرکت خودرو 20 s و مسافت طی شده توسط آن در این مدت برابر 325 m باشد، بیشینه تندی خودرو در حین این حرکت، چند کیلومتر بر ساعت است؟

۹۰ (۴)

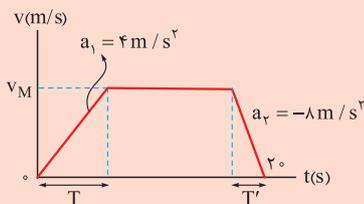
۷۲ (۳)

۲۵ (۲)

۲۰ (۱)



پاسخ خیلی تشریحی ✓



گام اول: با استفاده از اطلاعات داده شده در متن تست، نمودار سرعت - زمان آن را در مدت 20 s رسم می‌کنیم و بیشینه تندی خودرو را با v_M نشان می‌دهیم.

گام دوم: بازه زمانی حرکت تندشونده را با T و بازه زمانی حرکت کندشونده را با T' نشان می‌دهیم. اکنون رابطه بین T و T' را به دست می‌آوریم:

$$a = a_{av} = \frac{\Delta v}{\Delta t} \Rightarrow \begin{cases} a_1 = \frac{v_M - 0}{T} \Rightarrow 4 = \frac{v_M}{T} \\ a_2 = \frac{0 - v_M}{T'} \Rightarrow -8 = \frac{-v_M}{T'} \Rightarrow 8 = \frac{v_M}{T'} \end{cases}$$

$$\frac{v_M}{T} = \frac{4}{8} \Rightarrow \frac{T'}{T} = \frac{1}{2} \Rightarrow T' = \frac{T}{2}$$

گام سوم: از آنجا که در این 20 ثانیه علامت سرعت تغییر نمی‌کند، یعنی تغییر جهت حرکت نداریم و مسافت با جابه‌جایی برابر است:

$$\Delta x = \ell = 325 \text{ m}$$

می‌دانیم مساحت سطح زیر نمودار سرعت - زمان در هر بازه زمانی با جابه‌جایی در آن بازه زمانی برابر است:

$$S_{\text{دورنقه}} = 325 \text{ m} \Rightarrow 325 = \frac{[20 + 20 - (T + T')] \times v_M}{2} \xrightarrow{T' = \frac{T}{2}} \xrightarrow{v_M = 4T} 325 = \frac{[40 - (T + \frac{T}{2})] \times 4T}{2} \Rightarrow 325 = (40 - \frac{3}{2}T) 2T$$

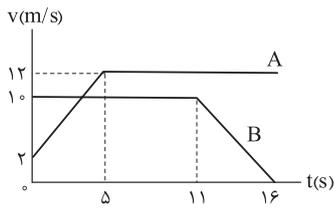
$$\Rightarrow 325 = 80T - 3T^2 \Rightarrow 3T^2 - 80T + 325 = 0 \Rightarrow T = \frac{40 \pm \sqrt{1600 - 975}}{3} = \frac{40 \pm 25}{3} \Rightarrow \begin{cases} T = \frac{65}{3} \text{ s} \\ T = 5 \text{ s} \end{cases}$$

$$v_M = 4T \Rightarrow \begin{cases} v_M = 4 \times \frac{65}{3} = \frac{260}{3} \text{ m/s} \Rightarrow v_M = \frac{260}{3} \times \frac{3}{6} = 312 \text{ km/h} \\ v_M = 4 \times 5 = 20 \text{ m/s} \Rightarrow v_M = 20 \times \frac{3}{6} = 72 \text{ km/h} \end{cases}$$

از بین دو جواب به دست آمده برای v_M ، تندی 72 km/h در گزینه‌ها وجود دارد.

۶۰

نمودار سرعت - زمان دو متحرک A و B که در راستای محور x حرکت می کنند، به شکل زیر است. اگر دو متحرک در مبدأ زمان، در یک مکان قرار داشته باشند، در لحظه ای که دو متحرک به هم می رسند، اختلاف تندی آن ها چند متر بر ثانیه است؟



۲ (۱)

۳ (۲)

۴ (۳)

۵ (۴)

مشاوره این تست، سؤال کنکور سراسری رشته ریاضی در سال ۱۳۹۰ بوده که در انتهای سؤال، تغییرات اندکی ایجاد شده است.



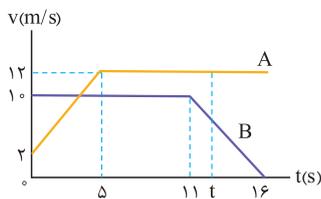
گام اول: هر دو متحرک حرکت خود را از یک مکان شروع کرده اند و باید دوباره به هم برسند؛ بنابراین در این مدت جابه جایی

یکسانی دارند. وقتی در لحظه t دو متحرک به هم می رسند، باید مساحت سطح زیر نمودار سرعت - زمان آن ها یکسان باشد.

جابه جایی هر یک از دو متحرک را از شروع حرکت تا لحظه t = 11 s حساب می کنیم:

$$\Delta x_A = \frac{(2+12)5}{2} + 6 \times 12 = 35 + 72 = 107 \text{ m}$$

$$\Delta x_B = 10 \times 11 = 110 \text{ m}$$



در این لحظه، متحرک B، ۳ متر جلوتر از متحرک A است؛ بنابراین باید لحظه به هم رسیدن (t) بزرگتر از ۱۱ s باشد تا متحرک A بتواند با سرعت بیشتر به متحرک B برسد.

گام دوم: شتاب متحرک B در ۵ ثانیه آخر حرکت آن را به دست می آوریم:

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} \Rightarrow a_B = \frac{0-10}{16-11} = -2 \text{ m/s}^2$$

بنابراین سرعت متحرک B در لحظه t برابر است با:

$$v = at + v_0 \Rightarrow v_B = -2(t-11) + 10 = -2t + 32$$

گام سوم: مساحت سطح زیر نمودار دو متحرک A و B را از شروع تا لحظه t برابر با هم قرار می دهیم تا لحظه به هم رسیدن دو متحرک را پیدا کنیم:

$$\Delta x_A = \Delta x_B \Rightarrow \frac{(2+12)5}{2} + (t-5)12 = 10 \times 11 + \frac{[10 + (-2t+32)](t-11)}{2} \Rightarrow 35 + 12t - 60 = 110 + \frac{(42-2t)(t-11)}{2}$$

$$\Rightarrow 12t - 25 = 110 + (21-t)(t-11) \Rightarrow 12t - 135 = 21t - 231 - t^2 + 11t \Rightarrow t^2 - 20t + 96 = 0$$

$$\Rightarrow (t-8)(t-12) = 0 \Rightarrow \begin{cases} t = 8 \text{ s. ق.ق.} \\ t = 12 \text{ s. ق.ق.} \end{cases}$$

بنابراین دو متحرک A و B در لحظه t = 12 s به هم می رسند.

گام چهارم: برای هر یک از این دو متحرک، سرعت همواره مثبت است؛ بنابراین تندی و سرعت هر متحرک یکسان است. اکنون سرعت هر یک از آن ها را در لحظه t = 12 s به دست آورده و اختلاف آن ها را حساب می کنیم:

$$t = 12 \text{ s} \Rightarrow v_A = 12 \text{ m/s}$$

$$t = 12 \text{ s} \xrightarrow{v=at+v_0} v_B = -2(12-11) + 10 = 8 \text{ m/s}$$

$$v_A - v_B = 12 - 8 = 4 \text{ m/s}$$

فیزیک دهم

۶۱

در کدام گزینه، تعداد کمیت‌های اصلی و تعداد کمیت‌های برداری، برابر است؟

- (۱) جریان الکتریکی، شار مغناطیسی، شتاب، تندی، دما
- (۲) میدان الکتریکی، فشار، کار، انرژی، بار الکتریکی
- (۳) میدان مغناطیسی، گرمای ویژه، جریان الکتریکی، نیرو، مقدار ماده
- (۴) بار الکتریکی، شدت روشنایی، تکانه، نیروی محرکه الکتریکی، دما



درس‌Box

(۱) کمیت‌های فیزیکی: اصلی: ۷ تا هستند، شامل: طول، جرم، زمان، دما، مقدار ماده، جریان الکتریکی و شدت روشنایی
فرعی: همه کمیت‌ها به جز ۷ تای بالا!

(۲) کمیت‌های فیزیکی: برداری: در سطح کتاب درسی و کنکور ۱+۷ تا هستند، شامل: جابه‌جایی، سرعت، شتاب، نیرو، میدان الکتریکی، میدان مغناطیسی، تکانه، گشتاور
نرده‌ای: همه کمیت‌هایی که در کتاب درسی می‌خوانید به جز ۱+۷ تای بالا!

در هر یک از گزینه‌ها کمیت‌های اصلی و برداری را شناسایی می‌کنیم: ✓ پاسخ خیلی تشریحی

- گزینه (۱): جریان الکتریکی و دما (۲ کمیت اصلی و شتاب (۱ کمیت برداری) است. ✗
- گزینه (۲): هیچ کمیت اصلی در این گزینه نیست و میدان الکتریکی (۱ کمیت برداری) است. ✗
- گزینه (۳): جریان الکتریکی و مقدار ماده (۲ کمیت اصلی و میدان مغناطیسی و نیرو (۲ کمیت برداری) است. ✓
- گزینه (۴): شدت روشنایی و دما (۲ کمیت اصلی و تکانه (۱ کمیت برداری) است. ✗

گول نخوری

تندی، اندازه سرعت است و برخلاف سرعت، کمیت نرده‌ای به حساب می‌آید. اگرچه در مبحث مدار برای جریان الکتریکی جهت در نظر می‌گیریم، ولی این کمیت نرده‌ای است و جهت در نظر گرفته شده صرفاً جهت شارش بارهای الکتریکی است. نیروی محرکه الکتریکی، نیرو نیست، بلکه اختلاف پتانسیل الکتریکی است و می‌دانیم هر چه از جنس اختلاف پتانسیل الکتریکی باشد، کمیت نرده‌ای به حساب می‌آید.

۶۳

دمای محیطی چند مرتبه توسط یک دماسنج اندازه‌گیری شده و مقادیرهای به‌دست آمده، در جدول زیر ثبت شده است. به ترتیب دقت اندازه‌گیری این دماسنج کدام است و مقدار مناسب برای گزارش دمای این محیط، چند درجه سلسیوس است؟

شماره آزمایش	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸
دما (°C)	۲۵/۲	۲۵/۰	۲۴/۹	۲۵/۴	۲۰/۲	۲۵/۵	۲۹/۶	۲۵/۸

$$۲۵/۲، ۰/۱ (۲)$$

$$۲۵/۳، ۰/۱ (۱)$$

$$۲۵/۲، ۱ (۴)$$

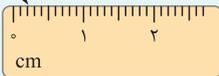
$$۲۵/۳، ۱ (۳)$$

مشاوره تعیین یکای یک کمیت فرعی بر حسب یکاهای اصلی یکی از موضوعات مهم فصل ۱ فیزیک دهم است که طراحان علاقه نسبتاً زیادی به آن دارند. برای حل این نوع تست‌ها دو چیز را باید بلد باشید. (۱) روابط فیزیکی و (۲) یکای SI کمیت‌های اصلی.

دربین Box

(۱) دقت اندازه‌گیری وسیله اندازه‌گیری: کم‌ترین مقداری است که آن وسیله می‌تواند اندازه‌گیری کند.

کمینه درجه‌بندی این خط‌کش، ۱ mm است.



(الف) دقت اندازه‌گیری ابزارهای مدرج: برابر با کمینه درجه‌بندی آن ابزار است. برای مثال در خط‌کش شکل روبه‌رو هر ۱ cm به ۱۰ قسمت مساوی تقسیم شده است؛ بنابراین دقت اندازه‌گیری این خط‌کش برابر با $۱ \text{ mm} = ۰/۱ \text{ cm} = \frac{۱ \text{ cm}}{۱۰}$ است.

(ب) دقت اندازه‌گیری ابزارهای رقمی (دیجیتال): برابر با یک واحد از آخرین رقمی (سمت راست‌ترین رقم) است که آن ابزار می‌خواند. برای مثال در شکل روبه‌رو دقت اندازه‌گیری دماسنج برابر با $۰/۱^\circ \text{C}$ است.

(۲) یکی از راه‌های مؤثر در افزایش دقت اندازه‌گیری، افزایش تعداد دفعات اندازه‌گیری است. میانگین عددهای حاصل از اندازه‌گیری به عنوان نتیجه اندازه‌گیری گزارش می‌شود. توجه داشته باشید برای این که نتیجه اندازه‌گیری به درستی گزارش شود، لازم است داده‌هایی که اختلاف زیادی با بقیه دارند، در میانگین‌گیری به حساب نیایند.

گام اول: با توجه به نتایج اندازه‌گیری که در جدول می‌بینیم (مانند $۲۵/۰^\circ \text{C}$ و $۲۴/۹^\circ \text{C}$) واضح است که دقت اندازه‌گیری این دماسنج برابر با $۰/۱^\circ \text{C}$ است.

گام دوم: یک بار دیگر نتایج اندازه‌گیری را ببینیم. اکثر اعداد حول و حوش ۲۵ هستند، به جز دو عدد $۲۰/۲$ و $۲۹/۶$. پس این دو عدد را بی‌خیال می‌شویم و از بقیه میانگین می‌گیریم تا مقدار مناسب برای گزارش این اندازه‌گیری به دست آید:

$$\frac{۲۵/۲ + ۲۵/۰ + ۲۴/۹ + ۲۵/۴ + ۲۵/۵ + ۲۵/۸}{۶} = ۲۵/۳^\circ \text{C}$$

اگر داده‌های پرت $۲۰/۲$ و $۲۹/۶$ را در میانگین‌گیری به حساب آورید، به جواب $۲۵/۲^\circ \text{C}$ می‌رسید و جواب شما به اشتباه گزینه (۲) خواهد شد.

گول نخوری



استخری به ابعاد $6\text{m} \times 8\text{m} \times 3\text{m}$ با آهنگ ثابت 5 L/s در حال پر شدن است. پس از چند ساعت نصف حجم این استخر از آب پر می‌شود؟

۸ (۴)

۶ (۳)

۴ (۲)

۲ (۱)

۶۳



دریس Box

در فیزیک، تغییر هر کمیت را نسبت به زمان، معمولاً آهنگ کمیت می‌نامیم. برای مثال آهنگ تغییرات سرعت که شتاب نامیده می‌شود، از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$\text{آهنگ تغییرات سرعت} = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \text{تغییر سرعت} \div \text{زمان}$$

گام اول: نصف حجم استخر برابر است با: **پاسخ خیلی تشریحی** ✓

$$V' = \frac{1}{2} V = \frac{1}{2} \times 6 \times 8 \times 3 = 72\text{m}^3 = 72 \times 10^3\text{L}$$

گام دوم: مدت زمان پر شدن حجم V' از استخر به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$\text{آهنگ افزایش حجم} = \frac{V'}{\Delta t} \Rightarrow 5 = \frac{72 \times 10^3}{\Delta t} \Rightarrow \Delta t = 14400\text{s} \times \frac{1\text{h}}{3600\text{s}} = 4\text{h}$$

۶۴

شعاع استوانه توپر مسی A، ۲ برابر شعاع خارجی استوانه آلومینیومی B و شعاع داخلی استوانه B نصف شعاع خارجی آن است. اگر ارتفاع استوانه A، ۳ برابر ارتفاع استوانه B باشد، جرم استوانه A چند برابر جرم استوانه B است؟ (چگالی آلومینیوم $\frac{۳}{۱۰}$ برابر چگالی مس است.)

$$\frac{۲۴}{۵} (۲)$$

$$\frac{۱۶۰}{۳} (۱)$$

$$\frac{۱۶۰}{۹} (۴)$$

$$\frac{۴۰}{۳} (۳)$$

Hint ابتدا نسبت حجم ماده به کاررفته در دو استوانه را محاسبه کنید، سپس به کمک شکل نسبتی رابطه چگالی، نسبت جرم دو جسم را به دست آورید.

درس Box

$$\rho = \frac{m}{V}$$

چگالی: نسبت جرم به حجم چگالی نامیده می‌شود و از رابطه روبه‌رو به دست می‌آید:

پاسخ خیلی تشریحی **گام اول:** نسبت حجم ماده به کاررفته در دو استوانه را به دست می‌آوریم:

$$V = \pi r^2 h \Rightarrow \frac{V_A}{V_B} = \frac{r_A^2}{r_{B(out)}^2 - r_{B(in)}^2} \times \frac{h_A}{h_B} \xrightarrow{r_{B(out)}=r} \frac{V_A}{V_B} = \frac{(2r)^2}{r^2 - \left(\frac{r}{2}\right)^2} \times \frac{3h_B}{h_B} = \frac{4r^2}{\frac{3}{4}r^2} \times 3 \Rightarrow \frac{V_A}{V_B} = 16$$

گام دوم: رابطه چگالی را به صورت نسبتی می‌نویسیم تا نسبت جرم دو استوانه به دست آید:

$$\rho = \frac{m}{V} \Rightarrow \frac{\rho_A}{\rho_B} = \frac{m_A}{m_B} \times \frac{V_B}{V_A} \Rightarrow \frac{\rho_A}{\rho_B} = \frac{m_A}{m_B} \times \frac{1}{16} \Rightarrow \frac{m_A}{m_B} = \frac{16\rho_B}{\rho_A}$$



۶۵

برای تولید یک آلیاژ به چگالی $7/2 \text{ g/cm}^3$ ، فلز A با چگالی 6 g/cm^3 را با فلز B به چگالی 8 g/cm^3 مخلوط می‌کنیم. برای تهیه 120 kg از این آلیاژ، چند کیلوگرم فلز A نیاز داریم؟

۸۰ (۴)

۶۰ (۳)

۴۰ (۲)

۲۰ (۱)



Hint

مجموع جرم فلزهای A و B را که همان جرم آلیاژ است، داریم. مجموع حجم فلزها هم برابر با حجم آلیاژ است. از این موضوع و رابطه چگالی کمک می‌گیریم تا به معادله دوم برای جرم فلزها برسیم. با حل دستگاه معادلات، جرم فلز A به‌کاررفته در آلیاژ به دست می‌آید.

درسی Box

درس‌بکس تست شماره ۶۴ را بخوانید.

پاسخ خیلی تشریحی ✓

گام اول: جرم آلیاژ برابر با مجموع جرم فلزهای A و B است؛ پس:

$$m = m_A + m_B \Rightarrow m_A + m_B = 120 \quad (\text{I})$$

گام دوم: حجم آلیاژ هم برابر با مجموع حجم فلزهای A و B است؛ بنابراین:

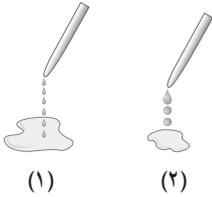
$$V = V_A + V_B \Rightarrow \frac{m}{\rho} = \frac{m_A}{\rho_A} + \frac{m_B}{\rho_B} \Rightarrow \frac{120}{7/2} = \frac{m_A}{6} + \frac{m_B}{8}$$

$$\Rightarrow \frac{120}{7/2} = \frac{4m_A + 3m_B}{24} \Rightarrow 4m_A + 3m_B = 400 \quad (\text{II})$$

گام سوم: دو معادله (I) و (II) را در یک دستگاه حل می‌کنیم تا m_A به دست آید:

$$\begin{cases} m_A + m_B = 120 \\ 4m_A + 3m_B = 400 \end{cases} \xrightarrow{\times 2} \begin{cases} m_A + m_B = 120 \\ 4m_A + 3m_B = 360 \end{cases} \xrightarrow{\text{تفاضل دو رابطه}} 4m_A - 3m_A + 0 = 400 - 360 \Rightarrow m_A = 40 \text{ kg}$$

در شکل زیر، قطره‌های روغن با دمای متفاوت از دهانه دو قطره‌چکان یکسان خارج می‌شوند. به ترتیب از راست به چپ، در کدام شکل دما و در کدام شکل نیروی هم‌چسبی بین مولکول‌های روغن بیشتر است؟



(۱)، (۱) (۱)

(۲)، (۲) (۲)

(۱)، (۲) (۳)

(۲)، (۱) (۴)



درس‌Box

(۱) نیروهای بین مولکولی ← هم‌چسبی: نیروی جاذبه بین مولکول‌های همسان. مانند: مولکول‌های آب
 ← دگرچسبی: نیروی جاذبه بین مولکول‌های ناهمسان. مانند: مولکول‌های آب و شیشه
 (۲) دو تا از عوامل مؤثر بر نیروهای بین مولکولی، دما و ناخالصی است.
 دما: افزایش دما سبب کاهش نیروهای هم‌چسبی و دگرچسبی در مایع‌ها می‌شود.
 ناخالصی: وجود ناخالصی، معمولاً سبب کاهش نیروهای هم‌چسبی و دگرچسبی می‌شود.

افزایش دما سبب کاهش نیروی هم‌چسبی بین مولکول‌های روغن می‌شود. همین موضوع سبب می‌شود که قطره‌های روغنی که دمای بیشتری دارند، نیروی هم‌چسبی کم‌تر و در نتیجه ابعاد کوچک‌تری داشته باشند. با این توضیحات، در شکل (۱) دمای روغن بیشتر و در شکل (۲) نیروی هم‌چسبی بین مولکول‌های روغن بیشتر است.

پاسخ خیلی تشریحی ✓

یک لوله موئین که سطح داخل آن با روغن چرب شده است را به طور عمود در ظرف آبی فرو می‌بریم. کدام یک از موارد زیر درست است؟

(الف) سطح آب درون لوله برآمده است.

(ب) سطح آب در لوله، بالاتر از سطح آب درون ظرف است.

(پ) سطح آب درون لوله فرو رفته است.

(ت) سطح آب در لوله، پایین‌تر از سطح آب درون ظرف است.

(۲) الف و ت

(۱) الف و ب

(۴) پ و ت

(۳) پ و ب

درس‌نویس Box

(۱) لوله‌های موئین

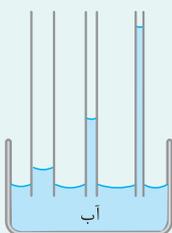
(الف) نیروی دگرچسبی بین مولکول‌های مایع و لوله موئین < نیروی هم‌چسبی بین مولکول‌های مایع

● مایع در لوله موئین بالا می‌رود و سطح آن بالاتر از سطح مایع درون ظرف قرار می‌گیرد.

● سطح مایع در لوله موئین فرو رفته است.

● هر چه قطر لوله موئین کم‌تر باشد، ارتفاع ستون مایع در آن بیشتر است.

نمونه: آب در لوله موئین شیشه‌ای تمیز



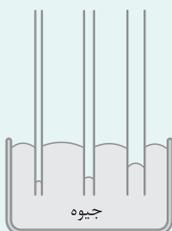
(ب) نیروی دگرچسبی بین مولکول‌های مایع و لوله موئین > نیروی هم‌چسبی بین مولکول‌های مایع

● مایع در لوله موئین بالا می‌رود و سطح آن پایین‌تر از سطح مایع درون ظرف قرار می‌گیرد.

● سطح مایع در لوله موئین برآمده است.

● هر چه قطر لوله موئین بیشتر باشد، ارتفاع ستون مایع در آن بیشتر است.

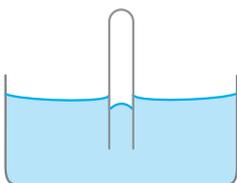
نمونه: جیوه در لوله موئین شیشه‌ای



(۲) اثر موئینگی در مجاورت سطوح بیرونی لوله موئین و سطوح ظرف نیز رخ می‌دهد.

(۳) چرب کردن یا دود اندود کردن شیشه باعث کاهش نیروی دگرچسبی بین مولکول‌های مایع و شیشه می‌شود.

با چرب شدن سطح داخلی لوله موئین، نیروی دگرچسبی بین مولکول‌های آب و شیشه کم‌تر از نیروی هم‌چسبی بین مولکول‌های آب می‌شود. در این شرایط، سطح آب درون لوله به صورت برآمده و پایین‌تر از سطح آب درون ظرف قرار می‌گیرد، یعنی مانند شکل زیر:



پاسخ خیلی تشریحی ✓

در ظرفی که روی سطح افقی قرار دارد، تا ارتفاع 20cm مایعی ریخته شده و فشار پیمانه‌ای در کف ظرف 4000Pa است. اگر فشار هوا 1bar باشد، فشار در فاصله 15 سانتی‌متری از کف ظرف چند کیلوپاسکال است؟

فشار در فاصله 15 سانتی‌متری از کف ظرف:
در عمق $20 - 15 = 5\text{cm}$

۳ (۲)

۱ (۱)

۱۰۳ (۴)

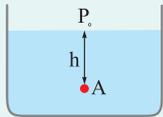
۱۰۱ (۳)

با استفاده از شکل نسبتی رابطه فشار ناشی از مایع، فشار ناشی از مایع در عمق 5 سانتی‌متری را محاسبه می‌کنیم. فشار در این عمق برابر مجموع فشار هوا و فشار ناشی از مایع است.

Hint

در شکل زیر، فشار (فشار کل یا فشار مطلق) در عمق h از مایع برابر با مجموع فشار هوا و فشار ناشی از مایع (فشار پیمانه‌ای) است؛ یعنی:

درستی



$$P_A = P_0 + P_{\text{مایع}} = P_0 + \rho g h \rightarrow \text{فاصله نقطه تا سطح آزاد مایع}$$

جگالی مایع
 شتاب گرانش

گام اول: فشار پیمانه‌ای در عمق 5 سانتی‌متری (فاصله 15 سانتی‌متری از کف ظرف) را می‌خواهیم؛ بنابراین:

$$P_{\text{مایع}} = \rho g h \xrightarrow{\text{ثابت } \rho \text{ و } g} P \propto h \Rightarrow \frac{P_{\text{مایع}}(5\text{cm})}{P_{\text{مایع}}(20\text{cm})} = \frac{5}{20} \Rightarrow \frac{P_{\text{مایع}}(5\text{cm})}{4000} = \frac{1}{4} \Rightarrow P_{\text{مایع}}(5\text{cm}) = 1000\text{Pa}$$

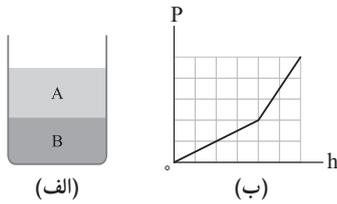
گام دوم: فشار در این نقطه برابر است با:

$$P_{(5\text{cm})} = P_0 + P_{\text{مایع}}(5\text{cm}) = 10^5 + 1000 = 101000\text{Pa} \Rightarrow P_{(5\text{cm})} = 101\text{kPa}$$

در گزینه‌ها، دو تله قرار داده شده است. اولاً تست در نقطه مورد نظر فشار را می‌خواهد نه فشار پیمانه‌ای. دوماً نقطه مورد نظر در فاصله 15cm از کف ظرف یعنی در عمق 5cm است. عدم توجه به این موارد می‌تواند راهتان را به هر سه گزینه نادرست دیگر ختم کند.

گول نخوری

در شکل (الف)، دو مایع مخلوط نشدنی A و B در ظرفی استوانه‌ای ریخته شده‌اند. اگر نمودار فشار پیمانه‌ای بر حسب عمق در این ظرف به شکل (ب) باشد، به ترتیب از راست به چپ، چگالی مایع A چند برابر چگالی مایع B، و جرم مایع A چند برابر جرم مایع B است؟



$$(1) \frac{1}{3}, \frac{2}{3}$$

$$(2) \frac{2}{3}, \frac{2}{3}$$

$$(3) \frac{2}{3}, \frac{2}{3}$$

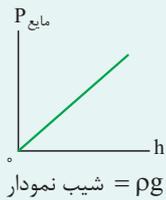
$$(4) \frac{1}{3}, \frac{1}{3}$$



Hint

در هر قسمت، شیب نمودار متناسب با چگالی مایع است. بر این اساس می‌توانید نسبت چگالی دو مایع را محاسبه کنید. با استفاده از نسبت چگالی به دست آمده و نسبت ارتفاع دو مایع (که از روی نمودار تعیین می‌شود) نسبت جرم دو مایع هم به دست می‌آید.

(۱) بر اساس رابطه $P_{\text{مایع}} = \rho gh$ ، نمودار فشار پیمانه‌ای بر حسب عمق مایع ($P_{\text{مایع}} - h$) به صورت خط راستی است که از مبدأ می‌گذرد و شیب آن برابر ρg است.

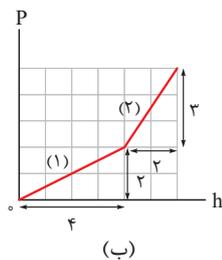


شیب نمودار = ρg

(۲) درس باکس تست ۶۴ را بخوانید.

پاسخ خیلی تشریحی ✓

گام اول: بخش اول نمودار مربوط به مایع A و بخش دوم نمودار مربوط به مایع B است. به کمک شیب نمودار در این دو بخش، نسبت چگالی دو مایع به دست می‌آید:



$$\text{شیب نمودار} = \rho g \Rightarrow \frac{\text{شیب نمودار (1)}}{\text{شیب نمودار (2)}} = \frac{\rho_A}{\rho_B} \Rightarrow \frac{\frac{2 \text{ واحد}}{4 \text{ واحد}}}{\frac{3 \text{ واحد}}{2 \text{ واحد}}} = \frac{\rho_A}{\rho_B} \Rightarrow \frac{\rho_A}{\rho_B} = \frac{1}{3}$$

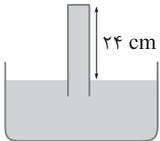
گام دوم: برای محاسبه نسبت جرم دو مایع از رابطه چگالی کمک می‌گیریم:

$$m = \rho V \xrightarrow{V=Ah} m = \rho Ah \xrightarrow{\text{یکسان: A}} \frac{m_A}{m_B} = \frac{\rho_A}{\rho_B} \times \frac{h_A}{h_B} = \frac{1}{3} \times \frac{4 \text{ واحد}}{2 \text{ واحد}} = \frac{2}{3}$$

چون ظرف استوانه‌ای شکل است، از رابطه $P = \frac{mg}{A}$ هم می‌توان استفاده کرد:

$$P = \frac{mg}{A} \xrightarrow{\text{ثابت: g, یکسان: A}} P \propto m \Rightarrow \frac{P_A}{P_B} = \frac{m_A}{m_B} \xrightarrow{\substack{\text{بخش (1): } P_A = 2 \text{ واحد} \\ \text{بخش (2): } P_B = 3 \text{ واحد}}} \frac{m_A}{m_B} = \frac{2}{3}$$

په‌چوردیگه



در شکل زیر، لوله به سطح مقطع 5cm^2 به طور وارون در ظرف حاوی مایعی به چگالی $3/4\text{ g/cm}^3$ فرو رفته است. اگر فشار هوا برابر 66cmHg باشد، اندازه نیرویی که مایع به انتهای لوله وارد می‌کند، چند نیوتون است؟ ($g = 10\text{ N/kg}$ و چگالی جیوه $13/6\text{ g/cm}^3$ است.)

$$40/8 \quad (2)$$

$$4/08 \quad (1)$$

$$28/6 \quad (4)$$

$$2/86 \quad (3)$$

Hint به کمک اصل هم‌فشاری نقاط هم‌تراز، فشار در انتهای بسته لوله به دست می‌آید. حاصل ضرب فشار به دست آمده در مساحت سطح مقطع لوله، برابر با نیروی وارد بر انتهای بسته لوله است.

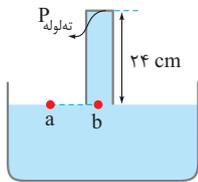
(1) اگر فشار در ناحیه‌ای درون مایع برابر P باشد، نیروی وارد بر سطحی با مساحت A که در آن ناحیه قرار دارد، از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$F = PA$$

(2) برای محاسبه فشار ستونی از مایع بر حسب سانتی‌متر جیوه، از رابطه زیر استفاده می‌کنیم:

$$P(\text{cmHg}) = \frac{\rho_{\text{مایع}} h_{\text{مایع}} (\text{cm})}{\rho_{\text{جیوه}}}$$

پاسخ خیلی تشریحی **گام اول:** در شکل زیر، فشار در نقاط هم‌تراز a و b را برابر قرار می‌دهیم تا فشار در انتهای بسته لوله به دست آید:



$$P_a = P_b \Rightarrow P_0 = P_{\text{ته لوله}} + P_{\text{مایع } 24\text{ cm}}$$

فشار ناشی از 24cm مایع را بر حسب سانتی‌متر جیوه به دست می‌آوریم:

$$P_{\text{مایع } 24\text{ cm}} = \frac{\rho_{\text{مایع}} h_{\text{مایع}} (\text{cm})}{\rho_{\text{جیوه}}} = \frac{3/4 \times 24}{13/6} = 6\text{ cmHg}$$

پس:

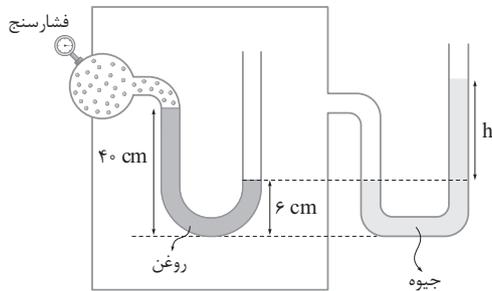
$$66 = P_{\text{ته لوله}} + 6 \Rightarrow P_{\text{ته لوله}} = 60\text{ cmHg}$$

گام دوم: ابتدا $P_{\text{ته لوله}}$ را بر حسب پاسکال محاسبه می‌کنیم:

$$P_{\text{ته لوله}} (\text{Pa}) = \rho_{\text{جیوه}} gh = 13/6 \times 10^3 \times 10 \times 0/6 = 81600\text{ Pa}$$

نیرویی که مایع به انتهای لوله وارد می‌کند، برابر است با:

$$F_{\text{ته لوله}} = P_{\text{ته لوله}} \times A = 81600 \times 5 \times 10^{-4} = 40/8\text{ N}$$



۷۱ در شکل مقابل، اگر فشارسنج $4/08 \text{ kPa}$ را نشان دهد، ارتفاع h چند سانتی‌متر است؟ (فشار هوا 100 kPa ، $g = 10 \text{ N/kg}$ ، $\rho_{\text{روغن}} = 0/6 \text{ g/cm}^3$ و $\rho_{\text{گاز}} = 13/6 \text{ g/cm}^3$ است.)

۴/۵ (۱)

۸ (۲)

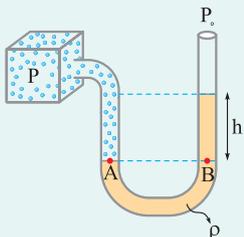
۳ (۳)

۵ (۴)

اصل هم‌فشاری نقاط هم‌تراز را یک بار برای دو نقطه هم‌تراز در روغن و یک بار برای دو نقطه هم‌تراز در جیوه بنویسید. سپس با حل هم‌زمان دو معادله و جای‌گذاری داده‌هایی که در صورت تست آمده به جواب می‌رسید.

Hint

(۱) در مانومتر شکل زیر، با نوشتن اصل هم‌فشاری برای نقاط هم‌تراز A و B می‌توان فشار گاز محبوس را به دست آورد:
 $P_A = P_B \Rightarrow P = P_0 + \rho gh$



(۲) به اختلاف فشار مطلق گاز درون مخزن و فشار هوای محیط، فشار پیمانه‌ای گفته می‌شود. فشار پیمانه‌ای گاز محبوس در شکل بالا از رابطه زیر به دست می‌آید:

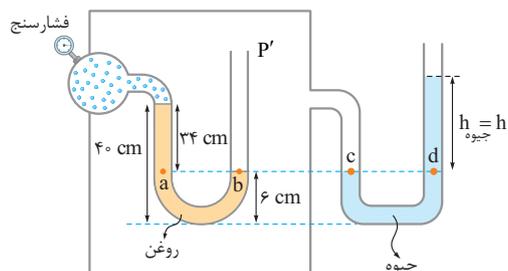
$$P - P_0 = \rho gh$$

P_g (فشار پیمانه‌ای)

گام اول: فشار را در نقاط هم‌تراز a و b و هم‌چنین نقاط هم‌تراز c و d برابر قرار می‌دهیم (فشار داخل محفظه را برابر P' در نظر می‌گیریم):

$$\begin{cases} P_a = P_b \Rightarrow P_{\text{گاز}} + \rho_{\text{روغن}} gh = P' \\ P_c = P_d \Rightarrow P' = P_0 + \rho_{\text{جیوه}} gh \end{cases} \Rightarrow P_{\text{گاز}} + \rho_{\text{روغن}} gh = P_0 + \rho_{\text{جیوه}} gh \Rightarrow P_{\text{گاز}} - P_0 = g(\rho_{\text{جیوه}} h - \rho_{\text{روغن}} h)$$

گام دوم: فشاری که فشارسنج نشان می‌دهد برابر با فشار پیمانه‌ای گاز ($P_g - P_0$) است؛ بنابراین:



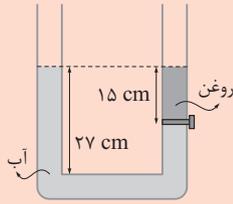
$$4/08 \times 10^3 = 10 \times (13/6 \times 10^3) \times h - 0/6 \times 10^3 \times 34 \Rightarrow 4/08 = 136 h - 2/04$$

$$\Rightarrow h = \frac{6/12}{136} = 4/5 \times 10^{-2} \text{ m} \xrightarrow{10^{-2} \text{ m} = 1 \text{ cm}} h = 4/5 \text{ cm}$$

پاسخ خیلی تشریحی

در شکل زیر، آب و روغن، توسط شیر رابط از هم جدا شده‌اند. اگر شیر را باز کنیم. سطح آزاد آب چند سانتی‌متر و در چه جهتی جابه‌جا

می‌شود؟ ($\rho_{\text{آب}} = 1000 \text{ kg/cm}^3$ ، $\rho_{\text{روغن}} = 800 \text{ kg/cm}^3$)



(۱) به سمت بالا

(۲) به سمت پایین

(۳) به سمت بالا

(۴) به سمت پایین

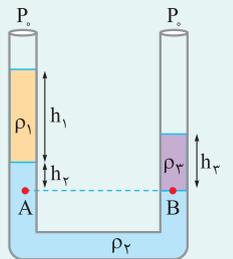
مشاوره می‌توان گفت تست‌خیزترین مبحث از فصل ۲ فیزیک دهم، لوله‌های U شکل است. حل این تست‌ها براساس اصل هم‌فشاری نقاط هم‌تراز انجام می‌شود، اما مهم‌ترین عامل در پاسخ‌دادن به این تست‌ها، مهارت تحلیل درست وضعیت قرارگیری مایع‌ها است. حتماً برای هر وضعیت شکل رسم کنید و همه اطلاعاتی که دارید یا به دست می‌آورید را روی شکل بنویسید.

Hint

ابتدا با مقایسه فشار ناشی از روغن در بالای شیر و فشار ناشی از آب در پایین شیر تعیین کنید که پس از باز شدن شیر، سطح مایع‌ها به کدام سمت جابه‌جا می‌شوند. سپس شکلی از وضعیت قرارگیری مایع‌ها در حالت دوم را رسم کنید و اصل هم‌فشاری نقاط هم‌تراز را نوشته و به کمک اطلاعاتی که دارید، خواسته تست را محاسبه کنید.

درین Box

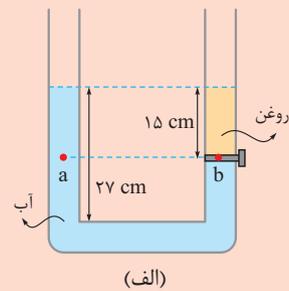
اصل هم‌فشاری نقاط هم‌تراز: در نقطه‌های هم‌تراز یک مایع ساکن، فشار یکسان است و به شکل ظرف بستگی ندارد. برای مثال در شکل مقابل، نقاط A و B هم‌ترازند و درون یک مایع ساکن قرار دارند؛ بنابراین فشار این دو نقطه با هم برابر است.



$$P_A = P_B \Rightarrow P_0 + \rho_1 g h_1 + \rho_2 g h_2 = P_0 + \rho_2 g h_2 \Rightarrow \rho_1 h_1 + \rho_2 h_2 = \rho_2 h_2$$

توجه داشته باشید که در این رابطه فقط یکسان بودن یک‌ها در دو طرف تساوی مهم است.

پاسخ خیلی تشریحی



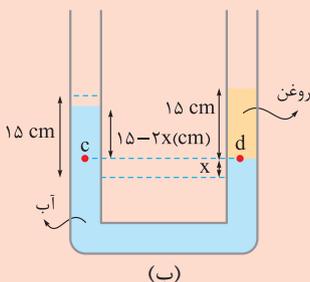
(الف)

گام اول: با توجه به شکل (الف)، فشار در بالای شیر رابط ناشی از فشار هوا و فشار ستون ۱۵ سانتی‌متری روغن و فشار در زیر شیر رابط ناشی از فشار هوا و فشار ستون ۱۵ سانتی‌متری آب است. چون چگالی آب بیشتر از چگالی روغن است، فشار ستون ۱۵ سانتی‌متری آب بیشتر از فشار ستون ۱۵ سانتی‌متری روغن بوده و با باز کردن شیر، سطح آب در شاخه سمت راست بالا و سطح آزاد آب در شاخه سمت چپ پایین می‌رود.

$$P_{\text{بالای شیر}} = P_0 + P_{\text{روغن } 15\text{cm}}$$

$$P_{\text{پایین شیر}} = P_b \xrightarrow{P_b = P_a} P_{\text{پایین شیر}} = P_a = P_0 + P_{\text{آب } 15\text{cm}}$$

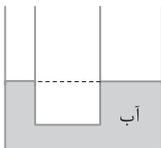
گام دوم: مطابق شکل (ب)، پس از باز کردن شیر، سطح آزاد آب در شاخه سمت چپ به اندازه X سانتی‌متر پایین رفته و سطح آب در شاخه سمت راست به اندازه X سانتی‌متر بالا می‌آید. فشار نقاط هم‌تراز c و d را برابر قرار می‌دهیم تا به دست آید:



(ب)

$$P_c = P_d \Rightarrow P_0 + \rho_{\text{آب}} g h_{\text{آب}} = P_0 + \rho_{\text{روغن}} g h_{\text{روغن}} \Rightarrow \rho_{\text{آب}} \times (15 - 2x) = \rho_{\text{روغن}} \times 15 \Rightarrow 15 - 2x = 12$$

$$\Rightarrow 2x = 3 \Rightarrow x = 1.5 \text{ cm}$$



سطح مقطع شاخه سمت راست و شاخه سمت چپ لوله U شکل مقابل، به ترتیب 4 cm^2 و 2 cm^2 است. اگر به شاخه سمت راست 400 g روغن و به شاخه سمت چپ 150 g نفت اضافه کنیم، اختلاف ارتفاع آب در دو شاخه به چند سانتی متر می‌رسد؟ (چگالی آب 1 g/cm^3 و چگالی نفت و روغن کم‌تر از چگالی آب است).

$$12/5 \quad (2)$$

$$10 \quad (1)$$

$$25 \quad (4)$$

$$20 \quad (3)$$

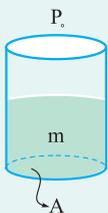
۷۳



به کمک رابطه $P = \frac{mg}{A}$ ، فشار ناشی از روغن و نفت را مقایسه کنید تا بفهمید که پس از اضافه کردن این دو مایع، آب در شاخه‌ها چگونه جابه‌جا می‌شود. با نوشتن اصل هم‌فشاری و نقاط هم‌تراز، اختلاف ارتفاع آب در دو شاخه به دست می‌آید.

Hint

(۱) اگر مطابق شکل روبه‌رو، درون ظرفی استوانه‌ای شکل که سطح مقطع آن برابر A است، جرم m از مایعی بریزیم، فشار ناشی از مایع و فشار کل در کف ظرف از روابط زیر به دست می‌آید:



$$P_{\text{مایع}} = \frac{mg}{A}$$

$$P_{\text{کل}} = P_0 + \frac{mg}{A}$$

(۲) درس باکس تست ۷۲ را ببینید.

درس‌باکس

گام اول: به کمک رابطه $P = \frac{mg}{A}$ ، فشار ناشی از روغن و نفت را محاسبه می‌کنیم:

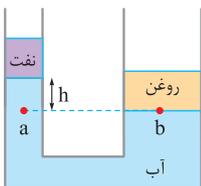
$$P_{\text{روغن}} = \frac{m_{\text{روغن}} g}{A_1} = \frac{400 \times g}{4 \times 10^{-4}} = 10^3 g \quad \text{و} \quad P_{\text{نفت}} = \frac{m_{\text{نفت}} g}{A_2} = \frac{150 \times g}{2 \times 10^{-4}} = 750 g$$

با توجه به نتایج بالا، روغن $P_{\text{نفت}}$ بیشتر از نفت است؛ بنابراین پس از اضافه کردن این دو مایع، مطابق شکل زیر، سطح آب در شاخه سمت راست پایین و در شاخه سمت چپ بالا می‌رود.

گام دوم: اختلاف ارتفاع آب در دو شاخه را برابر h در نظر می‌گیریم و فشار در نقاط هم‌تراز a و b را برابر قرار می‌دهیم:

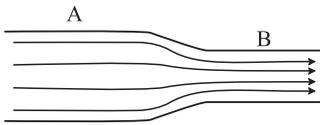
$$P_a = P_b \Rightarrow P_0 + P_{\text{نفت}} + P_h = P_0 + P_{\text{روغن}} \Rightarrow 750 \times g + 10^3 \times g \times h = 10^3 g$$

$$\Rightarrow 10^3 \times h = 250 \Rightarrow h = 250 \times 10^{-3} \text{ m} = 25 \text{ cm}$$



پاسخ خیلی تشریحی ✓

در شکل مقابل، شعاع مقطع لوله در قسمت A، ۲ برابر شعاع مقطع لوله در قسمت B است و شاره تراکم‌ناپذیری که حجم لوله را پُر کرده با تندی v از مقطع A وارد و با تندی v' از مقطع B خارج می‌شود. اگر این شاره با تندی v از مقطع B وارد شود، با تندی چند v' از مقطع A خارج می‌شود؟



۱۶ (۱)

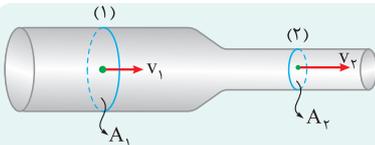
۴ (۲)

$\frac{1}{16}$ (۳)

$\frac{1}{4}$ (۴)



معادله پیوستگی را برای حالت‌های اول و دوم بنویسید تا نسبت خواسته‌شده به دست آید.



معادله پیوستگی: اگر مطابق شکل روبه‌رو، شاره تراکم‌ناپذیری همه جای لوله را پر کرده باشد و درون لوله با جریان لایه‌ای در حال حرکت باشد، در حالت پایا آهنگ شارش حجمی شاره از همه مقاطع لوله یکسان است. به زبان ریاضی:

(A: مساحت مقطع لوله و v : تندی شاره)

$$A_1 v_1 = A_2 v_2$$

بر اساس معادله پیوستگی، با کاهش مساحت مقطع، تندی شاره افزایش می‌یابد.

گام اول: معادله پیوستگی را برای حالت اول می‌نویسیم:

$$A_A v_A = A_B v_B \xrightarrow{A \propto r^2} r_A^2 v_A = r_B^2 v_B \xrightarrow{r_A = 2r_B} (2r_B)^2 \times v = r_B^2 \times v' \Rightarrow v = \frac{1}{4} v'$$

گام دوم: معادله پیوستگی را برای حالت دوم می‌نویسیم:

$$A'_B v'_B = A'_A v'_A \Rightarrow r_B^2 v'_B = r_A^2 v'_A \Rightarrow r_B^2 v = (2r_B)^2 \times v'_A \Rightarrow v'_A = \frac{1}{4} v$$

$$\xrightarrow{v = \frac{1}{4} v'} v'_A = \frac{1}{4} \left(\frac{1}{4} v \right) = \frac{1}{16} v'$$

Hint

درس‌Box

پاسخ خیلی تشریحی

چند مورد از عبارتهای زیر درست است؟

- (الف) در روزهایی که باد می‌وزد، ارتفاع موج‌های دریا و اقیانوس پایین‌تر از ارتفاع میانگین می‌شود.
 (ب) بال هواپیما طوری طراحی می‌شود که تندی هوا در بالای بال کم‌تر از زیر آن باشد.
 (پ) سطح مقطع باریکه عمودی آب خارج‌شده از شیر آب، با نزدیک شدن به سطح زمین بیشتر می‌شود.
 (ت) با دمیدن به فضای بین دو نوار کاغذی سبک و نزدیک به هم، نوارها به هم نزدیک می‌شوند.

صفر (۴)

۳ (۳)

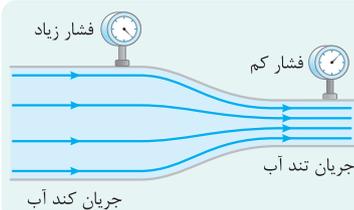
۲ (۲)

۱ (۱)

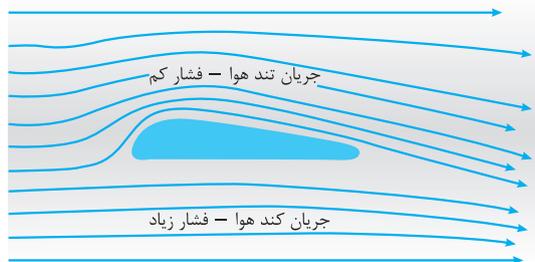
درس‌Box

(۱) درس پاکس تست ۷۴ را بخوانید.

(۲) اصل برنولی: فرض کنید شاره‌ای به طور لایه‌ای و در امتداد افق حرکت می‌کند. در مسیر حرکت شاره، با افزایش تندی شاره، فشار آن کاهش می‌یابد.



بررسی عبارتهای: پاسخ خیلی تشریحی



(الف) با وزش باد، تندی هوای عبوری از بالای موج‌ها افزایش و طبق اصل برنولی، فشار هوای بالای موج‌ها کاهش می‌یابد. همین کاهش فشار سبب می‌شود ارتفاع موج‌ها بالاتر از ارتفاع میانگین باشد. *

(ب) بال‌های هواپیما را طوری طراحی می‌کنند که مطابق شکل روبه‌رو در بالای بال، تندی هوا بیشتر و فشار کم‌تر باشد. همین کاهش فشار باعث تأمین بخشی از نیروی بالابر وارد بر هواپیما می‌شود. *

(پ) با نزدیک شدن باریکه به سطح زمین، تندی باریکه آب افزایش می‌یابد؛ بنابراین طبق معادله پیوستگی، سطح مقطع باریکه آب باید کاهش یابد. *

(ت) با دمیدن به فضای بین دو نوار کاغذی، در واقع تندی هوای عبوری از این فضا را افزایش می‌دهیم. طبق اصل برنولی، فشار این ناحیه نسبت به فشار فضای بیرونی نوارهای کاغذی کاهش یافته و همین موضوع سبب می‌شود که نوارهای کاغذی به هم نزدیک شوند. ✓

شیمی دوازدهم

۷۶

درستی یا نادرستی عبارت‌های زیر به ترتیب در کدام گزینه آمده است؟



- بنزین را می‌توان آلکانی هشت کربنه در نظر گرفت که حلال مناسبی برای مولکول‌های I_2 است.
- شاخص امید به زندگی، درصدی از افراد یک جامعه را نشان می‌دهد که به زندگی امیدوارند.
- افزودن آنزیم به صابون همانند استفاده از آب گرم به جای آب سرد در شست و شوی پارچه، سبب کاهش درصد لکه‌های باقی مانده روی آن می‌شود.
- کلئید مخلوط ناهمگنی است که ذره‌های سازنده آن را درشت‌مولکول‌ها تشکیل می‌دهند.

(۲) درست - درست - درست - درست

(۱) درست - نادرست - درست - نادرست

(۴) نادرست - درست - نادرست - درست

(۳) نادرست - نادرست - نادرست - نادرست



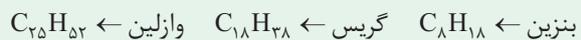
پاسخ خیلی تشریحی ✓

عبارت‌های اول و سوم، درست و عبارت‌های دوم و چهارم، نادرست‌اند.

بررسی عبارت‌ها:

عبارت اول: بنزین با فرمول تقریبی C_8H_{18} یک آلکان ۸ کربنی است و به دلیل ناقطبی بودن، حلال مناسبی برای مواد ناقطبی از جمله I_2 می‌باشد.

بنزین، گریس و وازلین را به ترتیب می‌توان آلکان ۸، ۱۸ و ۲۵ کربنی در نظر گرفت. این سه تارو با هم اشتباه نگیرین!



عبارت دوم: شاخص امید به زندگی نشان می‌دهد، با توجه به خطراتی که انسان‌ها در طول زندگی با آن مواجه هستند، به طور میانگین چند سال در این جهان زندگی می‌کنند.

عبارت سوم: افزودن آنزیم همانند استفاده از آب گرم به جای آب سرد در شست و شوی پارچه، قدرت پاک‌کنندگی را افزایش می‌دهد.

عبارت چهارم: کلئیدها حاوی توده‌های مولکولی با اندازه‌های متفاوت هستند، نه درشت‌مولکول!



سوسپانسیون	کلئید	محلول	مخلوط
ناهمگن	ناهمگن	همگن	همگن یا ناهمگن
ذره‌های ریز ماده	توده‌های مولکولی با اندازه‌های متفاوت	یون‌ها و مولکول‌ها	ذره‌های سازنده

کدام موارد زیر دربارهٔ اوره درست است؟ ($O = ۱۶, N = ۱۴, C = ۱۲, H = ۱: g \cdot mol^{-1}$)

الف) یک مولکول قطبی با فرمول شیمیایی $Co(NH_2)_2$ است.

ب) در ۳۰ گرم از آن، ۱۴ گرم نیتروژن و ۲ مول هیدروژن وجود دارد.

پ) هنگام حل شدن در آب، توانایی تشکیل پیوند هیدروژنی با مولکول‌های آب را دارد.

ت) شمار جفت‌الکترون‌های ناپیوندی آن نصف شمار این جفت‌الکترون‌ها در مولکول اتیلن گلیکول است.

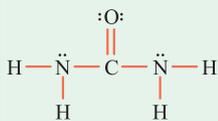
ب - پ (۲)

الف - ب (۱)

ب - ت (۴)

پ - ت (۳)

دو مولکول مهم: اوره و اتیلن گلیکول



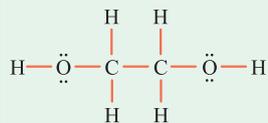
فرمول شیمیایی آن $CO(NH_2)_2$ است.

ساختار لوویس آن به صورت روبه‌رو است:

اوره مولکولی قطبی است و با تشکیل پیوند هیدروژنی در آب حل می‌شود.

در ساختار آن گروه عاملی آمیدی وجود دارد.

جرم مولی آن $60 g \cdot mol^{-1}$ است.



فرمول شیمیایی آن به صورت $C_2H_4(OH)_2$ یا $C_2H_6O_2$ است.

ساختار لوویس آن به صورت روبه‌رو است:

اتیلن گلیکول یک دی‌الکل است و در تهیهٔ پلی‌استرها کاربرد دارد.

مولکولی قطبی است و با تشکیل پیوند هیدروژنی در آب حل می‌شود.

به عنوان ضدیخ در رادیاتور خودروها کاربرد دارد.

عبارت‌های «ب» و «پ» درست‌اند. ✓ پاسخ خیلی تشریحی

بررسی عبارت‌ها:

الف) نماد اکسیژن باید به صورت حرف بزرگ نوشته شود. فرمول شیمیایی اوره به صورت $CO(NH_2)_2$ است.

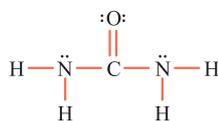
ب) اوره به دلیل داشتن پیوند $N-H$ ، می‌تواند با مولکول‌های آب پیوند هیدروژنی برقرار کند.

پ) جرم مولی اوره $60 g \cdot mol^{-1}$ است و در هر مول از آن ۲ مول N و ۴ مول H وجود دارد:

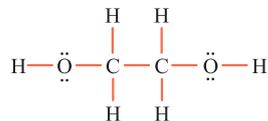
$$N \text{ جرم} = 30 g CO(NH_2)_2 \times \frac{1 \text{ mol } CO(NH_2)_2}{60 g CO(NH_2)_2} \times \frac{2 \text{ mol } N}{1 \text{ mol } CO(NH_2)_2} \times \frac{14 g N}{1 \text{ mol } N} = 14 g N$$

$$H \text{ مول} = 30 g CO(NH_2)_2 \times \frac{1 \text{ mol } CO(NH_2)_2}{60 g CO(NH_2)_2} \times \frac{4 \text{ mol } H}{1 \text{ mol } CO(NH_2)_2} = 2 \text{ mol } H$$

ت) در هر دو مولکول اوره و اتیلن گلیکول، ۴ جفت‌الکترون ناپیوندی وجود دارد.



اوره



اتیلن گلیکول

کدام مطلب درست است؟

۷۸



- (۱) نسبت شمار اتم‌های هیدروژن به شمار اتم‌های کربن در ساختار یک صابون با این نسبت در اتیلن گلیکول نمی‌تواند برابر باشد.
- (۲) به دلیل قابل توجه بودن شمار گروه‌های عاملی کربوکسیل در ساختار مولکول‌های سازندهٔ عسل، لکهٔ عسل به راحتی با آب شسته می‌شود.
- (۳) ذرات سازندهٔ کلئیدها برخلاف ذرات سازندهٔ محلول‌ها، پس از مدتی ته‌نشین می‌شوند.
- (۴) با اضافه کردن صابون جامد به آب، یون‌های $-COO^-$ وارد آب شده و توسط مولکول‌های آب، آب پوشیده می‌شوند.

بررسی گزینه‌ها:

✓ پاسخ خیلی تشریحی

گزینهٔ (۱): در مولکول اتیلن گلیکول ($C_2H_6O_2$)، نسبت شمار اتم‌های هیدروژن به شمار اتم‌های کربن برابر ۳ است. در ساختار صابون، نسبت شمار اتم‌های هیدروژن به کربن فقط در حالتی برابر ۳ به دست می‌آید که گروه R سیر شده باشد و صابون هم آمونیوم‌دار باشد. حالا چک می‌کنیم که آیا چنین صابونی می‌تواند وجود داشته باشد یا خیر.

$$RCOONH_4 : C_nH_{2n+1}COONH_4 \Rightarrow C_{n+1}H_{2n+5}O_2 \Rightarrow \frac{\text{شمار اتم‌های H}}{\text{شمار اتم‌های C}} = \frac{2n+5}{n+1} = 3$$

$$\Rightarrow 2n+5 = 3n+3 \Rightarrow n=2$$

اگر n برابر ۲ باشد، به دلیل کوچک بودن گروه R، ترکیب مورد نظر نمی‌تواند صابون باشد؛ در واقع، به دلیل شمار کربن زیاد صابون‌ها، نسبت شمار اتم‌های هیدروژن به کربن در آن‌ها قطعاً کم‌تر از ۳ است.

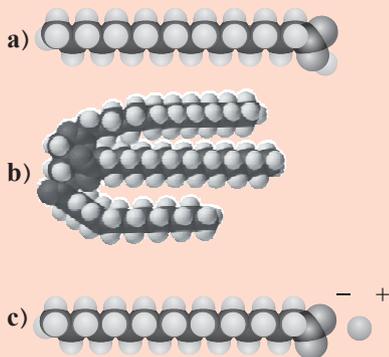
$$\frac{2n+5}{n+1} \xrightarrow{n \text{ بزرگ}} \approx \frac{2n+5}{n} = 2 + \frac{5}{n} < 3$$

گزینهٔ (۲): در ساختار مولکول‌های سازندهٔ عسل، شمار قابل توجهی گروه عاملی هیدروکسیل ($-OH$) وجود دارد، و نه گروه عاملی کربوکسیل ($-COOH$).

گزینهٔ (۳): محلول‌ها و کلئیدها هر دو پایدارند و ذرات سازندهٔ آن‌ها، ته‌نشین نمی‌شوند.

گزینهٔ (۴): گروه $-COO^-$ بخشی از قسمت آنیونی صابون ($RCOO^-$) است و واحد مجزایی نیست که با مولکول‌های آب، آب پوشیده شود.

شکل‌های زیر مدل فضاپرکن سه ترکیب آلی را نشان می‌دهد. کدام موارد از مطالب زیر درباره آن‌ها درست است؟



مشاوره این سؤال شبیه‌سازی یکی از سؤالات کنکورهای اخیر (تجربی ۱۴۰۱) است.

الف) در واکنش با NaOH ، می‌تواند به **c** تبدیل شود.

ب) نوع نیروی بین مولکولی **b**، مانند نیروی بین مولکولی غالب **a** است.

پ) مخلوط آب، روغن و **c** از نوع کلوتید است.

ت) با جایگزینی کاتیون **c** با کاتیون فلزی با شعاع بزرگ‌تر، نقطه ذوب آن افزایش می‌یابد.

۲) ب - پ



۱) الف - ب - پ

۴) ب - پ

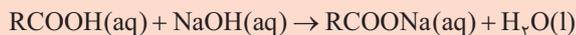
۳) الف - پ - ت

عبارت‌های «الف»، «ب» و «پ» درست‌اند. **✓ پاسخ خیلی تشریحی**

a، b و c به ترتیب ساختار یک اسید چرب، استر سنگین و صابون را نشان می‌دهند.

بررسی عبارت‌ها:

الف) از واکنش اسید چرب با سدیم هیدروکسید، صابون تولید می‌شود:



ب) با توجه به این که اسیدهای چرب و استرهای سنگین در مجموع ناقطبی به حساب می‌آیند، نیروی بین مولکولی آن‌ها از نوع وان‌دروالسی است.

پ) مخلوط آب، روغن و صابون کلوتید به حساب می‌آید.

ت) اگر c را صابون سدیم (RCOONa) در نظر بگیریم و به جای کاتیون آن، کاتیون K^+ که شعاع بزرگ‌تر دارد قرار دهیم، صابون پتاسیم (RCOOK) به دست می‌آید که مایع است و نقطه ذوب کم تری دارد.

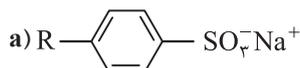
نقطه ذوب: $\text{RCOONa} > \text{RCOOK}$
جامد مایع



۸۱

کدام گزینه در مورد ترکیب‌های داده‌شده، درست است؟ R و R' را زنجیر هیدروکربنی سیرشده در نظر بگیرید.

$$(K = 39, S = 32, O = 16, C = 12, H = 1 : g.mol^{-1})$$



(۱) اگر R و R' یکسان باشند، تفاوت جرم مولی دو ترکیب ۱۱۲ گرم خواهد بود.

(۲) تفاوت شمار جفت‌الکترون‌های ناپیوندی دو ترکیب، دو برابر تفاوت شمار پیوندهای دوگانه آن‌هاست.

(۳) قدرت پاک‌کنندگی ترکیب b از a بیشتر است.

(۴) قدرت پاک‌کنندگی a به شدت انجام واکنش آن با آلایندها بستگی دارد.

a ساختار یک پاک‌کننده غیرصابونی و b ساختار یک پاک‌کننده صابونی مایع است.

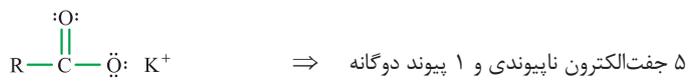
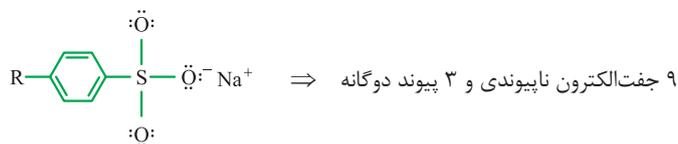
✓ پاسخ خیلی تشریحی

بررسی گزینه‌ها:

گزینه (۱):

$$RC_6H_4SO_3Na - RCO_2K = C_6H_4SONa - K = 135 - 39 = 96g$$

گزینه (۲):



$$\left. \begin{array}{l} 9 - 5 = 4 \\ 3 - 1 = 2 \Rightarrow \frac{4}{2} = 2 \end{array} \right\} \frac{4}{2} = 2$$

گزینه (۳): به طور کلی، قدرت پاک‌کنندگی پاک‌کننده‌های غیرصابونی از پاک‌کننده‌های صابونی بیشتر است، زیرا در آب سخت رسوب نمی‌کنند.

گزینه (۴): اساس عملکرد صابون و پاک‌کننده‌های غیرصابونی برهم‌کنش میان ذره‌هاست. این پاک‌کننده‌ها با آلایندها واکنش

شیمیایی نمی‌دهند. واکنش شیمیایی راست‌کار، پاک‌کننده‌های فورنده است.

۸۲

اگر درصد جرمی کاتیون به کاررفته در یک صابون حاوی ۱۳ اتم کربن که زنجیر هیدروکربنی آن ۳ پیوند دوگانه دارد، برابر ۸ درصد باشد، حالت فیزیکی صابون و نماد کاتیون به کاررفته در ساختار آن کدام است؟

$$(Ca = 40, K = 39, Na = 23, N = 14, O = 16, C = 12, H = 1: g.mol^{-1})$$

۲) جامد، Na^+

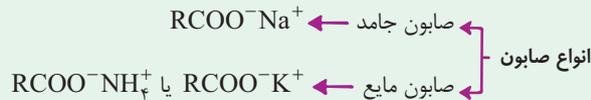
۱) مایع، NH_4^+

۴) جامد، Ca^{2+}

۳) مایع، K^+

نکته

۱) صابون‌های سدیمی جامد و صابون‌های پتاسیمی و آمونیومی مایع هستند.



۲) فرمول عمومی زنجیرهای هیدروکربنی سیرشده (گروه آلکیل) به صورت $C_n H_{2n+1}$ است. اگر زنجیر هیدروکربنی سیرنشده باشد، به ازای هر پیوند $C=C$ ، دو اتم هیدروژن از فرمول مولکولی آن کم می‌شود؛ مثلاً اگر یک زنجیر هیدروکربنی دارای ۲ پیوند $C=C$ باشد، فرمول مولکولی آن به صورت زیر خواهد بود:



برای این که بفهمیم کاتیون سازنده صابون چیست، باید جرم مولی کاتیون را به کمک درصد جرمی آن به دست آوریم. با توجه به این که گروه R، ۳ پیوند دوگانه دارد، ۶ اتم هیدروژن نسبت به حالت سیرشده ($C_n H_{2n+1}$) کم‌تر خواهد داشت:



نکته

درصد جرمی یک عنصر در یک ترکیب، به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\text{درصد جرمی مولی اتم عنصر} \times \text{شمار اتم عنصر در فرمول ترکیب} = \frac{\text{جرم عنصر در یک مول ترکیب}}{\text{جرم مولی ترکیب}} \times 100 = \frac{\text{جرم مولی اتم عنصر}}{\text{جرم مولی ترکیب}} \times 100$$

$$\text{راه حل:} \quad C_{13}H_{19}O_2X \text{ در } X \text{ درصد جرمی} = \frac{\text{جرم مولی } X}{(13 \times 12) + 19 + (2 \times 16) + X} \times 100 = 8$$

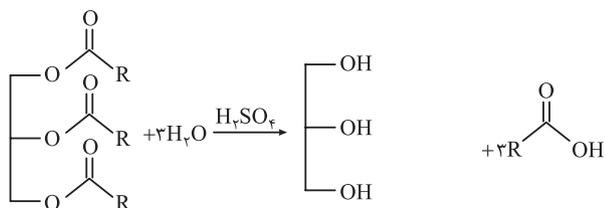
$$\Rightarrow \frac{x}{207+x} = \frac{8}{100} \Rightarrow 1656 + 8x = 100x$$

$$\Rightarrow 92x = 1656 \Rightarrow x = 18$$

در بین کاتیون‌های Na^+ ، K^+ و NH_4^+ که در ساختار صابون‌ها وجود دارند، فقط جرم مولی NH_4^+ برابر $18 g.mol^{-1}$ است.

استرهای سنگین با آب در محیط اسیدی واکنش می‌دهند و به اسیدهای چرب و گلیسرین تبدیل می‌شوند. با توجه به معادله این واکنش

کدام مطلب نادرست است؟



(۱) فرمول مولکولی گلیسرین را می‌توان به صورت $\text{C}_3\text{H}_5(\text{OH})_3$ نشان داد. $\text{C}_{57}\text{H}_{110}\text{O}_6$

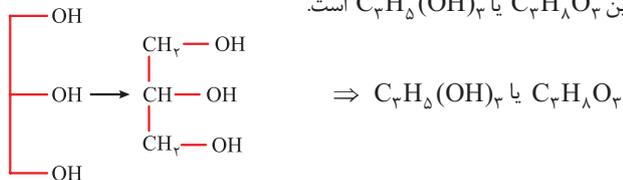
(۲) اگر واکنش دهنده آلی، چربی کوهان شتر باشد، طی این واکنش، اسید چرب $\text{CH}_3(\text{CH}_2)_{16}\text{COOH}$ تولید می‌شود.

(۳) اگر واکنش دهنده آلی، روغن زیتون باشد، فرمول مولکولی اسید چرب تولیدشده $\text{C}_{18}\text{H}_{34}\text{O}_2$ است. $\text{C}_{57}\text{H}_{110}\text{O}_6$

(۴) اگر در این واکنش ۳ مول اسید چرب $\text{CH}_3(\text{CH}_2)_1\text{COOH}$ تولید شود، فرمول استر بلند زنجیر اولیه به صورت $\text{C}_{39}\text{H}_{72}\text{O}_6$ است.

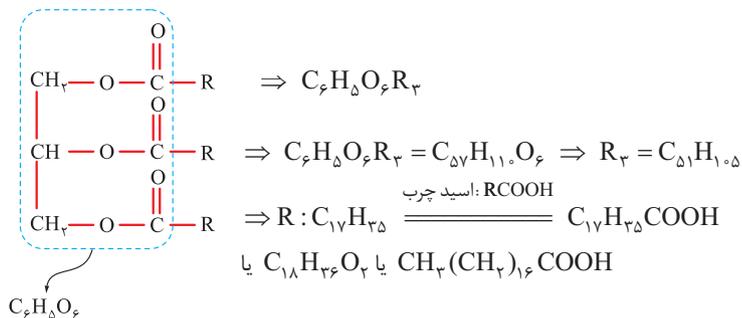
پاسخ خیلی تشریحی ✓ بررسی گزینه‌ها:

گزینه (۱): الکل سه‌عاملی سازنده همه استرهای سنگین $\text{C}_3\text{H}_8\text{O}_3$ یا $\text{C}_3\text{H}_5(\text{OH})_3$ است.



گزینه (۲): فرمول مولکولی چربی کوهان شتر $\text{C}_{57}\text{H}_{110}\text{O}_6$ است. با توجه به ساختار کلی

استرهای سه‌عاملی خواهیم داشت:



برای به دست آوردن فرمول اسید چرب سازنده یک استر سنگین می‌توانیم از فرمول زیر استفاده کنیم:

$$\text{فرمول مولکولی استر سنگین} - \text{C}_3\text{H}_7 = \frac{\text{فرمول مولکولی استر سنگین}}{3}$$

$$\text{فرمول مولکولی اسید چرب سازنده استر کوهان شتر} = \frac{\text{C}_{57}\text{H}_{110}\text{O}_6 - \text{C}_3\text{H}_7}{3} = \frac{\text{C}_{54}\text{H}_{108}\text{O}_6}{3} = \text{C}_{18}\text{H}_{36}\text{O}_2$$

گزینه (۳): فرمول مولکولی روغن زیتون $\text{C}_{57}\text{H}_{104}\text{O}_6$ است؛ بنابراین خواهیم داشت:

$$\text{فرمول مولکولی اسید چرب سازنده روغن زیتون} = \frac{\text{C}_{57}\text{H}_{104}\text{O}_6 - \text{C}_3\text{H}_7}{3} = \frac{\text{C}_{54}\text{H}_{102}\text{O}_6}{3} = \text{C}_{18}\text{H}_{34}\text{O}_2$$

گزینه (۴): از همان رابطه قبلی استفاده می‌کنیم و فرمول مولکولی استر را به دست می‌آوریم:

$$\text{فرمول مولکولی استر سنگین} - \text{C}_3\text{H}_7 = \frac{\text{فرمول مولکولی استر سنگین}}{3}$$

$$\Rightarrow \text{فرمول مولکولی استر سنگین} = 3 + \text{C}_3\text{H}_7 = (\text{فرمول اسید چرب سازنده استر سنگین}) \times 3 + \text{C}_3\text{H}_7$$

$$3(\text{C}_{17}\text{H}_{34}\text{O}_2) + \text{C}_3\text{H}_7 = \text{C}_{39}\text{H}_{74}\text{O}_6$$

کدام مورد نادرست است؟

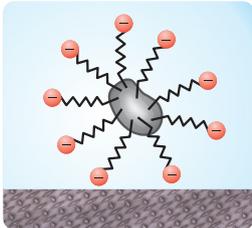
۸۴

- ۱) در فرایند پاک‌شدن لکه چربی روی پارچه توسط آب و صابون، سطح خارجی صابون و قطره چربی دارای بار منفی است.
- ۲) از برخی از صابون‌های سنتی برای چرب کردن سطح سنگ‌ها در تنور نانوایی استفاده می‌شود.
- ۳) اگر درصد پلی‌استر در پارچه‌های A و B به ترتیب برابر ۴۰ و ۶۰ باشد، چسبندگی لکه چربی روی پارچه A بیشتر است.
- ۴) صابون مراغه افزودنی شیمیایی ندارد و برای شست‌وشوی موهای چرب مناسب است.



بررسی گزینه‌ها:

پاسخ خیلی تشریحی ✓



گزینه (۱): با توجه به این که بخش ناقطبی صابون با چربی جاذبه برقرار می‌کند، این بخش صابون داخل قطره چربی قرار می‌گیرد و از آن جا که بخش قطبی صابون که دارای بار منفی است با آب جاذبه برقرار می‌کند، سطح بیرونی قطره چربی (همانند شکل روبه‌رو) دارای بار منفی می‌شود.

گزینه (۲): کاملاً درست است.

گزینه (۳): هر چه درصد پلی‌استر در یک پارچه بیشتر باشد، لکه‌های ناقطبی چربی را بیشتر به خود می‌چسباند؛ زیرا پلی‌استرها از واحدهای ناقطبی تری (نسبت به نخ) تشکیل شده‌اند. در این جا چسبندگی لکه چربی روی پارچه B که پلی‌استر بیشتری دارد، بیشتر است.

گزینه (۴): صابون مراغه یک صابون سنتی است که افزودنی شیمیایی ندارد و به دلیل خاصیت بازی مناسب، برای موهای چرب استفاده می‌شود.

با توجه به مطالب کتاب درسی و جدول داده شده، چند مورد از موارد زیر درست است؟

۸۵

نقش	ماده افزودنی به صابون یا شوینده
از بین بردن قارچ‌های پوستی	A
افزایش قدرت پاک‌کنندگی	X
خاصیت میکروب‌کشی	D

- عنصر مؤثر در ماده A در ساختار پاک‌کننده‌های غیرصابونی نیز وجود دارد.
- منظور از ماده X همان نمک‌های منیزیم است.
- عنصر مؤثر در ماده D در دوره سوم جدول دوره‌ای قرار دارد.
- نقش اصلی ماده X، جلوگیری از تشکیل رسوب و ایجاد لکه است.

۱ (۴)

۲ (۳)

۳ (۲)

۴ (۱)



افزودنی‌های صابون و شوینده‌ها



- صابون گوگرددار برای از بین بردن جوش صورت و قارچ‌های پوستی استفاده می‌شود.
- صابون دارای ترکیب شیمیایی کلردار برای ایجاد خاصیت ضدعفونی‌کنندگی و میکروب‌کشی به کار می‌رود.
- برای افزایش قدرت پاک‌کنندگی شوینده‌ها، به آن‌ها نمک‌های فسفات اضافه می‌کنند.

عبارت‌های اول، سوم و چهارم درست‌اند. ✓ پاسخ خیلی تشریحی

بررسی عبارت‌ها:

عبارت اول: عنصر مؤثر در ماده A، گوگرد است که در ساختار پاک‌کننده‌های غیرصابونی ($RC_6H_4SO_3X$) نیز وجود دارد.
عبارت دوم: نمک‌های منیزیم با صابون رسوب می‌دهند و قدرت پاک‌کنندگی آن را کاهش می‌دهند. اما دقت کنید X همان نمک‌های فسفات است.

عبارت سوم: عنصر مؤثر در ماده D، کلر (Cl) است که متعلق به دوره سوم جدول تناوبی می‌باشد.

عبارت چهارم: برای افزایش قدرت پاک‌کنندگی مواد شوینده، به آن‌ها نمک‌های فسفات می‌افزایند، زیرا این نمک‌ها با یون‌های کلسیم و منیزیم موجود در آب‌های سخت واکنش می‌دهند و از تشکیل رسوب و ایجاد لکه جلوگیری می‌کنند.

- چند مورد از مطالب زیر درباره «آب سخت» درست است؟
- مقدار کاتیون‌های Ca^{2+} و Mg^{2+} در آن بیشتر از سایر یون‌هاست.
 - آب دریا و آب مناطق کویری از این نوع آب هستند.
 - صابون در آن به خوبی کف نمی‌کند و قدرت پاک‌کنندگی خود را به طور کامل از دست می‌دهد.
 - لکه‌های سفیدی که پس از شستن لباس با صابون روی آن ایجاد می‌شود، نشان‌دهنده استفاده از این نوع آب است.

۴ (۴)

۳ (۳)

۲ (۲)

۱ (۱)



پاسخ خیلی تشریحی ✓

عبارت‌های دوم و چهارم درست‌اند.

بررسی عبارت‌های نادرست:

عبارت اول: آب سخت حاوی مقادیر چشمگیری از یون‌های Ca^{2+} و Mg^{2+} است. این عبارت به این معنی نیست که مقدار این یون‌ها از سایر یون‌ها بیشتر است.

عبارت سوم: قدرت پاک‌کنندگی صابون در آب سخت کاهش می‌یابد، نه این‌که به طور کامل از بین برود!



در ساختار یک پاک‌کننده غیرصابونی سدیم‌دار با زنجیرهای هیدروکربنی سیرشده، ۵۱ پیوند اشتراکی وجود دارد. اگر اتم‌های هیدروژن

متصل به حلقه بنزنی این ترکیب را با گروه‌های متیل جایگزین کنیم، جرم مولی آن به چند گرم بر مول می‌رسد؟ $\leftarrow \text{RC}_6\text{H}_4\text{SO}_3\text{Na}$

$$(S = 32, O = 16, C = 12, H = 1 : \text{g.mol}^{-1})$$

(۱) ۳۳۴

(۲) ۳۴۸

(۳) ۳۹۰

(۴) ۴۰۴



مشاوره

سخت‌تر از یکی از سؤال‌های کنکور تیر ۱۴۰۳ رشته تجربی درباره پاک‌کننده‌های غیرصابونی است.

با توجه به مطالب کتاب درسی، اگر اتم‌های هیدروژن حلقه بنزنی در یک پاک‌کننده دارای ۱۸ اتم کربن و با زنجیر هیدروکربنی سیرشده، با گروه متیل جایگزین شود، جرم مولی آن به تقریب چند درصد افزایش می‌یابد؟ (تجربی - تیر ۱۴۰۳)

$$(H = 1, C = 12, O = 16,$$

$$\text{Na} = 23, S = 32 : \text{g.mol}^{-1})$$

$$16 \quad (2) \quad 12 \quad (1)$$

$$24 \quad (4) \quad 18 \quad (3)$$

پاسخ خیلی تشریحی

برای محاسبه شمار پیوندهای اشتراکی در بخش آنیونی پاک‌کننده‌های صابونی و غیرصابونی می‌توان از فرمول زیر استفاده کرد:

بار یون با در نظر گرفتن علامت + مجموع شمار الکترون‌های جفت نشده در آرایش الکترون - نقطه‌ای اتم‌ها = شمار کل پیوندهای اشتراکی در یون‌های چند اتمی

$$= \frac{(3 \times \text{شمار N یا بقیه عنصرهای گروه ۱۵}) + (2 \times \text{شمار O یا بقیه عنصرهای گروه ۱۶}) + (1 \times \text{شمار H یا اتم عنصرهای گروه ۱۷})}{2}$$

$$+ \frac{\text{بار یون با در نظر گرفتن علامت} + (4 \times \text{شمار C یا بقیه عنصرهای گروه ۱۴})}{2}$$

ابتدا باید با توجه به شمار پیوندهای اشتراکی در ساختار پاک‌کننده، فرمول شیمیایی آن را به دست آوریم:



فرمول محاسبه شمار پیوندهای اشتراکی را برای بخش آنیونی می‌نویسیم:

$$\text{بار یون با علامت} = \frac{(C \times 4) + (H \times 1) + (S \times 2) + (O \times 2) + (-1)}{2}$$

$$\Rightarrow 51 = \frac{\overbrace{[(n+6) \times 4]}^C + \overbrace{2n+5}^H + \overbrace{(4 \times 2)}^{O,S} + \overbrace{(-1)}^{\text{بار}}}{2} \Rightarrow 102 = 4n + 24 + 2n + 5 + 8 - 1$$

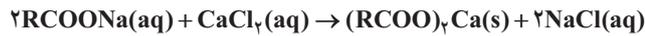
$$\Rightarrow 6n = 102 - 36 = 66 \Rightarrow n = 11$$

بنابراین فرمول پاک‌کننده به صورت $\text{C}_{11}\text{H}_{23}\text{C}_6\text{H}_4\text{SO}_3\text{Na}$ است. اگر به جای ۴ اتم هیدروژن متصل به حلقه بنزنی، ۴ گروه متیل (CH_3) قرار گیرد، خواهیم داشت:



$$\Rightarrow \text{جرم مولی} = (21 \times 12) + 35 + 32 + (3 \times 16) + 23 = 390 \text{g.mol}^{-1}$$

اگر از واکنش ۵۰۱ گرم صابون با فرمول $\text{CH}_3(\text{CH}_2)_n\text{COONa}$ با مقدار کافی کلسیم کلرید، $496/5$ گرم رسوب تولید شود، مقدار n در فرمول این صابون کدام است؟ ($\text{Ca} = 40, \text{Na} = 23, \text{O} = 16, \text{C} = 12, \text{H} = 1: \text{g.mol}^{-1}$)



۱۷ (۴)

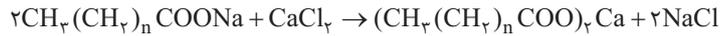
۱۸ (۳)

۱۹ (۲)

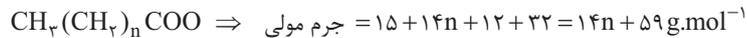
۲۰ (۱)



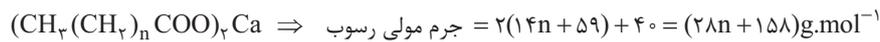
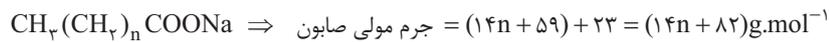
پاسخ خیلی تشریحی ✓ معادله واکنش انجام شده به صورت زیر است:



از اونجایی که گروه $\text{CH}_3(\text{CH}_2)_n\text{COO}^-$ در فرمول صابون و رسوب یکسان است، اول جرم مولی این گروه را به دست می آوریم:



حالا جرم مولی صابون و رسوب را حساب می کنیم:



با نوشتن تناسب بین جرم صابون و جرم رسوب، n به دست می آید:

$$\frac{\text{جرم صابون}}{\text{جرم مولی صابون}} = \frac{\text{جرم رسوب}}{\text{جرم مولی رسوب}} \Rightarrow \frac{501}{164 - 158} = \frac{496/5}{28n + 158} \Rightarrow \frac{501}{6} = \frac{496/5}{28n + 158}$$

برای این که $28n$ از یکی از کسرها حذف شود، صورت کسرها را از هم و مخارج کسرها را از هم کم می کنیم و کسر به دست آمده را با یکی از کسرها اولیه برابر قرار می دهیم:

$$\frac{501 - 496/5}{164 - 158} = \frac{501}{28n + 164} \Rightarrow \frac{4/5}{6} = \frac{167}{28n + 164} \Rightarrow 668 = 28n + 164 \Rightarrow 28n = 504 \Rightarrow n = 18$$

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{a+c}{b+d} = \frac{a-c}{b-d}$$

۸۹

چند مورد از مطالب زیر درست است؟

- صابون و دیگر پاک‌کننده‌ها خاصیت بازی دارند و کاغذ pH را به رنگ آبی درمی‌آورند.
- آرنیوس با ارائه مدل خود دربارهٔ اسیدها و بازها، سبب شد تا شیمی‌دان‌ها با واکنش‌های شیمیایی بین این مواد آشنا شوند.
- تولید گاز اکسیژن در واکنش مخلوط پودر آلومینیم و سدیم هیدروکسید با آب، قدرت پاک‌کنندگی این مخلوط را افزایش می‌دهد.
- مطابق مدل آرنیوس، HF(g) یک اسید و $\text{CH}_3\text{OH(l)}$ یک باز محسوب می‌شود.

۳ (۴)

۲ (۳)

۱ (۲)

۱ (صفر)



پاسخ خیلی تشریحی ✓

همهٔ عبارتهای داده‌شده نادرست‌اند.

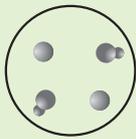
عبارت اول: همهٔ پاک‌کننده‌ها خاصیت بازی ندارند، بعضی از پاک‌کننده‌های خورنده (مانند HCl) اسیدی هستند و کاغذ pH را به رنگ سرخ درمی‌آورند.

عبارت دوم: شیمی‌دان‌ها قبل از مدل آرنیوس و شناخت ساختار اسیدها و بازها، با برخی از ویژگی‌ها و واکنش‌های بین آن‌ها آشنا بودند.

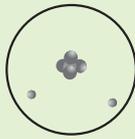
عبارت سوم: در واکنش مخلوط پودر آلومینیم و سدیم هیدروکسید با آب، گاز هیدروژن تولید می‌شود، نه اکسیژن!

عبارت چهارم: الکل‌ها (مانند CH_3OH) باز آرنیوس محسوب نمی‌شوند، زیرا به صورت مولکولی در آب حل می‌شوند و یون تولید نمی‌کنند.

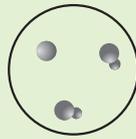
۹۰ با توجه به شکل‌های زیر که مربوط به واکنش برخی اکسیدها با آب است، کدام موارد زیر درست‌اند؟



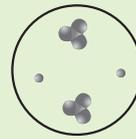
(۱)



(۲)



(۳)



(۴)

الف) رنگ کاغذ pH در حضور محلول‌های (۲) و (۳) مشابه یکدیگر است.

ب) حل‌شوندهٔ محلول (۱) می‌تواند هیدروکسید فلزی از گروه دوم جدول تناوبی باشد. $M(OH)_2$

پ) حل‌شوندهٔ محلول‌های (۲) و (۴) به ترتیب می‌تواند $SO_3(g)$ و $N_2O_5(s)$ باشد.

ت) آنیون‌های محلول (۲) و (۴) از نظر شمار پیوندهای کووالانسی مشابه یکدیگر هستند.

(۲) الف - ب

(۱) الف - پ

(۴) ب - ت

(۳) پ - ت



عبارت‌های (پ) و (ت) درست‌اند. **پاسخ خیلی تشریحی ✓**

محلول‌هایی که در آن‌ها یون H^+ (●) تولید شده است، خاصیت اسیدی دارند ← (۲) و (۴)

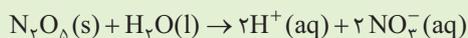
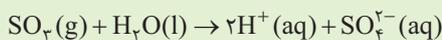
محلول‌هایی که در آن‌ها یون OH^- (●●) تولید شده است، خاصیت بازی دارند ← (۱) و (۳)

بررسی عبارت‌ها:

الف) محلول (۲) خاصیت اسیدی دارد و کاغذ pH در آن به رنگ سرخ درمی‌آید، در حالی که محلول (۳) خاصیت بازی دارد و کاغذ pH در آن به رنگ آبی درمی‌آید.

ب) فلزهای گروه دوم جدول، یون دو بار مثبت تشکیل می‌دهند؛ بنابراین فرمول هیدروکسید آن‌ها به صورت $M(OH)_2$ است. در محلول این هیدروکسیدها، شمار یون‌های OH^- دو برابر شمار یون‌های M^{2+} است، در حالی که در شکل (۱) شمار کاتیون‌ها و آنیون‌ها با هم برابر است.

پ) با توجه به معادلهٔ واکنش این اکسیدها با آب، همه‌ی درسته!



ت) با توجه به مدل فضا پرکن آنیون‌های محلول‌های (۲) و (۴)، در ساختار هر دو آنیون، ۴ پیوند اشتراکی وجود دارد:



این آنیون‌ها می‌توانند SO_3^{2-} و NO_3^- باشند.

شیمی دهم

۹۱

اگر تفاوت شمار نوترون‌ها و نصف الکترون‌ها در یون ${}^{83}\text{X}^{3+}$ ، $\frac{2}{3}$ برابر شمار پروتون‌های آن باشد، کدام اتم را می‌توان ایزوتوپ X در نظر گرفت؟



اتم‌هایی که عدد اتمی یکسان (Z) ولی عدد جرمی (A) متفاوتی دارند، ایزوتوپ یکدیگر محسوب می‌شوند.



پاسخ خیلی تشریحی ✓

$${}_{Z}^{83}\text{X}^{3+} \begin{cases} p = Z \\ e = Z - 3 \\ n = 83 - Z \end{cases}$$

ابتدا با اطلاعات داده‌شده، عدد اتمی X را پیدا می‌کنیم:

$$\text{شمار پروتون‌ها} = \frac{2}{3} = \text{نصف شمار الکترون‌ها} - \text{شمار نوترون‌ها} \Rightarrow (83 - Z) - \left(\frac{1}{3}(Z - 3)\right) = \frac{2}{3}Z$$

$$\Rightarrow 83 - Z - \frac{1}{3}Z + \frac{3}{3} = \frac{2}{3}Z \Rightarrow 83 + \frac{3}{3} = \frac{3}{3}Z + \frac{2}{3}Z \Rightarrow \frac{169}{3} = \frac{5Z}{3} \Rightarrow Z = 39$$

حال می‌توان نتیجه گرفت که اتم ${}_{39}^{89}\text{E}$ که عدد اتمی یکسانی با عنصر X دارد، ایزوتوپ آن است.

۹۲

درستی یا نادرستی مطالب زیر به ترتیب در کدام گزینه آمده است؟

- رادیوایزوتوپ فسفر، جزء رادیوایزوتوپ‌هایی است که در ایران تولید می‌شود.
- تکنسیم شناخته‌شده‌ترین فلز پرتوزاست و در تصویربرداری پزشکی کاربرد دارد.
- فراوان‌ترین ایزوتوپ اورانیم، ^{235}U است که به‌عنوان سوخت راکتورهای اتمی استفاده می‌شود.
- با وجود پیشرفت در علم شیمی و فیزیک، انسان هنوز نمی‌تواند عنصرهای دیگر را به طلا تبدیل کند.

(۲) درست - نادرست - نادرست - نادرست

(۱) درست - درست - نادرست - نادرست

(۴) نادرست - درست - درست - درست

(۳) نادرست - نادرست - درست - درست



پاسخ خیلی تشریحی ✓

به‌جز عبارت اول، بقیه عبارت‌ها نادرست‌اند.

عبارت اول: رادیوایزوتوپ تکنسیم و فسفر از جمله رادیوایزوتوپ‌هایی هستند که در ایران تولید می‌شوند.



عبارت دوم: شناخته‌شده‌ترین فلز پرتوزا اورانیم است، نه تکنسیم!

تکنسیم و اورانیم



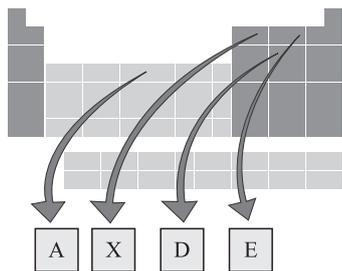
اورانیم (^{235}U)	تکنسیم (^{99}Tc)
● عنصری طبیعی و پرتوزاست و شناخته‌شده‌ترین عنصر پرتوزا به حساب می‌آید.	● نخستین عنصر ساخت بشر است (عنصری ساختگی است).
● از یکی از ایزوتوپ‌های آن (^{235}U)، اغلب به‌عنوان سوخت در راکتورهای اتمی استفاده می‌شود.	● هیچ ایزوتوپی از آن در طبیعت وجود ندارد.
● فراوانی ایزوتوپ ^{235}U - ^{238}U در مخلوط طبیعی اورانیم کم‌تر از ۷٪ درصد است.	● در تصویربرداری از غده تیروئید کاربرد دارد.
	● با این‌که پرتوزاست، اما نسبت شمار نوترون به پروتون آن کم‌تر از ۱/۵ است.
	● نیم‌عمر کمی دارد و نمی‌توان آن را برای مدت طولانی نگهداری کرد.

عبارت سوم: ^{235}U (اورانیم - ۲۳۵) درصد فراوانی کمی در مخلوط ایزوتوپ‌های طبیعی اورانیم دارد (کم‌تر از ۷٪ درصد)، به همین دلیل

است که غنی‌سازی ایزوتوپی انجام می‌شود.

عبارت چهارم: تبدیل عنصرهای دیگر به طلا امکان‌پذیر است، اما صرفه اقتصادی ندارد.

با توجه به جدول زیر، هر یک از توضیحات داده شده را به ترتیب به کدام عنصرها می توان نسبت داد؟ (نماد عنصرها فرضی است).
 • تفاوت شماره دوره و گروه آن در جدول برابر ۱۲ است.



• تفاوت عدد اتمی آن با شمار کل عنصرهای شناخته شده، برابر با شمار عنصرهای طبیعی است.

۹۲

۱۱۸

• با عنصری که اتم آن ۱۶ الکترون دارد، خواص شیمیایی مشابهی دارد.

عنصرهای هم گروه

E, A, X (۱)

X, A, D (۲)

E, D, X (۳)

A, E, D (۴)

با توجه به جدول، به راحتی می توان عدد اتمی و شماره دوره و گروه عنصرها را پیدا کرد. ✓ پاسخ خیلی تشریحی

عنصر	E	D	X	A
عدد اتمی	۸	۱۵	۶	۲۶
شماره دوره	۲	۳	۲	۴
شماره گروه	۱۶	۱۵	۱۴	۸

بررسی عبارت‌ها:

عبارت اول: تفاوت شماره دوره و گروه برای دو عنصر X و D برابر ۱۲ است.

عبارت دوم: تاکنون ۱۱۸ عنصر شناخته شده که ۹۲ تا آن‌ها (حدوداً ۷۸٪) طبیعی و ۲۶ تا آن‌ها (حدوداً ۲۲٪) ساختگی است.

عدد اتمی عنصر را Z در نظر می‌گیریم:

$$۱۱۸ - Z = ۹۲ \Rightarrow Z = ۲۶ \Rightarrow \text{عدد اتمی عنصر A}$$

عبارت سوم: می‌دانیم که عنصرهای هم گروه، خواص شیمیایی مشابهی دارند. عنصری با عدد اتمی ۱۶ مانند عنصر E، به گروه ۱۶

جدول تعلق دارد.



۹۵

در نمونه‌ای ۵۰۰ اتمی شامل ایزوتوپ‌های طبیعی منیزیم (^{24}Mg)، شمار نوترون‌ها، ۱۵۵ واحد بیشتر از شمار پروتون‌هاست. اگر درصد فراوانی سبک‌ترین ایزوتوپ در این نمونه برابر ۸۰٪ باشد، درصد فراوانی سنگین‌ترین ایزوتوپ و جرم اتمی میانگین منیزیم در این نمونه به ترتیب کدام است؟

$$۲۴ / ۲۹ - ۱۱ \quad (۲) \qquad ۲۴ / ۳۲ - ۱۲ \quad (۱)$$

$$۲۴ / ۲۸ - ۱۲ \quad (۴) \qquad ۲۴ / ۳۱ - ۱۱ \quad (۳)$$



درصد فراوانی یک ایزوتوپ در یک نمونه از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$\text{درصد فراوانی ایزوتوپ } X = \frac{\text{شمار ایزوتوپ } X}{\text{شمار کل اتم‌ها در نمونه}} \times ۱۰۰$$

گام اول: منیزیم در طبیعت به صورت ایزوتوپ‌های ^{24}Mg ، ^{25}Mg و ^{26}Mg یافت می‌شود. طبق فرض سؤال، فراوانی ایزوتوپ ^{24}Mg (سبک‌تر) در طبیعت برابر ۸۰٪ است؛ در نتیجه در نمونه ۵۰۰ اتمی از منیزیم، شمار ^{24}Mg برابر است با:

$$^{24}\text{Mg} \text{ درصد فراوانی} = \frac{\text{شمار ایزوتوپ } ^{24}\text{Mg}}{\text{شمار کل اتم‌ها}} \times ۱۰۰ \Rightarrow ۸۰ = \frac{x}{۵۰۰} \times ۱۰۰ \Rightarrow x = ۴۰۰$$

گام دوم: ایزوتوپ‌های یک عنصر در شمار نوترون‌ها با همدیگر تفاوت دارند، ولی شمار پروتون‌ها (Z) در آن‌ها برابر است؛ بنابراین شمار پروتون‌ها در نمونه ۵۰۰ اتمی از منیزیم را به دست می‌آوریم:

$$\text{شمار پروتون‌ها در نمونه } ۵۰۰ \Rightarrow ۵۰۰ \times ۱۲ = ۶۰۰۰$$

با توجه به این که شمار نوترون‌ها ۱۵۵ واحد بیشتر از شمار پروتون‌هاست، می‌توان نوشت:

$$\text{شمار نوترون‌ها در نمونه } ۵۰۰ = ۶۰۰۰ + ۱۵۵ = ۶۱۵۵$$

گام سوم: از ۵۰۰ اتم منیزیم، ۴۰۰ اتم از نوع ایزوتوپ ^{24}Mg است؛ بنابراین مجموع اتم‌های ^{24}Mg و ^{25}Mg برابر ۱۰۰ است. اگر شمار اتم‌های ^{25}Mg را برابر با x و شمار اتم‌های ^{26}Mg را برابر با y در نظر بگیریم، می‌توان نوشت:

$$x + y = ۱۰۰$$

از طرفی شمار نوترون‌های هر اتم ^{25}Mg برابر $۱۳ = (۲۵ - ۱۲)$ و شمار نوترون‌های هر اتم ^{26}Mg برابر با $۱۴ = (۲۶ - ۱۲)$ است. اکنون با حل دستگاه زیر، x و y محاسبه می‌شود:

$$\text{شمار ایزوتوپ‌های } ^{25}\text{Mg} \text{ و } ^{26}\text{Mg} \Rightarrow x + y = ۱۰۰$$

$$\text{شمار کل نوترون‌ها در نمونه } ۵۰۰ \Rightarrow \underbrace{(۱۲ \times ۴۰۰)}_{^{24}\text{Mg}} + \underbrace{۱۳x}_{^{25}\text{Mg}} + \underbrace{۱۴y}_{^{26}\text{Mg}} = ۶۱۵۵ \Rightarrow ۱۳x + ۱۴y = ۱۳۵۵$$

$$\begin{cases} x + y = ۱۰۰ \xrightarrow{\times(-۱۳)} -۱۳x - ۱۳y = -۱۳۰۰ \\ ۱۳x + ۱۴y = ۱۳۵۵ \Rightarrow ۱۳x + ۱۴y = ۱۳۵۵ \end{cases}$$

$$y = ۵۵ \Rightarrow x = ۴۵$$

گام چهارم: درصد فراوانی ایزوتوپ ^{26}Mg برابر است با:

$$^{26}\text{Mg} \text{ درصد فراوانی ایزوتوپ} = \frac{\text{شمار اتم‌های } ^{26}\text{Mg}}{\text{شمار کل اتم‌ها در نمونه}} \times ۱۰۰ = \frac{۵۵}{۵۰۰} \times ۱۰۰ = ۱۱$$

گام پنجم: جرم اتمی میانگین منیزیم را حساب می‌کنیم:

$$\Rightarrow \bar{M} = M_1 + \frac{F_2}{F_{\text{کل}}} (M_2 - M_1) + \frac{F_3}{F_{\text{کل}}} (M_3 - M_1) \Rightarrow M = ۲۴ + \left(\frac{۹}{۱۰۰} \times ۱\right) + \left(\frac{۱۱}{۱۰۰} \times ۲\right) = ۲۴ / ۳۱$$

روش تکنیکی: ۵۰۰ اتم منیزیم (^{24}Mg)، $۵۰۰ \times ۱۲ = ۶۰۰۰$ پروتون و $۶۰۰۰ + ۱۵۵ = ۶۱۵۵$ نوترون دارند؛ بنابراین می‌توان

گفت هر اتم منیزیم به طور میانگین دارای $\frac{۶۱۵۵}{۵۰۰} = ۱۲ / ۳۱$ نوترون است؛ بنابراین جرم اتمی میانگین منیزیم را می‌توان برابر با

$۱۲ + ۱۲ / ۳۱ = ۲۴ / ۳۱$ در نظر گرفت. حالا با رابطه جرم اتمی میانگین، درصد فراوانی ایزوتوپ سنگین‌تر منیزیم را حساب می‌کنیم:

$$\Rightarrow \bar{M} = M_1 + \frac{F_2}{F_{\text{کل}}} (M_2 - M_1) + \frac{F_3}{F_{\text{کل}}} (M_3 - M_1)$$

$$\Rightarrow ۲۴ / ۳۱ = ۲۴ + \frac{F_2}{۱۰۰} \times ۱ + \frac{F_3}{۱۰۰} \times ۲ \xrightarrow{F_2 + F_3 = ۲۰} F_2 = ۹, F_3 = ۱۱$$

۹۷

کدام گزینه درست است؟ ($\text{Fe} = 56, \text{Ar} = 40, \text{H} = 1: \text{g.mol}^{-1}$)

- (۱) اغلب در یک نمونه طبیعی از عنصری معین، هیچ دو اتمی جرم یکسانی ندارند.
 (۲) جرم اتمی کربن - ۱۲ به تقریب برابر با ۱۲ amu بوده و جرم اتمی فراوانترین ایزوتوپ هیدروژن کمی بیشتر از ۱ amu است.
 (۳) شمار اتم‌های موجود در ۱۴ گرم گاز آرگون، با شمار اتم‌های موجود در ۱۹/۶ گرم آهن برابر است.
 (۴) در یک نمونه یک گرمی از گاز هیدروژن، به اندازه N_A مولکول وجود دارد.



پاسخ خیلی تشریحی ✓ بررسی گزینه‌ها:

گزینه (۱): اغلب در یک نمونه طبیعی از عنصری معین، اتم‌های سازنده جرم یکسانی ندارند، بلکه مخلوطی از دو یا چند ایزوتوپ است. البته باید به این نکته توجه کرد که در یک نمونه طبیعی از یک نوع ایزوتوپ، می‌تواند چند اتم با جرم‌های یکسان وجود داشته باشد.
 گزینه (۲): جرم اتمی کربن - ۱۲ دقیقاً برابر با ۱۲ amu است نه به تقریب! و جرم اتمی فراوانترین ایزوتوپ هیدروژن یا همان ^1H برابر با ۱/۰۰۸ amu است که کمی بیشتر از ۱ amu می‌باشد.

$$\left. \begin{array}{l} \text{I) } 14 \text{ g Ar} \times \frac{1 \text{ mol Ar}}{40 \text{ g Ar}} \times \frac{N_A \text{ atom Ar}}{1 \text{ mol Ar}} = 0.35 N_A \text{ atom Ar} \\ \text{II) } 19.6 \text{ g Fe} \times \frac{1 \text{ mol Fe}}{56 \text{ g Fe}} \times \frac{N_A \text{ atom Fe}}{1 \text{ mol Fe}} = 0.35 N_A \text{ atom Fe} \end{array} \right\} \Rightarrow \text{(I) = (II)} \quad \text{گزینه (۳):}$$

گزینه (۴): در یک نمونه یک گرمی از گاز هیدروژن، به اندازه $\frac{N_A}{2}$ مولکول H_2 وجود دارد:

$$1 \text{ g H}_2 \times \frac{1 \text{ mol H}_2}{2 \text{ g H}_2} \times \frac{N_A \text{ H}_2}{1 \text{ mol H}_2} = \frac{N_A}{2} \text{ H}_2$$

۹۷

درون ظرفی به جرم ۶۲۰ گرم تعدادی گوی آلومینیومی مشابه به قطر ۱ cm می‌ریزیم و آن را روی ترازو قرار می‌دهیم. اگر ترازو عدد ۸۱۴/۴ گرم را نشان دهد، چند گوی کروی شکل در این ظرف وجود دارد و هر گوی شامل چند مول الکترون ظرفیتی است؟ (جرم هر سانتی‌متر مکعب از این گوی‌ها را ۲/۷ گرم در نظر بگیرید، $\pi = ۳$ و $Al = ۲۷ \text{ g.mol}^{-1}$)

(۱) ۱۳۸ - ۲۱/۰

(۲) ۱۳۸ - ۱۵/۰

(۳) ۱۴۴ - ۲۱/۰

(۴) ۱۴۴ - ۱۵/۰

مشاوره این سؤال شبیه‌سازی یکی از سؤالات کنکورهای اخیر (ریاضی ۱۴۰۰) است.

اتم‌های موجود در یک مکعب به ابعاد ۴ سانتی‌متر از فلز منگنز، به تقریب دارای چند مول الکترون ظرفیتی است؟ (جرم هر سانتی‌متر مکعب از فلز منگنز را برابر ۷/۵ گرم در نظر بگیرید. $Mn = ۵۵ \text{ g.mol}^{-1}$) (ریاضی ۱۴۰۰)

(۱) ۵۷/۵

(۲) ۶۱/۱

(۳) ۶۵/۸

(۴) ۶۷/۲

پاسخ خیلی تشریحی ✓

گام اول: ابتدا با توجه به رابطه حجم کره (V) و شعاع آن (r)، حجم گوی‌های آلومینیومی را به دست می‌آوریم و سپس با توجه به اطلاعات داده‌شده، جرم هر گوی آلومینیومی را محاسبه می‌کنیم:

$$V = \frac{4}{3} \pi r^3$$

$$V = \frac{4}{3} \times 3 \times (0.5)^3 = \frac{4}{3} \times 3 \times 0.125 = 0.5 \text{ cm}^3$$

$$0.5 \text{ cm}^3 \times \frac{2.7 \text{ g}}{1 \text{ cm}^3} = 1.35 \text{ g}$$

گام دوم: با توجه به این‌که عدد نشان داده شده بر روی ترازو، مجموع جرم ظرف و جرم گوی‌های آلومینیومی است؛ بنابراین با استفاده از جرم ظرف مورد نظر، مجموع جرم گوی‌های آلومینیومی را به دست می‌آوریم. در ادامه با توجه به جرم یک گوی آلومینیومی، تعداد گوی‌ها را محاسبه می‌کنیم:

(جرم گوی‌ها + جرم ظرف = عدد نشان داده شده بر روی ترازو)

$$814/4 = 620 + \text{جرم گوی‌ها} \Rightarrow \text{جرم گوی‌ها} = 814/4 - 620 = 194/4 \text{ g}$$

$$\text{تعداد گوی‌ها} = \frac{194/4}{1.35} = 144$$

گام سوم: از آن‌جا که فلز آلومینیوم (Al) در گروه ۱۳ جدول تناوبی قرار دارد؛ بنابراین هر مول از این عنصر دارای ۳ مول الکترون ظرفیتی است؛ حال شمار مول الکترون‌های ظرفیتی در هر گوی آلومینیومی را به دست می‌آوریم:



$$1/35 \text{ g Al} \times \frac{1 \text{ mol Al}}{27 \text{ g Al}} \times \frac{3 \text{ mole}^-}{1 \text{ mol Al}} = \frac{1/35 \times 3}{27} = 0.15 \text{ mole}^-$$

کدام موارد از مطالب زیر درست است؟

الف) زاویه انحراف پرتوهای مرئی هنگام عبور از منشور، با طول موج آن‌ها رابطه عکس دارد.

ب) امواج حاصل از کنترل تلویزیون، نوعی از پرتوهای الکترومغناطیس با طول موج کوتاه‌تر از 400 نانومتر هستند. **فروسرخ**

پ) رنگ شعله فلز سدیم مشابه رنگ پرتو حاصل از انتقال الکترونی $n=2 \rightarrow n=4$ در اتم هیدروژن است.

ت) نام پرتوهای فرابنفش نشان می‌دهد که این پرتوها طول موج بلندتری نسبت به نور بنفش دارند.

(۱) الف - ت

(۳) ب - پ

(۲) فقط الف

(۴) الف - ب - ت

پاسخ خیلی تشریحی ✓ فقط عبارت «الف» درست است.

بررسی عبارت‌ها:

الف) زاویه انحراف پرتوهای مرئی هنگام عبور از منشور، با انرژی این پرتوها رابطه مستقیم و با طول موج آن‌ها رابطه وارونه دارد؛

مثلاً نور سرخ با طول موج بلندتر از نور بنفش، انحراف کم‌تری هنگام عبور از منشور دارد.

ب) امواج حاصل از کنترل تلویزیون، پرتوهای نامرئی فروسرخ است که نوعی از پرتوهای الکترومغناطیسی می‌باشد. این پرتوها

انرژی کم‌تری از پرتوهای مرئی دارند و، طول موج آن‌ها بلندتر از 700 نانومتر است.

پ) رنگ شعله فلز سدیم (Na) و نمک‌های آن زرد است، در صورتی که رنگ پرتو حاصل از انتقال الکترونی از لایه چهارم

($n=4$) به لایه دوم ($n=2$) در اتم هیدروژن آبی می‌باشد.

چگونگی تشکیل نوارهای رنگی در طیف نشری خطی هیدروژن در گستره مرئی در جدول زیر آمده است:

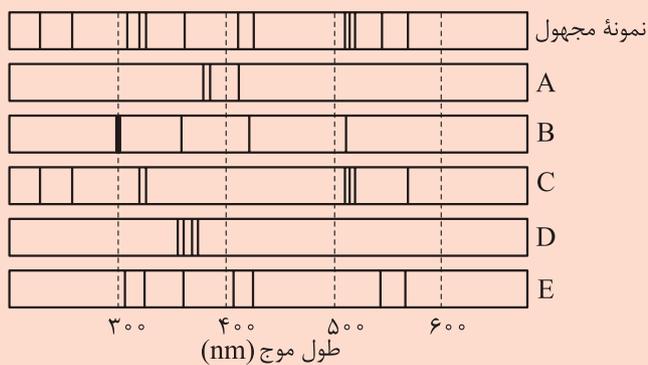
چگونگی تشکیل	طول موج (nm)	رنگ نوار
مربوط به انتقال الکترون از $n=6$ به $n=2$	۴۱۰	بنفش
مربوط به انتقال الکترون از $n=5$ به $n=2$	۴۳۴	نیلی
مربوط به انتقال الکترون از $n=4$ به $n=2$	۴۸۶	آبی
مربوط به انتقال الکترون از $n=3$ به $n=2$	۶۵۶	سرخ

ت) پرتوهای فرابنفش یعنی پرتوهایی با انرژی بیشتر از نور بنفش!



با توجه به طیف‌های داده‌شده، چه تعداد از عنصرهای داده‌شده در نمونه مجهول وجود دارد؟

۹۹



۱ (۱)

۲ (۲)

۳ (۳)

۴ (۴)

مشاوره این سؤال، یکی از سؤالات کنکورهای اخیر (تجربی-تیر ۱۴۰۲) است که به شکل دیگری از شما پرسیده‌ایم!



برای این که فلزی در یک نمونه وجود داشته باشد، باید همه خطوط طیفی آن عیناً در نمونه وجود داشته باشند.

با به نگاه به شکل‌ها، معلومه که تنها همه خطوط طیف عنصرهای C و E در نمونه مجهول وجود دارند.

پاسخ خیلی تشریحی ✓

کدام موارد از مطالب زیر درست است؟



- الف) الکترون‌های موجود در هر لایه فقط در محدوده معینی از آن لایه، احتمال حضور دارند.
 ب) در مدل کوانتومی برخلاف مدل اتمی بور، انرژی دادوستد شده هنگام انتقال الکترون‌ها در اتم، گسسته است.
 پ) با کاهش فاصله از هسته اتم، انرژی الکترون‌ها کاهش می‌یابد.
 ت) انرژی لایه‌های الکترونی پیرامون هسته هر اتم به عدد اتمی آن وابسته است.

۲) پ - ت

۱) الف - ب

۴) ب - ت

۳) الف - پ



پاسخ خیلی تشریحی ✓

عبارت‌های «پ» و «ت» درست هستند.

بررسی عبارت‌ها:

- الف) الکترون‌های موجود در هر لایه در همه نقاط اطراف هسته احتمال حضور دارند، اما در محدوده معینی از آن لایه، احتمال حضور آن‌ها بیشتر است.
 ب) در مدل اتمی بور همانند مدل کوانتومی اتم، انرژی دادوستد شده هنگام انتقال الکترون‌ها از یک لایه به لایه دیگر در اتم گسسته (کوانتومی) است؛ یعنی انرژی با پیمان‌های معینی دادوستد می‌شود.
 پ) هرچه الکترون‌ها از هسته اتم دورتر می‌شوند، سطح انرژی آن‌ها بالاتر می‌رود؛ بنابراین می‌توان گفت که با کاهش فاصله از هسته اتم، انرژی الکترون‌ها کاهش می‌یابد.
 ت) انرژی لایه‌های الکترونی اطراف هسته هر اتم به عدد اتمی آن (Z) وابسته است و به طور منحصر به فرد برای همان اتم می‌باشد.



کدام گزینه نادرست است؟

$$l = 4$$

$$8 + 8 = 16$$

(۱) حداکثر گنجایش الکترونی پنجمین نوع زیرلایه یک اتم، با مجموع شمار عنصرهای دوره دوم و سوم جدول تناوبی برابر است.

$$n$$

$$2n^2$$

(۲) الکترونی با عدد کوانتومی فرعی برابر ۳ می‌تواند در لایه الکترونی پنجم قرار داشته باشد.

(۳) نسبت حداکثر گنجایش الکترونی لایه‌ای با عدد کوانتومی اصلی n به شمار زیرلایه‌های موجود در آن لایه برابر $2n$ است.

$$4d$$

(۴) اگر در زیرلایه‌ای با عددهای کوانتومی $l=2$ و $n=4$ ، ۵ الکترون قرار گیرد، این زیرلایه نیمه پر محسوب می‌شود.

رابطه‌های مهم لایه‌ها و زیرلایه‌ها



- $2n^2 =$ حداکثر گنجایش الکترونی یک لایه
- $n =$ شمار زیرلایه در هر لایه الکترونی
- $0, 1, \dots, n-1 =$ مقادیر مجاز l در هر لایه
- $2(2l+1) = 4l+2 =$ حداکثر گنجایش الکترونی یک زیرلایه

در هر یک از دوره‌های دوم و سوم جدول تناوبی ۸ عنصر وجود دارد، یعنی مجموع شمار عنصرها در این دوره‌ها برابر ۱۶ است. بررسی گزینه‌ها:

گزینه (۱): عدد کوانتومی فرعی (l) از صفر شروع می‌شود؛ بنابراین پنجمین نوع زیرلایه یک اتم، دارای $l = 4$ است.

$$18 = 2 + 4(4) + 2 = 4l + 2 = \text{حداکثر گنجایش الکترونی یک زیرلایه}$$

گزینه (۲): الکترونی با عدد کوانتومی فرعی برابر ۳ ($l = 3$) از لایه چهارم به بعد وجود دارد (۴f, ۵f, ...).

گزینه (۳):

$$\frac{\text{گنجایش الکترونی هر لایه}}{\text{شمار زیرلایه در هر لایه}} = \frac{2n^2}{n} = 2n$$

گزینه (۴): زیرلایه‌ای با عددهای کوانتومی $l = 2$ و $n = 4$ ، همان $4d$ است که حداکثر گنجایش ۱۰ الکترون دارد و با ۱۰ الکترون کاملاً پر می‌شود؛ بنابراین و اگر ۵ الکترون در آن قرار داشته باشد، نیمه پر به حساب می‌آید.

پاسخ خیلی تشریحی

مجموع اعداد کوانتومی اصلی و فرعی $(n+1)$ زیرلایه‌های A و B به ترتیب برابر ۵ و ۶ است. کدام مطلب درباره این دو زیرلایه به یقین درست است؟

(۱) در اتم عنصرهای دوره پنجم و B در اتم عنصرهای دوره ششم جدول تناوبی از الکترون اشغال می‌شود.

(۲) گنجایش الکترونی لایه‌ای که B در آن قرار دارد، بیشتر از گنجایش الکترونی لایه‌ای است که A در آن قرار دارد.

(۳) در آرایش الکترونی هیچ یک از عنصرهای دوره سوم جدول دوره‌ای، زیرلایه A یا B وجود ندارد.

(۴) گنجایش الکترونی هر دو زیرلایه، از گنجایش الکترونی زیرلایه‌ای با $n+1=4$ بیشتر است.

زیرلایه‌های الکترونی

درس‌Box

هر لایه الکترونی با عدد کوانتومی اصلی n دارای n زیرلایه است. مقادیر مجاز عدد کوانتومی فرعی (l) برای زیرلایه‌ها از صفر تا $n-1$ است؛ مثلاً لایه الکترونی سوم دارای سه زیرلایه با عددهای کوانتومی فرعی ۰، ۱ و ۲ است.

یک زیرلایه با عدد کوانتومی فرعی l ، حداکثر گنجایش $4l+2$ الکترون را دارد.

$4l+2 =$ حداکثر گنجایش الکترونی در یک زیرلایه

نماد زیرلایه	s	p	d	f
عدد کوانتومی فرعی (l)	۰	۱	۲	۳
حداکثر گنجایش الکترونی زیرلایه $(4l+2)$	$4(0)+2=2$	$4(1)+2=6$	$4(2)+2=10$	$4(3)+2=14$

در بعضی از سؤال‌ها از شما می‌خواهند تا زیرلایه‌هایی را پیدا کنید که حاصل $n+1$ آن‌ها برابر فلان مقدار باشد؛ بنابراین باید به n و l مقادیر متفاوتی بدهید تا اولاً حاصل $n+1$ زیرلایه‌های به دست آمده، برابر با مقدار مورد نظر باشد، دوماً آن زیرلایه‌ها وجود خارجی داشته باشند. *با به مثال دستتون میار!*

مثال: نماد زیرلایه‌هایی که $n+1$ آن‌ها برابر ۵ است را بنویسید.

پاسخ: ابتدا به n ، بیشترین مقدار ممکن، یعنی عدد ۵ را نسبت می‌دهیم؛ بنابراین مقدار l برابر صفر می‌شود، زیرا حاصل $n+1$ باید برابر ۵ شود. یعنی زیرلایه ۵s! بعد از مقدار n یکی یکی کم کرده و به مقدار l یک واحد اضافه می‌کنیم تا جایی که زیرلایه مورد نظر وجود داشته باشد:

$$n+1=5 \begin{cases} n=5 \Rightarrow l=0 \Rightarrow 5s \\ n=4 \Rightarrow l=1 \Rightarrow 4p \\ n=3 \Rightarrow l=2 \Rightarrow 3d \\ n=2 \Rightarrow l=3 \Rightarrow \text{زیرلایه } 2f \text{ وجود ندارد.} \end{cases}$$

ترتیب پرشدن زیرلایه‌ها در یک اتم، مطابق قاعده آفبا مشخص می‌شود. طبق این قاعده، هر چه $(n+1)$ زیرلایه‌ای کم‌تر باشد، زودتر اشغال می‌شود و اگر $(n+1)$ دو زیرلایه یکسان باشد، زیرلایه‌ای که n کم‌تری دارد، زودتر از الکترون اشغال خواهد شد.

حال اگر انرژی زیرلایه‌ها از $1s$ تا $7p$ را به همین روش مقایسه کنیم، به ترتیب زیر می‌رسیم:

$$[1s] - [2s \ 2p] - [3s \ 3p] - [4s \ 3d \ 4p] - [5s \ 4d \ 5p] - [6s \ 4f \ 5d \ 6p] - [7s \ 5f \ 6d \ 7p]$$

دوره هفتم دوره ششم دوره پنجم دوره چهارم دوره سوم دوره دوم دوره اول

$$A: n+1=5 \begin{cases} 5s \\ 4p \\ 3d \end{cases} \quad B: n+1=6 \begin{cases} 6s \\ 5p \\ 4d \end{cases}$$

بررسی گزینه‌ها:

گزینه (۱): هر یک از زیرلایه‌های A و B می‌توانند سه زیرلایه متفاوت باشند. همه این زیرلایه‌ها در یک دوره از جدول اشغال نمی‌شوند.

$$A \rightarrow 5s, 4p, 3d$$

↓
دوره پنجم دوره چهارم

$$B \rightarrow 6s, 5p, 4d$$

↓
دوره ششم دوره پنجم

پاسخ خیلی تشریحی ✓



گزینه (۲): مثلاً اگر A زیرلایه ۵s و B زیرلایه ۴d باشد، گنجایش الکترونی لایه‌ای که A در آن قرار دارد (یعنی لایه پنجم) بیشتر از گنجایش الکترون لایه‌ای است که B در آن قرار دارد (یعنی لایه چهارم).

گزینه (۳): در سه دوره اول، زیرلایه‌های ۱s تا ۳p از الکترون اشغال می‌شوند؛ بنابراین در آرایش الکترونی عنصرهای سه دوره اول، هیچ‌یک از زیرلایه‌های A یا B وجود ندارد.

گزینه (۴): زیرلایه‌های ۴s و ۳p دارای $n+1=4$ هستند. در برخی حالات، گنجایش الکترونی زیرلایه‌های A و B با این دو زیرلایه (۳p, ۴s) برابر است. مثلاً اگر A، ۵s و B، ۶s باشد، گنجایش الکترونی یکسانی با ۴s (۲ الکترون) دارند ولی زیرلایه‌های ۳d و ۴d گنجایش الکترونی بیشتری از زیرلایه‌های ۴s و ۳p دارند.

۱۰۳

باتوجه به آرایش الکترونی فشرده‌اتم‌های داده شده، کدام موارد از مطالب زیر درست است؟

اتم	M	X	Z
آرایش الکترونی فشرده	$[\text{Kr}]\text{d}^2\text{s}^2$	$[\text{Ar}]\text{d}^1\text{f}^2\text{s}^2\text{p}^4$	$[\text{Ar}]\text{d}^5\text{f}^1\text{s}^1$

مشاوره این سؤال برگرفته از امتحان نهایی شیمی دهم (خرداد ۱۴۰۳) است.

(الف) تفاوت شماره دوره و گروه عنصر M در جدول دوره‌ای برابر ۳ است.
 (ب) عنصر X به دسته p و عنصرهای M و Z به دسته s جدول دوره‌ای تعلق دارند.
 (پ) در آرایش الکترونی اتم Z مانند اتم A، دو زیرلایه نیمه‌پر وجود دارد.
 (ت) گاز نجیب به کاررفته در آرایش الکترونی فشرده اتم D، همانند هیچ یک از گازهای نجیب استفاده شده در جدول نیست.

(۲) الف - ت

(۱) الف - پ

(۴) ب - ت

(۳) ب - پ

جدول زیر را برای تعیین شمار الکترون‌های ظرفیت و شماره گروه عنصرهای مختلف به خاطر بسپارید:

رابطه شماره گروه و شمار الکترون‌های ظرفیت	شمار الکترون‌های ظرفیت	لایه ظرفیت	نوع دسته
شمار الکترون‌های ظرفیت (به جز هلیم) = شماره گروه	توان ns (شمار الکترون‌های بیرونی‌ترین لایه الکترونی)	ns	s (گروه‌های ۱ و ۲ و هلیم)
شمار الکترون‌های ظرفیت = شماره گروه	مجموع توان ns و (n-1)d (شمار الکترون‌های دو زیرلایه آخر)	(n-1)d ns	d (گروه‌های ۳ تا ۱۰)
شمار الکترون‌های ظرفیت = شماره گروه + ۱۰	مجموع توان ns و np (شمار الکترون‌های بیرونی‌ترین لایه الکترونی)	ns np	p (گروه‌های ۱۳ تا ۱۸)

● برای همه عنصرها، شماره دوره در جدول تناوبی برابر با بزرگ‌ترین n (عدد کوانتومی اصلی) در آرایش الکترونی آنهاست.

عبارت‌های «الف» و «ت» درست‌اند. **پاسخ خیلی تشریحی**

بررسی عبارت‌ها:

(الف)

$$M: [\text{Kr}]\text{d}^2\text{s}^2 \begin{cases} \text{شماره دوره} = 5 \\ \text{شماره گروه} = 2 \end{cases} \Rightarrow 5 - 2 = 3$$

(ب) آخرین الکترون عنصرهای M، X و Z به ترتیب به زیرلایه‌های s، p و d وارد می‌شود؛ بنابراین این عنصرها به ترتیب متعلق به دسته s، p و d هستند.

(پ) در اتم Z، دو زیرلایه ۴s و ۳d نیمه‌پر هستند، اما در اتم A، فقط یک زیرلایه نیمه‌پر (۴s) وجود دارد.

(ت) برای نوشتن آرایش الکترونی فشرده اتم D از گاز نجیب نئون (${}_{10}\text{Ne}$) استفاده می‌شود:



با توجه به جدول زیر که مربوط به برخی از عناصر اصلی (دسته S یا p) چهار دوره اول جدول تناوبی است، کدام گزینه نادرست است؟

آرایش الکترون - نقطه‌ای	$\ddot{\text{E}}$	$\cdot\text{D}\cdot$	X	$\cdot\text{B}\cdot$	$\cdot\text{A}\cdot$
شمار الکترون با $I = 0$	۲	۸	۷	۶	۴

(۱) نسبت شمار کاتیون به شمار آنیون در ترکیب یونی تشکیل شده از عناصر B و X برابر ۲ است.

(۲) آخرین زیرلایه اشغال شده در آرایش الکترونی عنصر D دارای ۲ الکترون است.

(۳) فرمول شیمیایی ترکیب دوتایی هیدروژن دار عنصرهای A و B به صورت AH_4 و H_2B است.

(۴) تفاوت شماره گروه عناصر X و D در جدول دوره‌ای برابر ۱۲ است.



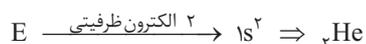
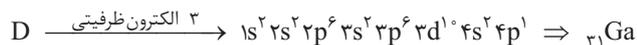
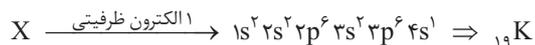
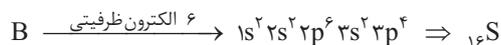
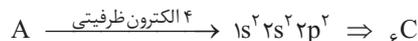
(۱) شمار نقطه‌ها در آرایش الکترون - نقطه‌ای یک اتم برابر با شمار الکترون‌های ظرفیتی آن است.

(۲) برای عنصرهای گروه‌های ۱ تا ۱۲ شمار الکترون‌های ظرفیتی برابر شماره گروه و برای عنصرهای گروه‌های ۱۳ تا ۱۸ (به جز هلیوم)، شمار الکترون‌های ظرفیتی برابر با عدد یکان شماره گروه است.

(۳) هلیوم (${}^2\text{He}$) با این که در گروه ۱۸ قرار دارد، دارای ۲ الکترون ظرفیتی است و در آرایش الکترون - نقطه‌ای آن ۲ الکترون به صورت جفت نقطه وجود دارند:

$\text{He}:$

ابتدا به کمک آرایش الکترون - نقطه‌ای و شمار الکترون‌های ظرفیتی اتم‌ها و شمار الکترون‌ها با $I = 0$ (زیرلایه‌های s) در آن‌ها، آرایش الکترونی و خود عنصرها را تعیین می‌کنیم:



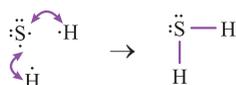
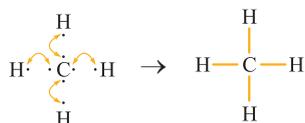
بررسی گزینه‌ها:

گزینه (۱): عنصرهای B و X با هم ترکیب یونی K_2S را تشکیل می‌دهند که نسبت شمار کاتیون به شمار آنیون در آن برابر ۲ است.

گزینه (۲): عنصر D همان ${}_{31}\text{Ga}$ است که آخرین زیرلایه اشغال شده آن دارای ۱ الکترون ($4p^1$) است.

گزینه (۳): عنصر B در گروه ۱۶ و عنصر A در گروه ۱۴ قرار دارند و می‌توانند با هیدروژن ترکیب‌هایی به فرمول CH_4 و H_2S

تشکیل دهند:



گزینه (۴): عنصرهای X (${}_{19}\text{K}$) و D (${}_{31}\text{Ga}$) به ترتیب در گروه‌های ۱ و ۱۳ جدول دوره‌ای قرار دارند:

$$13 - 1 = 12$$

پاسخ خیلی تشریحی ✓

۱۰۵

اگر برای تشکیل هر گرم از فسفید فلز M از گروه اول جدول دوره‌ای (از عنصرهای سازنده خود)، $1/806 \times 10^{22}$ الکترون مبادله شود.

فلز M کدام است؟ ($P = 31 \text{ g.mol}^{-1}$)



نکته

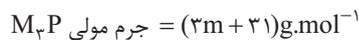
برای تشکیل ترکیب‌های یونی دوتایی، بین فلز و نافلز الکترون مبادله می‌شود. برای محاسبه‌ی شمار الکترون‌های مبادله‌شده در یک ترکیب یونی می‌توان از فرمول زیر استفاده کرد:

شمار (زیروند) کاتیون \times بار کاتیون = شمار الکترون‌های مبادله‌شده در تشکیل هر واحد فرمولی از ترکیب‌های یونی

شمار (زیروند) آنیون \times قدرمطلق بار آنیون =

پاسخ خیلی تشریحی ✓ فلزهای گروه اول، کاتیون یک بار مثبت (M^+) تشکیل می‌دهند، از طرفی فرمول یون فسفید به صورت P^{3-} است؛ بنابراین

خواهیم داشت:



روش اول: استفاده از کسر تبدیل:

$$1 \text{ g } M_3P \times \frac{1 \text{ mol } M_3P}{(3m + 31) \text{ g } M_3P} \times \frac{3 \text{ mole}^-}{1 \text{ mol } M_3P} \times \frac{6/02 \times 10^{23} e^-}{1 \text{ mole}^-} = 1/806 \times 10^{22} e^-$$

$$\Rightarrow \frac{3 \times 6/02 \times 10^{23}}{3m + 31} = \frac{1/806 \times 10^{22}}{1}$$

$$3m + 31 = 100 \Rightarrow 3m = 69 \Rightarrow m = 23 \text{ g.mol}^{-1} \Rightarrow {}_{11}^{23}\text{Na}$$

روش دوم: استفاده از کسر تناسب:



$$\frac{\text{جرم مولی} \times \text{ضریب}}{M_3P} = \frac{\text{شمار عدد آوگادرو} \times \text{ضریب}}{e^-} \Rightarrow \frac{1}{1 \times (3m + 31)} = \frac{3 \times 6/02 \times 10^{23}}{1 \times 1/806 \times 10^{22}}$$

$$\Rightarrow 3m + 31 = 100 \Rightarrow m = 23 \text{ g.mol}^{-1} \Rightarrow {}_{11}^{23}\text{Na}$$